Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

Lezione 2:

Probabilità condizionata e variabili casuali

Probabilità condizionata:

La probabilità di un evento A (ri)valutata quando è noto (o si ipotizza) che un altro evento B dello spazio campionario si è verificato

Esempio 2.1:

Supponiamo che la probabilità di vincere lo scudetto sia la stessa per ogni squadra della massima divisione, determinare la probabilità :

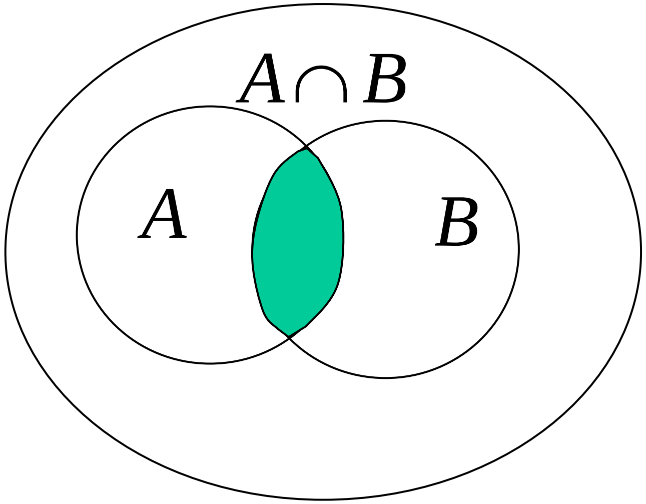
1) che vinca l'Inter (A)
2) che vinca l'Inter sapendo che (oppure 'se', o 'nell'ipotesi che') lo scudetto sia vinto da una milanense (B)

$$P(A) = \frac{1}{20}$$ La probabilità (a priori) che vinca l'Inter

$$P(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$ La probabilità (a priori) che vinca una milanese

$$P(A|B) = \frac{1}{2}$$ La probabilità che vinca l'Inter se vince una milanese

Nel caso generale



$$\boxed{P\left(A \middle| B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)}}$$

Esempio 2.2

Nel lancio di una coppia di dadi, determinare la probabilità di avere almeno un 2 sapendo che la somma è 6.

$$A = \left\{(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(1,2);(3,2);(4,2);(5,2);(6,2)\right\}$$

$P\left(A\right) = \dfrac{11}{36}$ La probabilità (a priori) che esca almeno un due

$B = \left\{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\right\}$ $\quad P\left(B\right) = \dfrac{5}{36}$

$A \cap B = \left\{(2,4);(4,2)\right\}$ $\quad P\left(A \cap B\right) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$$P\left(A \middle| B\right) = \frac{2}{5}$$

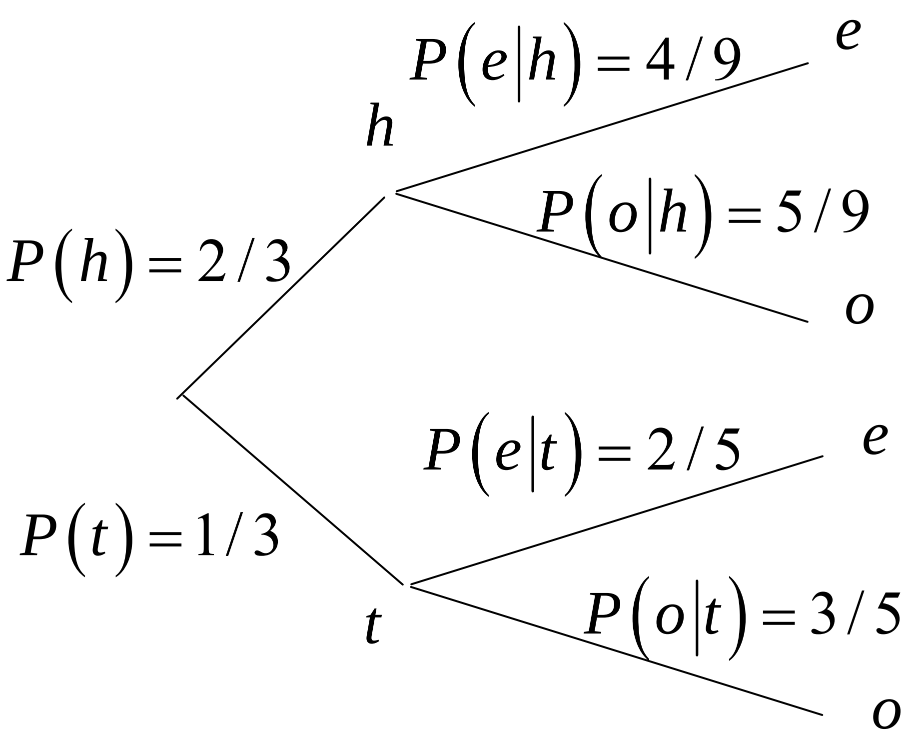
Esempio 2.3

Una moneta truccata (*unfair coin*) è tale per cui

$$P(h) = 2/3; \quad P(t) = 1/3$$

Lanciata la moneta, si sceglie 'a caso' un numero tra 1 e 9 se esce testa (*head*) e un numero tra 1 e 5 se esce croce (*tail*): qual è la probabilità di avere alla fine un numero pari (*even*)?

Processo stocastico e diagramma ad albero

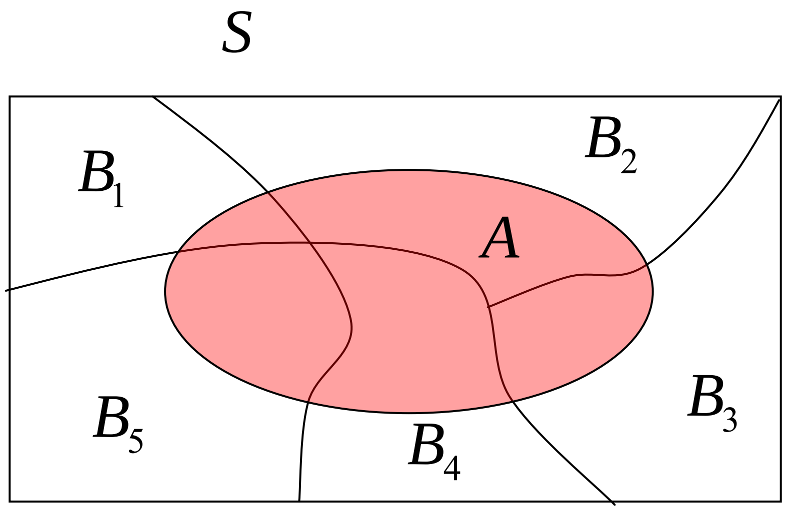


$$P(e) =$$

$$P(h)\cdot P(e|h) + P(t)\cdot P(e|t) =$$

$$\frac{2}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\frac{2}{5} = \frac{58}{135}$$

Partizioni e probabilità condizionate



$$B_i \cap B_j = \varnothing \text{ sse } i \neq j$$

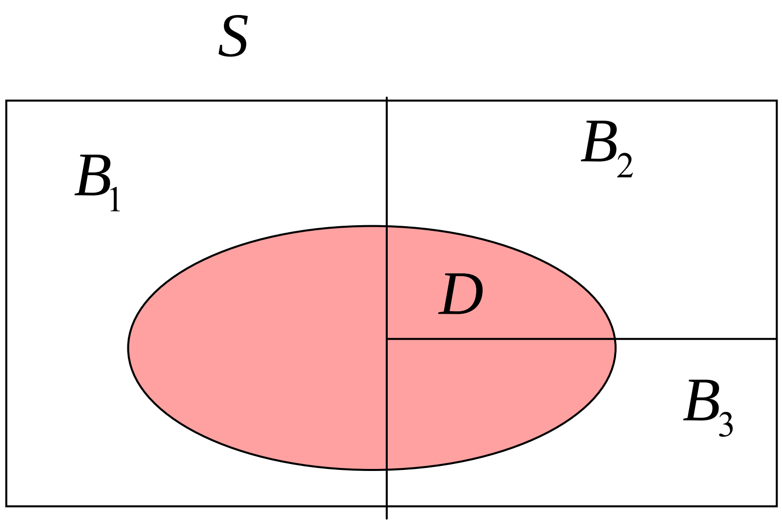
$$\bigcup_i B_i = S$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots. =$$

$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots.$$

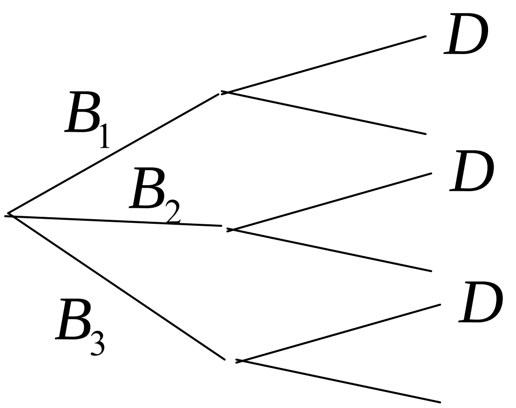
Esempio 2.5

Tre macchine producono rispettivamente il 50%, 30% e il 20% della produzione, le percentuali di pezzi difettosi di ognuna di esse sono rispettivamente: 3%, 4% e 5%. Determinare la percentuale di pezzi difettosi della produzione.



$$P(B_1)=0.5;\ P(B_2)=0.3;\ P(B_3)=0.2$$

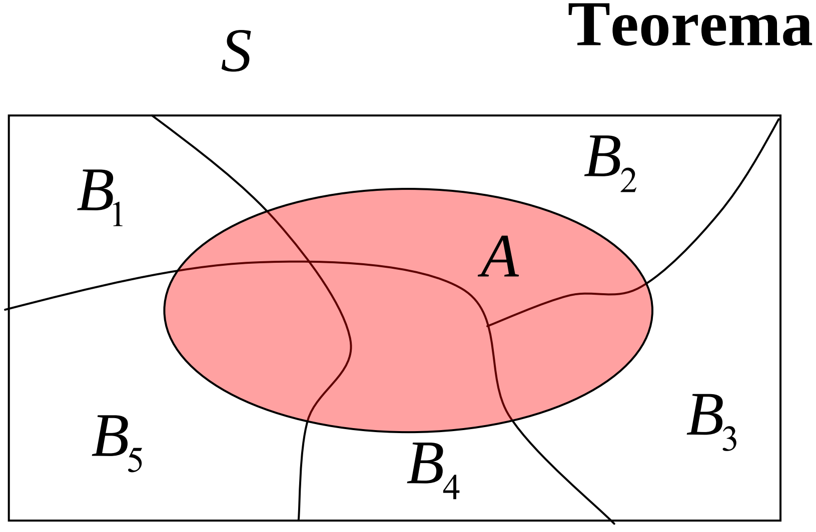
$$P(D|B_1)=0.03$$



$$P(D)= P(D|B_1)\cdot P(B_1)+ P(D|B_2)\cdot P(B_2)+P(D|B_3)\cdot P(B_3)=$$

$$=0.03\cdot 0.5+0.04\cdot 0.3+0.05\cdot 0.2=0.037=3.7\%$$

Teorema di Bayes



$$P\left(B_1 | A\right) = ?$$

$$P\left(B_1 | A\right) = \frac{P\left(B_1 \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A \cap B_1\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A | B_1\right) \cdot P\left(B_1\right)}{P\left(A\right)}$$

$$P\left(A\right) = P\left(A | B_1\right) P\left(B_1\right) + P\left(A | B_2\right) P\left(B_2\right) + \ldots\ldots\ldots$$

$$P\left(B_1 | A\right) = \frac{P\left(A | B_1\right) \cdot P\left(B_1\right)}{P\left(A | B_1\right) P\left(B_1\right) + P\left(A | B_2\right) P\left(B_2\right) + \ldots\ldots\ldots}$$

Esempio 2.6

Nell'esempio 2.5, determinare la probabilità che un pezzo difettoso sia stato prodotto dalla prima macchina

$$P\left(B_1 \middle| D\right) = ?$$

$$P\left(B_1 \middle| D\right) = \frac{P\left(D \middle| B_1\right) \cdot P\left(B_1\right)}{P\left(D\right)} = \frac{0.03 \cdot 0.5}{0.037} = 0.405 = 40.5\%$$

$$P\left(B_2 \middle| D\right) = 0.324$$

$$P\left(B_3 \middle| D\right) = 0.27$$

Eventi indipendenti

Definizione: *A* e *B* sono indipendenti se la conoscenza del verificarsi di uno non modifica la probabilità calcolabile per l'altro:

$$P\left(A|B\right)=P\left(A\right)$$

ma

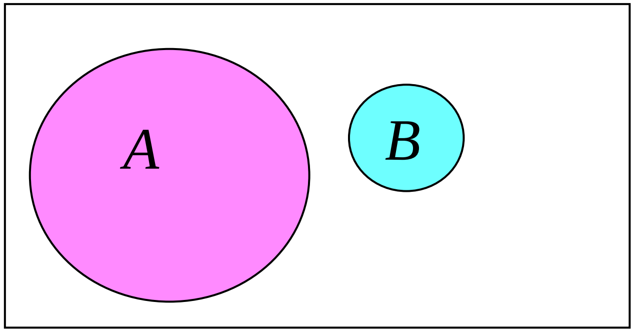
$$P\left(A|B\right)\cdot P\left(B\right)=P\left(A\cap B\right)$$

Quindi sono indipendenti se e solo se:

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$$

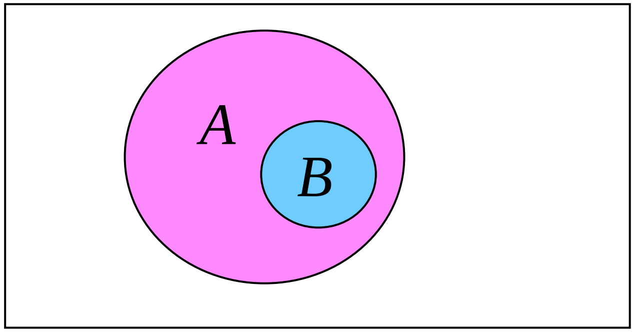
Esercizio 2.1

Verificare che due eventi A e B non impossibili e mutuamente esclusivi **non sono** indipendenti

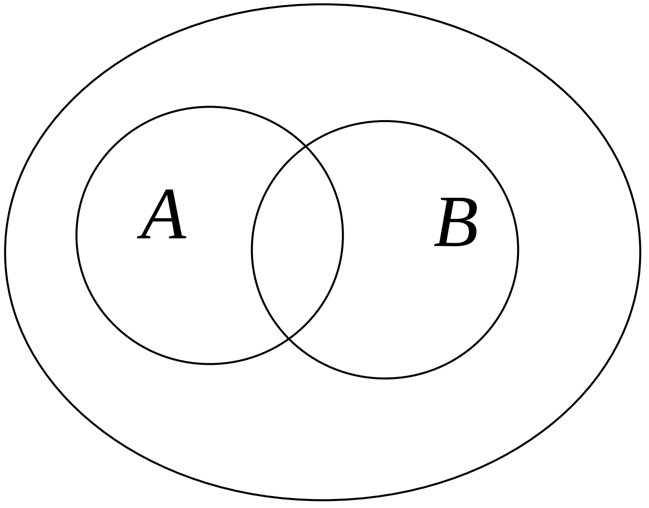


Esercizio 2.2

Verificare che due eventi A e B con $B \subset A$ e $B \neq \varnothing$ (non impossibili e inclusivi) **non sono** indipendenti



Ne consegue che:
due eventi A e B non impossibili per essere indipendenti devono essere come rappresentato:



Esempio 2.7

Consideriamo un esperimento consistente in tre lanci di una moneta, (*fair coin*) valutare la dipendenza degli eventi:

A: il primo lancio produce testa

B: il secondo lancio produce testa

C: testa si presenta due sole volte consecutive

$$S = \{(h,h,h);(h,h,t);(h,t,h);(h,t,t);(t,h,h);(t,h,t);(t,t,h);(t,t,t)\}$$

$$A = \{(h,h,h);(h,h,t);(h,t,h);(h,t,t)\}$$

$$B = \{(h,h,h);(h,h,t);(t,h,h);(t,h,t)\}$$

$$C = \{(h,h,t);(t,h,h)\}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{4}{8}; \quad P(C) = \frac{2}{8}$$

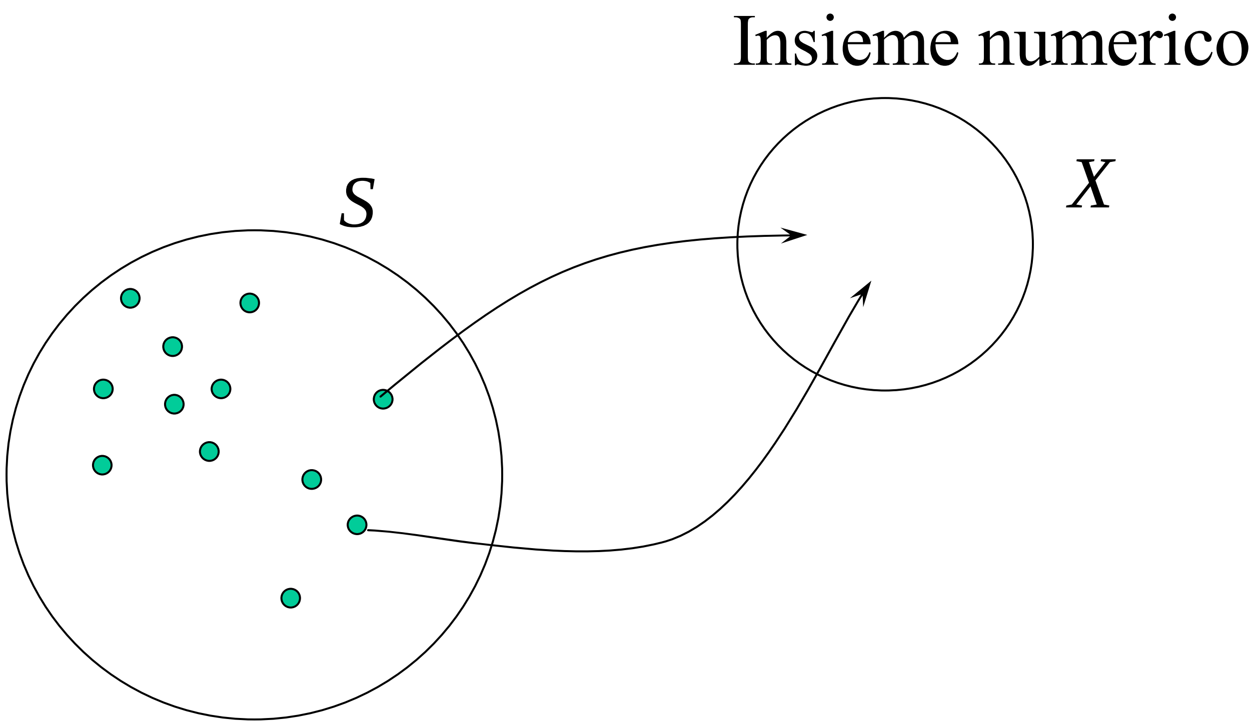
$$A \cap B = \{(h,h,h);(h,h,t)\} \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{8}$$

A e B indipendenti

$$A \cap C = \{(h,h,t)\} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

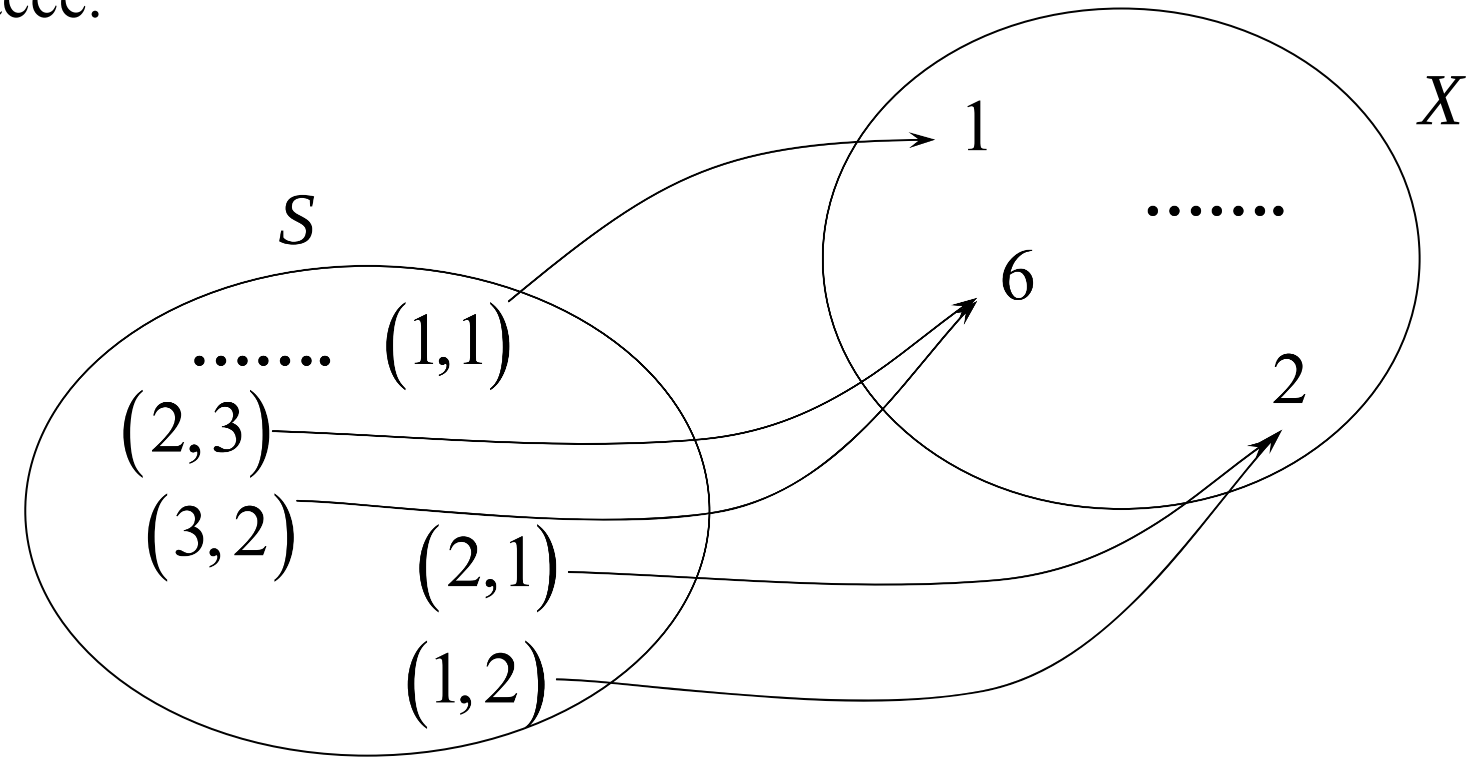
A e C dipendenti

Variabile casuale (*random variable*)



Esempio 2.8

Lancio due dadi e la variabile casuale è il prodotto dei valori delle facce.



$$X = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;15;16;18;20;24;25;30;36\}$$

Variabile casuale (*random variable*): definizione

Una VC (RV) su uno spazio campionario S è una trasformazione da S in $\mathbb{R}$ tale che ogni evento di S sia rappresentato come valore numerico appartenente all'insieme: $X \subseteq \mathbb{R}$

Variabile casuale discreta

$X \subset \mathbb{R}$ è un insieme **numerabile** di elementi (finito o infinito) a ognuno di tali elementi può essere associata una probabilità.

Esempio di variabile casuale discreta non finita:
X contiene il numero di lanci di un dado prima che si presenti un numero primo:

$$X = \{1; 2; 3; 4; 5; ....\} = \mathbb{N}$$

Variabile casuale discreta

$$x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \qquad x_4 \qquad x_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_n$$

$$x_i \in X$$

$$p(x_1) \quad p(x_2) \quad p(x_3) \quad p(x_4) \quad p(x_5) \ldots\ldots\ldots\ldots \; p(x_n)$$

Funzione o distribuzione di probabilità discreta: $P_i = p(x_i)$

Proprietà:

$$P_i = p(x_i) \geq 0 \quad \forall x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

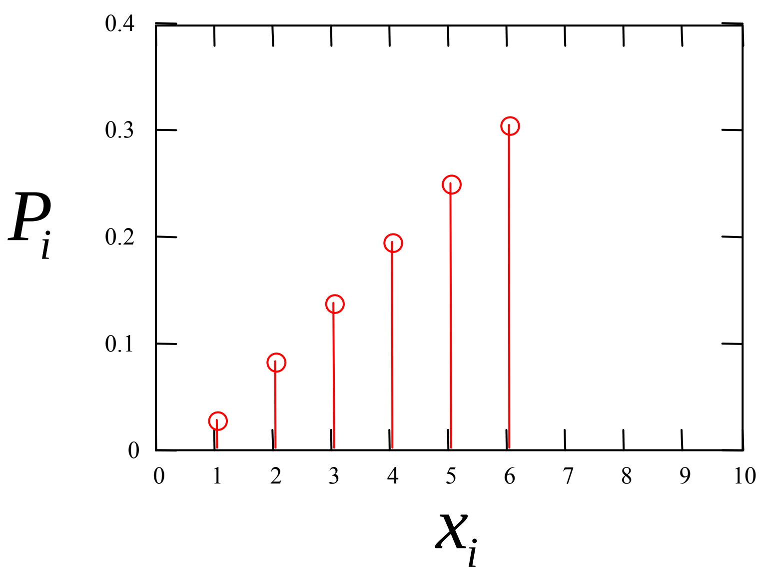
Esempio 2.9

Si lanciano due dadi e si considera la variabile aleatoria x il massimo valore: determinare il dominio della VA e la sua distribuzione

Evento	x_i	P_i
(1,1)	1	1/36
(1,2),(2,1),(2,2)	2	3/36
....		

$$X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

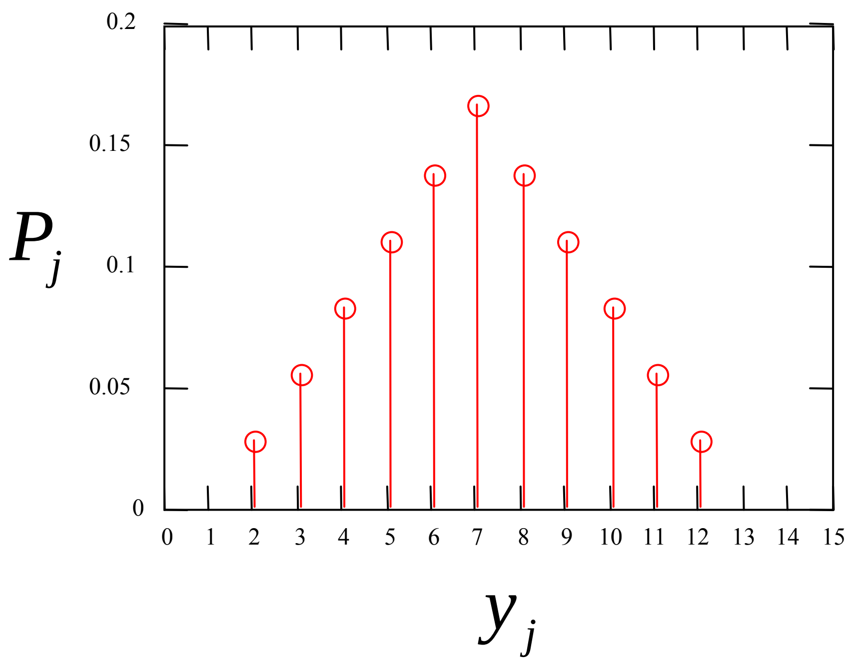


Esempio 2.10

Si lanciano due dadi e si considera la variabile casuale *y* come la somma dei valori: determinare dominio e distribuzione

$$Y = \left\{ y_j \right\} = \left\{ 2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12 \right\}$$

$$P_3 = P\left(y = 4 \right) = P\left\{ \left(1,3\right);\left(3,1\right);\left(2,2\right) \right\} = \frac{3}{36}$$



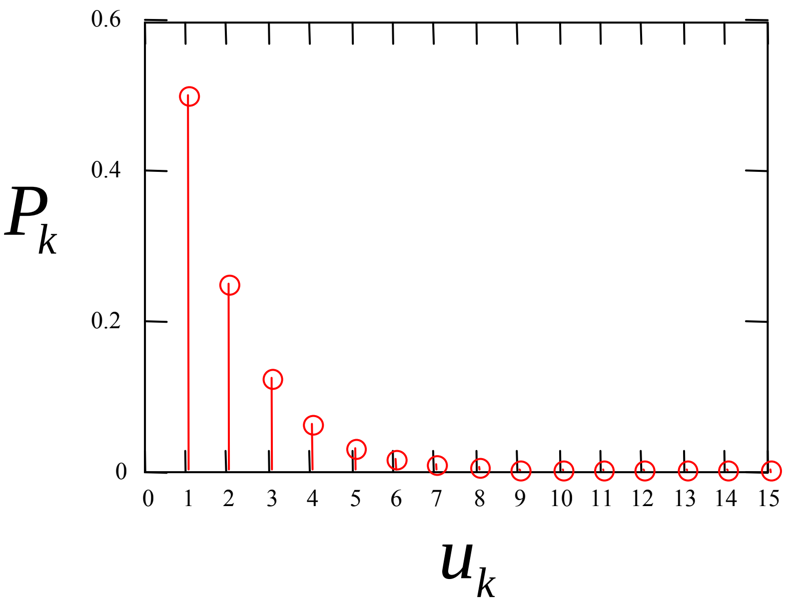
Esempio 2.11

Si lancia una moneta finché non compare testa, la variabile casuale u è il numero di lanci

$$U = \{u_k\} = \{1;2;3;........\} = \mathbb{N}$$

$$P_1 = P\{u=1\} = \frac{1}{2} \qquad P_2 = P\{(t),(h)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

$$P_5 = P\{(t),(t),(t),(t),(h)\} = \frac{1}{2^5} \qquad P_k = \frac{1}{2^k}$$



$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = ?$$

$$0.1 + 0.01 + \ldots = 0.1111\ldots = 1$$

Variabile casuale discreta: proprietà della distribuzione

Valore centrale, valor medio, speranza matematica (*central*, *mean*, *expected value*)

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \qquad\qquad \mu = E\left(x_i\right) = E\left(X\right)$$

Significati:

1) Media dei risultati degli esperimenti ponderata sulle probabilità:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Variabile casuale discreta: significati della media

2) Se si effettua l'esperimento tante volte e si esegue la media aritmetica semplice dei risultati, **al limite** si ottiene μ

3) Se si ripete l'esperimento *m* volte (con m>>1) e si sommano i risultati, **il valore più probabile** è:

$$m \cdot \mu$$

4) Analogia meccanica:
Se associo il valore della variabile casuale alla posizione di un punto disposto sull'asse *x* e la relativa probabilità alla massa del punto, il valor medio della variabile casuale individua la posizione del centro di massa (baricentro) della distribuzione

Esempio 2.12 Giochi equi.

Un gioco di sorte consiste nel lancio di un dado non pesato (*fair dice*), se l'esito è un numero primo il giocatore riceve una vincita equivalente in euro, se l'esito non è primo il giocatore paga al banco l'equivalente in euro. Determinare la distribuzione della probabilità di vincita e valutarne la media.

x_i	2	3	5	-1	-4	-6
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = -\frac{1}{6}$$

Note:

La media può non essere nel dominio della VA (in questo caso non è nemmeno intera)

Mediamente il giocatore perde 1/6 di euro per ogni giocata

Esempio 2.13

Determinare il valor medio della distribuzione:

$$P_k = \frac{1}{2^k}$$

$$\mu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$$

Nota:

Lanciando tante volte una moneta, il valor medio di lanci tra l’apparizione di due teste è 2

Variabile casuale discreta: proprietà della distribuzione

Misura di dispersione, larghezza (*scatter*): varianza (*variance*)

$$\sigma^2 = VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P_i \quad \text{scritto anche } \sigma_X^2$$

Considerando la VA:

$$d_i = x_i - \mu$$

$$\sigma^2 = VAR(X) = E(d_i^2)$$

Significati:

Media ponderata (con la pr.) dei quadrati delle distanze dalla media.
Analogia meccanica: momento d'inerzia baricentrico.
Attenzione alle dimensioni!

Esercizio 2.3

Verificare che $\sigma^2 = E(x_i^2) - \mu^2$

Scarto quadratico medio o deviazione standard (*standard deviation*)

$$\sigma = \sqrt{VAR(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P_i}$$

Significati:

- Distanza quadratica media ponderata dei valori dal centro
- Dimensionalmente omogenea con *x*
- Analogia meccanica: raggio d'inerzia

Esercizio 2.4

Verificare che:

1. $k \in \mathbb{R}; \quad VAR(kX) = k^2 VAR(X); \quad \sigma_{kX} = |k|\sigma_X$
2. c costante omogena a x: $\quad \sigma_{X+c} = \sigma_X$

Definizione

Variabile casuale standardizzata:

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esercizio 2.5

Verificare che:

1. $E(X^*) = 0$
2. $VAR(X^*) = 1$

Variabili casuali discrete: distribuzione congiunta (*joint distribution*)

Date due VA: X e Y definite sullo stesso S

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\} \quad \text{e} \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

Il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le $n \cdot m$ coppie:

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots\ldots\ldots, (x_n, y_m)\}$$

Definiamo la probabilità congiunta:

$$P_{ij} = P\{(x = x_i) \cap (y = y_j)\}$$

Matrice riassuntiva

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	.....	y_m	somma
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	.....	P_{1m}	Px_1
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	.....	P_{2m}	Px_2
x_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	.....	P_{3m}	Px_3
		....				
x_n	P_{n1}	P_{n2}	P_{n3}	.....	P_{nm}	Px_n
somma	Py_1	Py_2	Py_3	.....	Py_m	

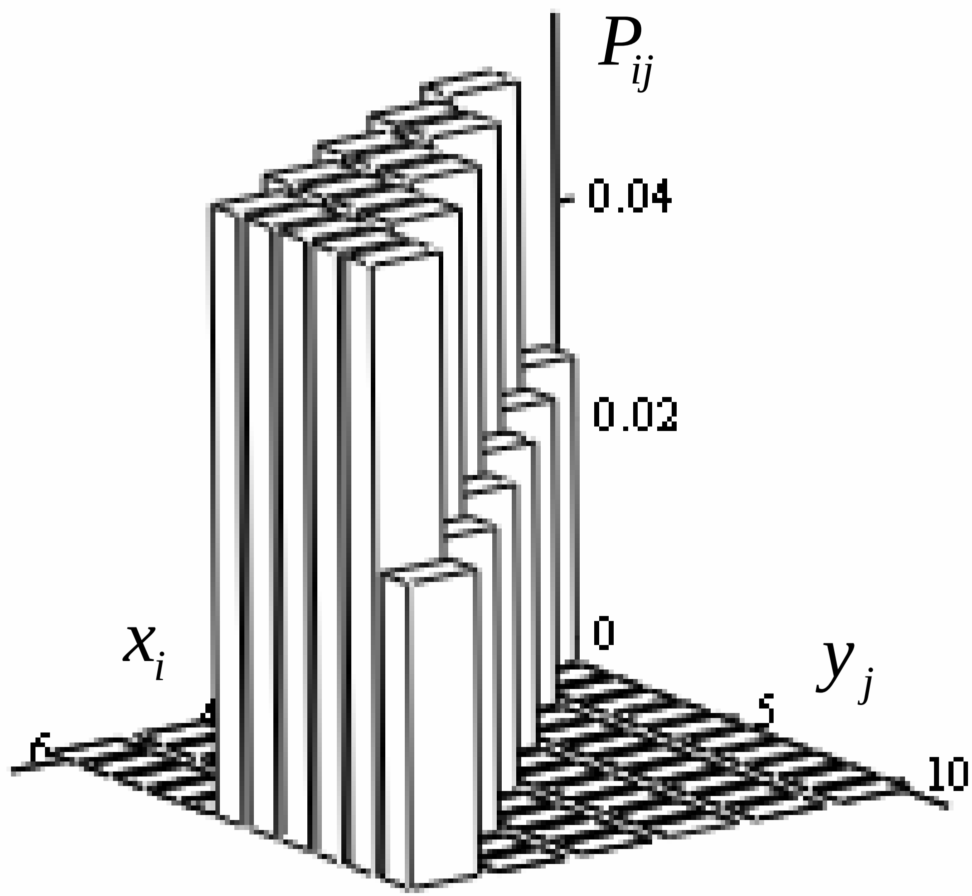
Esempio 2.14

Matrice delle probabilità congiunte per le variabili degli esempi 2.9 e 2.10

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
3	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0	5
4	0	0	0	2	2	2	1	0	0	0	0	7
5	0	0	0	0	2	2	2	2	1	0	0	9
6	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	1	11
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	

Tutti i valori devono essere divisi per 36

Rappresentazione della matrice delle probabilità congiunte per le variabili degli esempi 2.9 e 2.10



Proprietà:

$$P_{ij} \geq 0 \quad \forall \left(x_i , y_j \right) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$$

Definizione di covarianza di *X* e *Y*

$$COV(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(x_i - \mu_x \right)\left(y_j - \mu_y \right) P_{ij} = E\left[\left(X - \mu_x \right)\left(Y - \mu_y \right) \right]$$

Significati della covarianza

- Dimensionalmente omogenea alla varianza
- Può essere positiva negativa o nulla
- Analogia meccanica: momento centrale centrifugo o misto

Definizione di correlazione (lineare) di *X* e *Y*

$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Esercizio 2.6
Per i dati della tabella precedente verificare che:

$$COV(X,Y) = 2.9$$
$$\rho(X,Y) = 0.86$$

Esercizio 2.7
Dimostrare che in generale:

$$COV(Y,X) = COV(X,Y)$$
$$COV(X,Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

Proprietà della correlazione

$$\rho(X,X)=1; \quad \rho(X,-X)=-1$$

$$-1\le\rho(X,Y)\le 1$$

$$\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$$

Se due variabili aleatorie sono correlate positivamente: $\rho>0$, quando una è sopra la propria media anche l'altra tende a esserlo

Se due variabili aleatorie sono correlate negativamente: $\rho<0$, quando una è sopra la propria media l'altra tende a essere sotto

Due variabili aleatorie con $\rho=0$ (o comunque vicino a zero) si dicono scorrelate (linearmente)

Variabili aleatorie indipendenti

X e Y sono indipendenti se:

$$P\left\{\left(X = x_i\right) \cap \left(Y = y_j\right)\right\} = P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$$

$$P_{ij} = PX_i \cdot PY_j$$

La matrice delle probabilità congiunte è ottenuta dal prodotto delle distribuzioni marginali

Esercizio 2.8
Verificare che le variabili della tabella precedente non sono indipendenti

Proprietà delle variabili aleatorie indipendenti

Se X e Y sono VA indipendenti:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$VAR(X+Y) = VAR(X) + VAR(Y)$$

Relazione generalizzabile per *n* variabili indipendenti:

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ sono VA indipendenti:

$$VAR(X_1 + X_2 + ... + X_n) = VAR(X_1) + VAR(X_2) + ... + VAR(X_n)$$

$$COV(X,Y) = 0$$

Due variabili indipendenti sono scorrelate (implicazione semplice)