Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

Lezione 5:

Funzioni di variabili aleatorie

Funzione di variabile aleatoria continua

Sia data una V.A. continua con distribuzione nota, se applichiamo una funzione per ottenere una nuova V.A., come sarà la sua distribuzione?

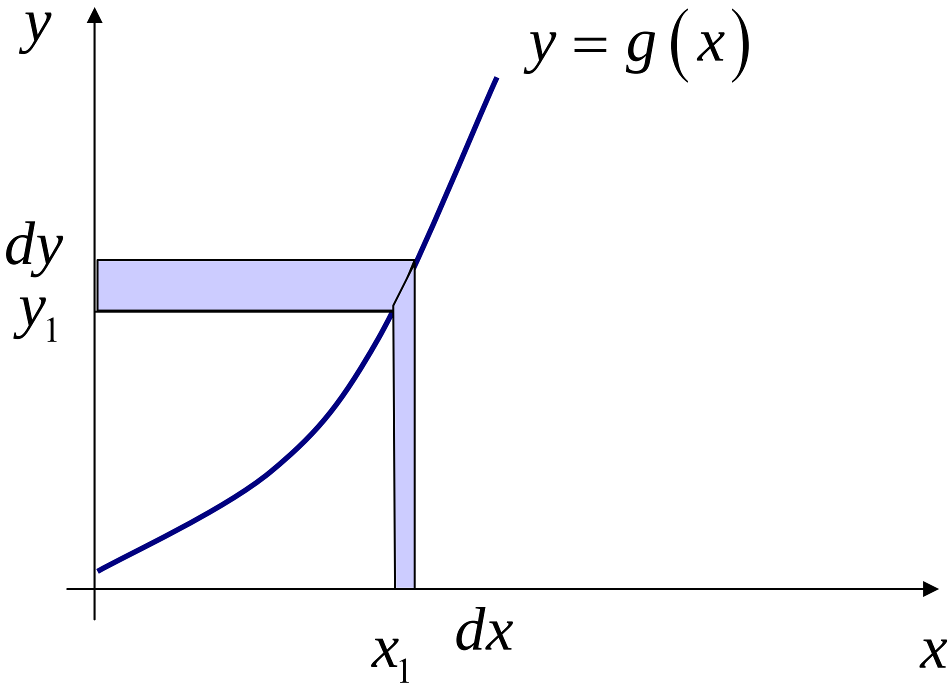
Esempio 5.1

Il raggio di tappi di sughero *X* è una variabile aleatoria normale con μ=25mm e σ=3mm, determinare la distribuzione dell'area *Y*.

$$X = N\left(x, 25, 3\right) \qquad\qquad Y = \pi X^2$$

$$Y = ?$$

Caso elementare: relazione monotona



$$x_1 = g^{-1}(y_1)$$

$$dy = g'(x_1)\,dx$$

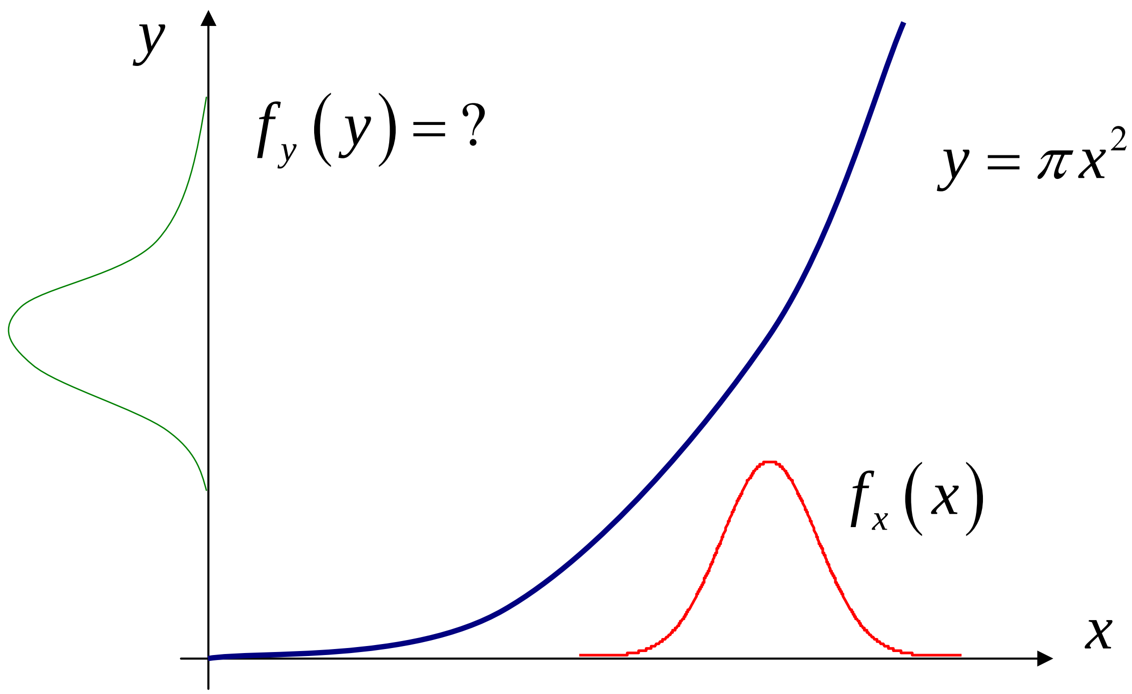
$$P\{y_1 < y < y_1 + dy\} = f_y(y_1)|dy|$$

$$P\{x_1 < x < x_1 + dx\} = f_x(x_1)|dx|$$

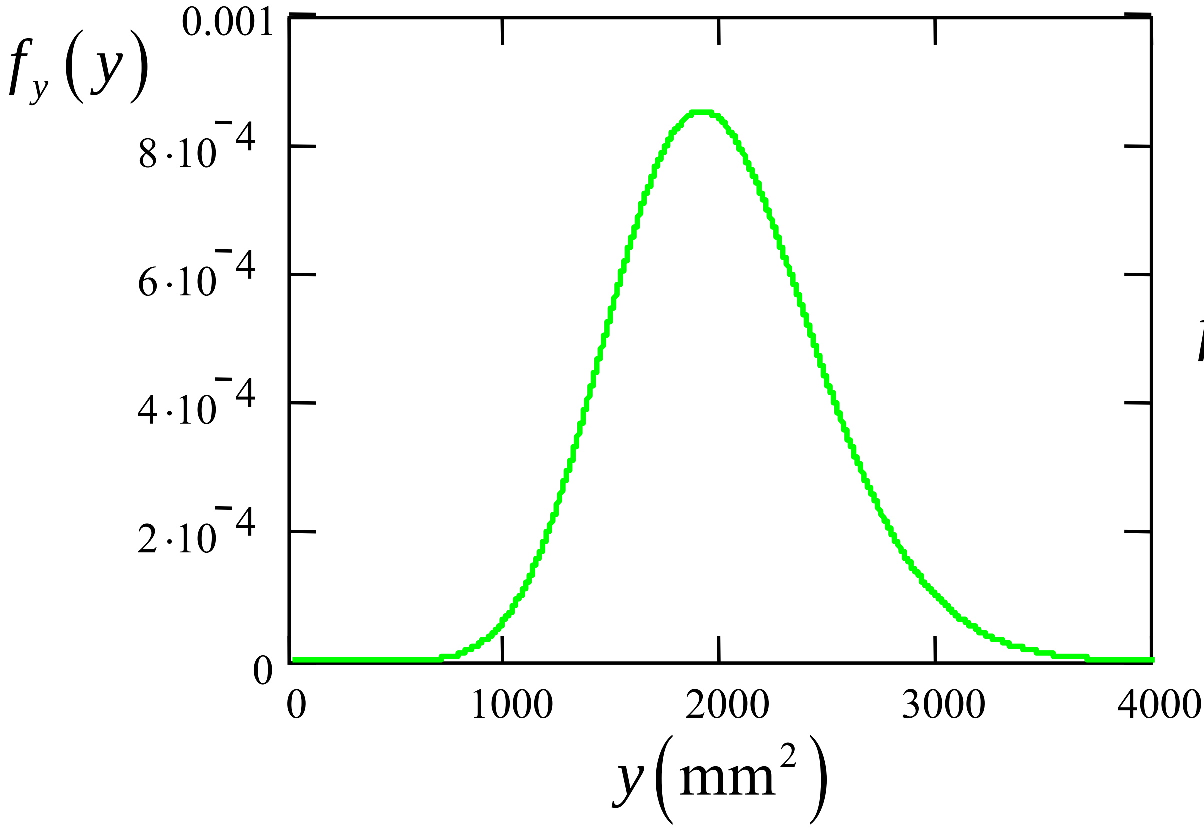
$$f_y(y_1)|dy| = f_x(x_1)|dx|$$

$$\boxed{f_y(y) = \frac{f_x(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = \frac{f_x(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_x\left(g^{-1}(y)\right)}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}}$$

Soluzione esempio 5.1



$$f_y(y) = \frac{N(x, 25, 3)}{2\pi x} = \frac{N\left(\sqrt{\frac{y}{\pi}}, 25, 3\right)}{2\sqrt{\pi y}}$$



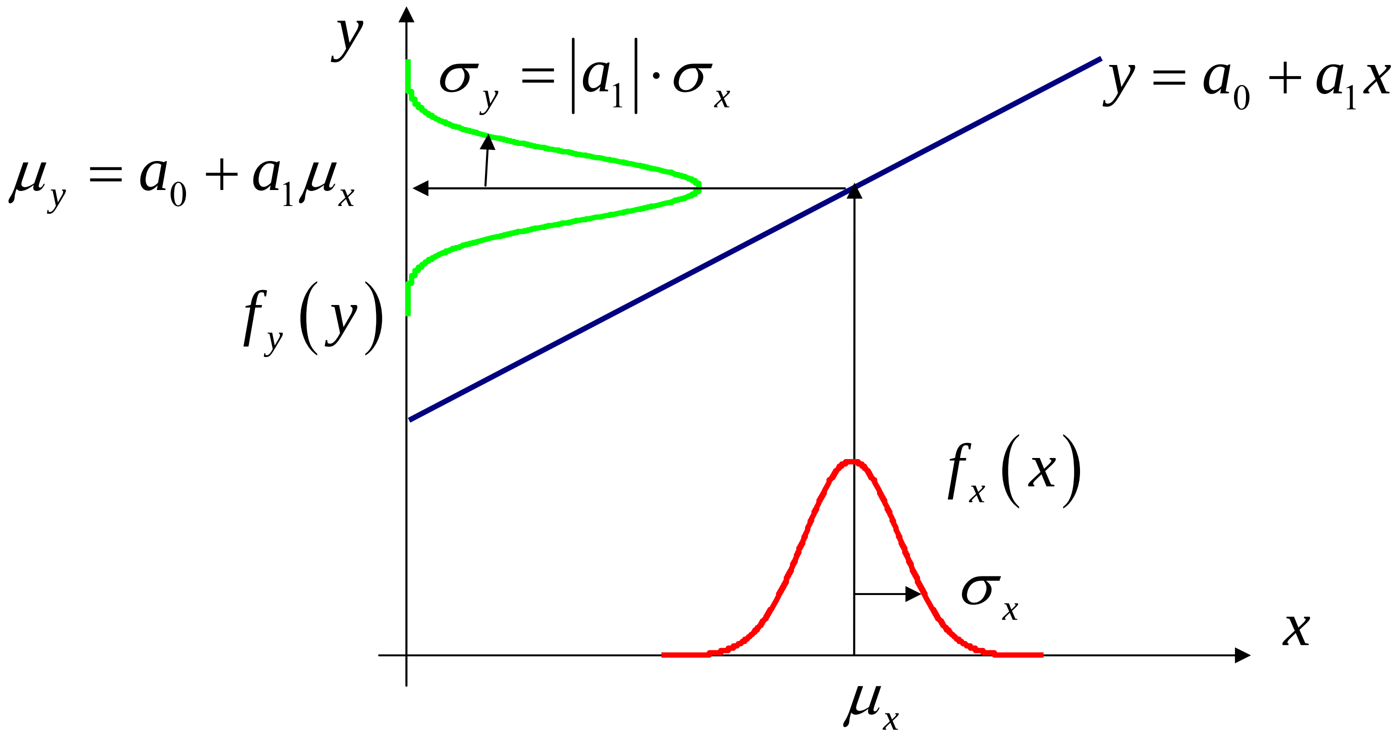
$$f_y(y) = \frac{N\left(\sqrt{\frac{y}{\pi}}, 25, 3\right)}{2\sqrt{\pi y}}$$

$$\mu_y = 1992\mathrm{mm}^2 \qquad \sigma_y = 473\mathrm{mm}^2$$

Skewness: $$\gamma_1 = E\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^3 = 0.358 > 0$$

$$\pi\cdot\mu_x^2 = 1963\mathrm{mm}^2$$

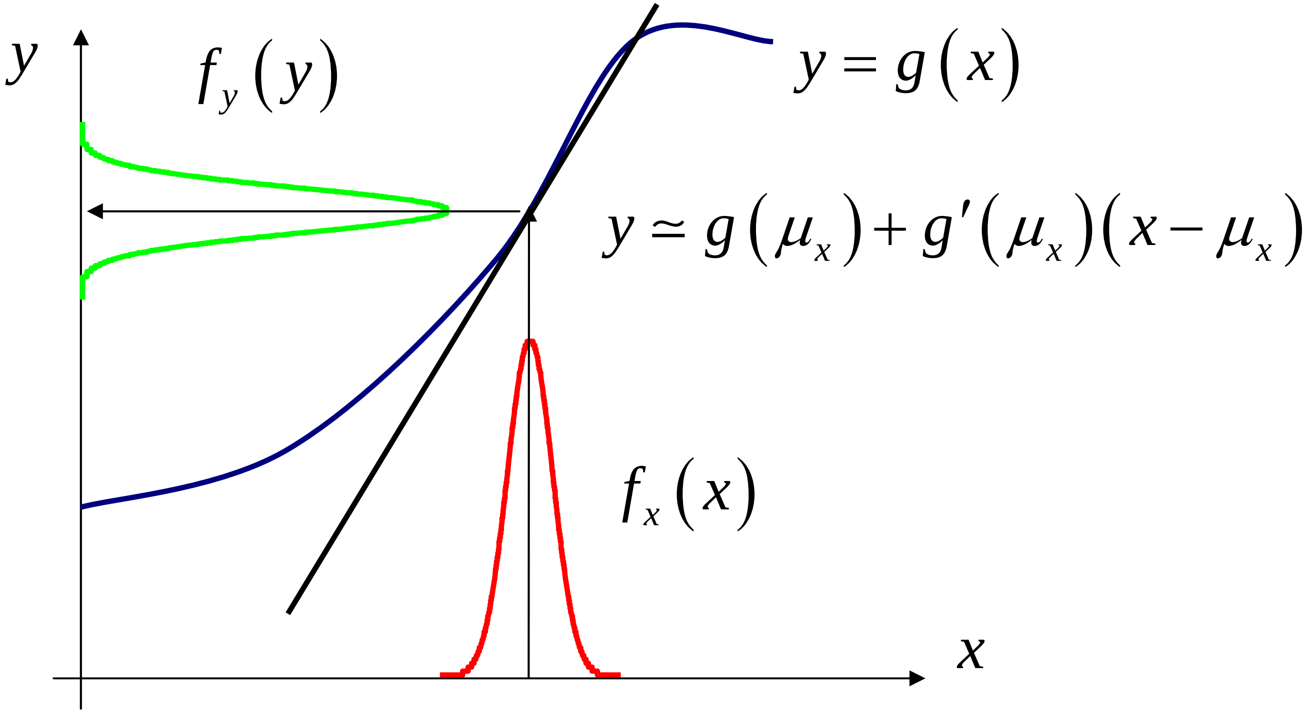
Caso elementare: trasformazione lineare



$$f_y(y) = \frac{N\left(\dfrac{y}{a_1}, 25, 5\right)}{|a_1|} = N\left(y, a_0 + a_1\mu_x, |a_1|\sigma_x\right)$$

Una trasformazione lineare a parametri deterministici costanti di una V.A. non modifica la natura della distribuzione: se contraggo la variabile ($|a_1|<1$) aumento di conseguenza la densità

Trasformazione per una V.A. con basso CV



$$f_y(y) \cong \frac{N\left(\dfrac{y}{g'(\mu_x)}, \mu_x, \sigma_x\right)}{\left|g'(\mu_x)\right|} = N\left(y, g(\mu_x), \left|g'(\mu_x)\right| \cdot \sigma_x\right)$$

In una trasformazione localmente regolare (derivabile per $x=\mu_x$) di una V.A. con basso CV, la trasformata conserva la natura

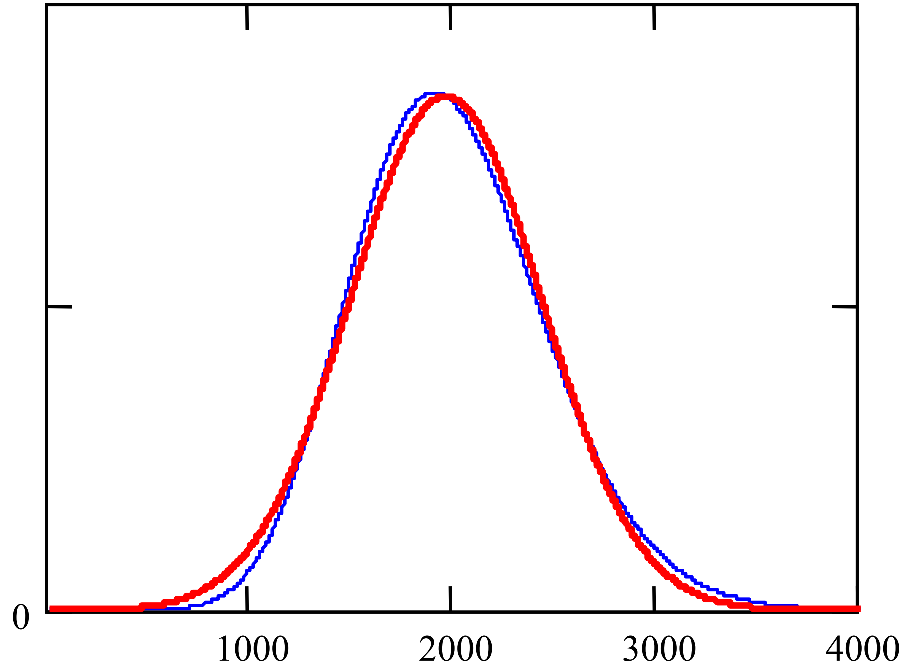
Esempio 5.1 (bis)

Il diametro di tappi di sughero è una variabile aleatoria normale con μ=25mm e σ=3mm, determinare la distribuzione dell'area con approssimazione lineare locale.

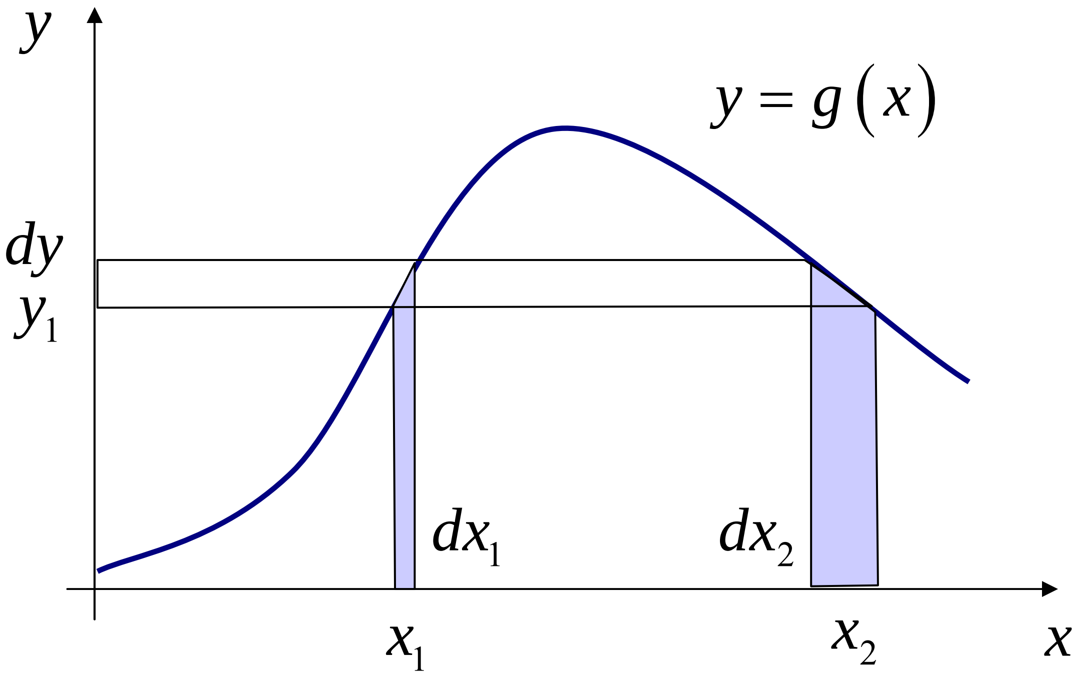
Il CV è solo 0.12 per cui l'approssimazione lineare dovrebbe essere accettabile

$$\mu_y = g(\mu_x) \cong 1963\text{mm}^2; \qquad \sigma_y \cong g'(\mu_x)\sigma_x = 471\text{mm}^2$$

$$\mu_y = 1992\text{mm}^2 \qquad\qquad \sigma_y = 473\text{mm}^2$$



Caso generale: relazione non monotona



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g^{-1}(y_1)$$

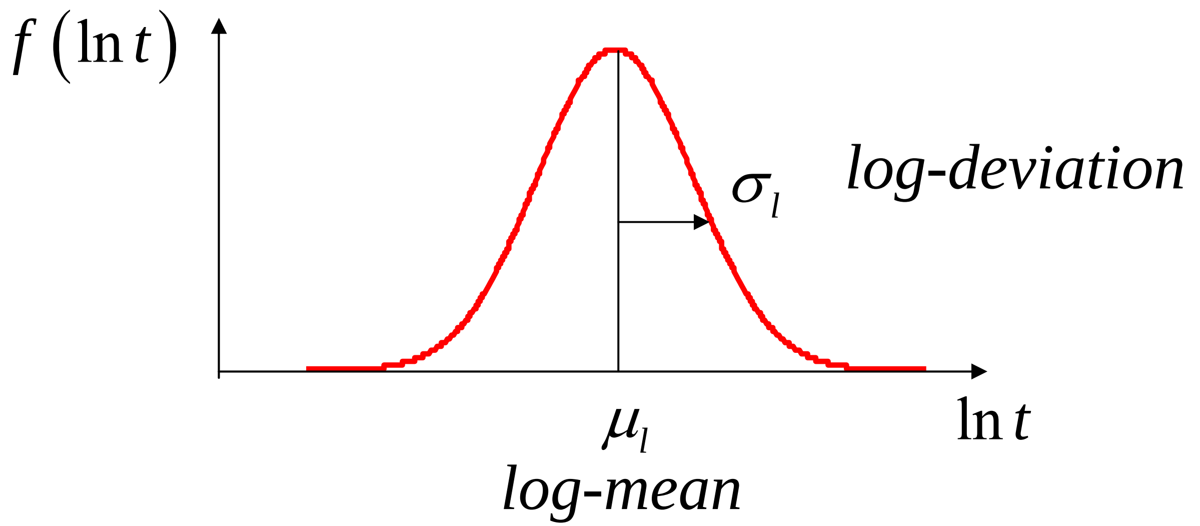
$$P\{y_1 < y < y_1 + dy\} = f_y(y_1)\,dy =$$

$$P\{x_1 < x < x_1 + dx_1\} + P\{x_2 + dx_2 < x < x_2\} = f_x(x_1)|dx_1| + f_x(x_2)|dx_2|$$

$$\boxed{f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|}}$$

V.A. log-normale

Consideriamo una V.A. (spesso il tempo) il cui logaritmo sia distribuito in modo gaussiano (esempio tipico: le durate in fatica)

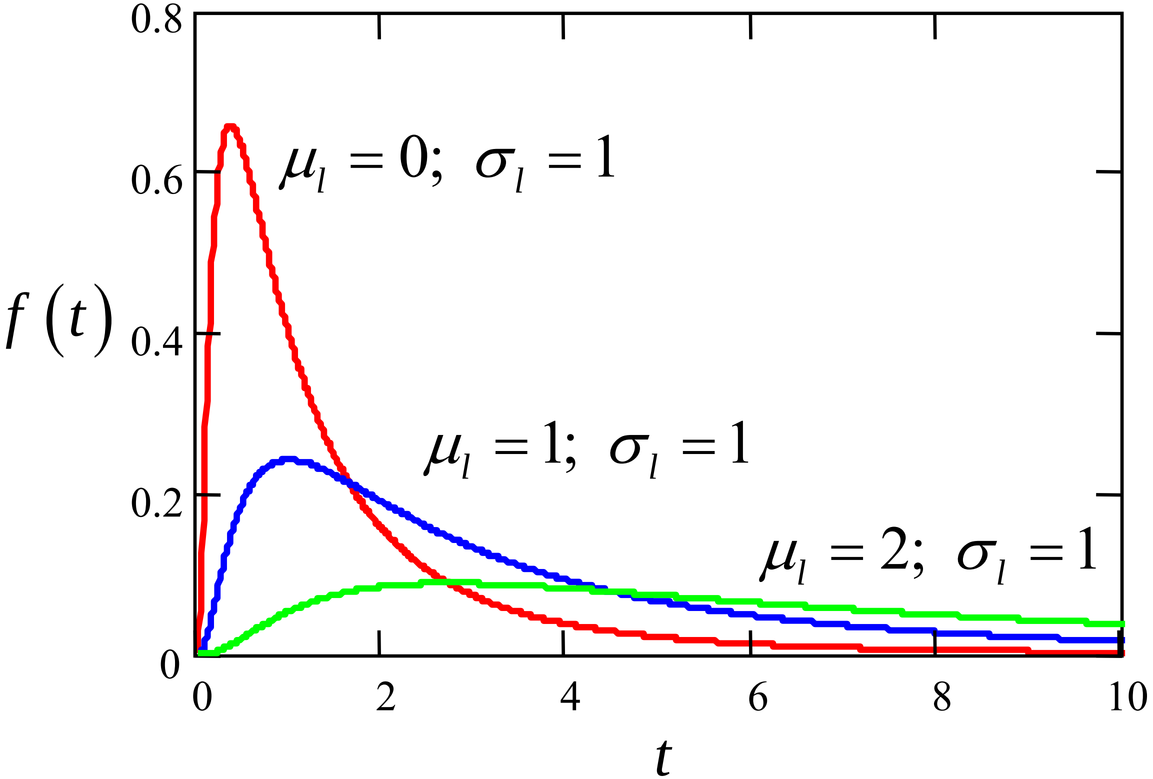


$$f(\ln t) = N(\ln(t), \mu_l, \sigma_l) \qquad f(t) = ?$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sigma_l t \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[\ln(t)-\mu_l]^2}{2\sigma_l^2}}} \qquad \boxed{f(t) = \frac{\log(e)}{\sigma_l t \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[\log(t)-\mu_l]^2}{2\sigma_l^2}}}$$

Logaritmi naturali — Logaritmi in base 10

Distribuzioni log-normali



$$\sigma_l = \ln\left[\left(\frac{\sigma_t}{\mu_t}\right)^2 + 1\right]; \qquad \mu_l = \ln \mu_t - \frac{\sigma_l^2}{2}$$

Esempio 5.2

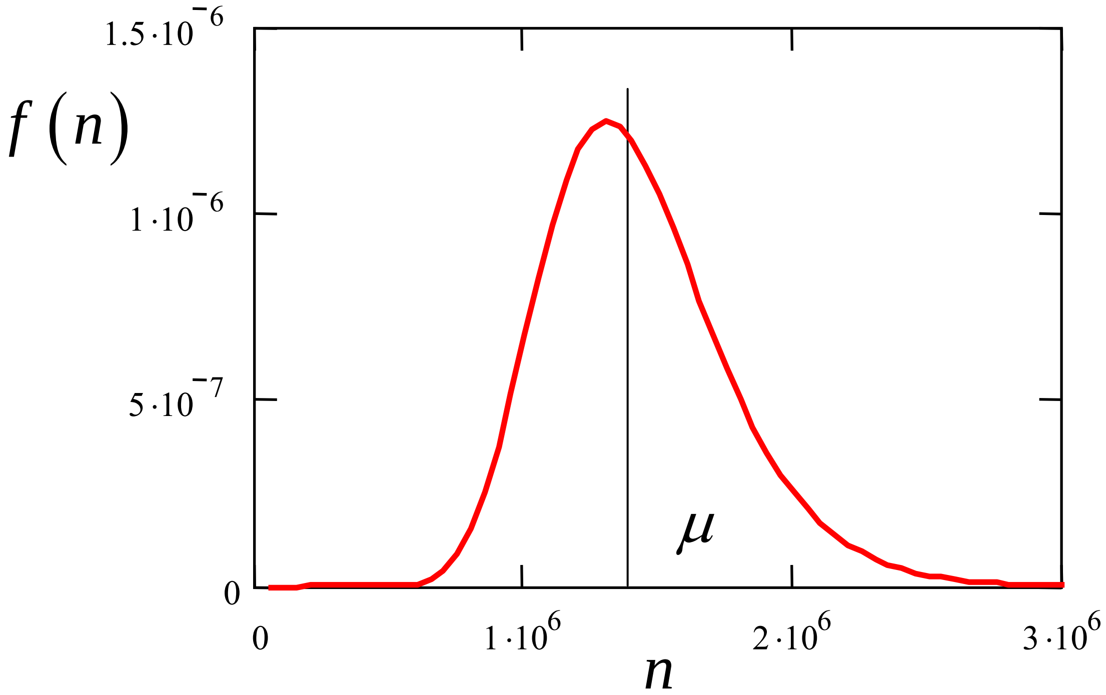
La durata a fatica di molle a elica sollecitate con cicli di ampiezza costante segue una log-normale (base 10) con parametri:

$$\mu_l = 6.1399; \;\; \sigma_l = 0.1035$$

determinare:

- Il valor medio μ della vita (in cicli)
- La deviazione standard effettiva σ della vita (in cicli)
- L'affidabilità a 10^6 cicli di carico
- Dopo quanti cicli l'affidabilità della molla arriva al 99%

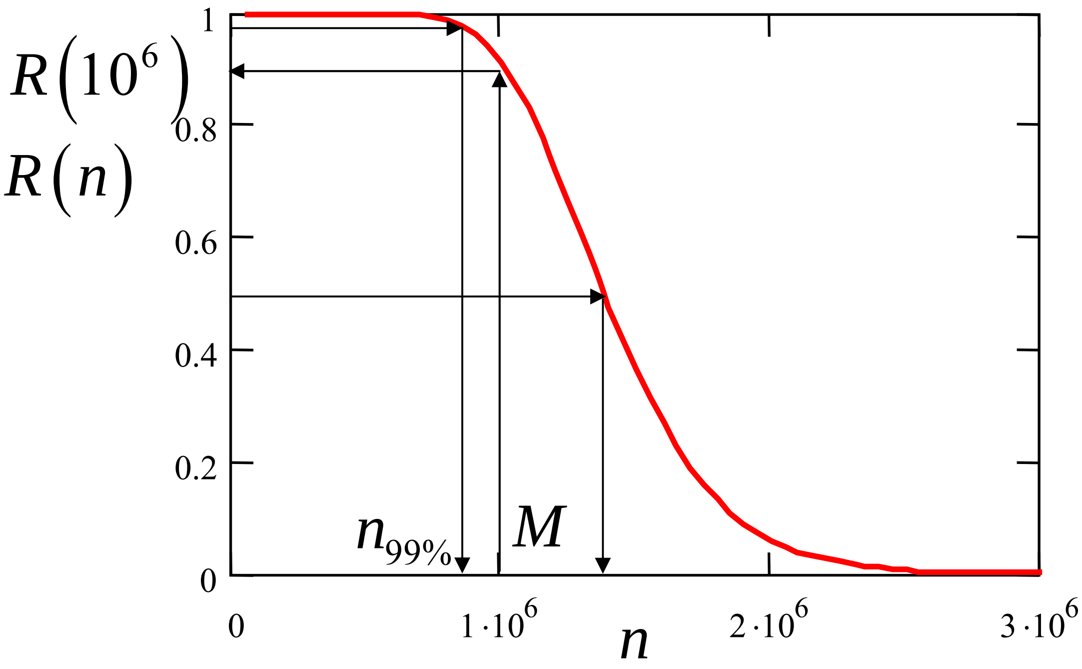
$$f(n) = \frac{\log(e)}{\sigma_l n \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left[\log(n) - \mu_l\right]^2}{2\sigma_l^2}}$$



Risposta 1) $$\mu = \int_0^\infty n \cdot f(n)\, dn = 1.42 \cdot 10^6$$

$$\log(\mu) = 6.152 \neq \mu_l$$

Risposta 2) $$\sigma^2 = \int_0^\infty (n-\mu)^2 \cdot f(n)\, dn \Rightarrow \sigma = 0.3432 \cdot 10^6$$



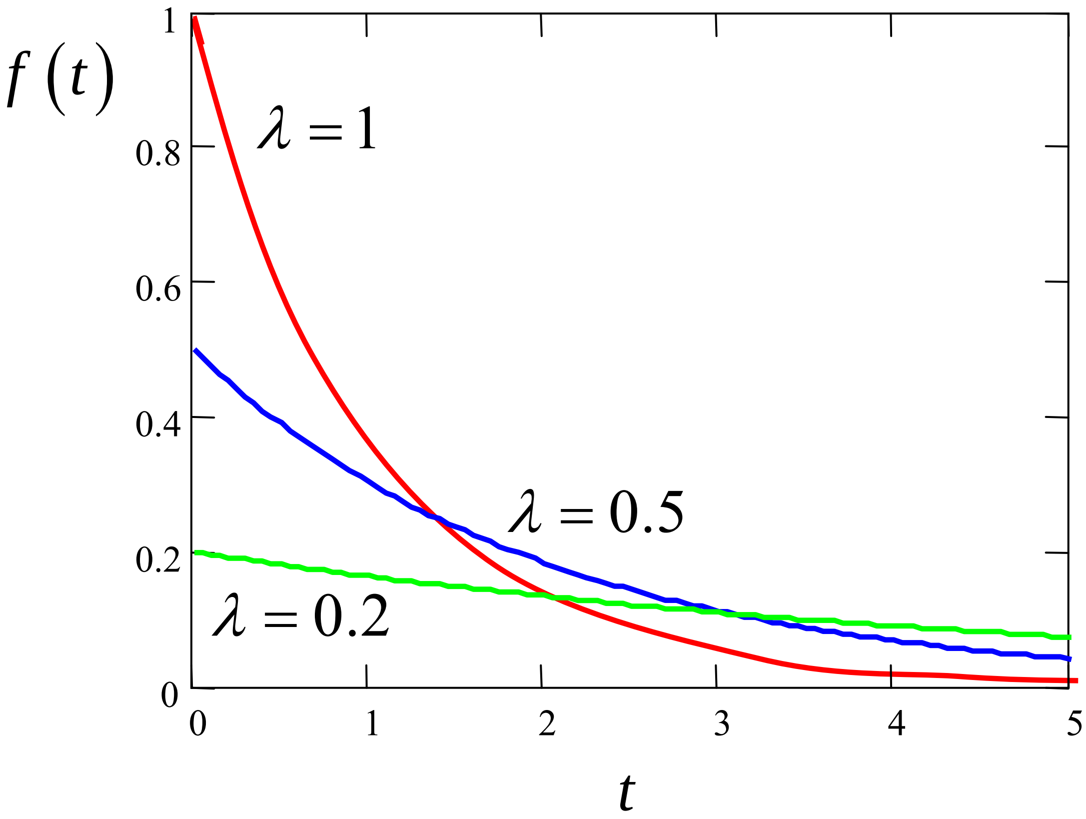
Mediana $\quad M = 1.380 \cdot 10^6 \quad \log M = \mu_l$

Risposta 3) $\quad R(10^6) = 0.912$

Risposta 4) $\quad n_{R=99\%} = 0.793 \cdot 10^6$

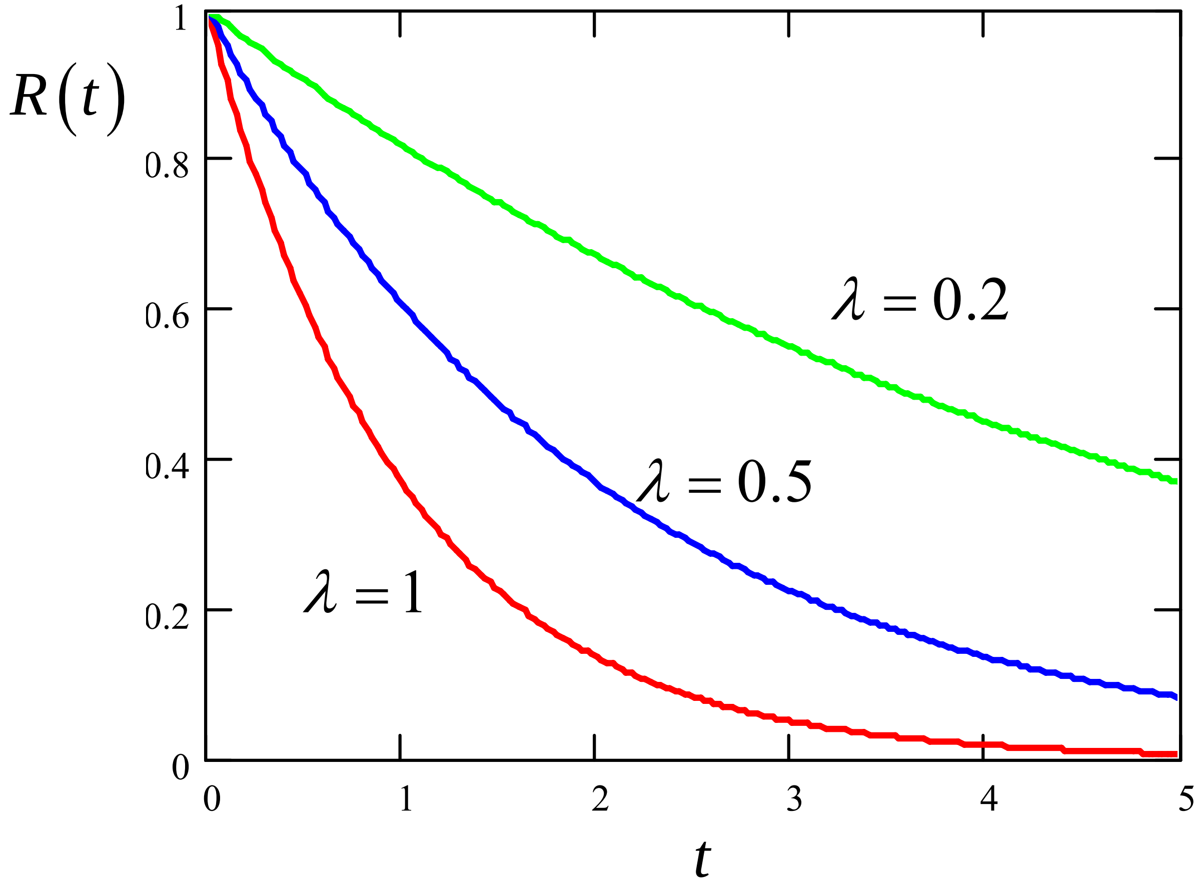
V.A. esponenziale: densità

$$f\left(t,\lambda\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$$



VA esponenziale: affidabilità

$$F(t,\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad R(t,\lambda) = e^{-\lambda t}$$



VA esponenziale: tasso di guasto

$$h(t,\lambda) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \quad \text{(costante)}$$

$$MTTF = \mu = \frac{1}{\lambda}; \qquad R(\mu) = e^{-1} = 0.368$$

Tipico di sistemi complessi, spesso elettrici-elettronici

Componente	**Tasso λ ($10^{-6}h^{-1}$)**
Generatore AC	0.81
Fusibile	26.0
Lampada neon	0.49
Interruttore	107.3
Turbina/generatore	626.2
Motore elettrico	0.9
Ingranaggio	0.17
Cuscinetto a sfere	1.1
O-ring	2.4
Ventilatore	2.8

Esempio 5.3: Problema dello Tsunami!

Il valore medio misurato dell'altezza delle onde su una costa è 0.6m. Assumendo per la distribuzione delle altezze un modello esponenziale, determinare la percentuale di onde con altezza superiore a 2.5m

$$\mu = 0.6\text{m} \Rightarrow \lambda = 1.66\ \text{m}^{-1}$$

$$P\left(x \geq 2.5\right) = e^{-\frac{2.5}{0.6}} = 1.6\%$$

Esempio 5.4

L'intensità dei terremoti è modellata con distribuzione esponenziale. Si definisce OBE (Operating Base Earthquake) un'intensità sismica (x_1) che ha probabilità di essere superata pari a 10^{-3} e SSE (Safe Shutdown Earthquake) un'intensità sismica (x_2) che ha probabilità di essere superata pari a 10^{-6}. Determinare il rapporto di intensità tra SSE e OBE.

$$e^{-\lambda x_1} = 10^{-3}; \quad e^{-\lambda x_2} = 10^{-6}$$

$$x_1 = \frac{6.908}{\lambda}; \quad x_2 = \frac{13.816}{\lambda}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = 2$$

Esempio 5.5

Un componente ha probabilità di guasto esponenziale con un *MTTF* di 700h.
1) Determinare la probabilità che il componente arrivi a 400h di funzionamento
2) Dopo quanto tempo la probabilità di guasto arriva al 50%?
3) Sapendo che dopo 200h di funzionamento il componente è integro, qual è la probabilità che si guasti nelle 24h successive?
4) Ripetere il calcolo precedente dopo 400h di funzionamento
5) Al momento della messa in esercizio, calcolare la probabilità che il componente si guasti nell'intervallo compreso tra 200h e 224h di funzionamento.

$$R(t) = e^{-t/700}$$

1) $R(400) = 56.5\%$

2) $R(t) = 0.5 \Rightarrow t = 156.2\text{h}$

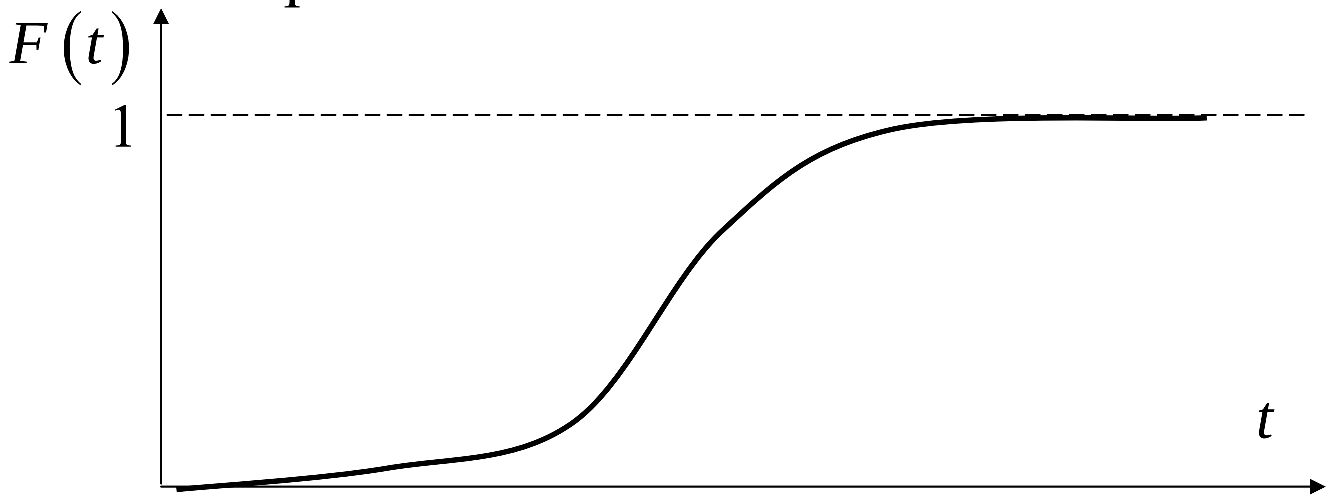
3) $P = \dfrac{R(200) - R(224)}{R(200)} = 3.37\%; \qquad P \cong \lambda \cdot 24 = 3.43\%$

4) $P = \dfrac{R(400) - R(424)}{R(400)} = 3.37\%; \qquad P \cong \lambda \cdot 24 = 3.43\%$

5) $P = R(200) - R(224) = 2.20\%$

V.A. di Weibull

Modello a due parametri



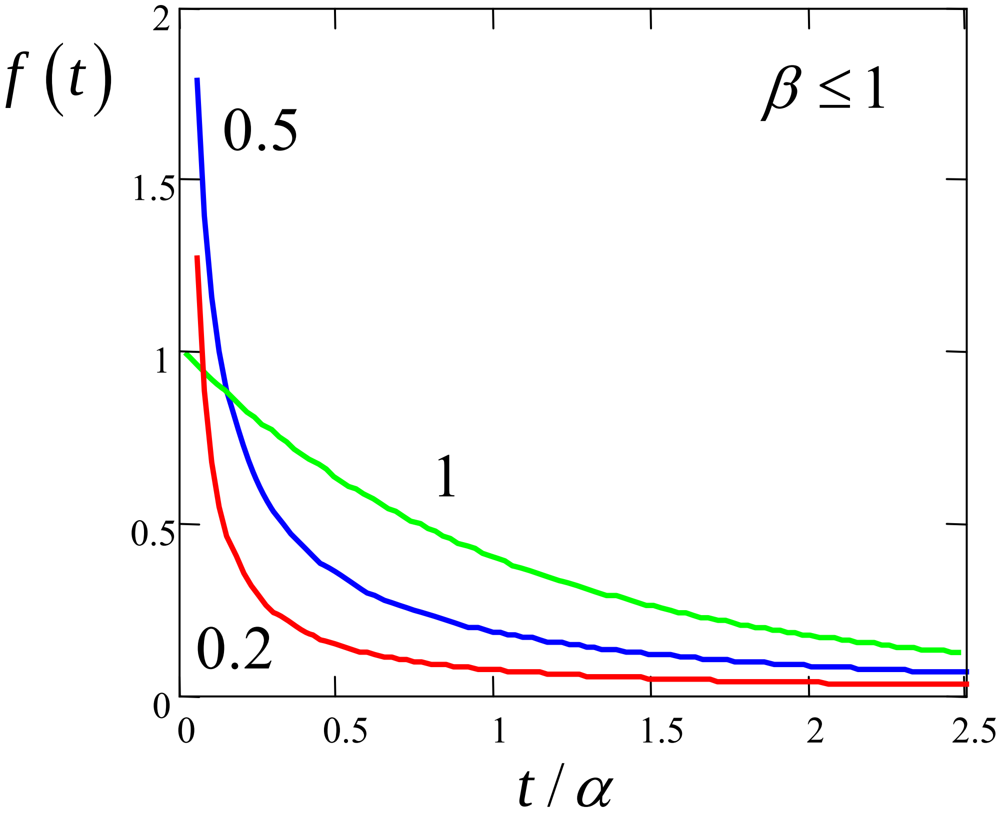
$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

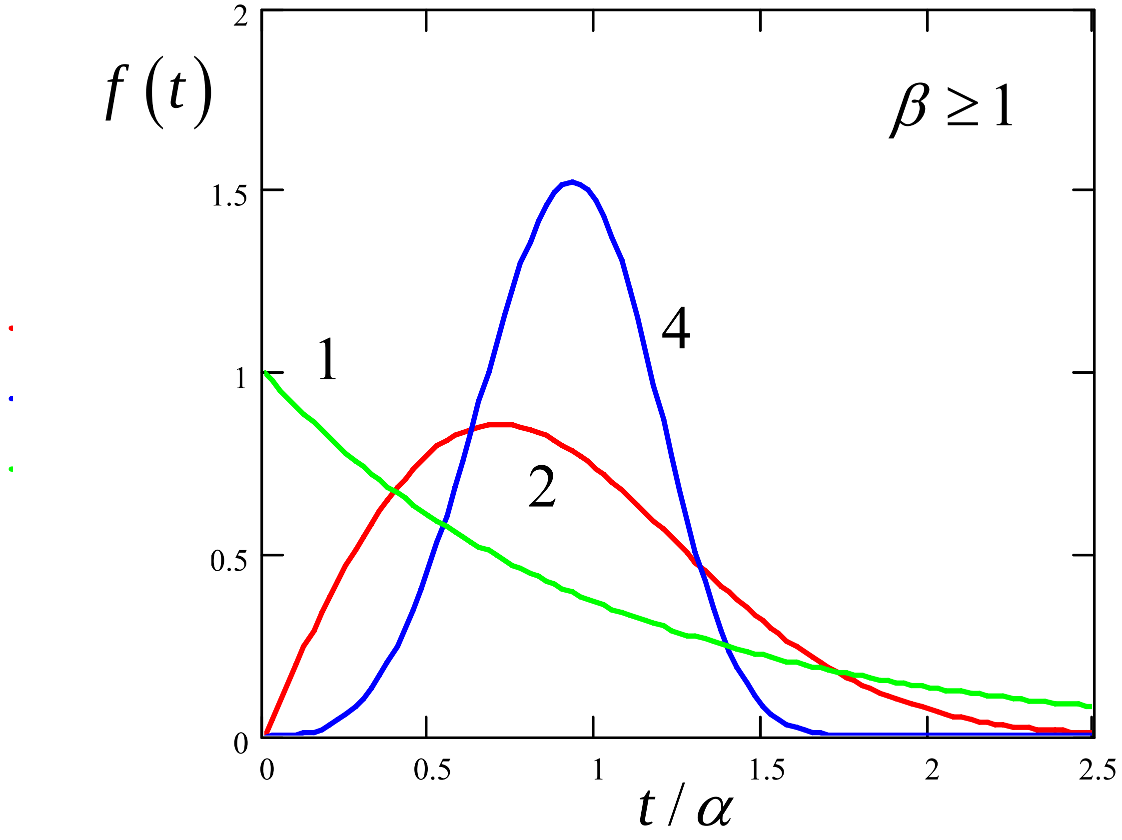
α fattore di scala: tempo caratteristico (dimensioni di t)
o lunghezza caratteristica

β fattore di forma (numero puro)

V.A. di Weibull: densità (1/2)

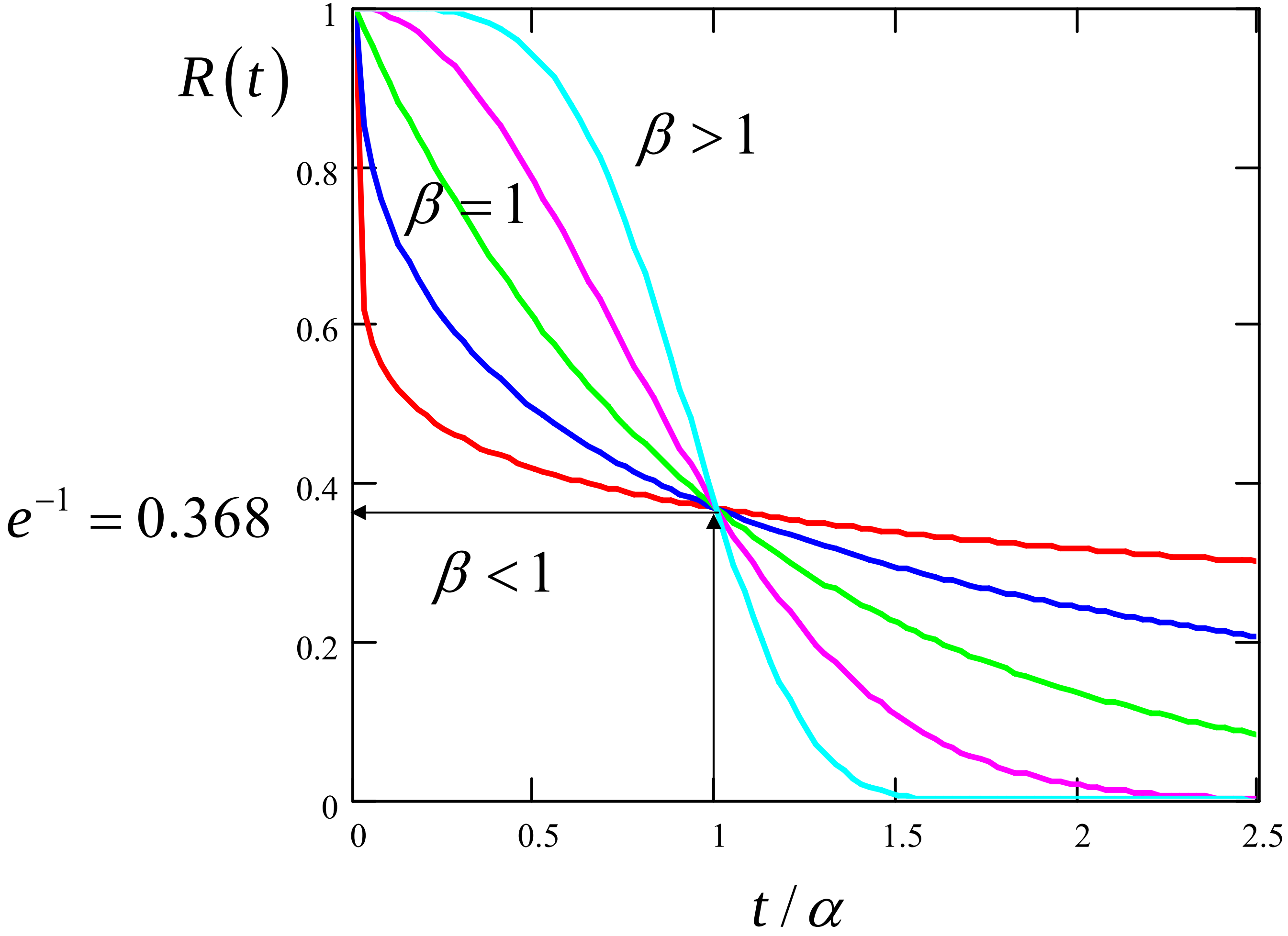


V.A. di Weibull: densità (2/2)

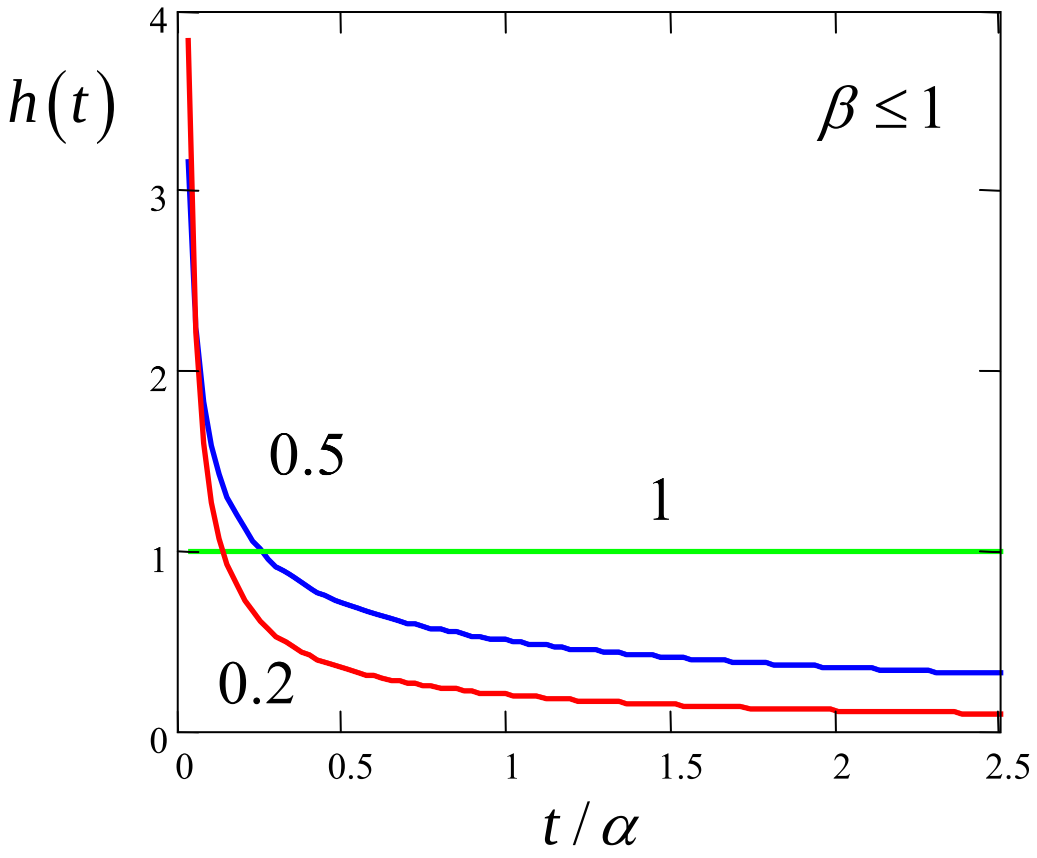


V.A. di Weibull affidabilità

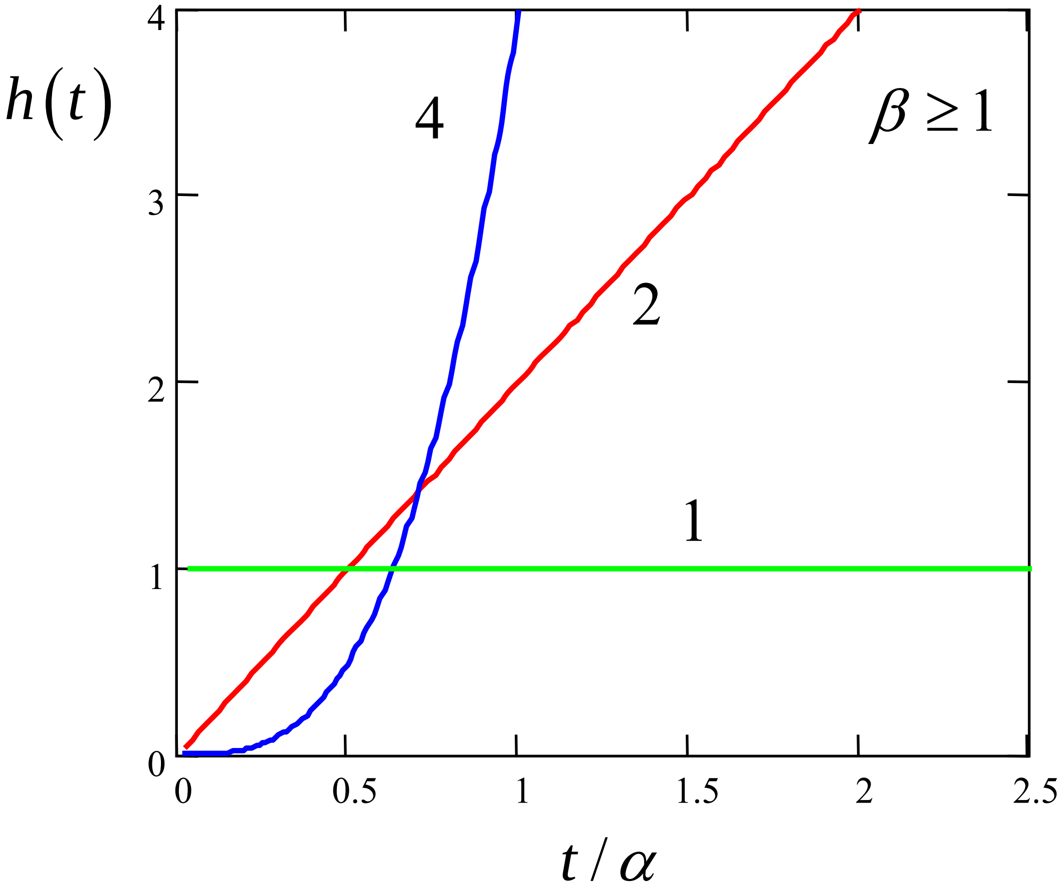
$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$$



V.A. di Weibull: tasso di guasto (1/2)



V.A. di Weibull: tasso di guasto (2/2)

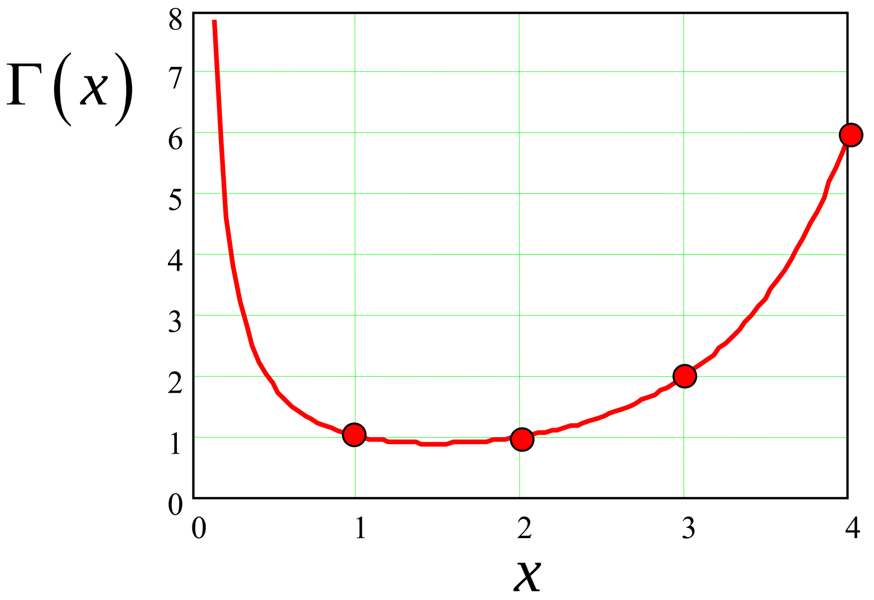


V.A. di Weibull: parametri centrali (1/2)

Valor medio della distribuzione di Weibull

$$\mu = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt = \alpha \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \cdot e^{-u}\,du$$

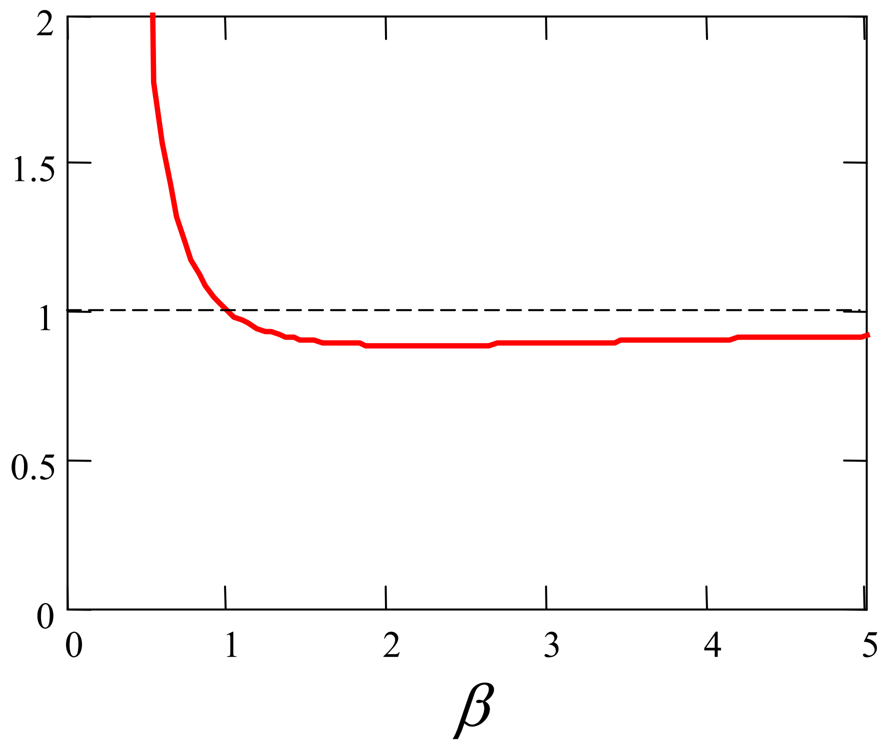


$$\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)$$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$$

V.A. di Weibull: parametri centrali (2/2)

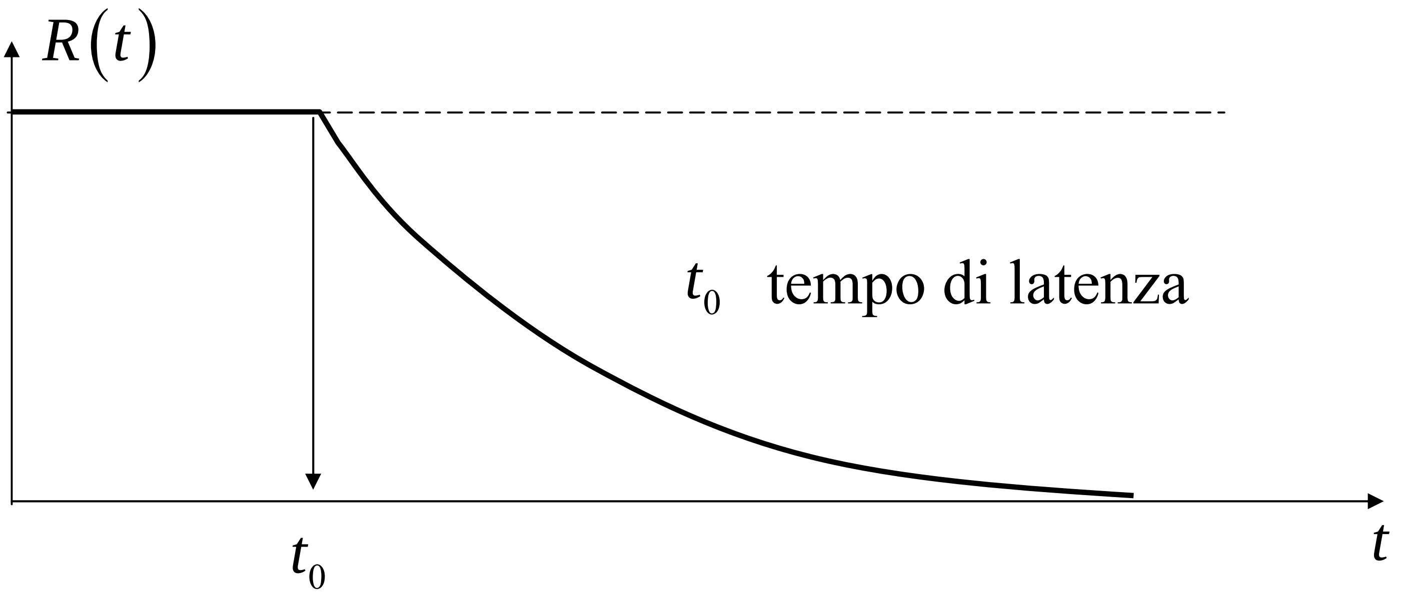
$$\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\mu}{\alpha}$$



Varianza della distribuzione di Weibull

$$\sigma^2=\int_0^\infty (t-\mu)^2\cdot f(t)\,dt=\alpha^2\cdot\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\mu^2$$

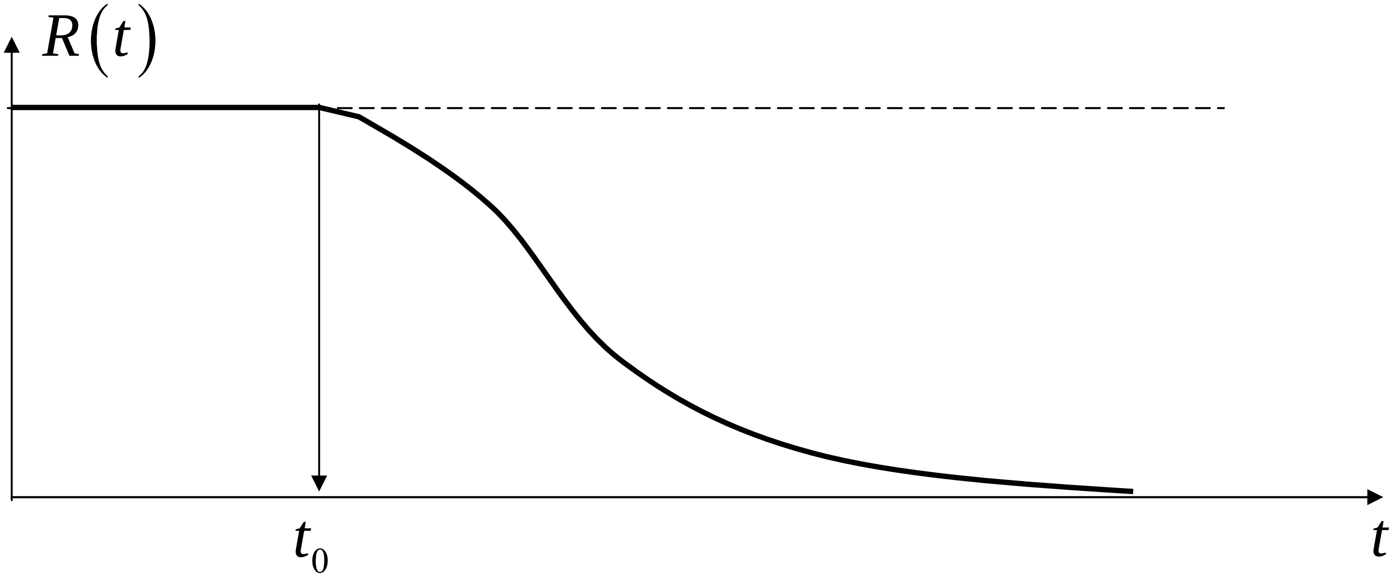
Funzioni a più parametri: Esponenziale a due



$$f(t,\lambda,t_0)=\begin{cases}0 & t\le t_0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda(t-t_0)} & t>t_0\end{cases}$$

$$R(t,\lambda,t_0)=\begin{cases}1 & t\le t_0\\ e^{-\lambda(t-t_0)} & t>t_0\end{cases}$$

Funzioni a più parametri: Weibull a tre



$$f(t,\alpha,\beta,t_0)=\begin{cases}0 & t\le t_0\\ \dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\left(\dfrac{t-t_0}{\alpha}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)^{\beta}} & t>t_0\end{cases}$$

$$R(t,\alpha,\beta,t_0)=\begin{cases}1 & t\le t_0\\ e^{-\left(\frac{t-t_0}{\alpha}\right)^{\beta}} & t>t_0\end{cases}$$

Esempio 5.6

L'affidabilità della pompa di raffreddamento del motore di un veicolo commerciale è una Weibull con α=250000 km, β=0.65 e t_0=20000 km. Determinare:

1) il valore atteso della percorrenza con pompa integra
2) la probabilità che la pompa funzioni a 100000km
3) le percorrenze per una affidabilità di 90, 50, 30 e 10%
4) la probabilità che una pompa che ha fatto 100000km si rompa nel successivo viaggio di 500km

$$\alpha = 250\cdot 10^3\,\text{km};\ \beta = 0.65;\ x_0 = 20\cdot 10^3\,\text{km};\quad R(x,\alpha,\beta,x_0) = \min\left(1, e^{-\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^\beta}\right)$$

1) $$\mu = x_0 + \alpha\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = 362\cdot 10^3\,\text{km}$$

2) $$R\left(100\cdot 10^3\right) = 62\%$$

3)

R =	90%,	50%,	30%,	10%
$x(10^3\,\text{km})$ =	27.8,	162,	353,	922

4) $$P = \frac{R\left(100\cdot 10^3\right) - R\left(100.5\cdot 10^3\right)}{R\left(100\cdot 10^3\right)} = 0.19\%$$

Blending di distribuzioni

In certe situazioni vi sono due (o più) tipi diversi di effetti sovrapposti, esempi:

- Distribuzione delle altezze di soggetti di etnia diversa
- Guasti di sistemi dovuti a rotture di due (o più) componenti diverse
- Guasti prodotti da meccanismi diversi (esempio usura con fatica)

Esempio 5.7

Due torni A e B producono rispettivamente il 45% e il 55% dei cilindri di una fornitura. I diametri dei cilindri hanno distribuzioni gaussiane, i prodotti di A con μ_A e σ_A 20.8mm e 0.25mm risp. mentre quelli di B : μ_B e σ_B 20.3mm e 0.18mm risp.

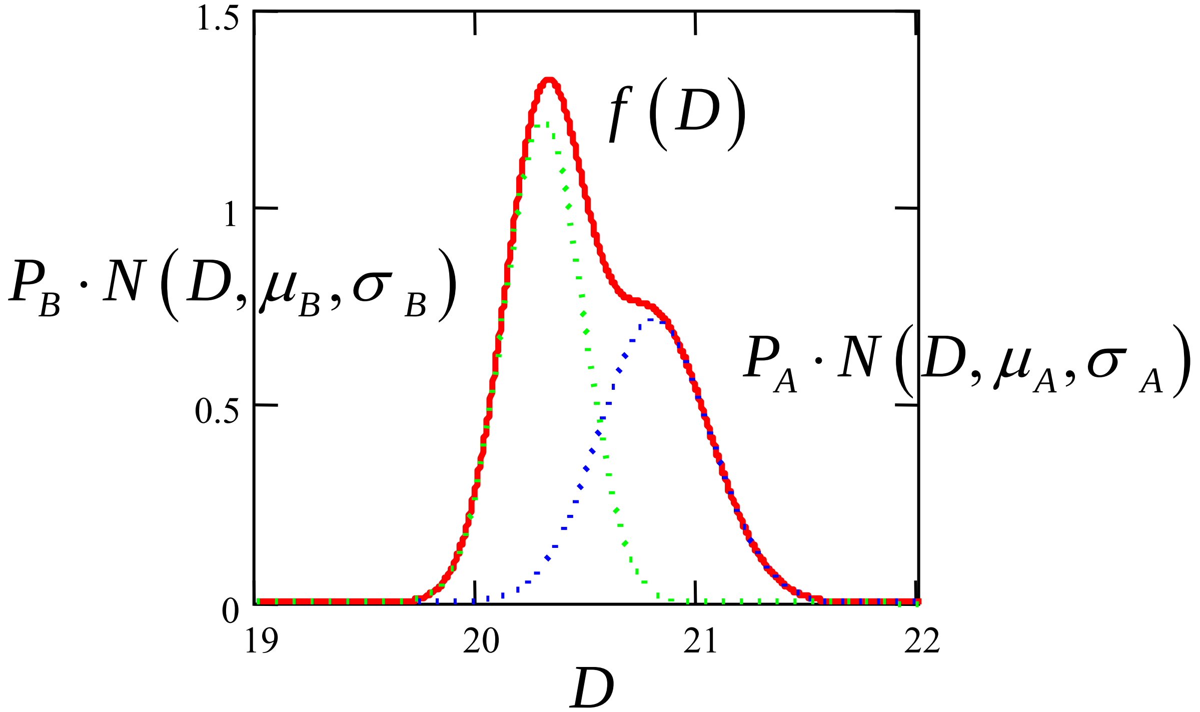
1) Rappresentare la distribuzione dei diametri dell'intera produzione determinandone media e deviazione standard

2) Il calibro passa-non passa del controllo di qualità ha estremi a D_1=20.1mm e D_2=20.9mm, determinare la percentuale di componenti scartata al controllo

3) Tracciare la distribuzione $f_n(D)$ del diametro degli elementi dopo il controllo di qualità

Indicate con $P_A = 0.45$ e $P_B = 0.55$ le frazioni di produzione dei due torni

$$f(D) = P_A \cdot N(D, \mu_A, \sigma_A) + P_B \cdot N(D, \mu_B, \sigma_B)$$



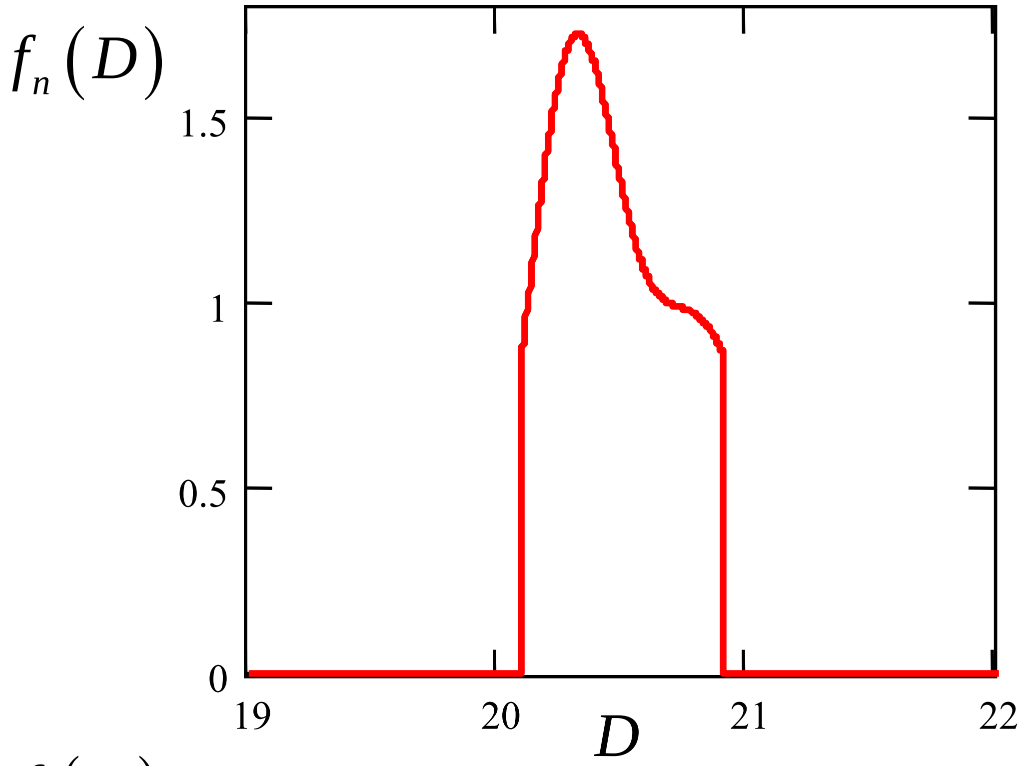
$$\mu_D = \int_{-\infty}^{\infty} D \cdot f(D) dD = P_A \cdot \mu_A + P_B \cdot \mu_B = 20.53\text{mm}$$

$$\sigma_D^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (D - \mu_D)^2 \cdot f(D) dD \Rightarrow \sigma_D = 0.328\text{mm}$$

$$\text{NB:} \quad \sigma_D \neq P_A \cdot \sigma_A + P_B \cdot \sigma_B$$

La frazione di componenti non conformi può essere ottenuta con le tabelle delle cumulate delle due normali:

$$P = 1 - \int_{D_1}^{D_2} f(D)\,dD = 23\%$$

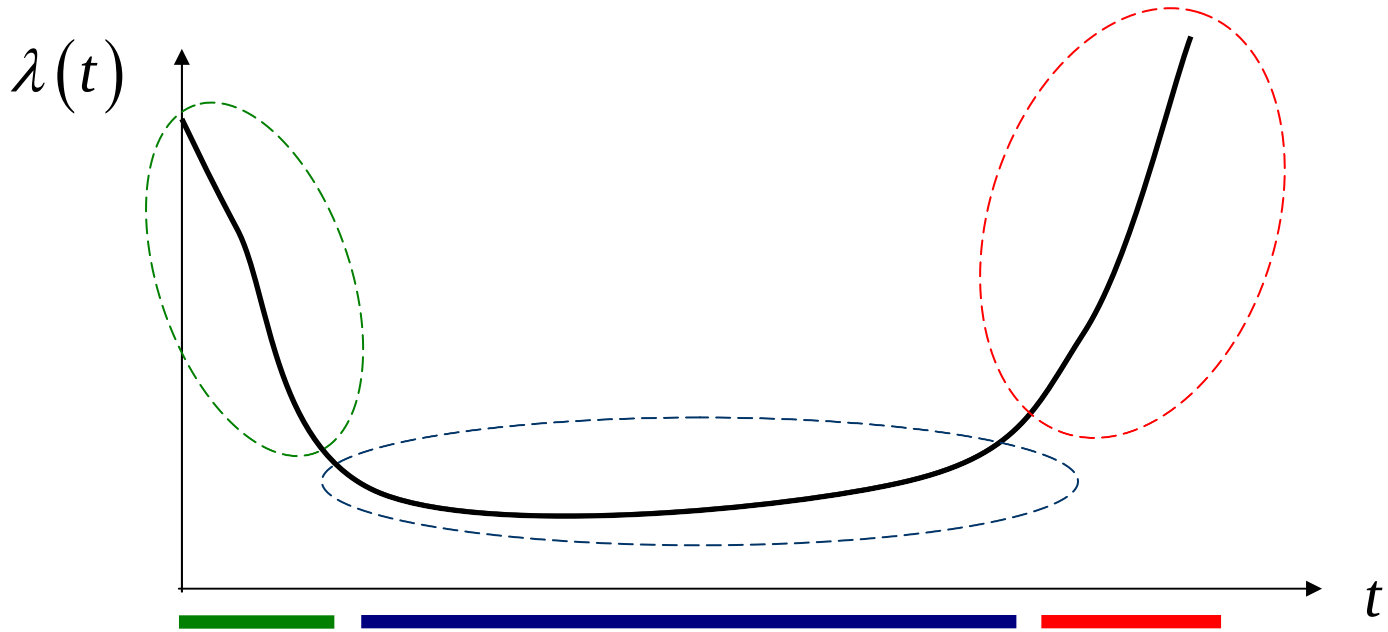


$$f_n(D) = \begin{cases} \dfrac{f(D)}{1-P} & D_1 < D < D_2 \\ 0 & D < D_1 \cup D > D_2 \end{cases}$$

Attenzione alla normalizzazione

Andamenti tipici del tasso di guasto in componenti meccanici

Bath-tub curve



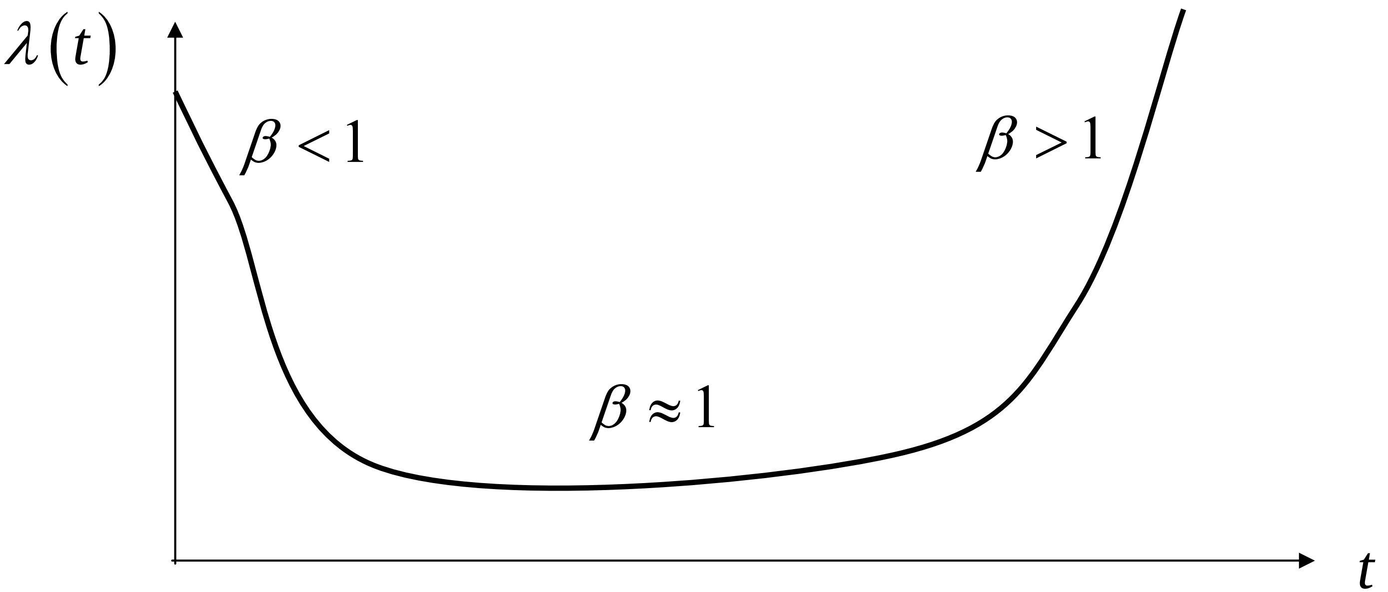
Start-up,
Infant-mortality
or early failures:
decreasing λ

Operative life
Random-failures:
constant λ

Ageing,
Wear-out failures
increasing λ

Rappresentazione completa di una bathtub con blending di Weibull

Con distribuzioni di Weibull è possibile riprodurre tassi di guasto che hanno trend diversi:

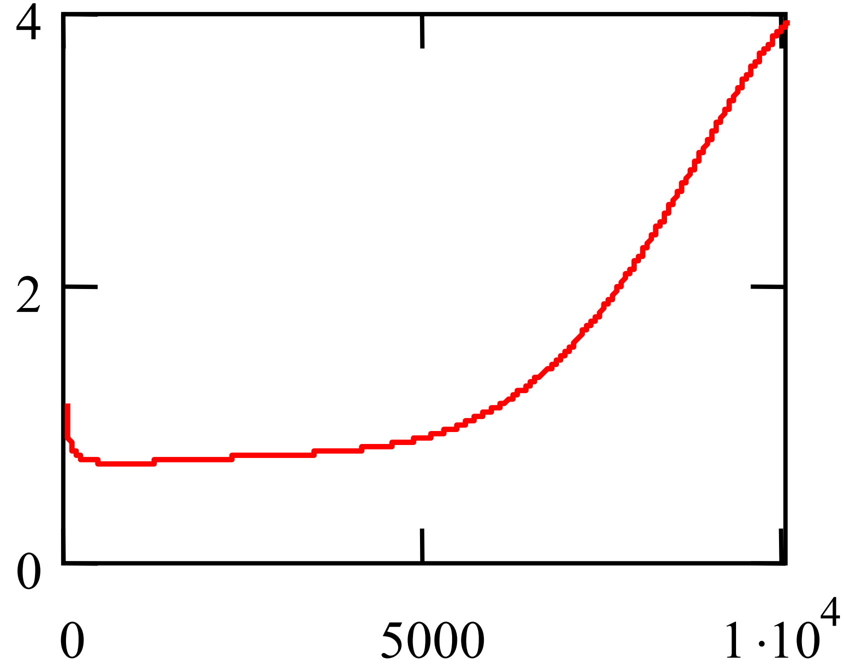


Esempio 5.8

L'analisi dei guasti per un componente meccanico ha fornito i seguenti dati per un blending di weibulliane a due parametri:

P	α (h)	β
0.5	1200	0.8
0.4	4250	1.25
0.1	9000	5.0

Tracciare il tasso di guasto nelle prime 10000 ore di funzionamento



Relazioni utili (1/2)

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$R(0) = 1$$

$$h(t)\,dt = -\frac{dR(t)}{R(t)} = -d\left[\ln R(t)\right]$$

$$\int_0^t h(\tau)\,d\tau = -\int_0^t \left[d \ln R(\tau)\right] = -\ln R(t) = \ln\frac{1}{R(t)}$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t h(\tau)\,d\tau}}$$

Relazioni utili (2/2)

$$MTTF = \int_0^{\infty} \tau f(\tau)\, d\tau = -\int_0^{\infty} \tau \frac{dR(\tau)}{d\tau} d\tau =$$

$$= -\tau R(\tau)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{MTTF = \int_0^{\infty} R(t)\, dt}$$

Affidabilità condizionata

Probabilità che un elemento funzioni nell'intervallo $[t, t+\Delta t]$ sapendo che è funzionante all'inizio dell'intervallo:

$$R_c(t, \Delta t) = \frac{R(t+\Delta t)}{R(t)} = \frac{e^{-\int_0^{t+\Delta t} h(\tau) d\tau}}{e^{-\int_0^{t} h(\tau) d\tau}}$$

$$\boxed{R_c(t, \Delta t) = e^{-\int_t^{t+\Delta t} h(\tau) d\tau}}$$