Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

Lezione 3:

Variabili aleatorie discrete notevoli

Esperimenti binari ripetuti o esperimenti bernoulliani (Bernoulli trials):

Viene ripetuto un certo numero di volte (***n***) un esperimento che ammette solo **due esiti** (che possiamo indicare arbitrariamente come 'positivo' e 'negativo', oppure 'successo' e 'insuccesso').

Gli esperimenti sono indipendenti, la probabilità che si verifichi l'esito positivo sia p, mentre la probabilità dell'esito negativo sia q ($=1-p$) e tali **probabilità rimangono fisse nelle ripetizioni**.

Consideriamo il numero di volte (***k***) in cui si verifica l'esito positivo.

Più propriamente: esaminiamo la VA numero di successi e la sua distribuzione

Esempi di esperimenti bernoulliani:

Lanciamo 30 volte una moneta simmetrica con esito positivo testa:

$$n = 30, p = 0.5$$

Lanciamo 120 volte un dado non pesato con esito positivo: cinque

$$n = 120, p = \frac{1}{6}$$

50 estrazioni a caso da un'urna contenente 20 palline bianche, 15 nere e 10 rosse **con reimbussolamento**. L'esito positivo è una pallina non bianca

$$n = 50, p = \frac{25}{45}$$

Una estrazione di 3 palline da un'urna contenente 200 palline bianche 150 nere e 100 rosse. L'esito positivo è pallina rossa

non bernoulliano ma quasi-bernoulliano con

$$n = 3, p = \frac{100}{450}$$

Variabile aleatoria bernoulliana

Consideriamo la variabile aleatoria data dal numero di successi:

$$k$$

Il numero di successi in un esperimento bernoulliano è un intero:

$$0 \leq k \leq n$$

Può essere considerata quindi una VA discreta, valutiamone la distribuzione. Indicheremo tale quantità anche come:

$$P_k = B(k, n, p)$$

Variabile aleatoria bernoulliana

Consideriamo 5 lanci di un dado con esito positivo l'uscita di 'uno', quindi:

$$n = 5, p = \frac{1}{6}, k = 3 \qquad\qquad P_3 = B\left(3, 5, \frac{1}{6}\right)$$

espresso in parole: qual è la probabilità di ottenere (esattamente) 3 volte 'uno' nel lancio di 5 dadi (o in 5 lanci di un dado)?

Consideriamo un generico lancio di 5 dadi, la condizione richiesta (k=3) si ottiene per esempio con la seguente sequenza:

$$(1),(1),(3),(5),(1)$$

per l'indipendenza dei lanci, è facile calcolare la probabilità che tale sequenza si verifichi:

$$P\left\{(1),(1),(3),(5),(1)\right\} = P\left\{(1),(1),(\overline{1}),(\overline{1}),(1)\right\} =$$

$$= p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p = p^3 q^2 = 3.215 \cdot 10^{-3}$$

È sufficiente considerare **tutte** le sequenze valide **diverse** che abbiano 3 esiti favorevoli (e 2 non favorevoli), nel seguito sono elencate con il calcolo della loro probabilità che è sempre: $p^3 q^2$

$(1),(1),(1),(\overline{1}),(\overline{1})$ $\quad p,p,p,q,q$

p,p,q,p,q

p,p,q,q,p

p,q,p,q,p

p,q,q,p,p

q,p,q,p,p

q,q,p,p,p

q,p,p,q,p

q,p,p,p,q

p,q,p,p,q

Sono 10, quante le combinazioni di 3 oggetti presi da 5 (oppure 2 da 5)

$$10 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}$$

Quindi:

$$B\left(3,5,\frac{1}{6}\right) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.03215$$

Formula generale di Bernoulli

$$B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Si vede che si tratta del *k*-esimo termine dello sviluppo del binomio:

$$(p+q)^n$$

Per questo la distribuzione di Bernoulli è anche chiamata **Binomiale**

Esempio 3.1

Valutare la probabilità che non si abbia alcun 5 nel lancio di 7 dadi.

Metodo assiomatico:

Considerando caso favorevole ‘esce 5’ si ha:

$$k = 0, n = 7, p = 1/6 \Rightarrow B\left(0, 7, \frac{1}{6}\right) = 0.279$$

Ma anche, considerato caso favorevole ‘esce un numero diverso da 5’ si ha:

$$k = 7, n = 7, p = 5/6 \Rightarrow B\left(7, 7, \frac{5}{6}\right) = 0.279$$

Metodo intuitivo: perché non esca mai 5:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.279$$

Esempio 3.2

Valutare la probabilità che si abbia **almeno** un 5 nel lancio di 4 dadi.

Metodo assiomatico:

caso favorevole ‘esce 5’ per cui le sequenze da considerare sono quelle con *k*=1, 2, 3 o 4 :

$$P = \sum_{k=1}^{4} B\left(k, 4, \frac{1}{6}\right) = 0.518$$

Metodo intuitivo:

l’evento è complementare a quello in cui escono tutti numeri diversi da 5 (complemento di ‘tutti sfavorevoli’):

$$P = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518$$

Proprietà della distribuzione bernoulliane

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k, n.p) = np$$

Nella ripetizione di *n* esperimenti in ognuno dei quali l'esito favorevole è espresso da *p*, il numero atteso di successi è *np*

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\mu)^2 \cdot B(k, n.p) = npq$$

In esperimenti bernoulliani, a parità di *n* la dispersione massima si ha quando $p=q$ (anche questo è ragionevole)

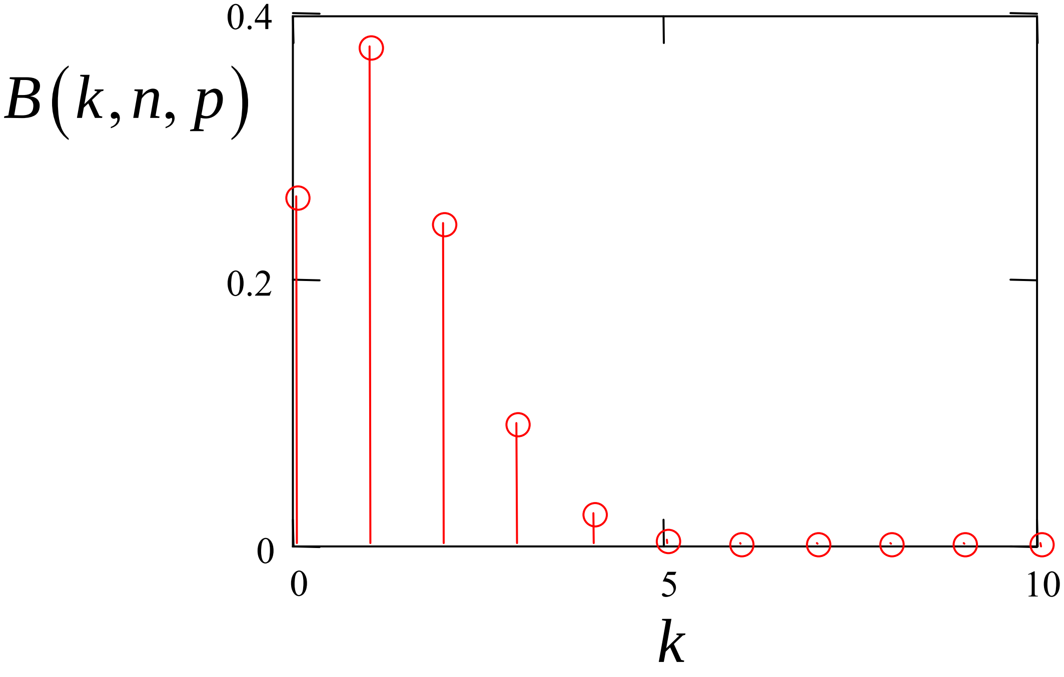
$$k_{max} = \left[(n+1)\, p \right]$$

Se $(n+1)p$ è intero anche np è k_{max}

Esempi: distribuzioni bernoulliane 1/2

$$n = 10;\ p = \frac{1}{8}$$

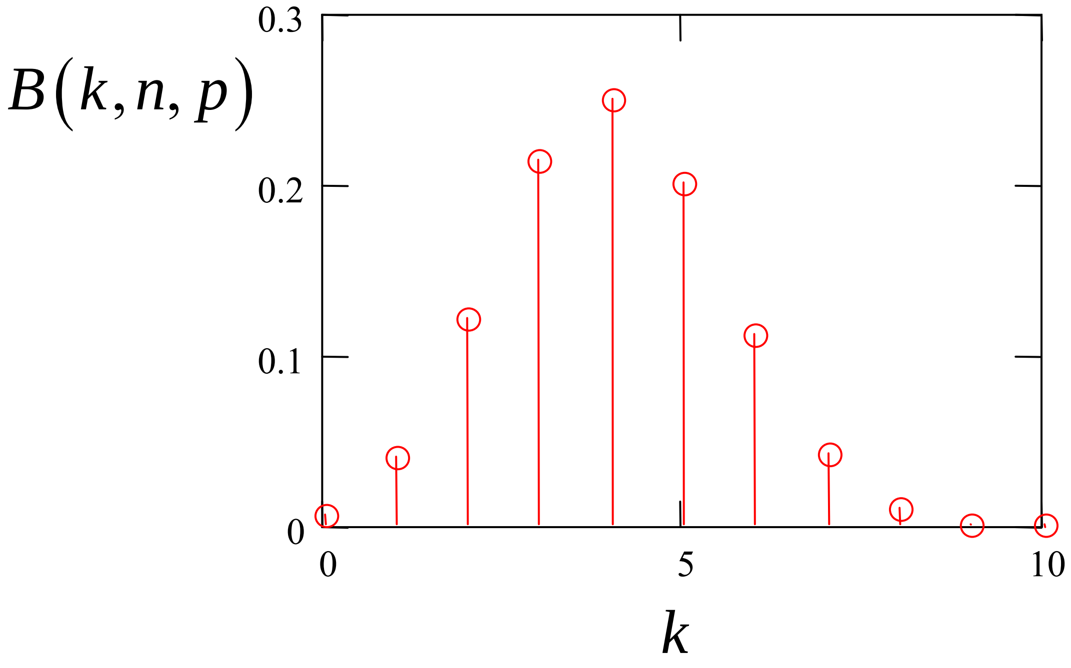
$$\mu = 1.25; \quad \sigma = 1.046$$



Esempi: distribuzioni bernoulliane 2/2

$$n = 10;\ p = 0.4$$

$$\mu = 4; \quad \sigma = 1.549$$



Esempio 3.3

In un articolo di N_p=12 pagine ci sono (distribuiti a caso) N_e=5 errori di stampa. Determinare la distribuzione di probabilità del numero di errori per pagina.

Possiamo usare la bernoulliana identificando i vari termini:

$$n = ?$$

la variabile aleatoria è il numero di errori in una pagina, in questo caso non possono essere più di 5:

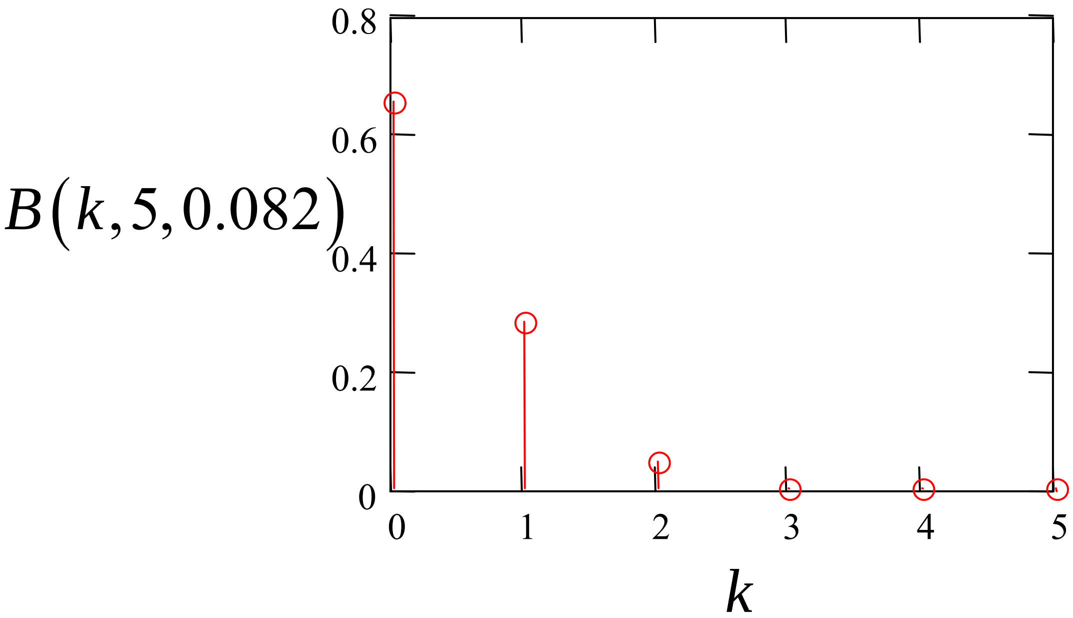
$$k \in \{0,1,2,3,4,5\} \qquad n = N_e = 5$$

Il valore medio di errori per pagina è:

$$\mu = \frac{N_e}{N_p} = \frac{5}{12} = 0.42$$

Per cui essendo: $\mu = np \Rightarrow p = \dfrac{0.4}{5} = 0.083 \quad \left(p = \dfrac{1}{N_p} \right)$

in effetti è la probabilità di mettere un singolo errore in una pagina



Il valore più probabile è (moda) : k_{max}=0

La distribuzione è decrescente

Le probabilità per k = 4 o 5 sono bassissime:

$$2.21\cdot 10^{-4}; \quad 4.02\cdot 10^{-6} \quad \text{respect.}$$

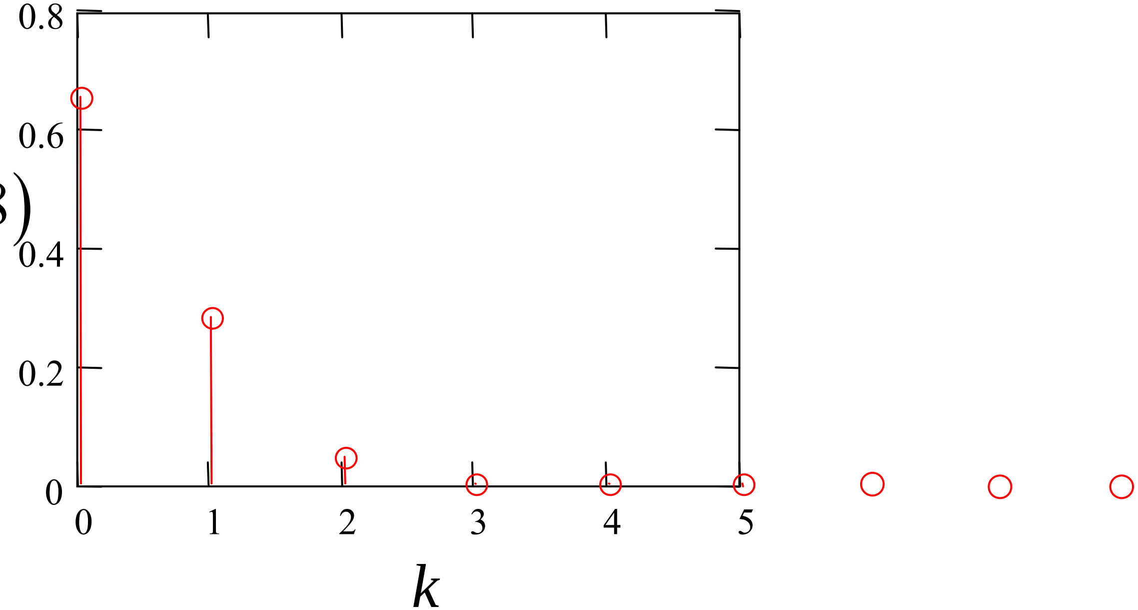
Come si trova la probabilità di trovare più di 2 errori per pagina?

Esempio 3.4

In un libro di 120 pagine ci sono (distribuiti a caso) 50 errori di stampa. Determinare la distribuzione di errori per pagina.

$$n = 50; \quad p = \frac{1}{120} = 0.0082 \qquad \text{ma:} \quad \mu = np = 0.42$$

$$B(k, 50, 0.08)$$



$$P\{k > 5\} = 0.82 \cdot 10^{-3}$$

Esempio 3.5

In un’enciclopedia di 12000 pagine ci sono (distribuiti a caso) 5000 errori di stampa. Determinare la distribuzione di errori per pagina.

È quindi il caso tipico in cui n (=5000) tende a diventare grande (virtualmente infinito) con p (=1/12000) che diventa basso ma il prodotto:

$$np = 0.42$$

si mantiene finito.

Si ottiene in questo caso una distribuzione limite della bernoulliana detta: **distribuzione di Poisson**

Esempio 3.6

Una scheda elettronica contiene 1000 componenti, la probabilità che, in un certo periodo di tempo, ognuno dei componenti si guasti è 0.001, determinare la probabilità che, nello stesso periodo di tempo, la scheda funzioni regolarmente (questo avviene se tutti i suoi componenti sono funzionanti)

$$n = 10^3 \,,\ p = 10^{-3} \qquad np = 1$$

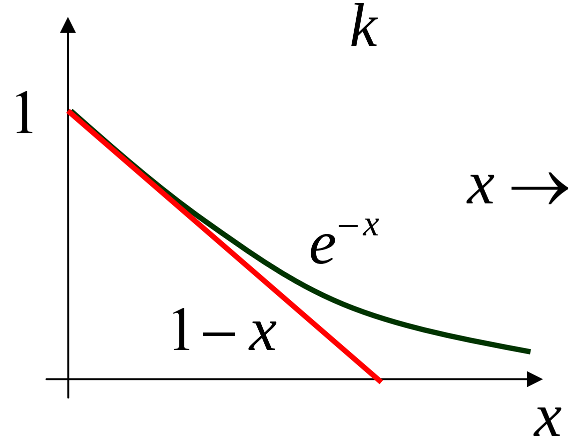
$$P\left\{k = 0\right\} = q^n = 0.999^{1000}$$

Distribuzione di Poisson

$$n \to \infty; \quad p \to 0; \quad np \to a$$

$$k \ll n$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n(n-1).....(n+k+1)}_{k} \cong n \cdot n \cdot .. \cdot n = n^k$$



$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} = 1 - x$$

$$p \ll 1$$

$$q = 1 - p \cong e^{-p} \qquad\qquad q^{n-k} \cong q^n = (1-p)^n = e^{-pn} = e^{-a}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \to \frac{1}{k!} n^k p^k e^{-a} = \frac{1}{k!} (np)^k e^{-a} = \frac{1}{k!} a^k e^{-a}$$

Soluzione esempio 3.6

Una scheda elettronica contiene 1000 componenti, la probabilità che in un certo periodo ognuno di questi si guasti è 0.001, determinare la probabilità che, nello stesso periodo di tempo, la scheda funzioni regolarmente (tutti i suoi componenti sono funzionanti)

$$P\{k=0\} = q^n = 0.999^{1000}$$

$$P\{k=0\} = q^n \cong e^{-np} = e^{-1} = 0.368$$

Proprietà della distribuzione di Poisson

$$P_k = \frac{1}{k!} a^k e^{-a} \qquad k = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{k!} a^k e^{-a} = a$$

Come prevedibile (essendo caso limite della binomiale)

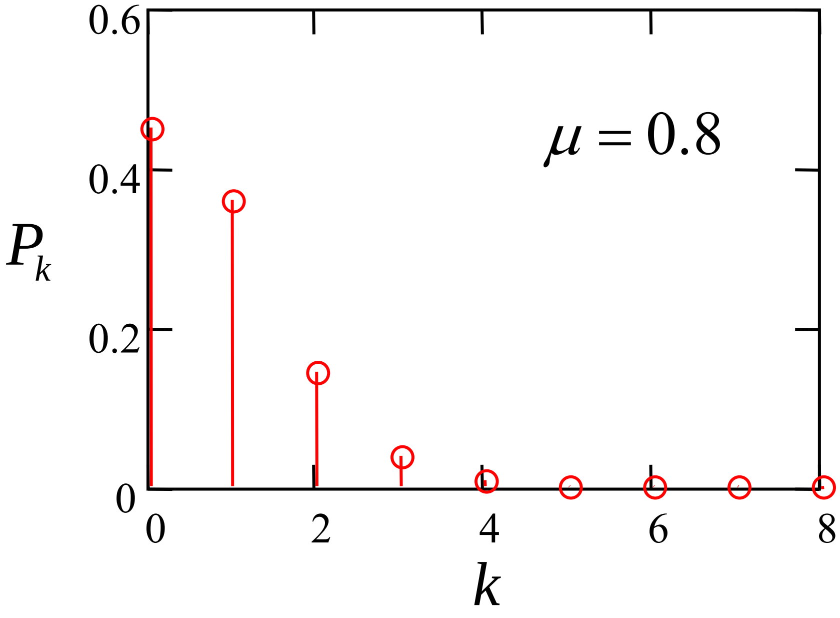
$$\sigma^2 = a = \mu \qquad \sigma = \sqrt{\mu}$$

Distribuzione monoparametrica

Esempi di distribuzione di Poisson 1/3

$$P_k = \frac{1}{k!}\mu^k e^{-\mu}$$

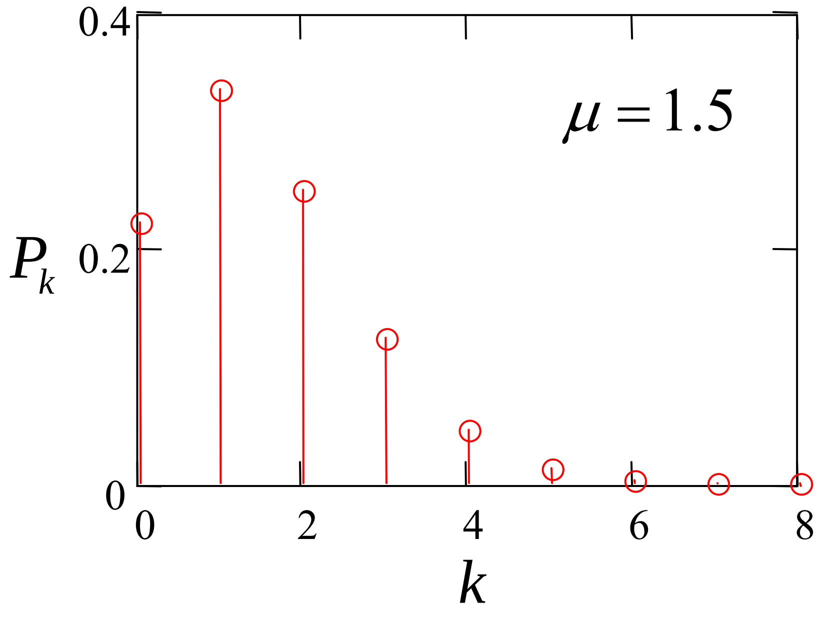
Media inferiore a 1



Esempi di distribuzione di Poisson 2/3

$$P_k = \frac{1}{k!}\mu^k e^{-\mu}$$

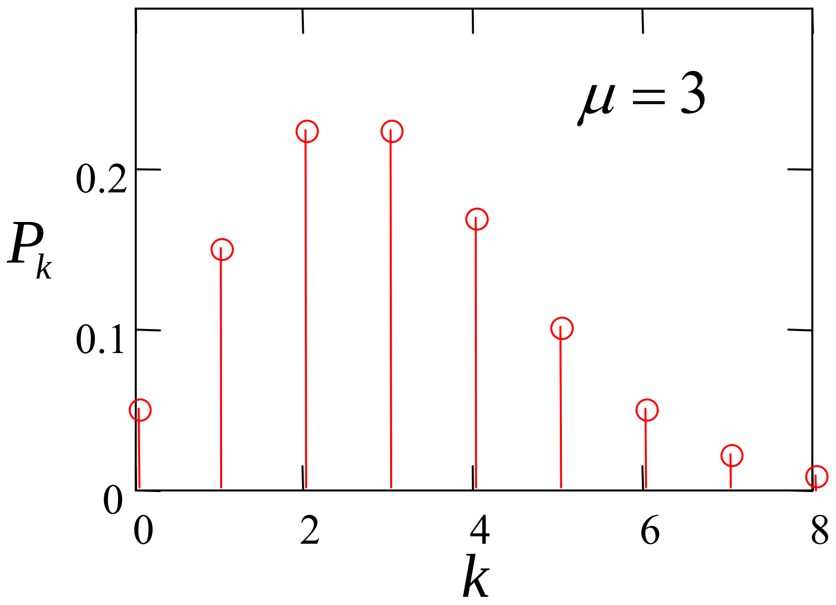
Media attorno all'unità



Esempi di distribuzione di Poisson 3/3

$$P_k = \frac{1}{k!}\mu^k e^{-\mu}$$

Media ben maggiore di 1



Esempio 3.7

In una dispensa di N_p=700 pagine vi sono mediamente 2 errori per pagina, stimare quante pagine sono:

1) senza errori
2) con 2 errori
3) con più di 4 errori

$$\mu = 2 \qquad\qquad P_k = \frac{1}{k!} 2^k e^{-2}$$

1) $$N_{e=0} = N_p \cdot P_0 = 95$$

2) $$N_{e=2} = N_p \cdot P_2 = 189$$

3) $$N_{e>4} = N_p \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^{4} P_k \right) = 37$$

Esempio 3.8

In un reparto di produzione si verificano in media 1.4 non conformità all'ora, stimare:

1) la probabilità che in un'ora siano prodotti tutti elementi conformi
2) la probabilità che in un'ora vi siano più di 5 scarti.
3) Se si verifica la condizione 2 cosa possiamo concludere?
4) La probabilità che in due ore si producano più di 10 scarti

1) $$P_0 = 0.247$$

2) $$P_{k>5} = 3.20 \cdot 10^{-3}$$