Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

Lezione 4:

Variabili aleatorie continue

Definizione di variabile aleatorie continua

Se il risultato di un esperimento casuale (evento) è associato una quantità numerica ma non numerabile (tipicamente reale), la V.A. è detta continua.

Esempi:
Il tempo intercorrente tra due chiamate telefoniche in un centralino
La forza massima applicabile a un provino di trazione
Il tempo di vita di un componente
L’intensità sonora di un disturbo

Nota: in genere, ha queste caratteristiche tutto quanto è misurato con strumenti analogici

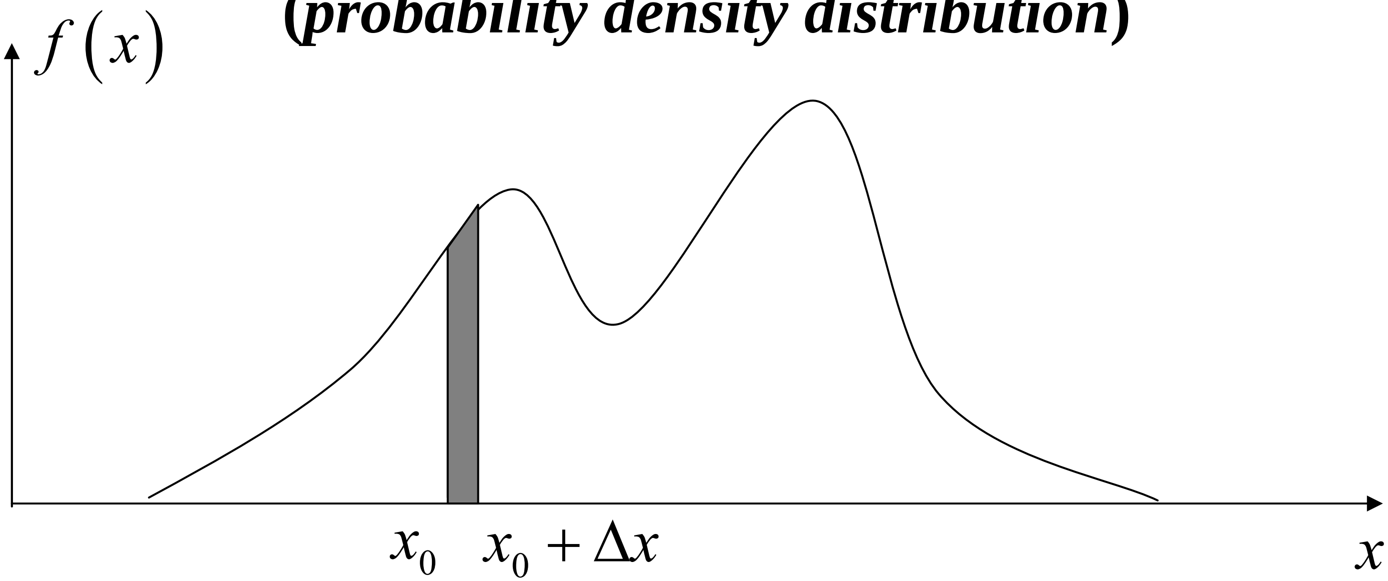
Densità di probabilità

Nel caso discreto la distribuzione di probabilità è stata associata al singolo valore della V.A., come la massa in un sistema discreto di punti materiali

Per la V.A. continua si ha lo stesso problema definitorio della massa nei corpi continui: deve essere introdotta la nozione di **densità**

Esempio 4.1. Nell'ora di punta di un centralino le telefonate giungono in modo random senza condizioni preferenziali, determinare la probabilità che una telefonata giunga nell'istante centrale dell'intervallo

Definizione di densità di probabilità
(*probability density distribution*)



$$P\left(x_0 < x < x_0 + \Delta x\right) \cong f\left(x_0\right) \cdot \Delta x$$

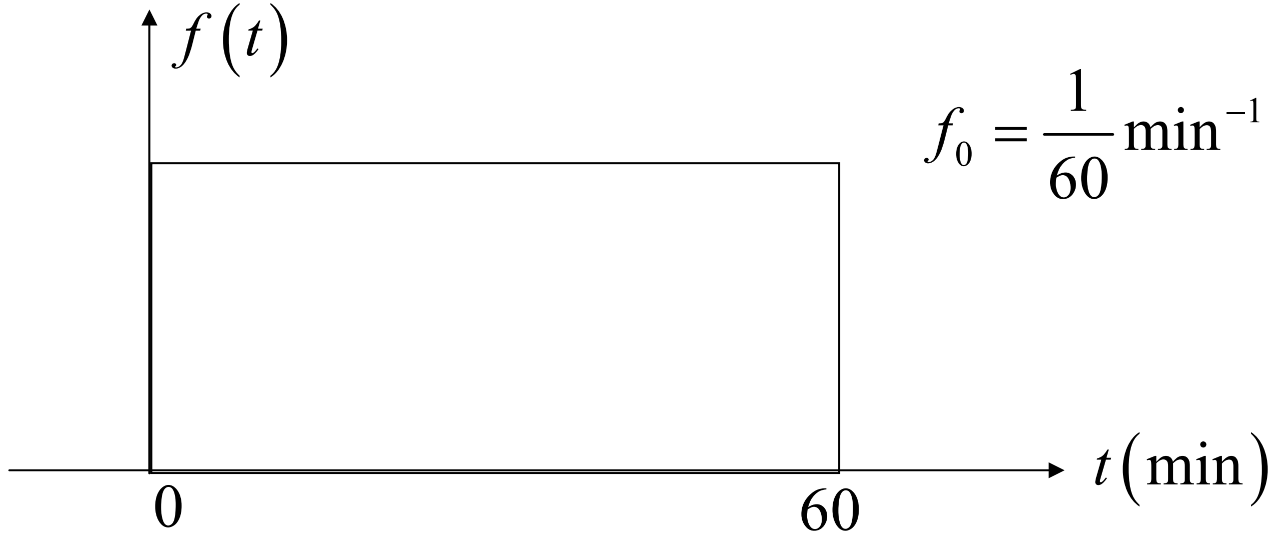
$$f\left(x_0\right) = \left.\frac{dP}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Dimensionalmente la densità di probabilità **non è** una probabilità ma una probabilità per unità di *x*. Per esempio, se *x* è un tempo (secondi) $f(x)$ è tempo alla −1 (probabilità al secondo)

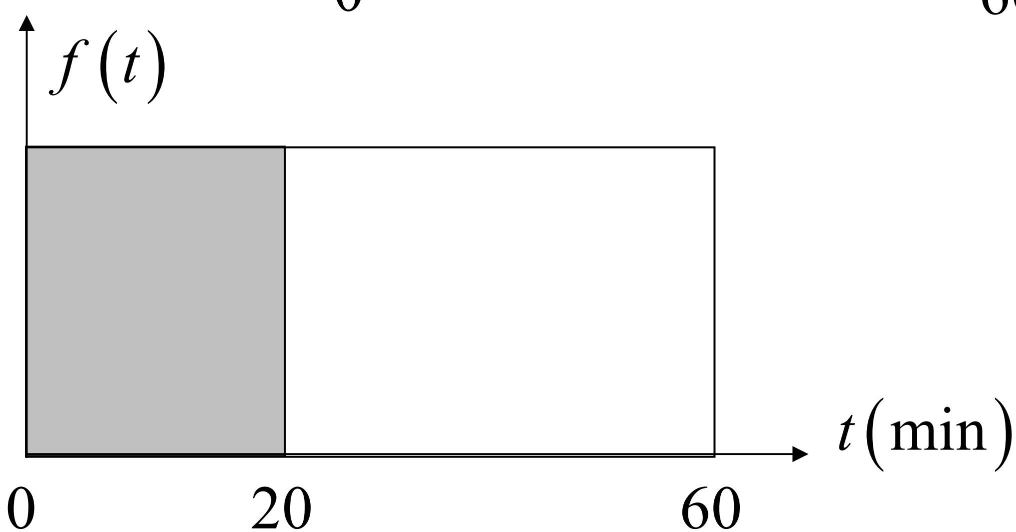
Esempio 4.2. Una telefonata può giungere in qualsiasi momento della prossima ora, determinare la probabilità che si verifichi

1) nei primi 20 minuti

2) nei minuti dispari



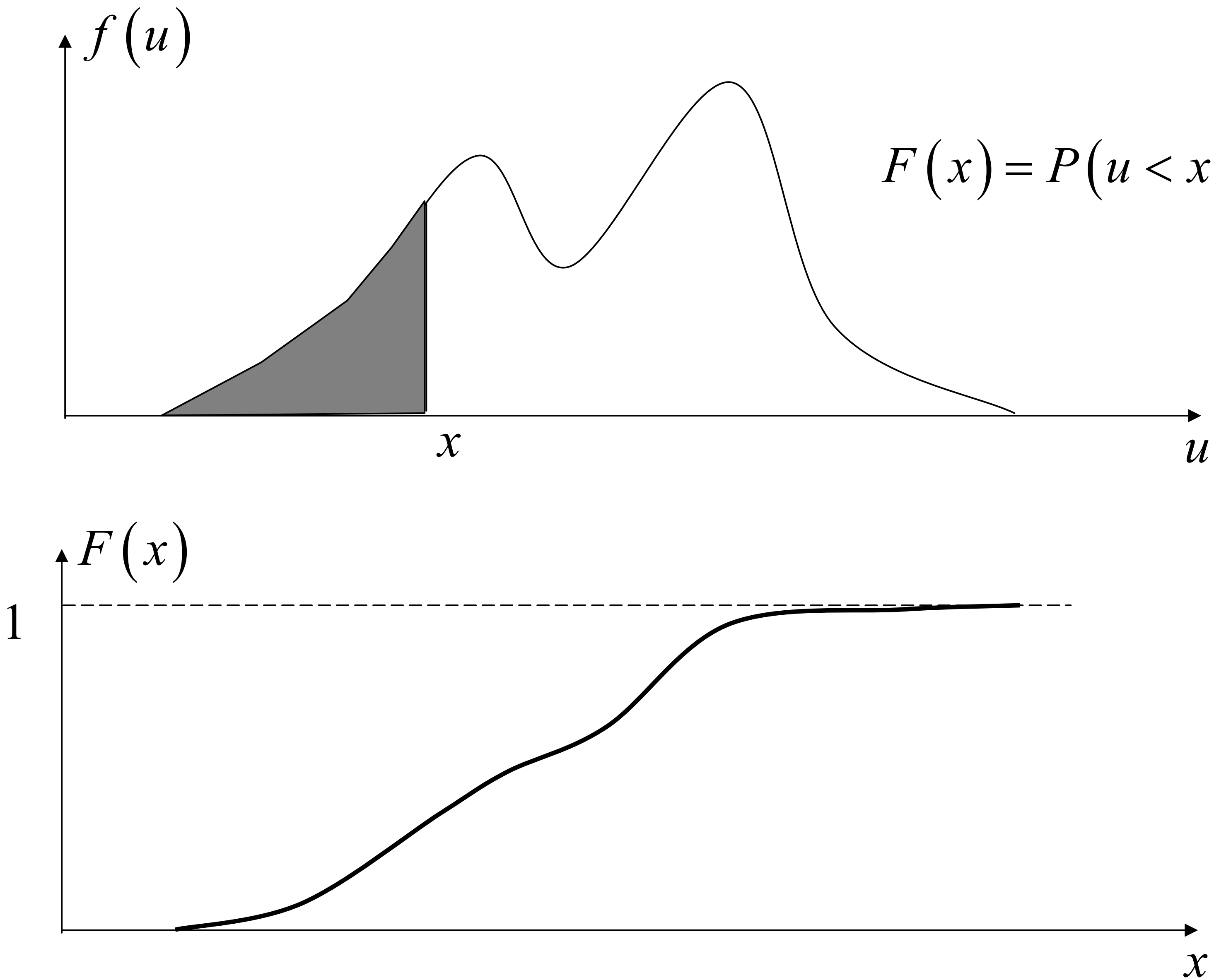
$$f_0 = \frac{1}{60}\,\mathrm{min}^{-1}$$



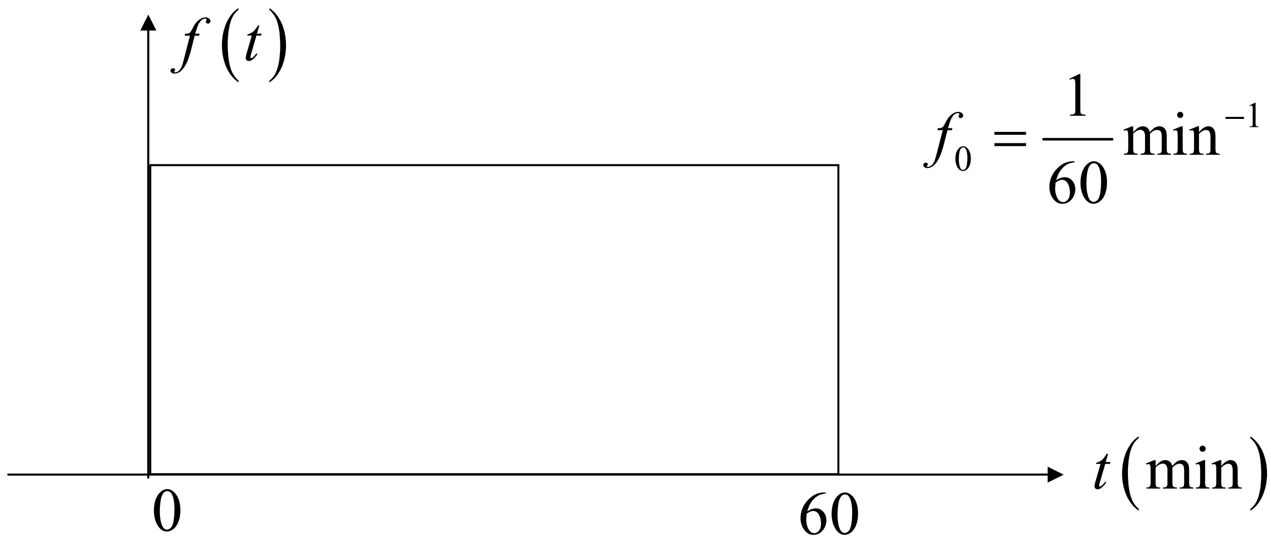
$$P\left(0 < t < 20\right) = \frac{1}{3}$$

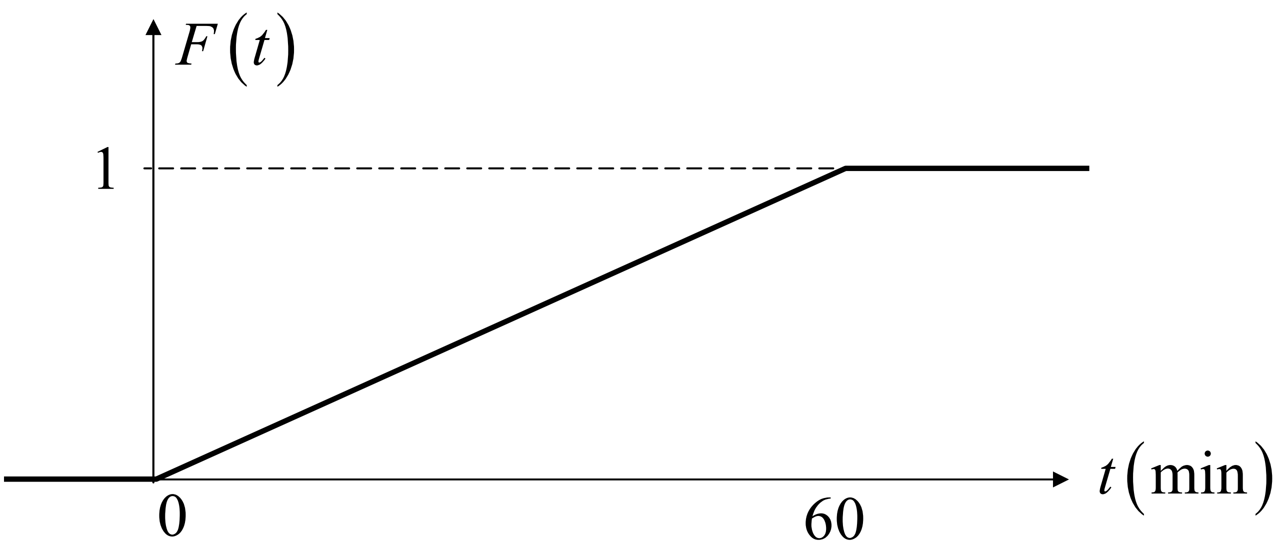
Distribuzione di probabilità cumulata

$$F(x) = P(u < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$



Esercizio 4.1. Tracciare e quotare la cumulata della distribuzione uniforme dell'esempio 4.2.

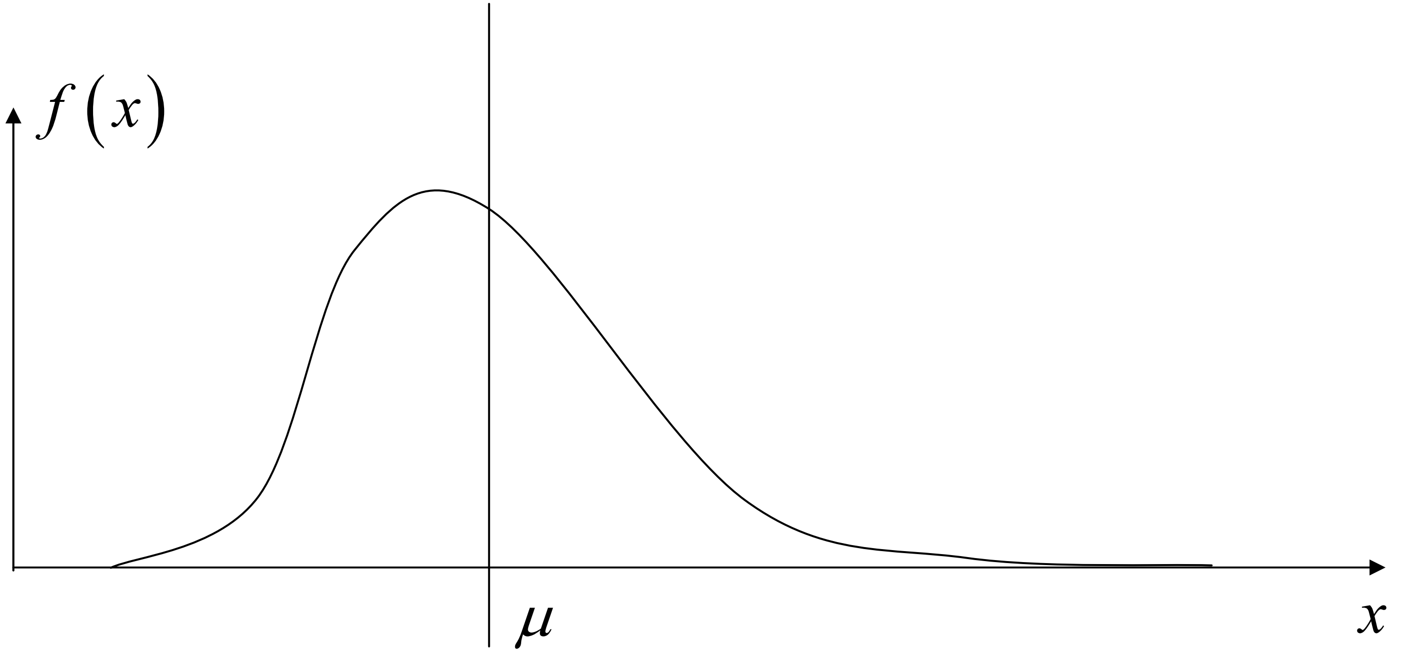




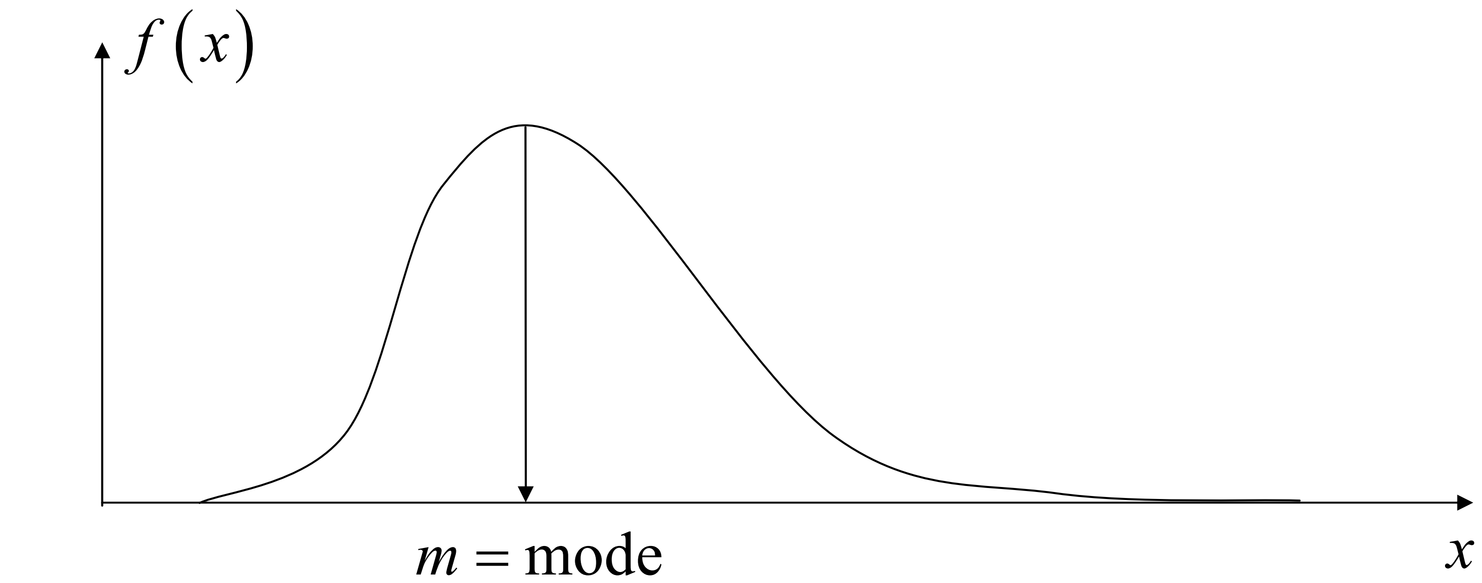
Definizioni

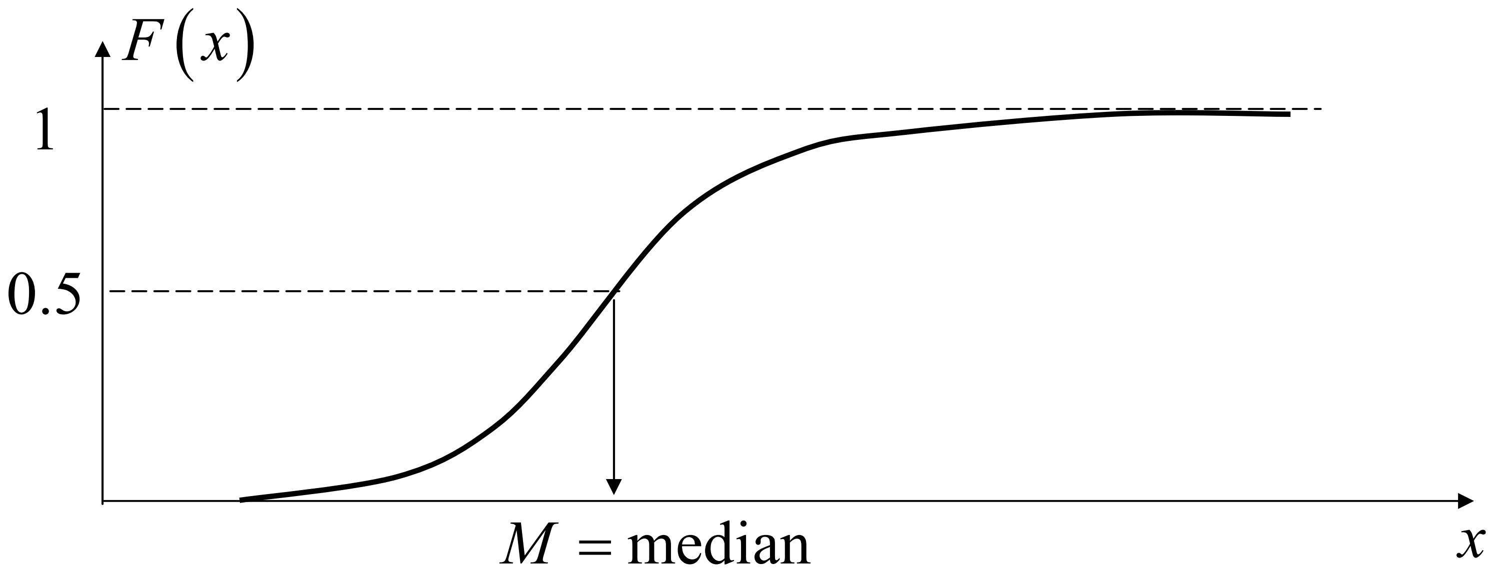
$$\mu = E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f\left(x\right) dx$$

$$\sigma^2 = VAR(X-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right) dx$$

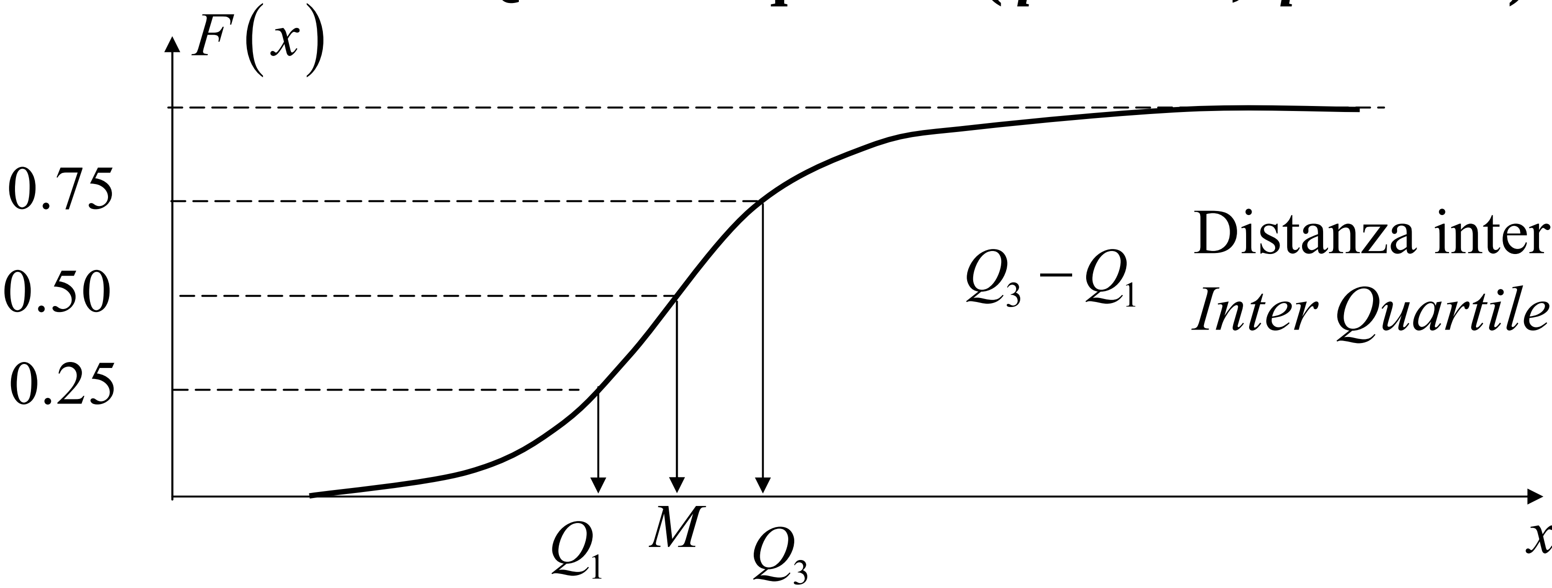


Moda e mediana (*mode, median*)

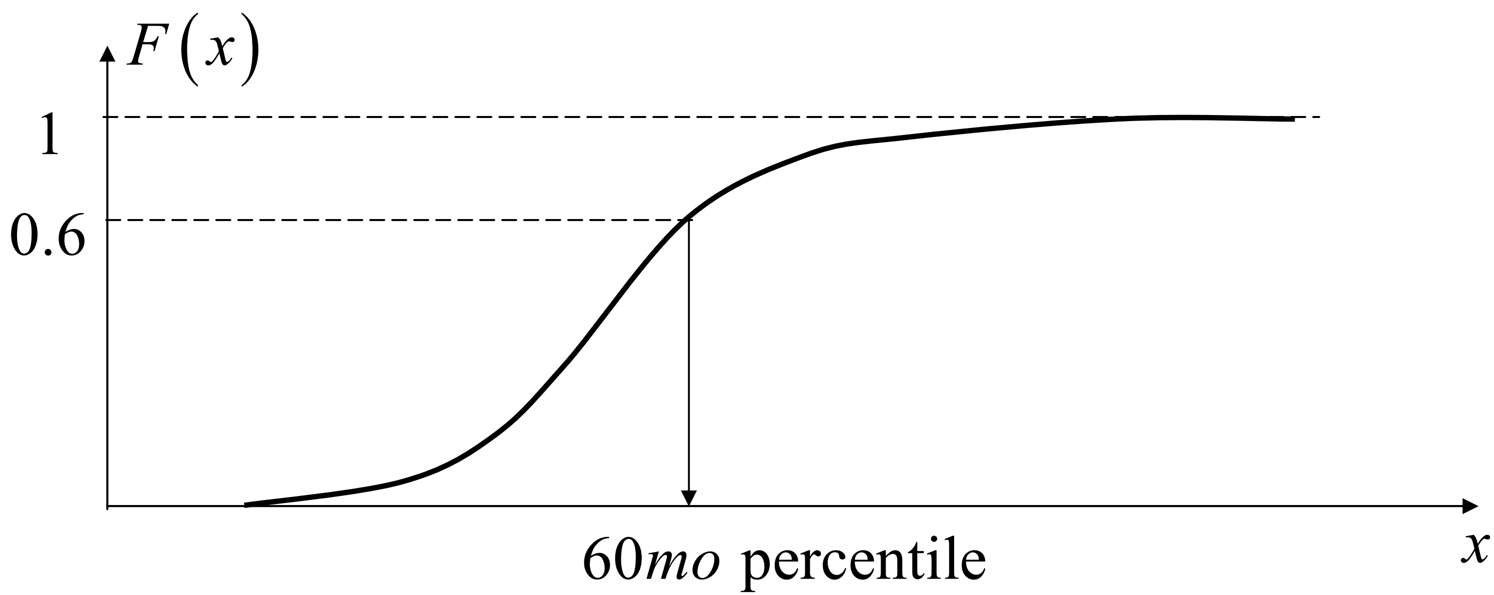




Quartili e quantili (*quartiles, quantiles*)



Distanza interquartile
Inter Quartile Range



Altre proprietà di forma

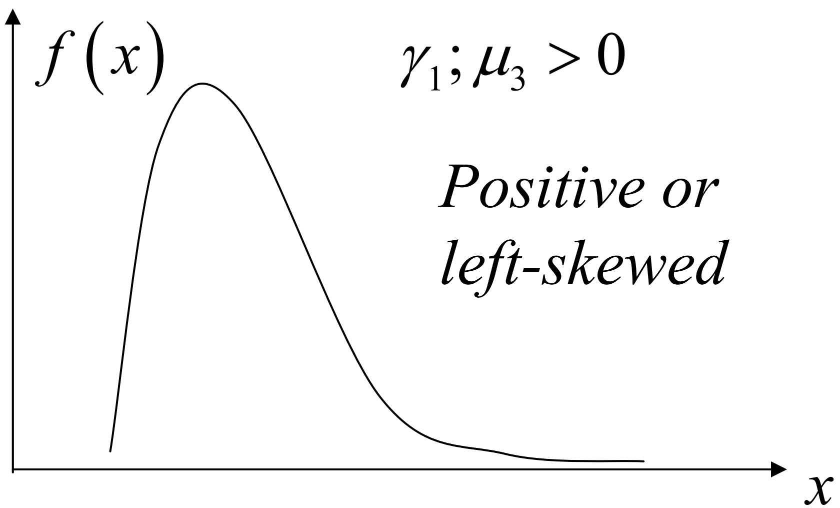
Momento centrale di ordine *k* (*central moment of kth order*)

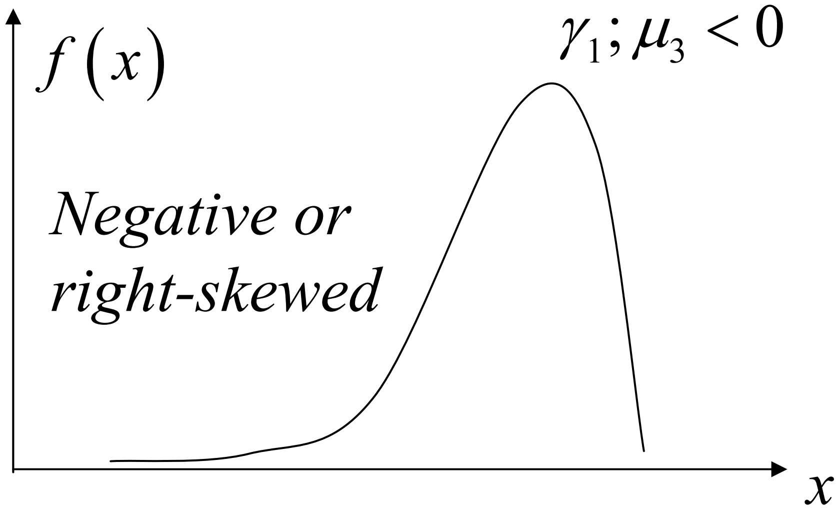
$$\mu_1 = \mu = E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f\left(x\right) dx$$

$$\mu_k = E\Big(X - E\left(X\right)\Big)^k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu\right)^k \cdot f\left(x\right) dx \quad \text{per} \quad k > 1$$

$$\mu_2 = \sigma^2$$

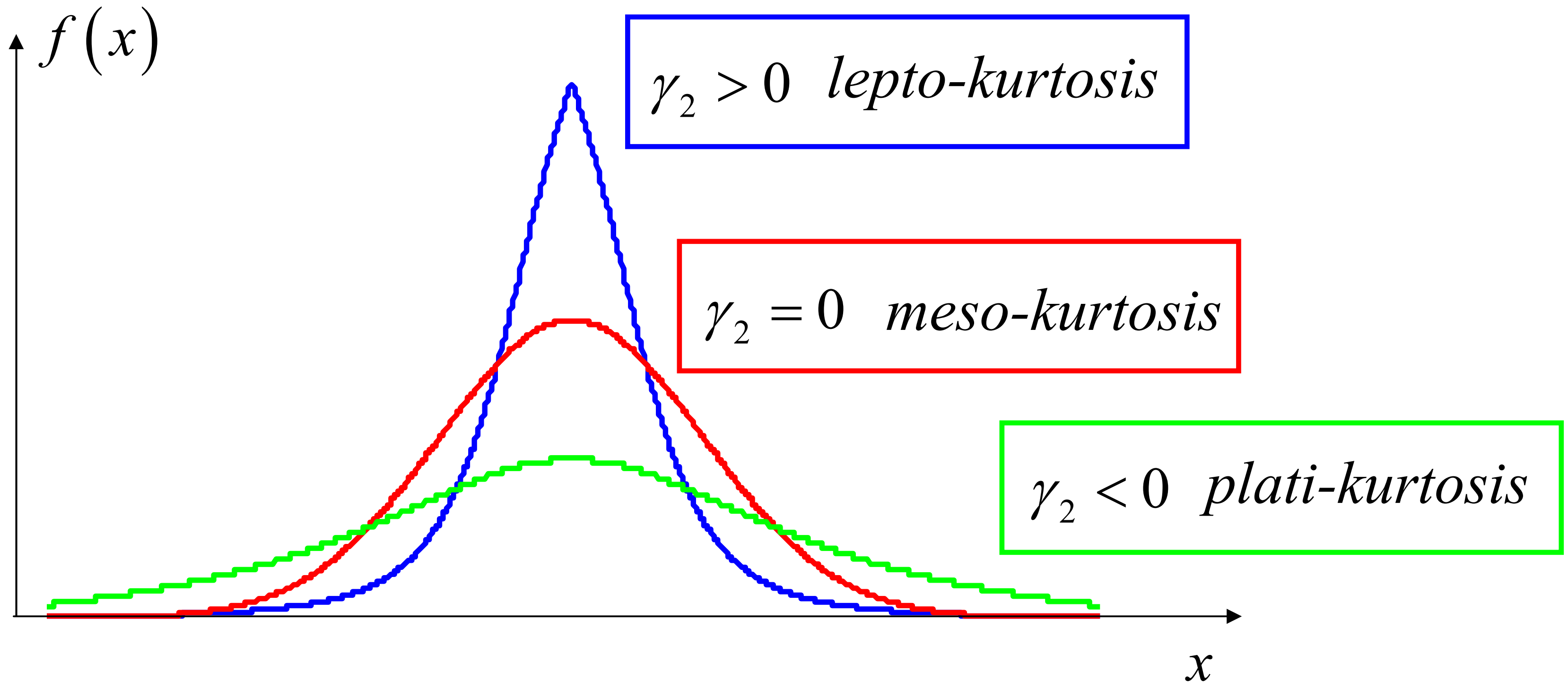
Skewness: $\gamma_1 = E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$





Altre proprietà di forma

Kurtosis: $$\gamma_2 = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$



Significati dei principali momenti

Disuguaglianza di Tchebycheff

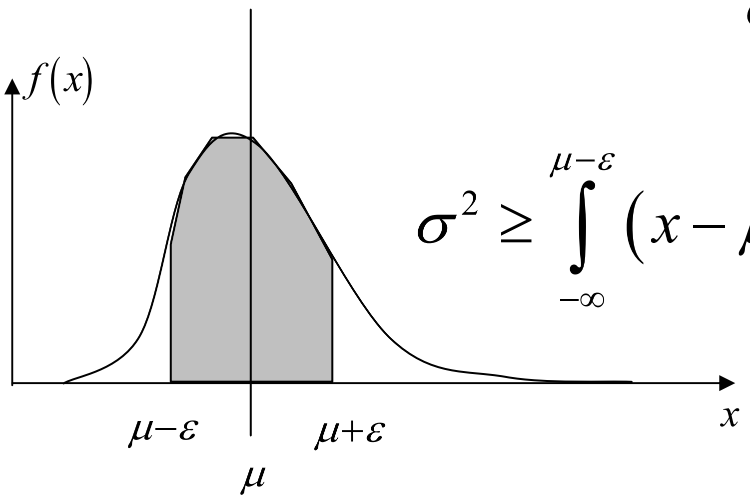
Sia X una V.A. con media μ e deviazione standard σ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|x-\mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Nota: relazione generale vale per ogni VA (continua o discreta)

Dimostrazione (per V.A. continua):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$



$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \geq$$

$$\int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} \varepsilon^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 f(x)\,dx = \varepsilon^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\mu-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \right) =$$

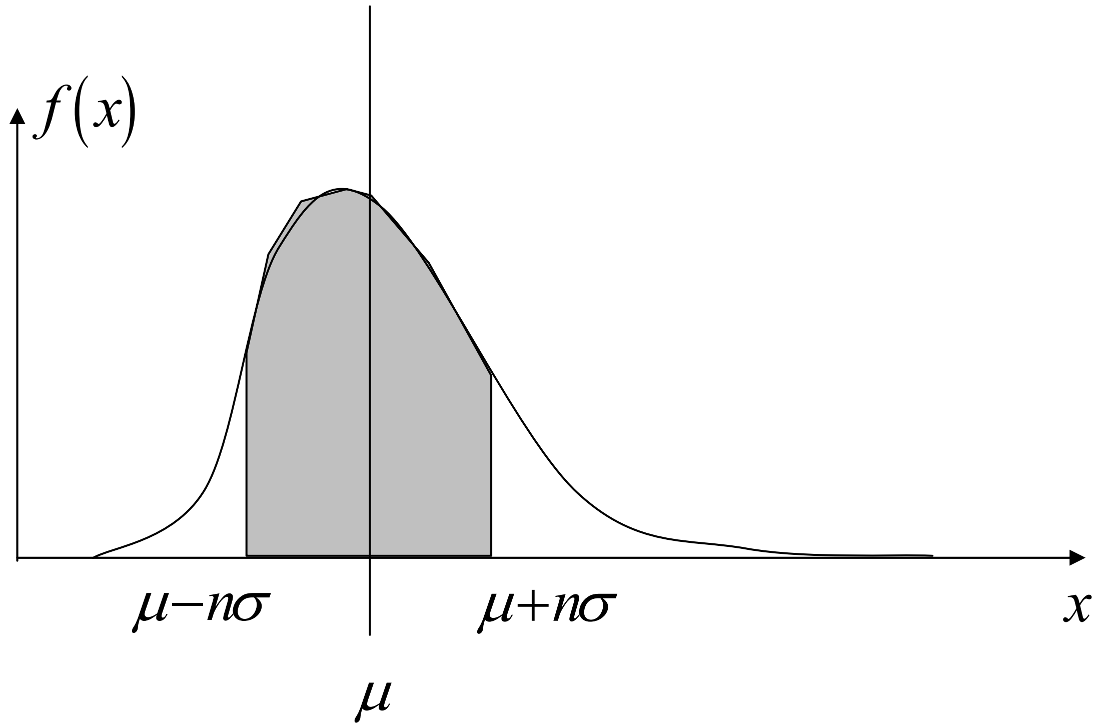
$$= \varepsilon^2 \cdot P\left(\left|x-\mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

Esempio 4.3.
Della V.A. x continua sappiamo solo che ha media 5 e deviazione standard 1, cosa si può dire sulla probabilità di estrarre un dato compreso tra 3 e 7?

$$\varepsilon = 2\sigma \qquad P\left(\left|x-5\right| \geq 2\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$$

$$P\left(\left|x-5\right| < 2\right) \geq 1 - 0.25 = 0.75$$

Per una VA qualunque quindi, la probabilità di stare in un intervallo centrale di semiampiezza $n\sigma$ vale (sottostima):

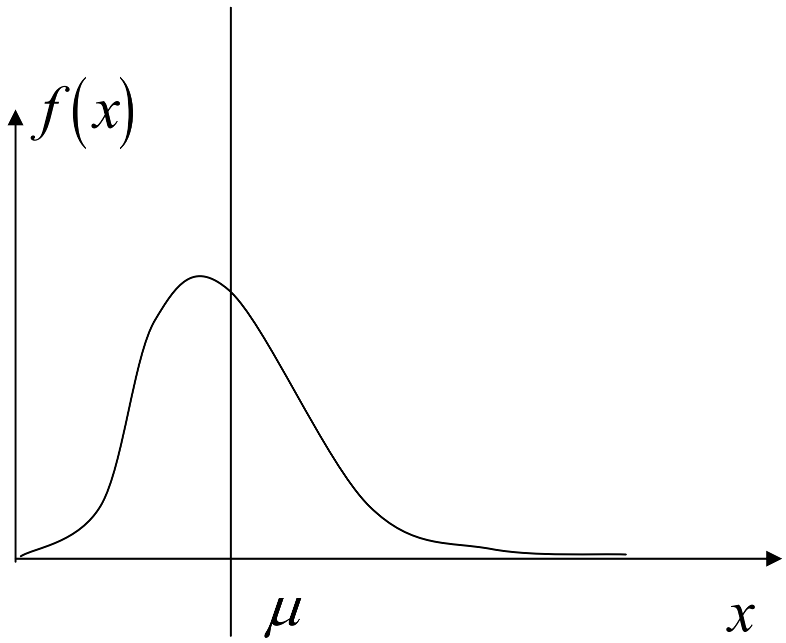


$$P\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} < n\right) > 1 - \frac{1}{n^2}$$

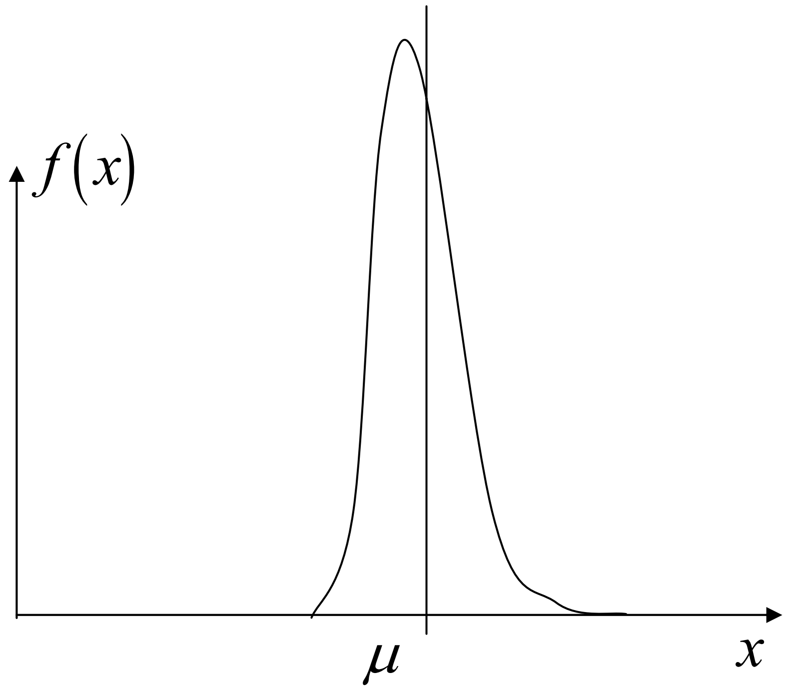
Significati dei principali momenti: coefficiente di variazione

Deviazione standard relativa (*Relative standard deviation RSD*)

$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$$



CV elevato



CV basso

Distribuzioni notevoli: normale o gaussiana (*normal*, *gaussian*)

Può essere ottenuta come caso limite della bernoulliana

Esempio 4.4

Determinare la probabilità che, in cento lanci di monete, testa compaia almeno 45 volte ma non più di 60.

$$P = \sum_{k=45}^{60} B\left(k, 100, 0.5\right) = 0.8468$$

Il calcolo richiede la valutazione di fattoriali significativi.
Notiamo però che:

n grande $(100 \gg 1)$

$\dfrac{|k-\mu|}{\sigma}$ è dell'ordine dell'unità $\left(\sigma=5\right)$

Dobbiamo valutare probabilità bernoullinane per **valori centrali** della distribuzione con ***n* elevato**

Sfruttiamo proprietà asintotiche per evitare il calcolo di fattoriali:

Teorema di DeMoivre-Laplace (basato sulla formula di Stirling)

$$\text{se} \quad npq \gg 1 \quad \text{e} \quad \frac{|k-np|}{\sqrt{npq}} \sim 1$$

$$B(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}}$$

Usando questa formula nel caso precedente si ottiene:

$$npq = 25 \gg 1 \quad \text{e} \quad \frac{|k-np|_{max}}{\sqrt{npq}} = 2 \sim 1$$

$$P = \sum_{k=45}^{60} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} = 0.8470$$

Errore relativo dello 0.03%

Estensione al continuo: distribuzione di densità normale o gaussiana

Tenendo conto che per la bernoullina: $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq$
come tentativo definiamo:

$$f(x) = N(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

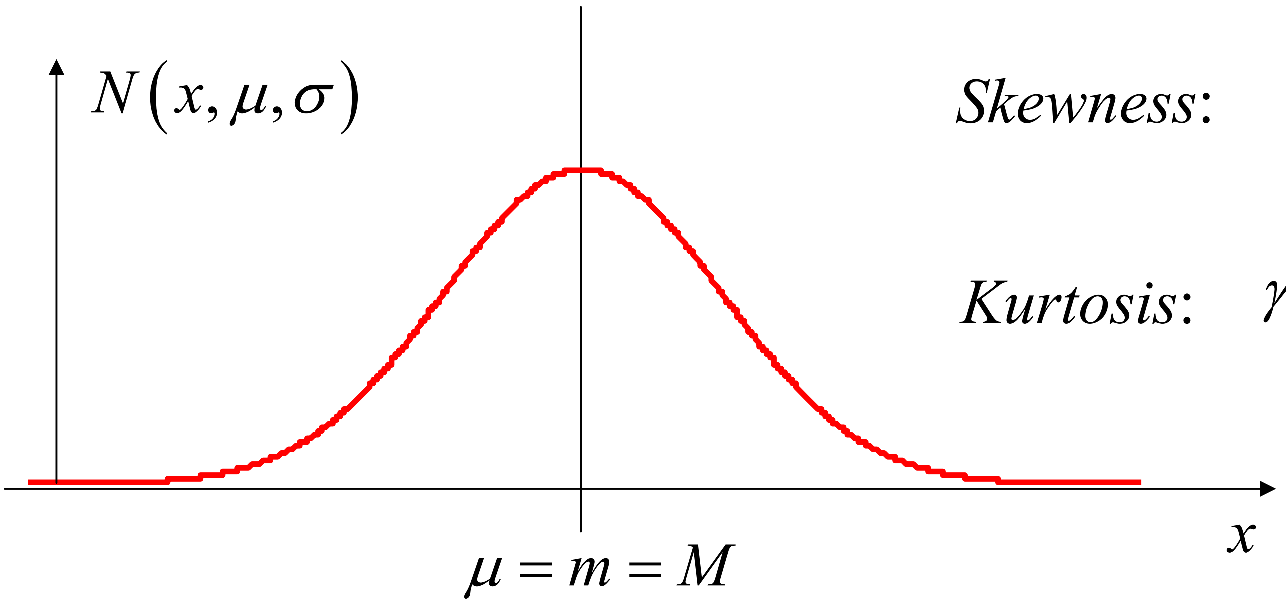
Da cui si ricava immediatamente che:

$$\forall \mu, x \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow N(x,\mu,\sigma) > 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} N(x,\mu,\sigma)\,dx = 1$$

e si verifica che, effettivamente, anche per la V.A. gaussiana continua x appena definita con distribuzione $N(x,\mu,\sigma)$ valgono le relazioni:

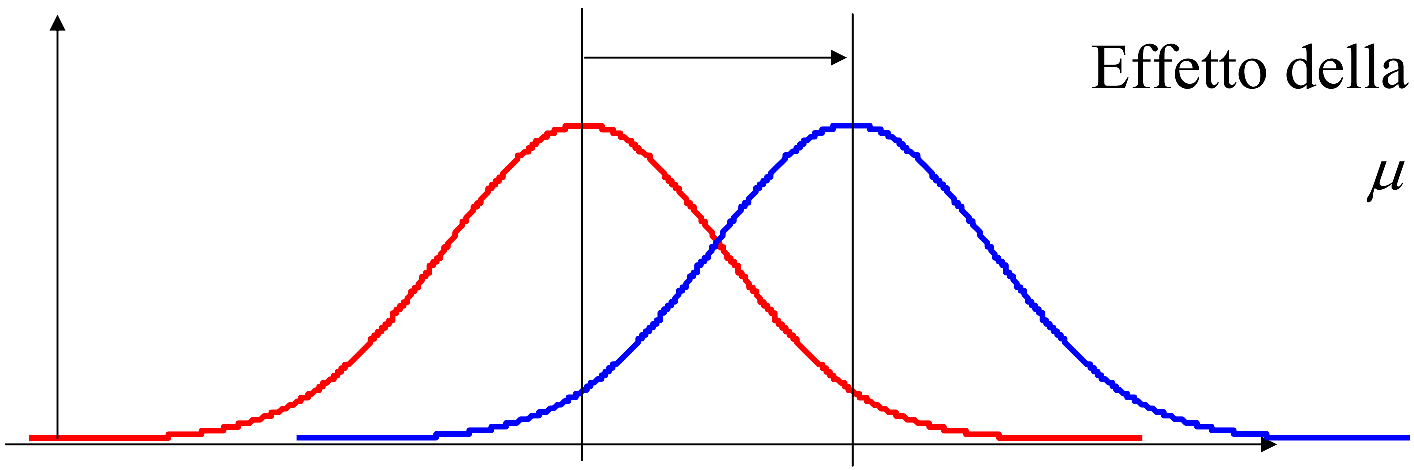
$$E(X) = \mu; \quad E(X-\mu)^2 = \sigma^2$$

Proprietà della Gaussiana



Skewness: $\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

Kurtosis: $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$

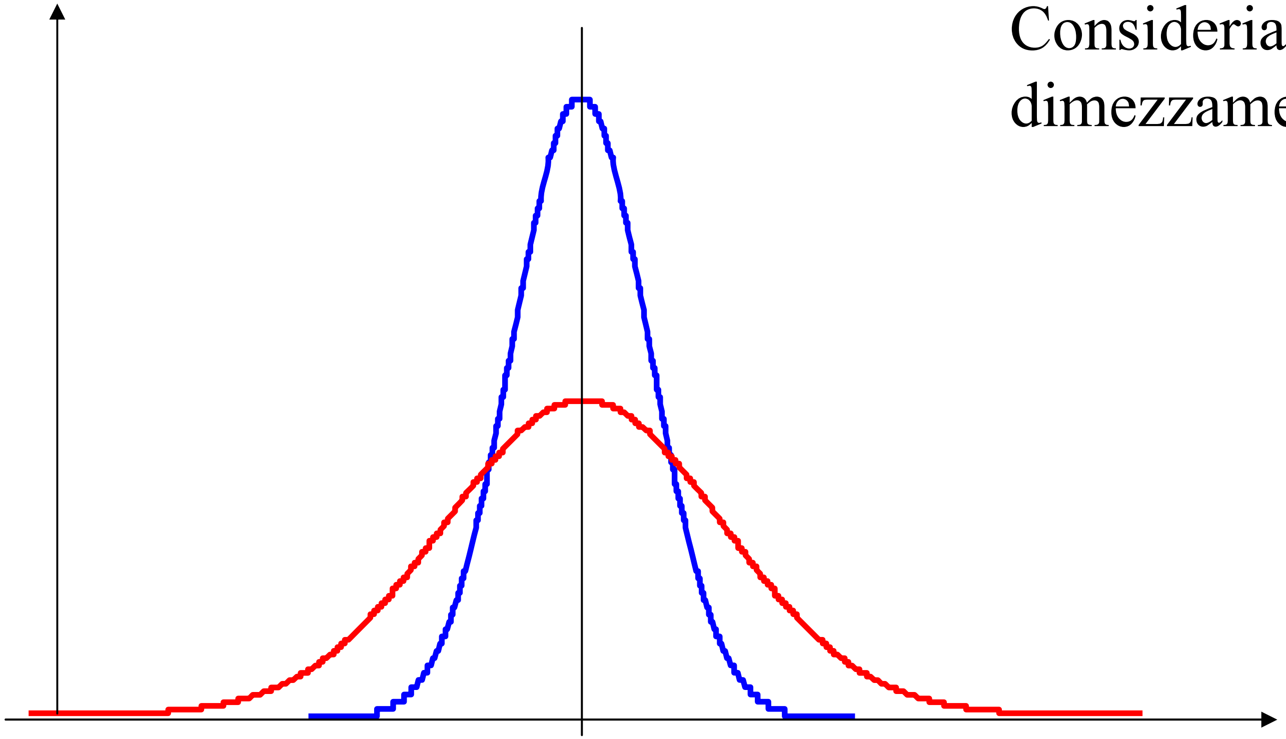


Effetto della modifica di μ

Proprietà della Gaussiana

Effetto della modifica di σ

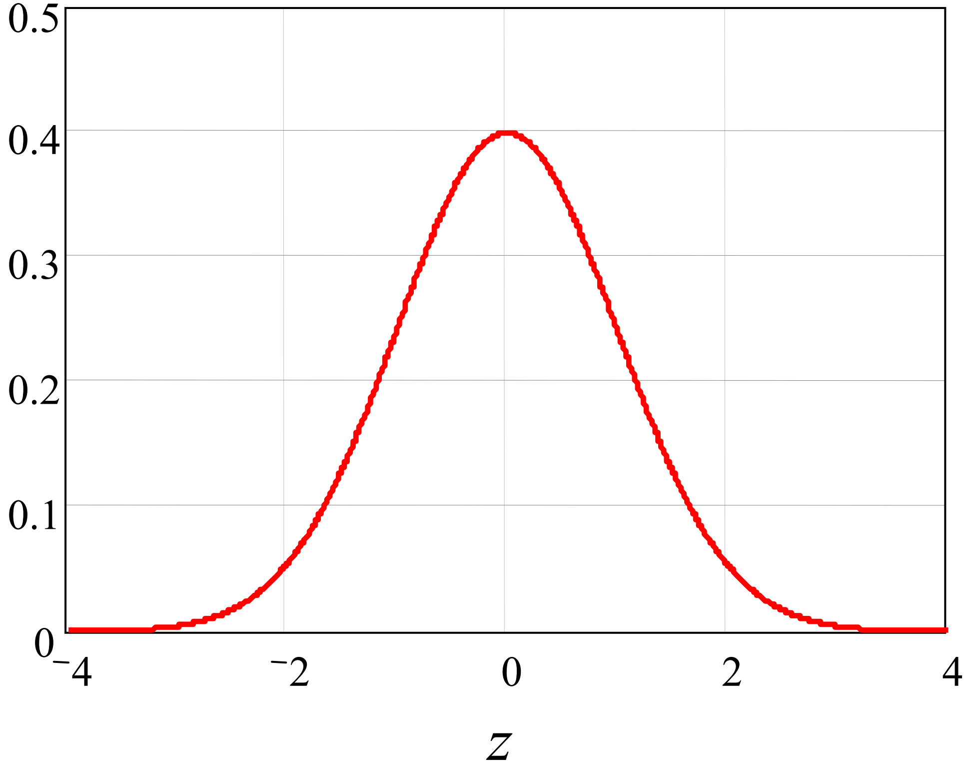
Consideriamo un dimezzamento



Proprietà della Gaussiana

Le gaussiane sono quindi tutte uguali a meno di una traslazione e di una dilatazione-contrazione combinata in $x-y$

$N(z,0,1)$



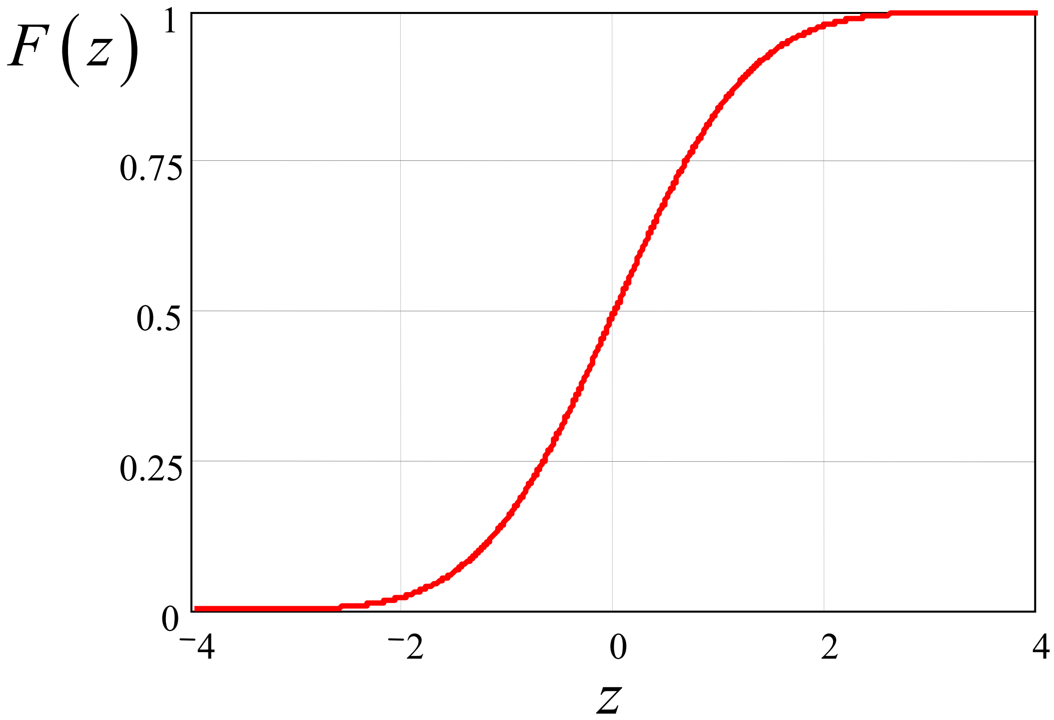
Curva normale standard:

$$x^* = z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Proprietà della Gaussiana

La gaussiana cumulata (standard) è data da:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



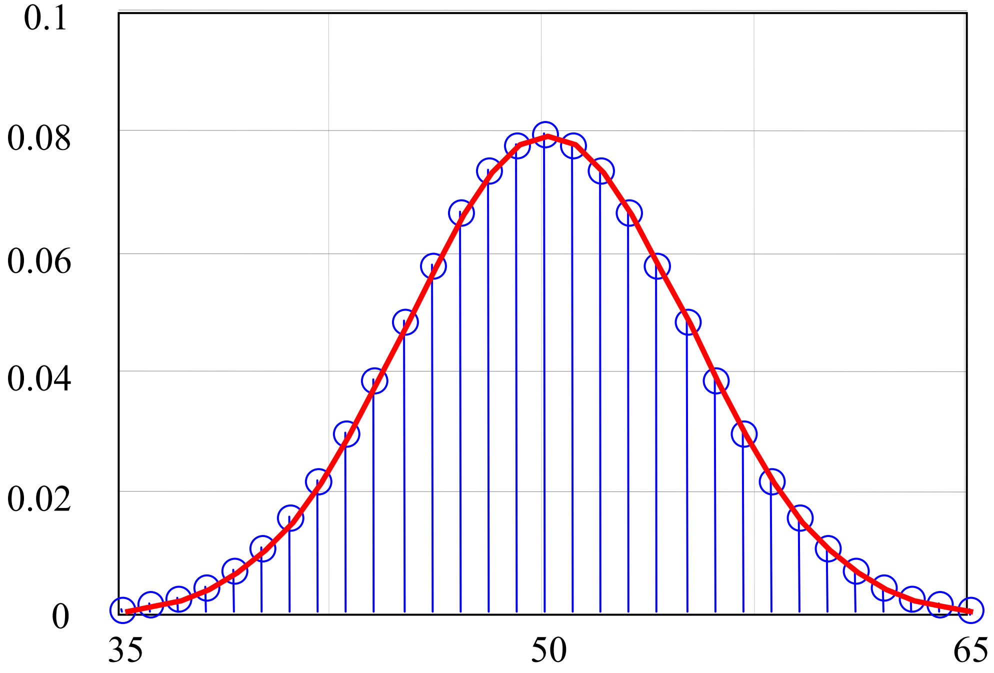
n	$F(n)-F(-n)$
1	0.683
2	0.955
3	0.997

Gaussiana vs Bernoulliana 1/2

$$n = 100;\ p = 0.5$$

$$B\left(k, 100, 0.5\right)$$

$$N\left(k, np, \sqrt{npq}\right)$$

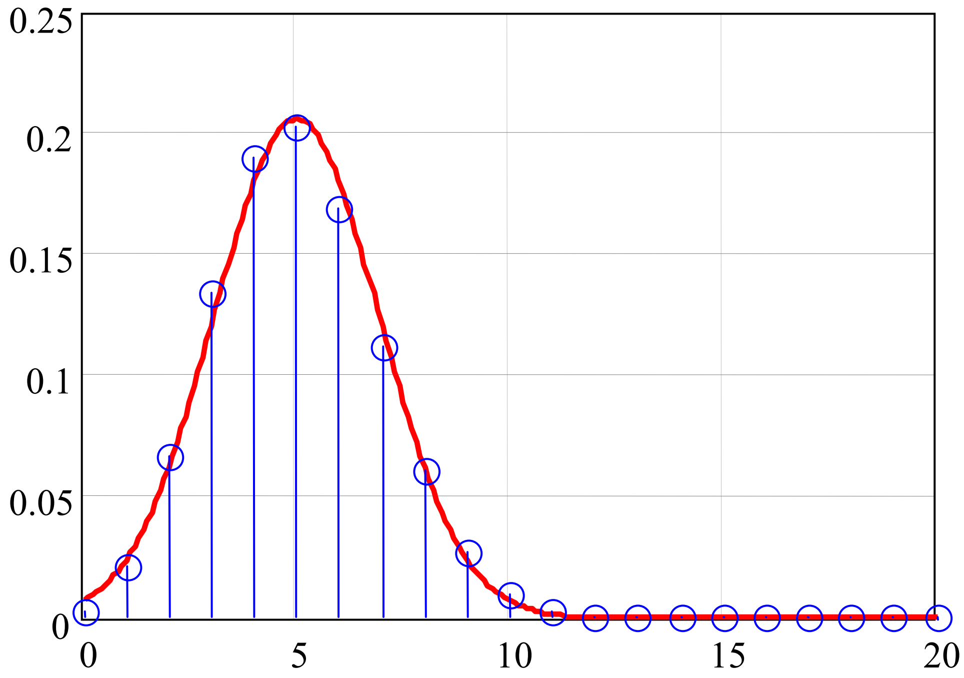


Gaussiana vs Bernoulliana 2/2

$$n = 20;\ p = 0.25$$

$$B\left(k, 100, 0.5\right)$$

$$N\left(k, np, \sqrt{npq}\right)$$

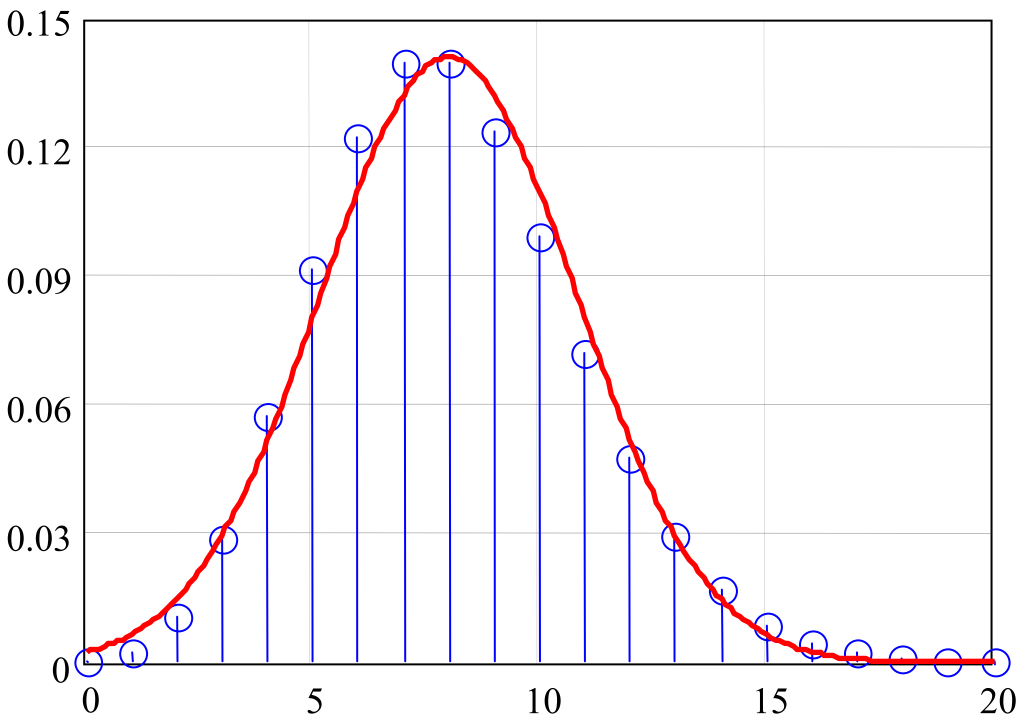


Gaussiana vs Poissoniana 1/2

$$\mu = 8$$

$$Pois(k, \mu)$$

$$N\left(k, \mu, \sqrt{\mu}\right)$$

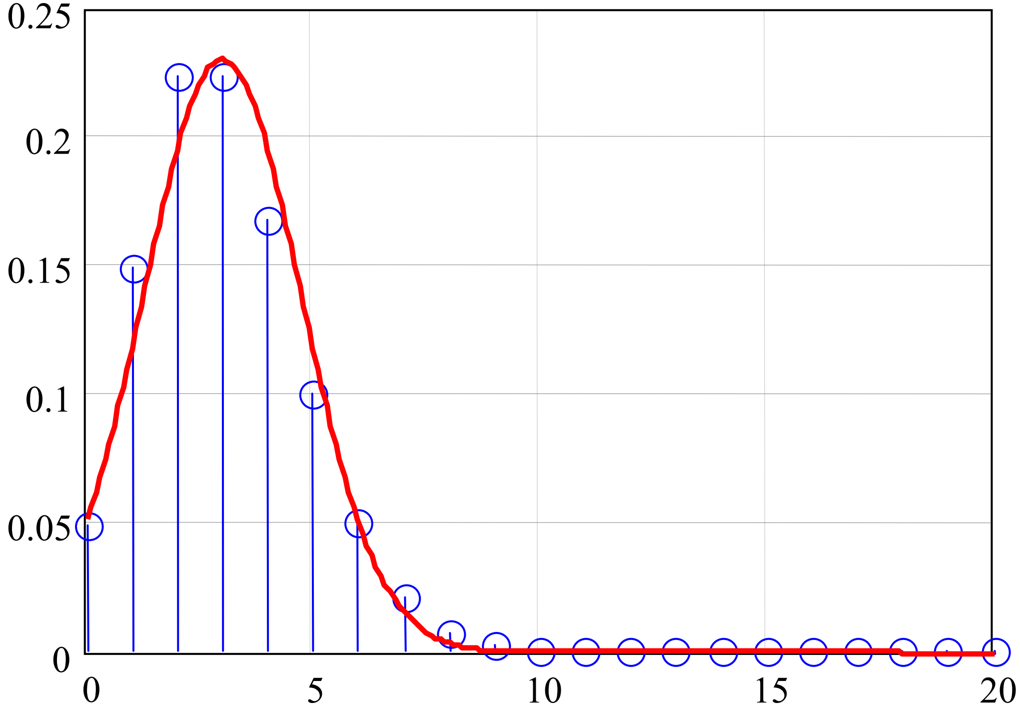


Gaussiana vs Poissoniana 2/2

$$\mu = 3$$

$$Pois(k,\mu)$$

$$N\left(k,\mu,\sqrt{\mu}\right)$$



Esempio 4.5

La tensione di snervamento di un acciaio è distribuita gaussianamente con parametri: $\mu = 250\,\text{MPa};\quad \sigma = 20\text{MPa}$

1) Determinare la tensione massima applicabile perché la probabilità di snervamento sia inferiore a 1%

2) Valutare la percentuale di provini che snervano se si applica una tensione di 275MPa

$$F\left(z\right) = 0.01$$

$$z_1 = F^{-1}\left(0.01\right) = -2.326$$

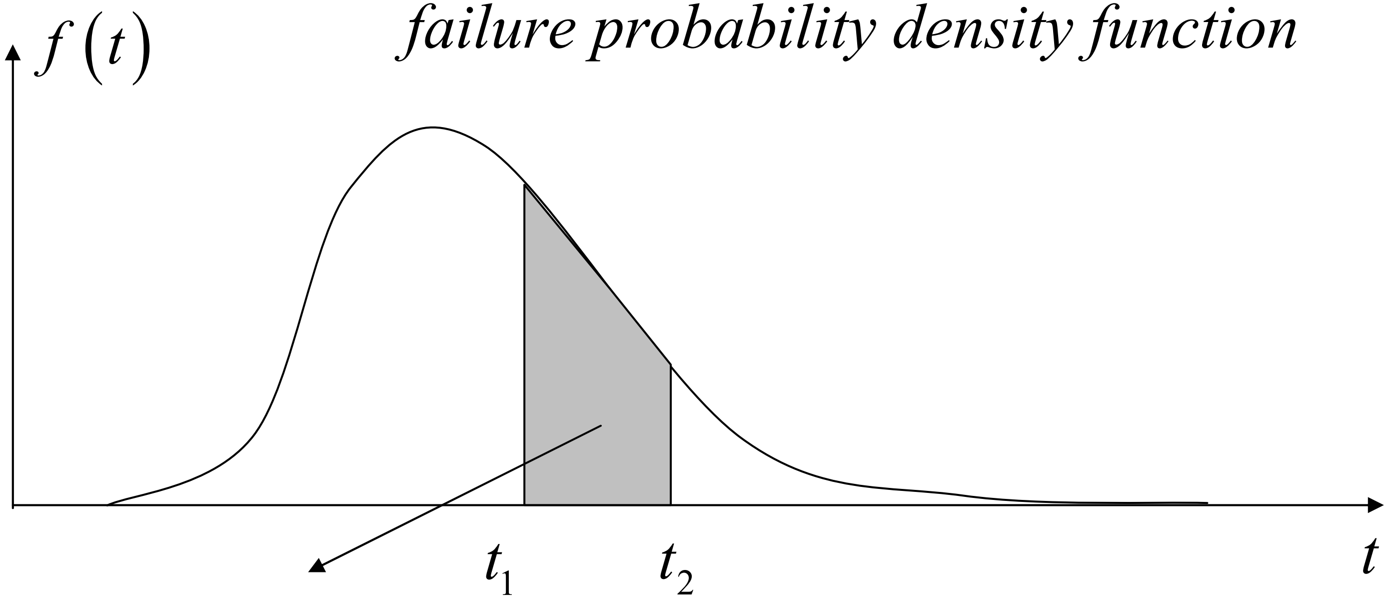
$$\frac{x_1 - \mu}{\sigma} = -2.326 \Rightarrow x_1 = 204\text{MPa}$$

$$z_2 = \frac{275 - 250}{20} = 1.25 \qquad\qquad F\left(z_2\right) = 0.894$$

Definizioni affidabilistiche
variabile aleatoria continua: tempo di guasto

Affidabilità (*reliability*)

Densità di probabilità di guasto
failure probability density function

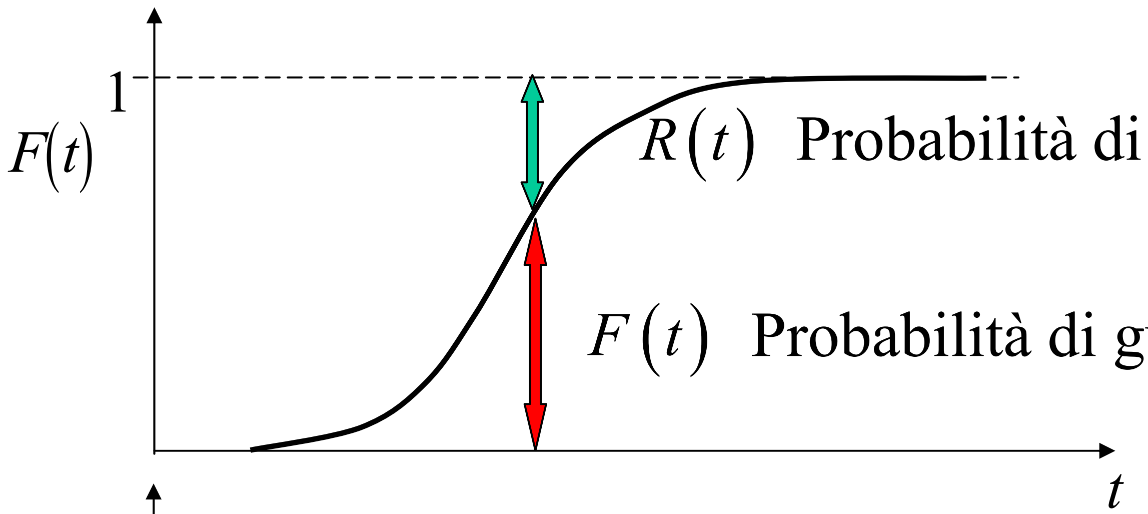


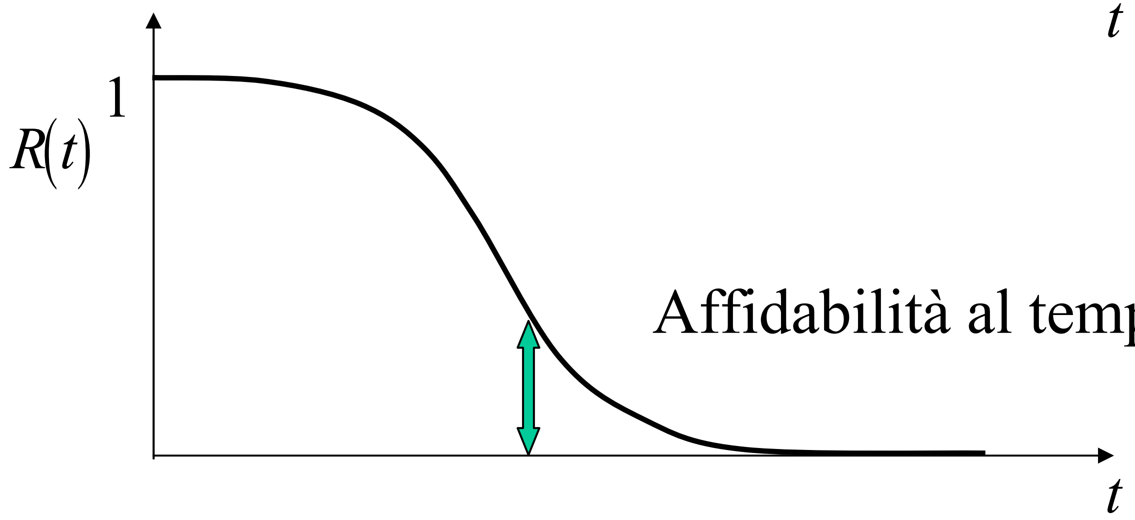
Tempo di vita o di funzionamento
operative life

$$P\left(t_1 < t < t_2\right) = \int_{t_1}^{t_2} f\left(t\right) dt$$

Reliability: *the probability that a device will perform its intended function during a specified period of time under stated conditions*

$$R(t) = P(t_g > t) = \int_t^{\infty} f(t_g)\,dt_g = 1 - F(t)$$





Tasso di guasto (*hazard rate*)

Consideriamo una popolazione di N_0 elementi che al tempo t_1 sono N_1, al tempo t_2 , dopo un intervallo di tempo Δt, si sono ridotti a N_2, si definisce **tasso di guasto medio** nell'intervallo t_1 - t_2 il valore:

$$\bar{h}\left(t_1, t_1 + \Delta t\right) = \frac{\dfrac{N_1 - N_2}{N_1}}{\Delta t} = \frac{1}{N_1} \frac{-\Delta N}{\Delta t}$$

riduzione relativa media di componenti nell'unità di tempo.

Passando al limite:

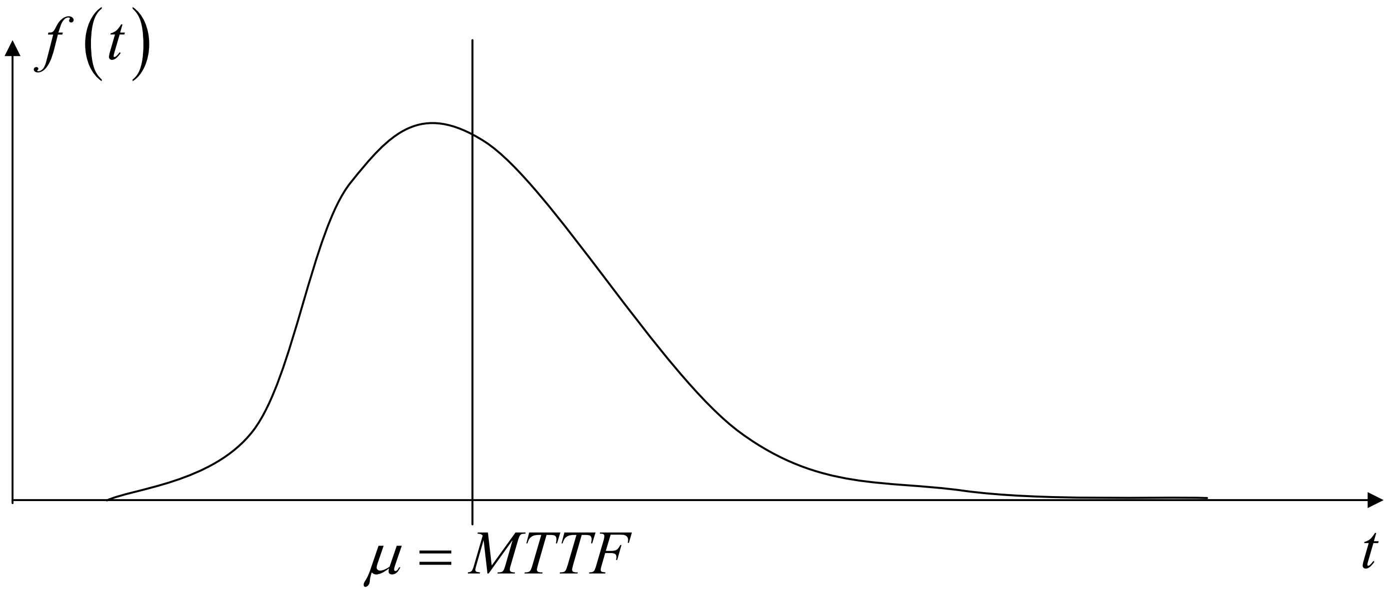
$$h\left(t_1\right) = \lambda\left(t_1\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{N_1} \frac{-\Delta N}{\Delta t}$$

Ma, al limite:

$$-\Delta N = N_0 \cdot f\left(t_1\right) \cdot \Delta t \qquad\qquad N_1 = N_0 \cdot R\left(t_1\right)$$

$$\boxed{h\left(t\right) = \lambda\left(t\right) = \frac{f\left(t\right)}{R\left(t\right)}}$$

Definizioni affidabilistiche
MTTF *mean time to failure*

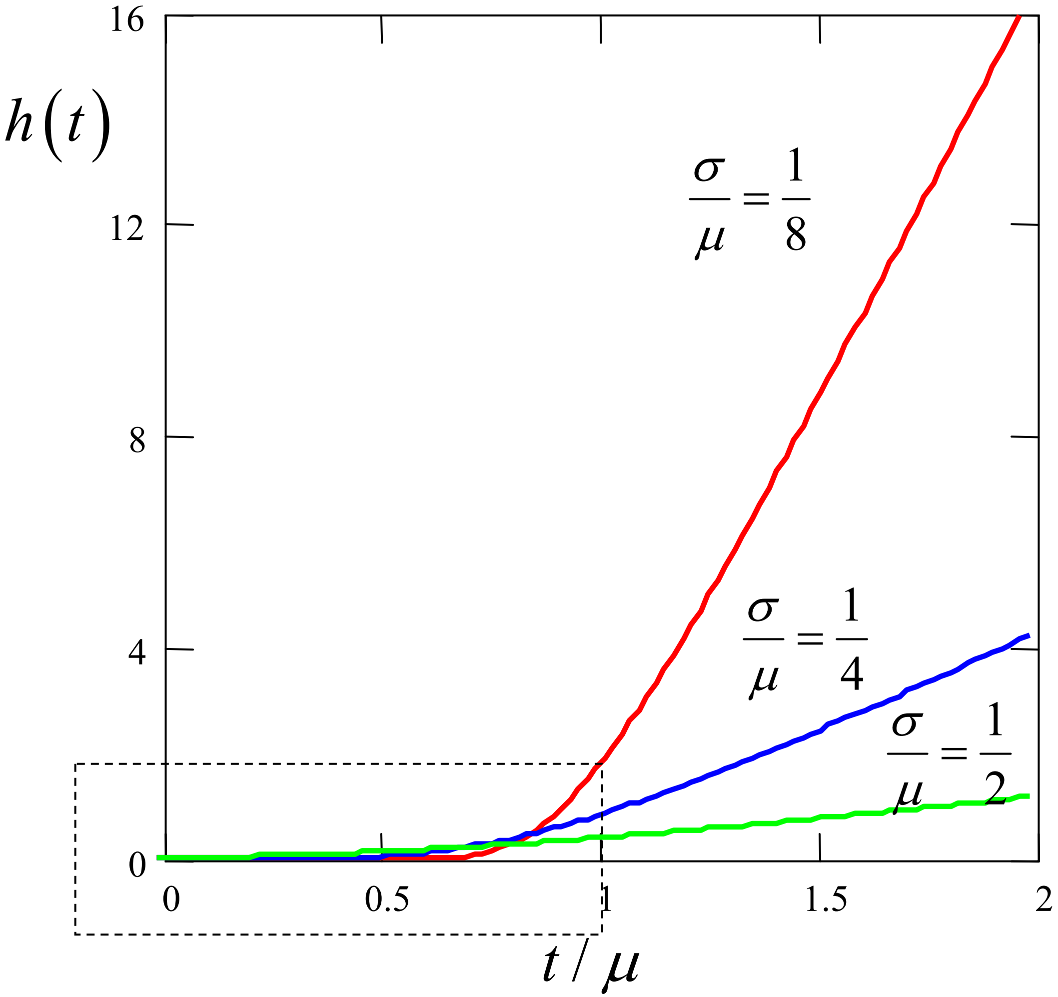


Esercizio 4.2. Un componente ha una distribuzione di tempo di guasto gaussiana con *MTTF*=30h e deviazione standard 5h. Considerando di averne posti in esercizio contemporaneamente 2500, determinare:

1) dopo quanto tempo (t_1) l'affidabilità si riduce al 70% (ris. 27.4h)
2) Il tasso di guasto al tempo t_1 (ris. 0.099h^{-1})
3) Quanti elementi si presume si rompano nei 5 minuti che seguono t_1 (ris. 14.5)

Tasso di guasto per la gaussiana

$$h(t)=\lambda(t)=\frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^{\infty} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du}$$



Tasso di guasto per la gaussiana

Andamento prima del MTTF