Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

Lezione 6:

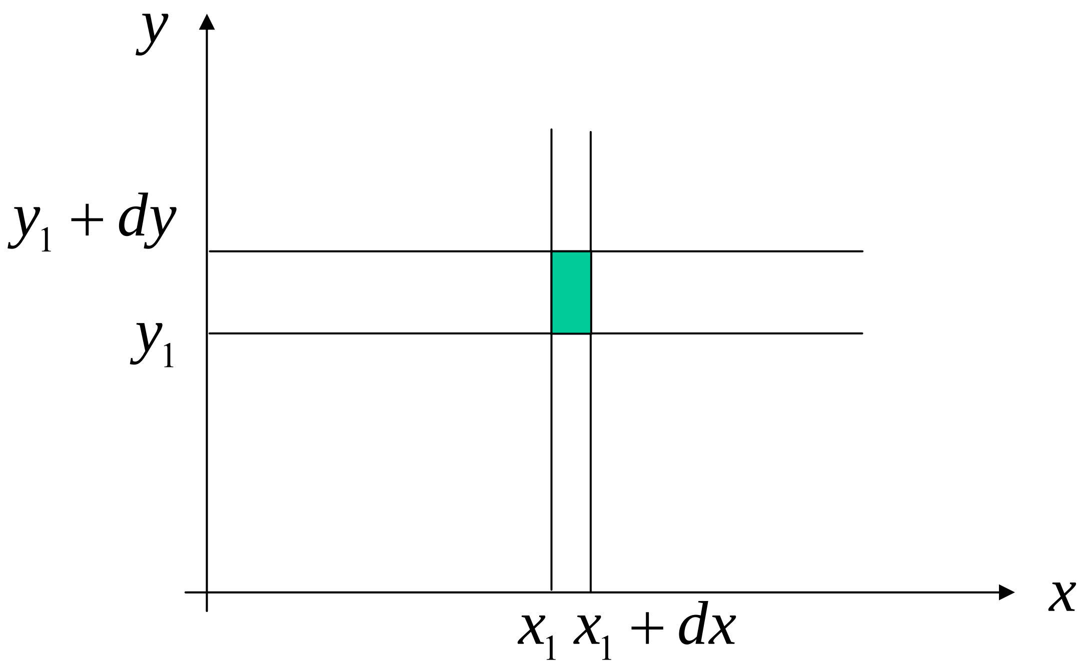
Combinazioni di variabili aleatorie

Combinazioni di più variabili aleatorie continue

- Distribuzione bivariata
- Variabili Aleatorie indipendenti
- Carico-resistenza (caso statico)
- Metodo di Montecarlo

Combinazioni di più variabili aleatorie continue (1/2)

Distribuzione bivariata o combinata di due V.A.: definizione



$$P\left\{x \in \left(x_1, x_1 + dx\right) \cap y \in \left(y_1, y_1 + dy\right)\right\} = \varphi\left(x_1, y_1\right) dxdy$$

Combinazioni di più variabili aleatorie continue (2/2)

Distribuzione bivariata o combinata di due V.A.: proprietà

Distribuzioni marginali

$$f_x(x)\,dx = P\left\{x \in \left(x_1, x_1 + dx_1\right), \forall y\right\} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dy\right) dx$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dx$$

Parametri e momenti

$$\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$$

Covarianza e correlazione

$$COV(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_x\right)\cdot\left(y - \mu_y\right)\cdot\varphi(x,y)\,dxdy$$

$$-1 \le \rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \le 1$$

Algebra delle variabili aleatorie 1/2

Date due V.A. che assumono valori *x* e *y* e una funzione:

$$z = g\left(x, y\right)$$

le proprietà della V.A. che assume valori z sono:

$$\mu_z = E\left[g\left(x, y\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x, y\right)\cdot\varphi\left(x, y\right) dxdy$$

$$\sigma_z^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[g\left(x, y\right) - \mu_z\right]^2 \cdot\varphi\left(x, y\right) dxdy$$

in particolare:

$$E\left[x \pm y\right] = E\left(x\right) \pm E\left(y\right)$$

$$VAR\left[x \pm y\right] = \sigma_x^2 \pm 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2$$

se scorrelate $VAR\left[x \pm y\right] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

Algebra delle variabili aleatorie 2/2

Combinazioni lineari

Dati due paramenti deterministici non nulli: a_x, a_y

$$E\left[a_x x \pm a_y y\right] = a_x E(x) \pm a_y E(y)$$

$$VAR\left[a_x x \pm a_y y\right] = a_x^2 \sigma_x^2 \pm 2\rho a_x a_y \sigma_x \sigma_y + a_y^2 \sigma_y^2$$

se scorrelate $VAR\left[a_x x \pm a_y y\right] = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2$

Due variabili aleatorie gaussiane

Distribuzione combinata di due V.A. gaussiane

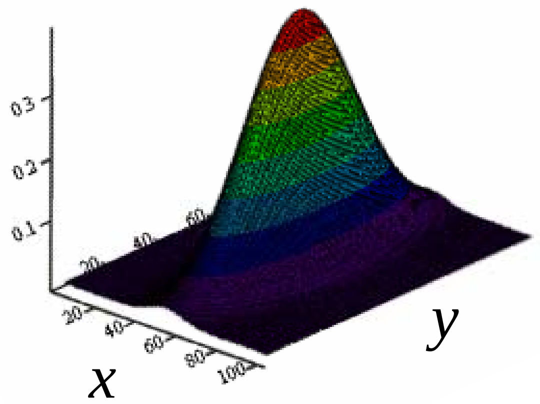
$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

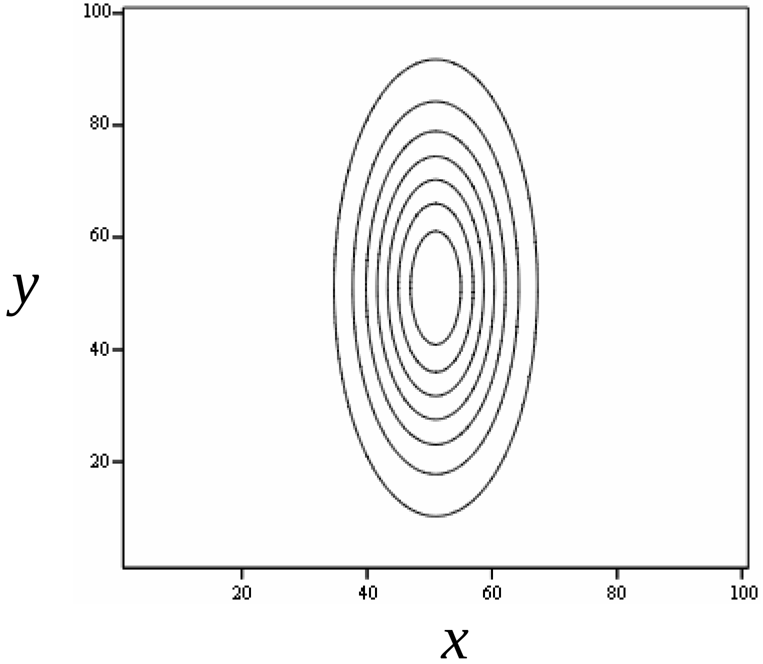
Esempio Mathcad sull'effetto dei parametri

Due variabili aleatorie gaussiane

$$\mu_x = \mu_y = 50; \sigma_x = 13; \sigma_y = 33;$$

$$\rho = 0;$$

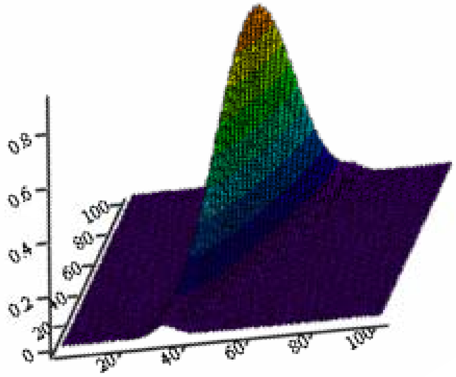


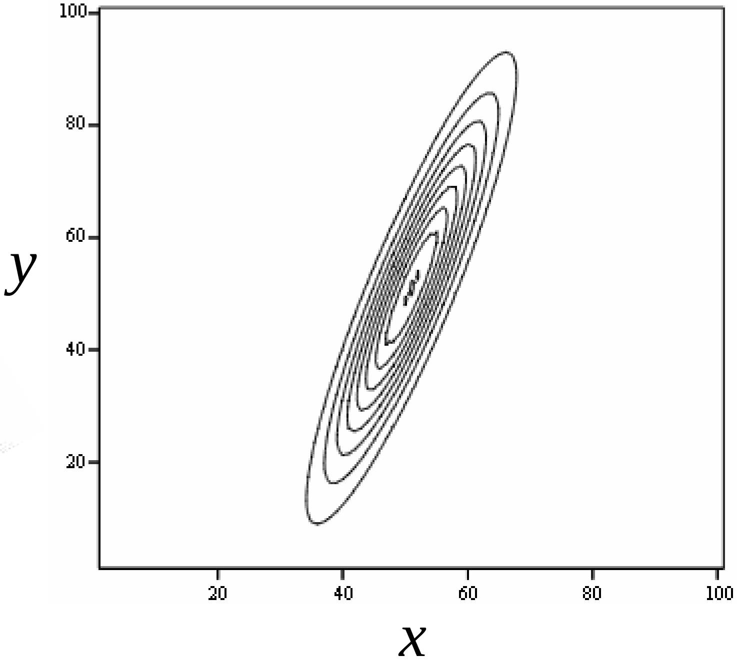


Due variabili aleatorie gaussiane

$$\mu_x = \mu_y = 50; \sigma_x = 13; \sigma_y = 33;$$

$$\rho = 0.9;$$





Due variabili aleatorie gaussiane indipendenti

Indipendenti $\Rightarrow$ Scorrelate

$$\rho = 0$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} =$$

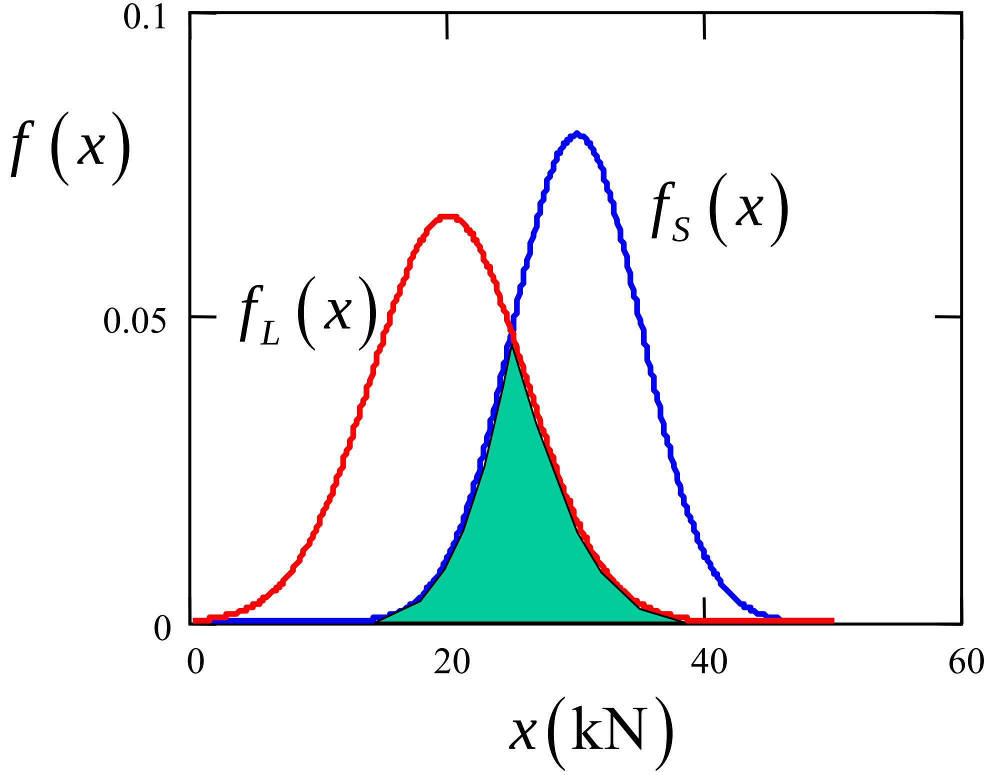
$$= f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Calcolo dell'affidabilità per carichi statici

Esempio 6.1

Un tirante ha una resistenza definita da una V.A. S gaussiana con parametri: $\mu_S = 30\text{kN}$, $\sigma_S = 5\text{kN}$ il carico L è anch'esso una V.A. gaussiana con parametri: $\mu_L = 20\text{kN}$, $\sigma_L = 6\text{kN}$

determinarne l'affidabilità per **una singola applicazione del carico**.



Es. 6.1: I soluzione

Si considera la V.A. D differenza resistenza carico:

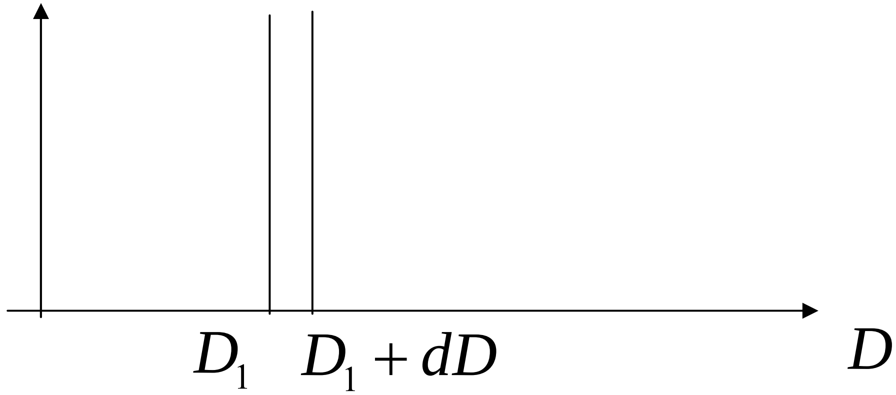
$$D = S - L$$

È una combinazione lineare di due V.A. gaussiane

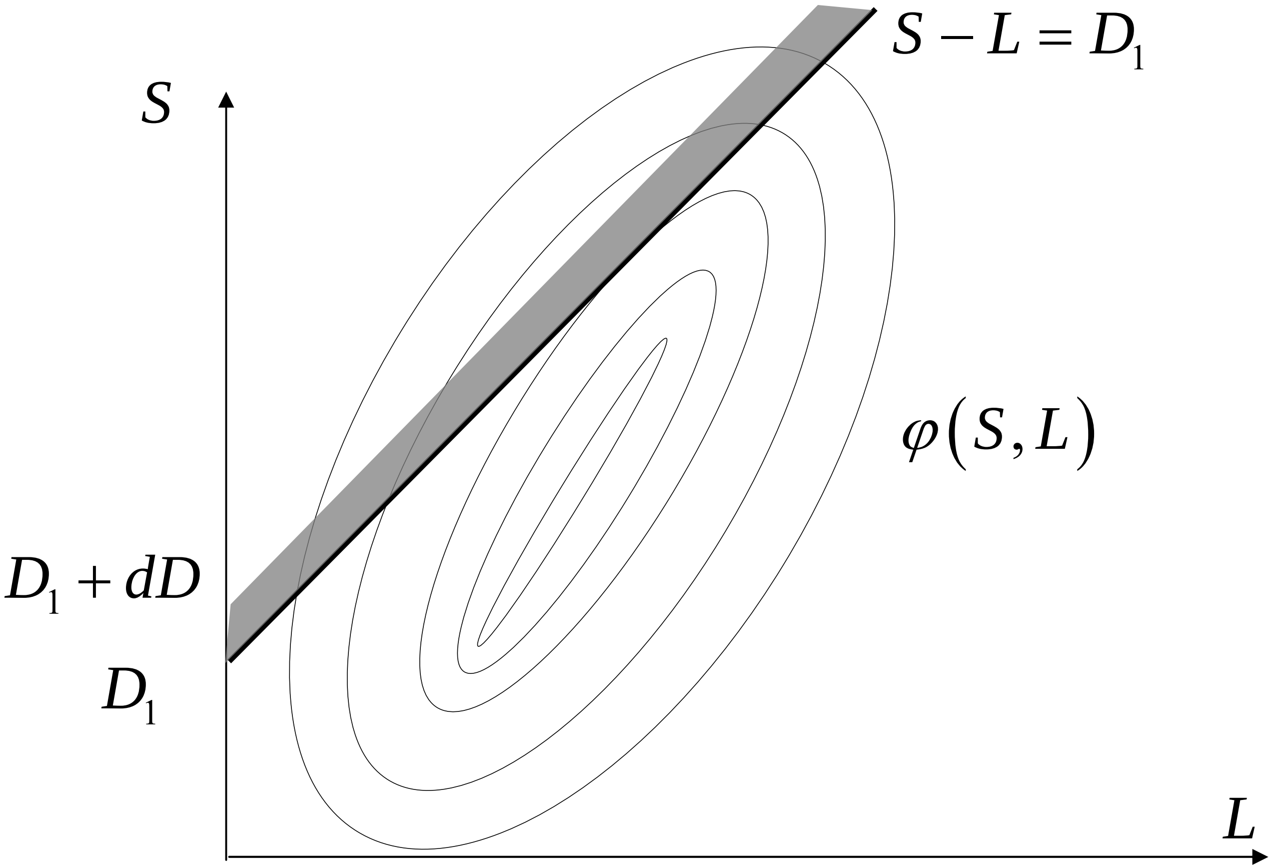
Proprietà:

La differenza di due V.A. gaussiane è una V.A. gaussiana.

Dimostrazione



Determinare la probabilità che la differenza D sia nell'intervallo specificato:



$$f_D(D_1)\,dD = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{D_1+L}^{D_1+dD+L}\varphi(S,L)\,dS\right]dL$$

$$f_D(D) = N\left(D, \mu_S - \mu_L, \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_L}\right)$$

In generale:

Dati due paramenti deterministici non nulli: a_x, a_y

e due V.A. gaussiane :
$$f_x(x) = N(x, \mu_x, \sigma_x)$$
$$f_y(y) = N(y, \mu_y, \sigma_y)$$

con coefficiente di correlazione: ρ

La V.A.: $z = a_x x + a_y y$

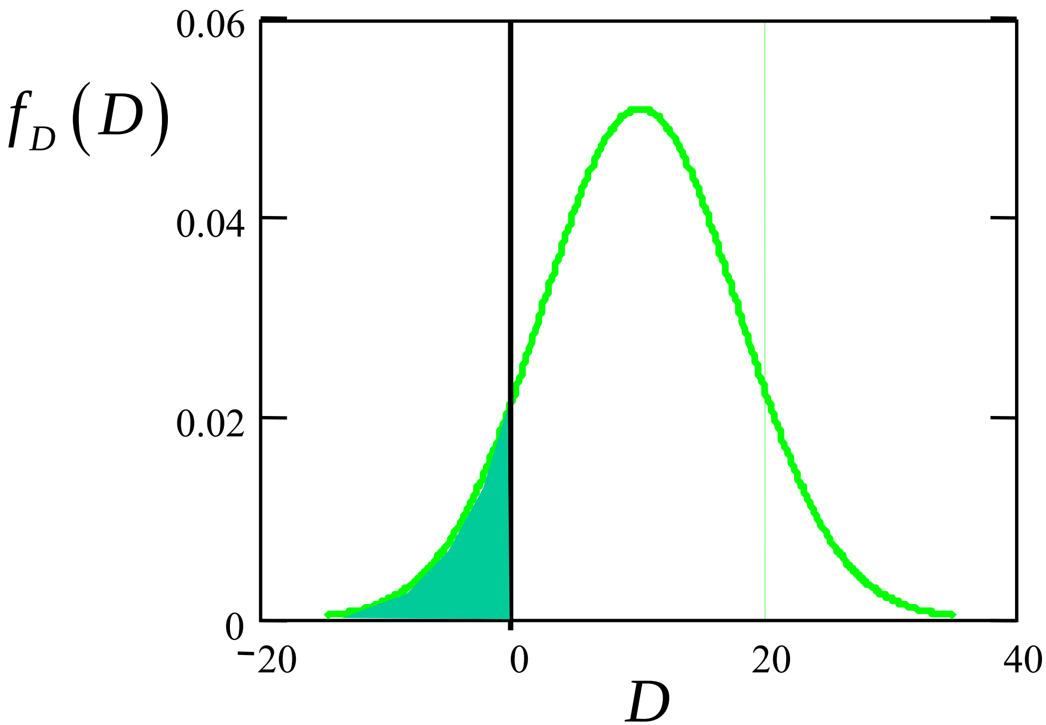
Ha la seguente densità di probabilità:

$$f_z(z) = N\left(z, a_x\mu_x + a_y\mu_y, \sqrt{a_x^2\sigma_x^2 + 2\rho a_x a_y \sigma_x \sigma_y + a_y^2\sigma_y^2}\right)$$

$$D = S - L$$

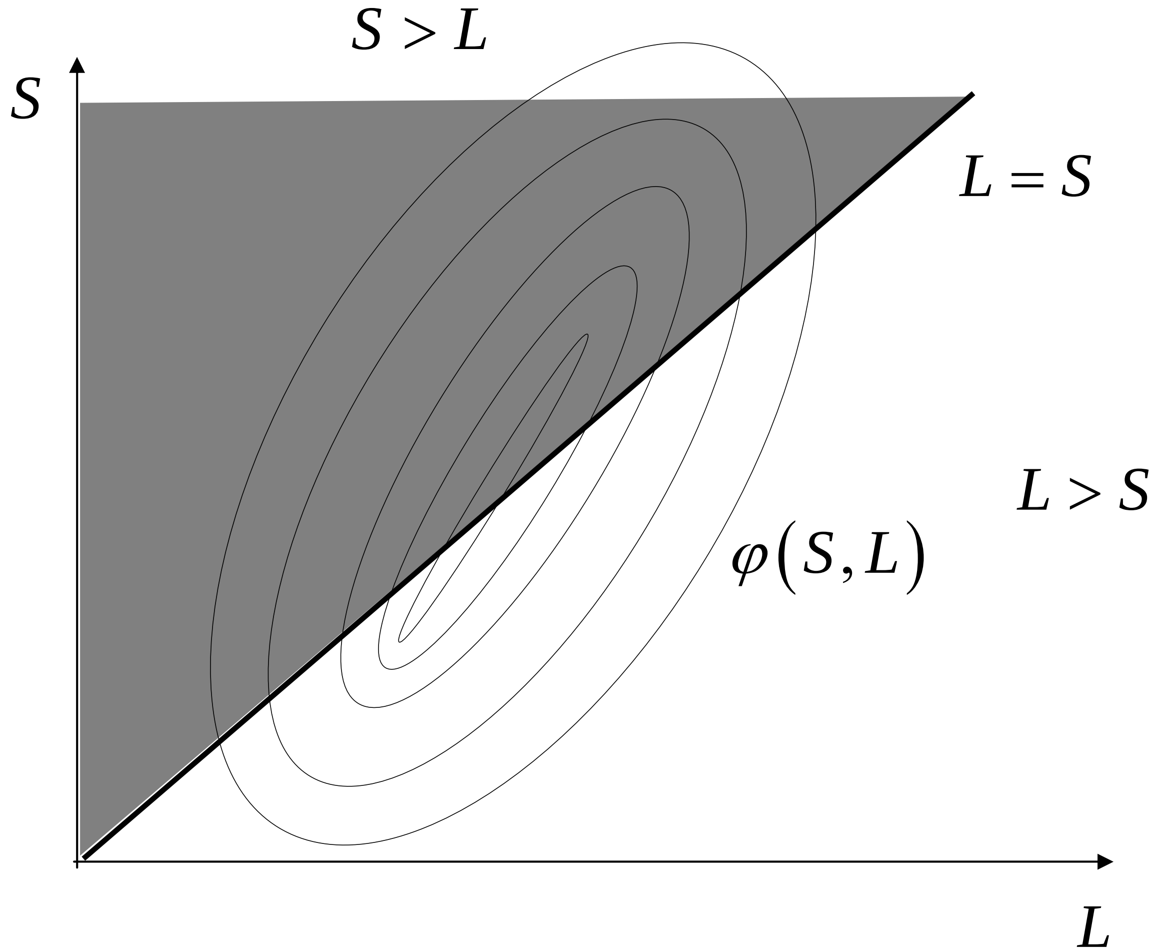
è la combinazione lineare di due V.A. gaussiane **indipendenti**

$$f_D(D) = N\left(D, 10, \sqrt{5^2 + 6^2}\right) = N(D, 10, 7.81)$$



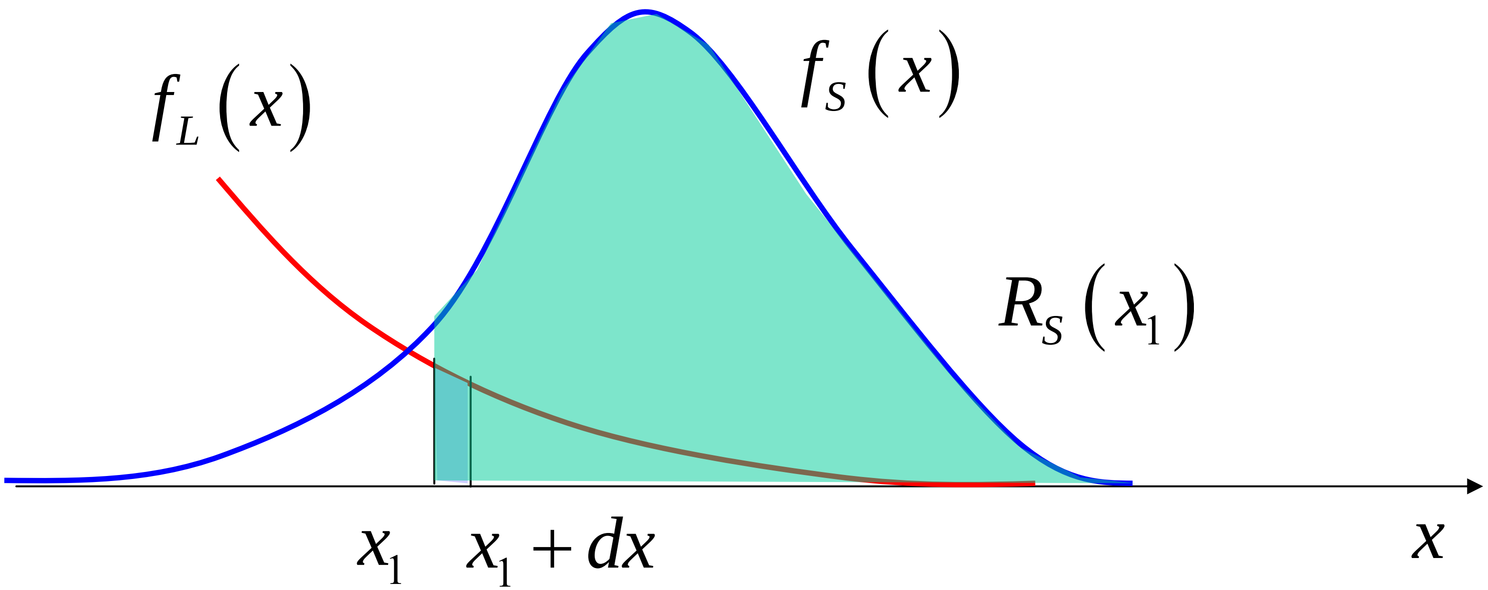
$$R = 0.90$$

Es. 6.1: II soluzione



$$R = P(S > L) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{L}^{\infty} \varphi(L, S)\, dS \right] dL$$

Es. 6.1: III soluzione (1/2)



per il carico nell'intervallo $\left(x_1, x_1 + dx\right)$

Il contributo alla probabilità di non rottura (affidabilità) è

$$dR = f_L\left(x_1\right)dx \cdot P\left(S > x_1\right) = f_L\left(x_1\right)dx \cdot \int_{x_1}^{\infty} f_S\left(x\right)dx =$$

$$= f_L\left(x_1\right)dx \cdot R_S\left(x_1\right)$$

III soluzione (2/2)

A questo punto è necessario considerare tutte le possibilità per il livello di carico ed effettuarne la somma:

$$R = \int dR = \int_{-\infty}^{\infty} f_L\left(x\right) \cdot R_S\left(x\right) dx$$

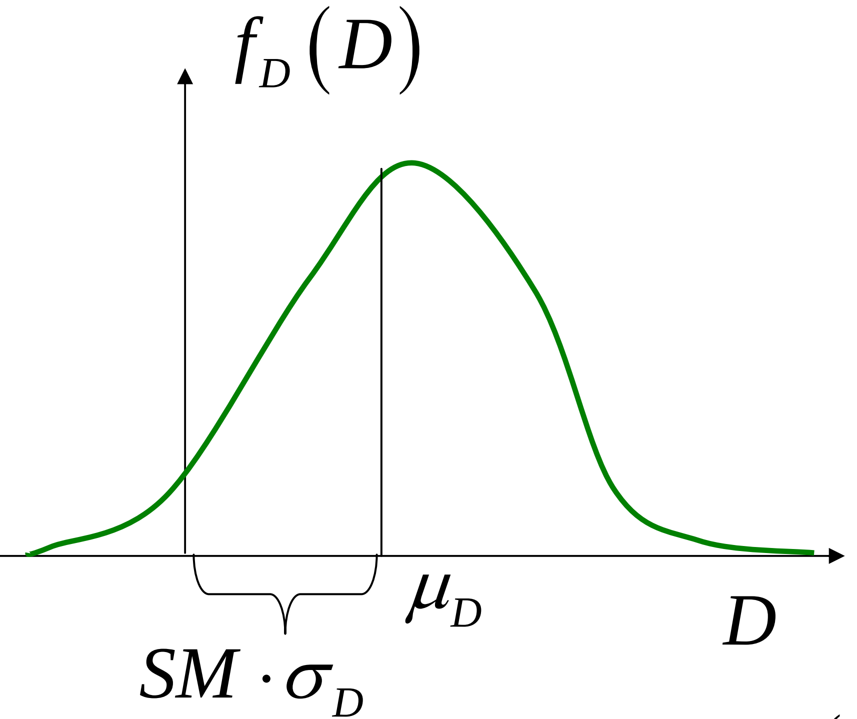
Integrando con inversione di variabili:

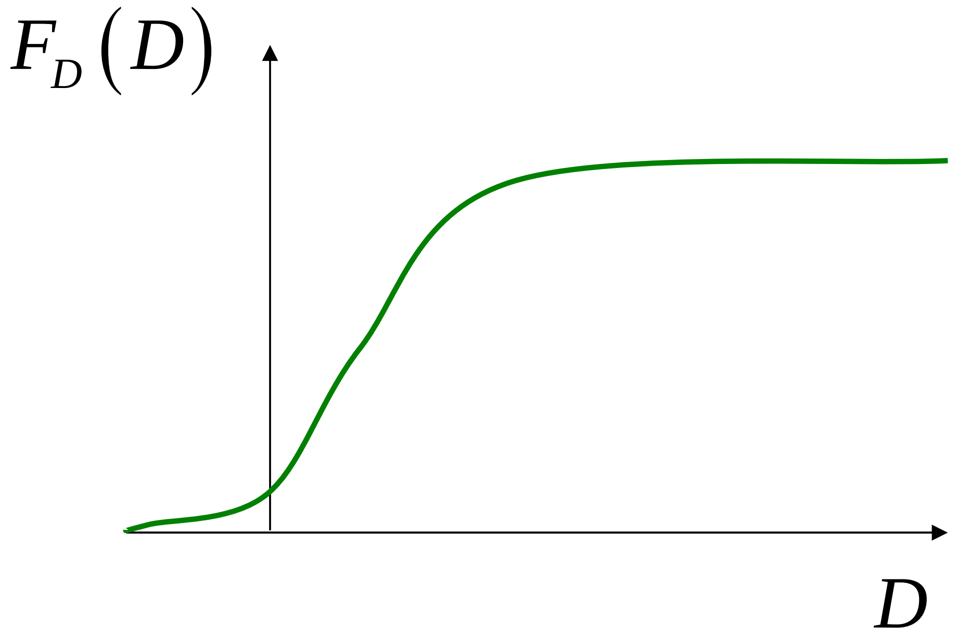
$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_S\left(x\right) \cdot F_L\left(x\right) dx$$

Definizioni

Safety Margin $SM = \dfrac{\mu_D}{\sigma_D}$ è il reciproco del CV per la differenza $S - L$

$$SM = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}}$$

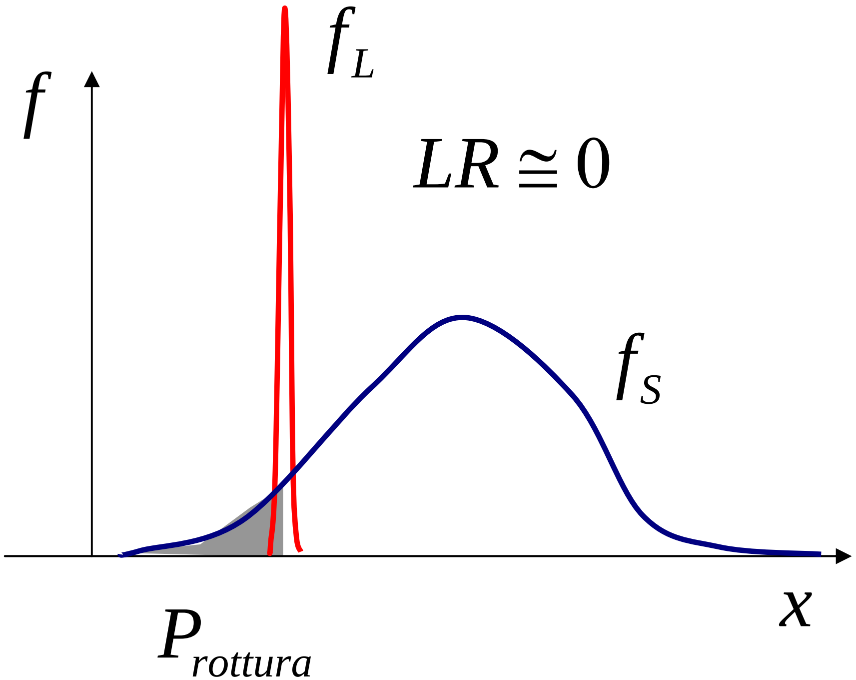


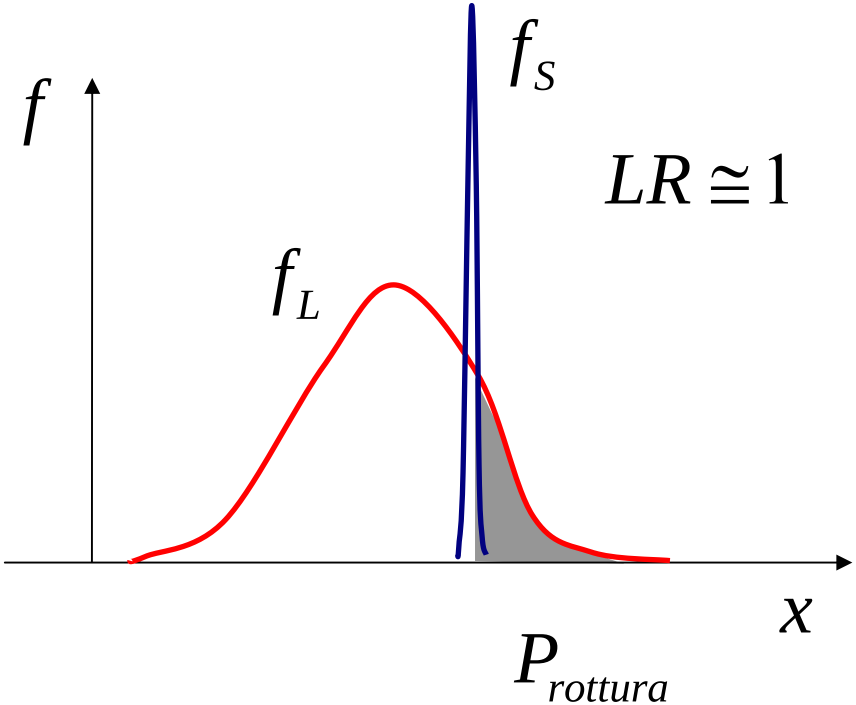


$$P_{rottura} = F_D(0) \qquad R = 1 - F_D(0)$$

Definizioni

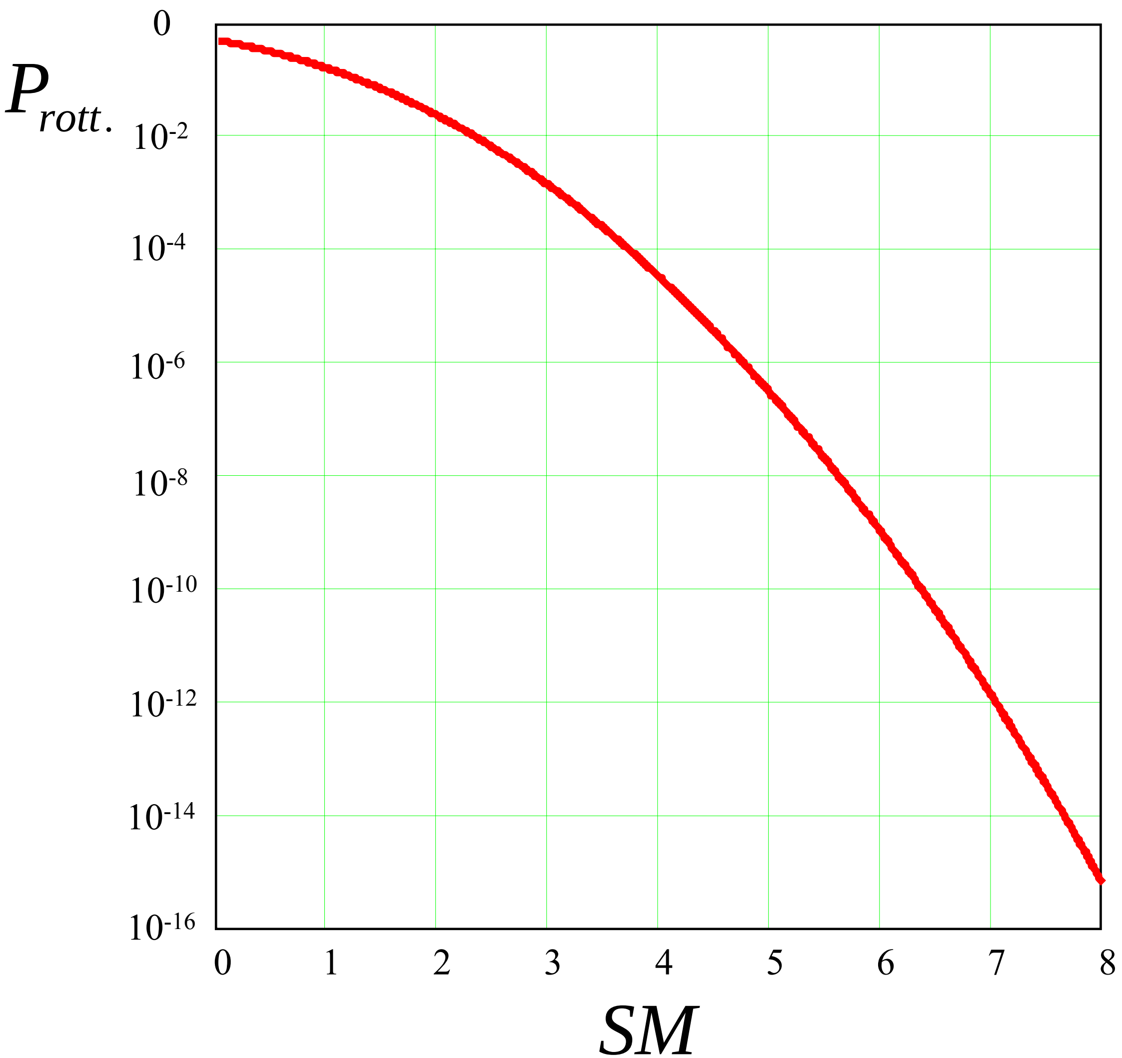
Loading Roughness $$LR = \frac{\sigma_L}{\sigma_D} = \frac{\sigma_L}{\sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_S^2}}$$





Probabilità di rottura in funzione del *SM*

Hyp. *S* e *L* variabili aleatorie gaussiane



Coefficiente di sicurezza statico?

Esempio 6.2

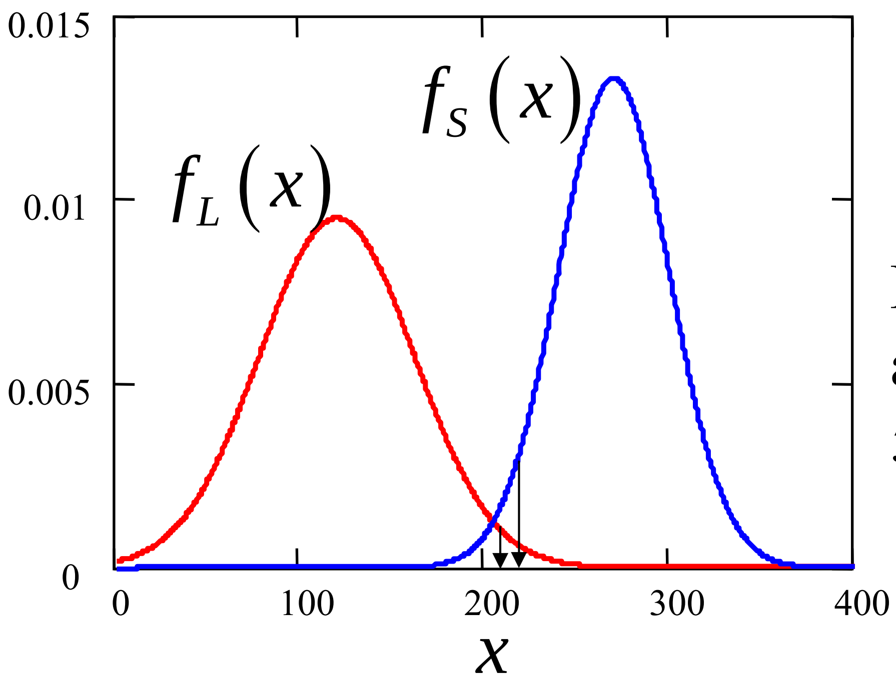
Dati i seguenti valori di V.A. gaussiane (valori in MPa):

$$L = N\left(x, 120, 42\right); \quad S = N\left(x, 270, 30\right)$$

determinare il coefficiente di sicurezza convenzionale, il *SM* e la probabilità di rottura

Carico max:
98 percentile alto

$$L_{max} = 206\text{MPa}$$



Resistenza
ammissibile
5 percentile basso

$$S_{am} = 221\text{MPa}$$

$$\eta = \frac{S_{am}}{L_{max}} = 1.07$$

$$SM = 2.91; \quad LR = 0.81 \qquad P_{rottura} = 1.83 \cdot 10^{-3} = 0.183\%$$

Esempio 6.2 bis

Dati i seguenti valori di V.A. gaussiane (valori in MPa):

$$L = N\left(x, 500, 40\right); \quad S = N\left(x, 672, 30\right)$$

determinare il coefficiente di sicurezza convenzionale, il *SM* e la probabilità di rottura

$$\eta = \frac{S_{am}}{L_{max}} = \frac{623}{582} = 1.07$$

$$SM = 3.44; \quad LR = 0.80 \qquad P_{rottura} = 0.291 \cdot 10^{-4} = 0.029\%$$

Valori tipici di CV per resistenze meccaniche (leghe metalliche)

Resistenza	CV
Ultimate stress	0.05
Yielding stress	0.07
Fatigue limit	0.10
Hardness (Brinnel)	0.05
Fracture strength (lower shelf)	0.08

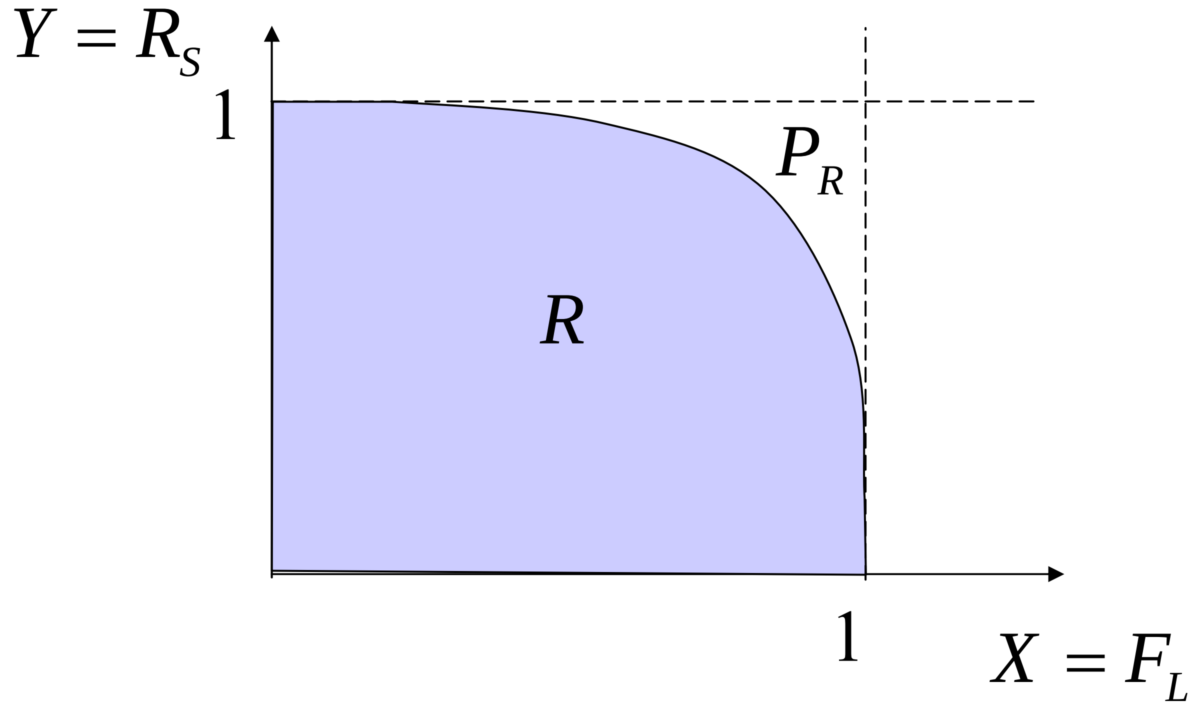
Interpretazione dell'affidabilità statica (Trasformazione di Mellin)

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(u) \cdot R_S(u)\, du$$

$$X = F_L(u) \qquad\qquad f_L(u)\, du = dF_L(u) = dX$$

$$Y = R_S(u)$$

$$R = \int Y \cdot dX$$

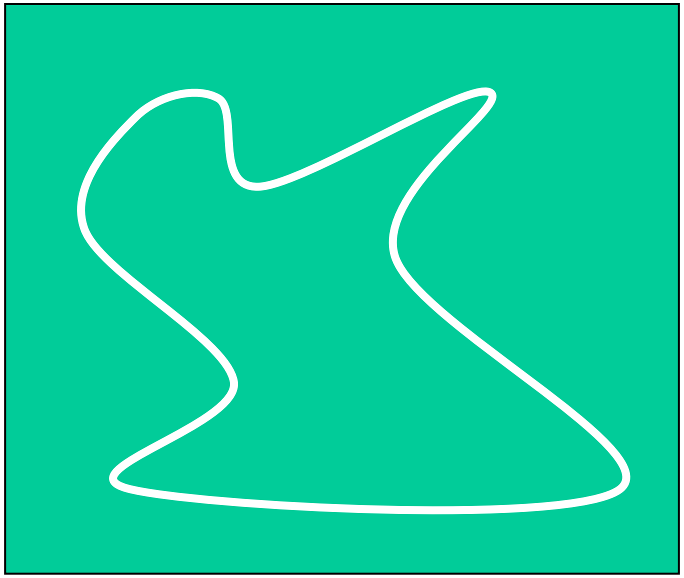


Metodo Montecarlo

- Strumento per effettuare simulazioni numeriche
- Algoritmo per calcolare integrali
- Permette di simulare in forma numerica situazioni complesse

Esempio

Valutare la probabilità che una palla da biliardo lanciata a caso si fermi all’interno di una figura disegnata sul tavolo



- Lanciare un palla a caso significa che la posizione finale è definita da una distribuzione bivariata uniforme nel rettangolo

- Le coordinate della posizione finale della palla sono V.A. indipendenti uniformemente distribuite

- Un generatore di numeri casuali tra 0 e 1 definisce una coordinata

- L'insieme di punti che si ottengono per ripetizione della procedura si chiama campo di Poisson

- Non serve avere l'espressione analitica del contorno della figura, basta una funzione che stabilisca se il punto è dentro o fuori

- Il risultato si ottiene applicando la definizione statistica di probabilità (si prendono tantissimi punti a caso)

- Si comprende l'uso del metodo per il calcolo degli integrali

Generatori di numeri (pseudo)casuali

$$x_0 = ?; \quad x_i = \left(c + a \cdot x_{i-1}\right) \bmod m; \quad r_i = x_i / m$$

$m > 0$ modulus

$0 < a < m$ multiplier

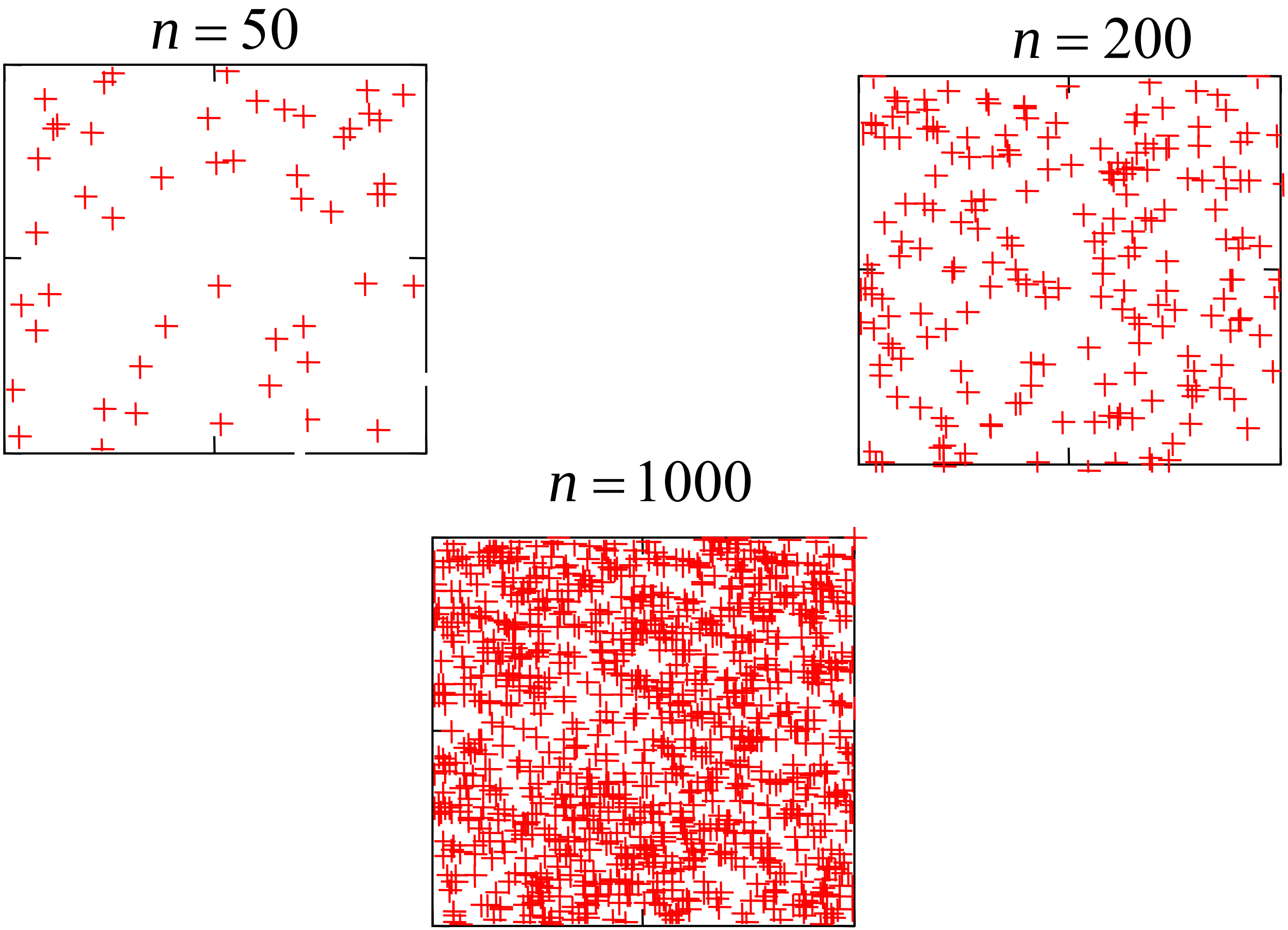
$0 \leq c < m$ increment

- c e m primi tra loro,
- $a-1$ è divisibile per tutti i fattori primi di m,
- $a-1$ è multiplo di 4 se m è multiplo 4

Esempi

	m	a	c
• Numerical Recipes	2^{32}	1664525	1013904223
• Borland C/C++	2^{32}	22695477	1

Campi di Poisson



Esempio 6.3

Stimare π con il metodo Montecarlo

Probabilità che il punto stia dentro lo spicchio di cerchio:

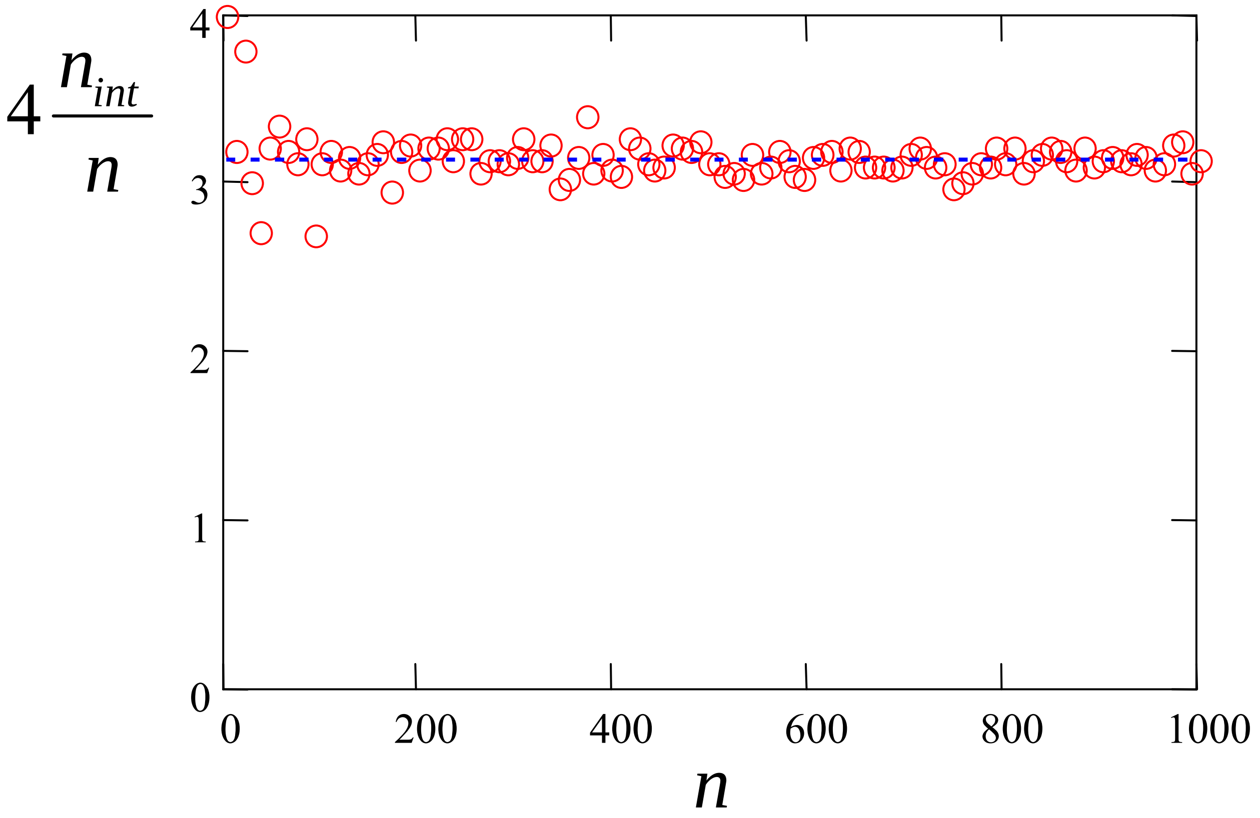
$$P = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4P$$

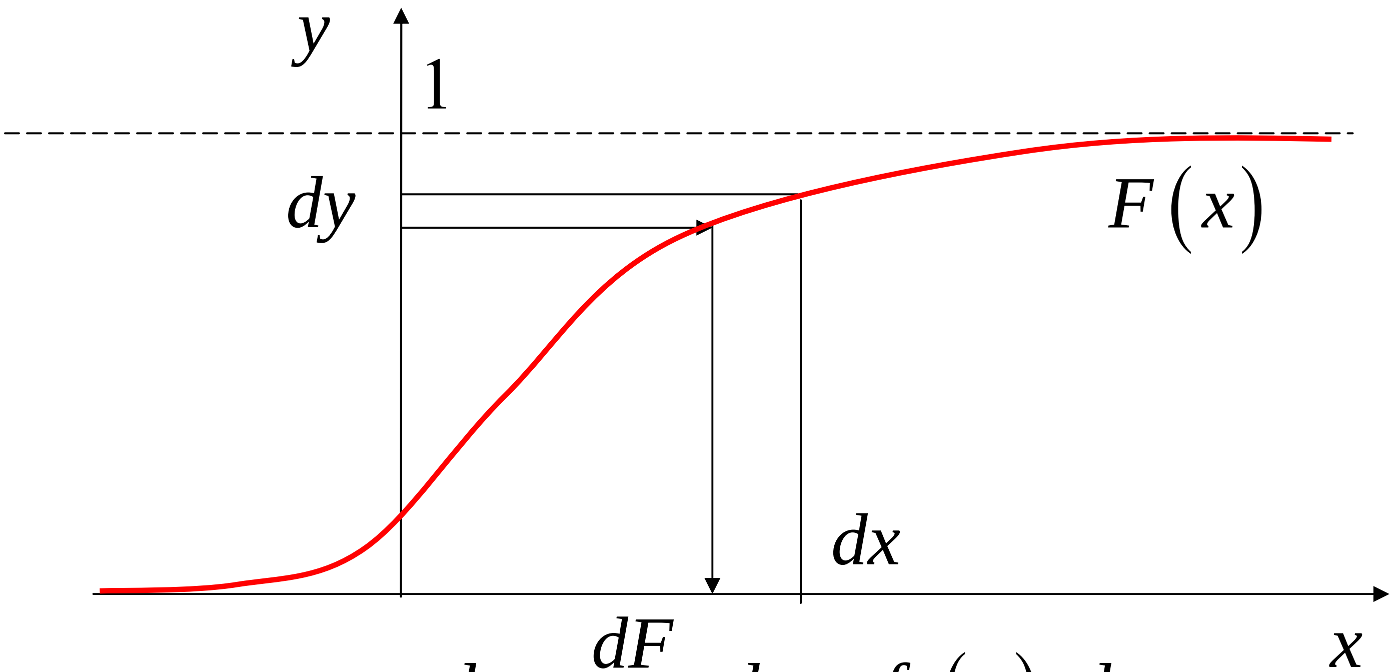
Si genera una distribuzione di Poisson di n punti e si calcola la frazione degli n_{int} punti interni :

$$\pi \cong 4\frac{n_{int}}{n}$$

Soluzione



Generazione di numeri casuali con distribuzione voluta (1/2)



$$dy = \frac{dF}{dx} \cdot dx = f_x(x) \cdot dx$$

Se la densità di *y* è costante e pari a: $\delta = f_y(y) = 1/1 = 1$

Numero di punti nell'intervallo: δdy

Densità di corrispondenti valori di *x*: $\delta \frac{dy}{dx} = f_x(x)$

Generazione di numeri casuali con distribuzione voluta (2/2)

$$x = F^{-1}(y)$$

Applicando a una V.A. distribuita uniformemente in (0,1) la funzione cumulata inversa di una distribuzione nota, si genera una V.A. con tale distribuzione

Esempio 6.3

Generare n=20 valori distribuiti secondo una Weibull con parametri:

$$\alpha = 1, \beta = 2, x_0 = 3$$

$$F(x, \alpha, \beta, x_0) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)^{\beta}} & x > x_0 \end{cases}$$

$$F = 1 - e^{-\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad x > x_0$$

$$-\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)^{\beta} = \ln\left(1 - F\right)$$

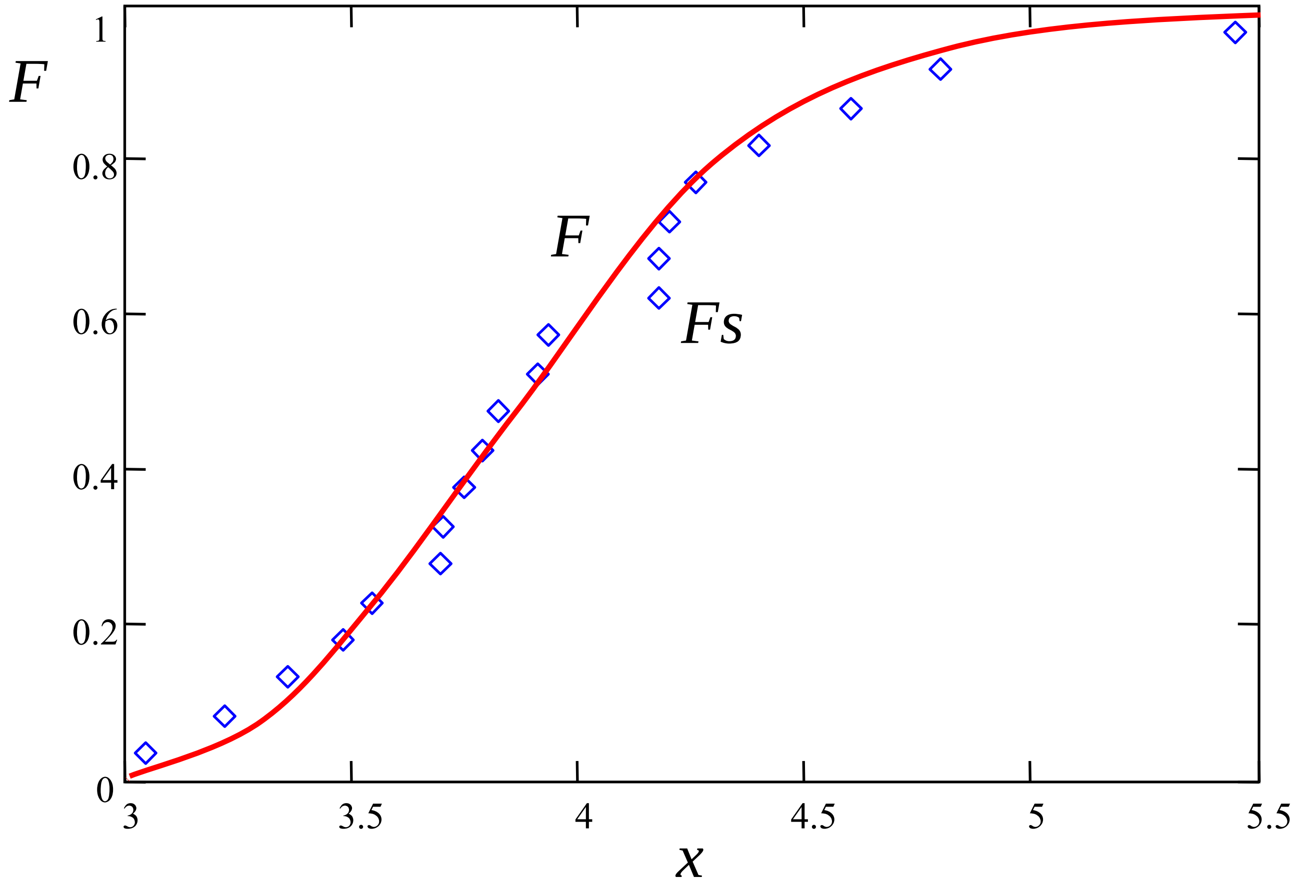
$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \left[\ln\left(\frac{1}{1 - F}\right)\right]^{1/\beta}$$

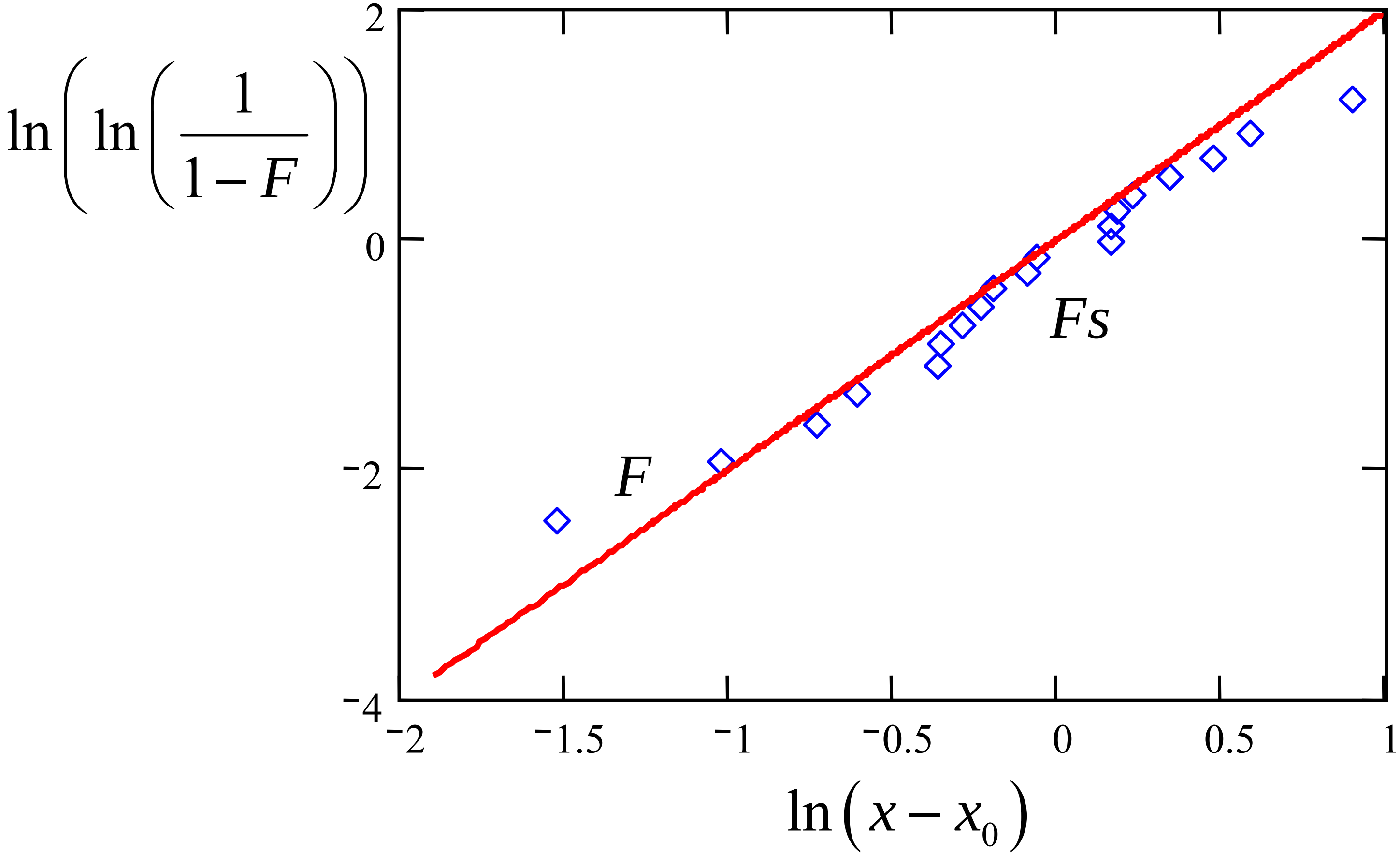
$$x = x_0 + \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1 - F}\right)\right]^{1/\beta}$$

$$\boxed{x = x_0 + \alpha\left[\ln\left(\frac{1}{1 - y}\right)\right]^{1/\beta}}$$

k	y_k	x_k	xs_k	Fs_k
1	0.394	4.001	3.081	0.034
2	0.586	4.763	3.117	0.083
3	0.480	4.310	3.152	0.132
4	0.102	3.215	3.215	0.181
5	0.425	4.107	3.338	0.230
6	0.692	5.355	3.373	0.279
7	0.387	3.977	3.743	0.328
8	0.780	6.025	3.977	0.377
9	0.420	4.088	4.001	0.426
10	0.155	3.338	4.088	0.475
11	0.461	4.236	4.107	0.525
12	0.547	4.583	4.236	0.574
13	0.310	3.743	4.31	0.623
14	0.073	3.152	4.583	0.672
14	0.040	3.081	4.763	0.721
16	0.617	4.921	4.921	0.770
17	0.797	6.188	5.355	0.819
18	0.057	3.117	5.655	0.868
19	0.735	5.655	6.025	0.917
20	0.170	3.373	6.188	0.966

$$Fs_k = \frac{k - 0.5}{n}$$


F
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
3
3.5
4
4.5
5
5.5
x
F
Fs



$\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-F}\right)\right)$
2
0
-2
-4
F
Fs
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
$\ln(x - x_0)$

Esempio 6.4

La sollecitazione di un elemento meccanico è definita da una V.A. di Weibull con parametri:

$$\alpha_L = 50,\ \beta_L = 2.0,\ x_{0L} = 100$$

e la resistenza è una V.A. di Weibull con parametri:

$$\alpha_S = 100,\ \beta_S = 3.0,\ x_{0S} = 120$$

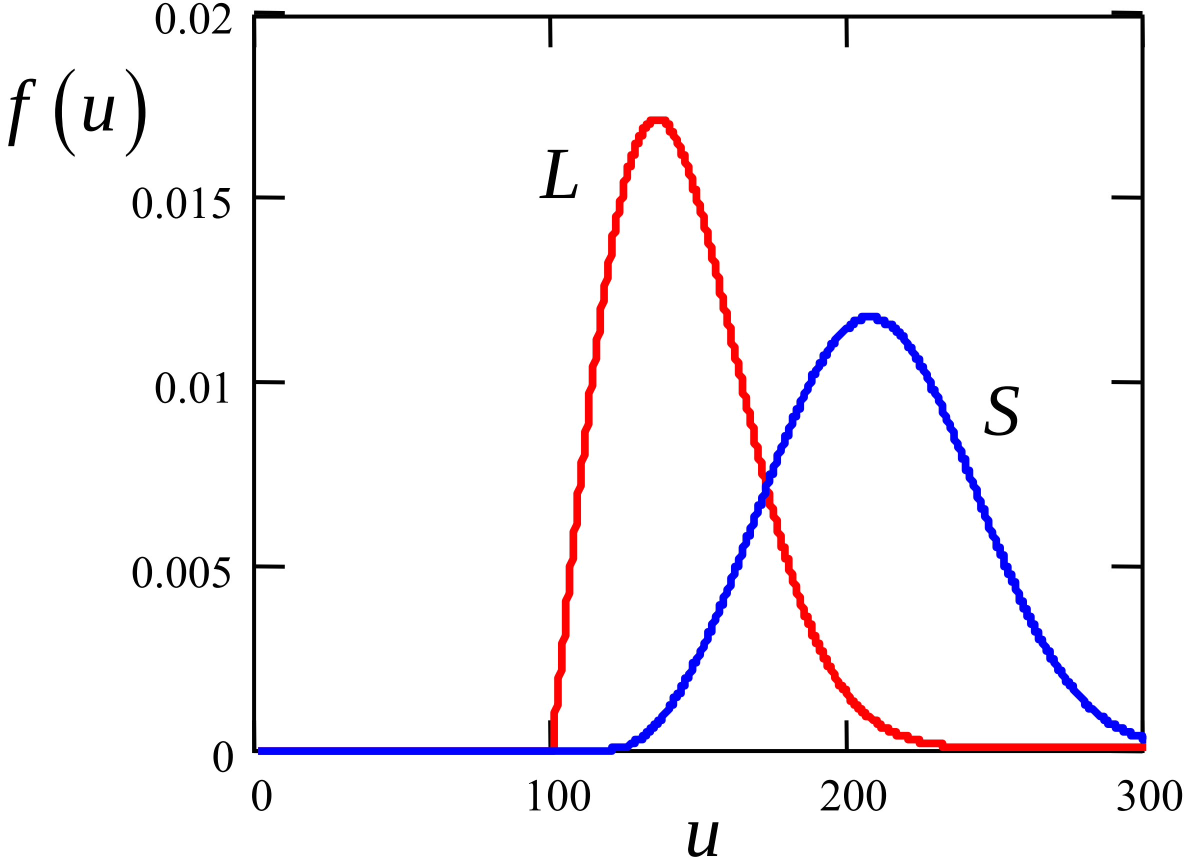
Determinare l'affidabilità per un singolo caricamento statico.

$$R = \int_{x_{L0}}^{\infty} f_L(u) \cdot R_S(u)\, du$$

$$R_S(u) = \min(1, e^{-\left(\frac{u - x_{0S}}{\alpha_S}\right)^{\beta_S}})$$

$$f_L(u) = \frac{\beta_L}{\alpha_L} \cdot \left(\frac{u - x_{0L}}{\alpha_L}\right)^{\beta_L - 1} \cdot e^{-\left(\frac{u - x_{0L}}{\alpha_L}\right)^{\beta_L}} \qquad (u \geq x_{0L})$$

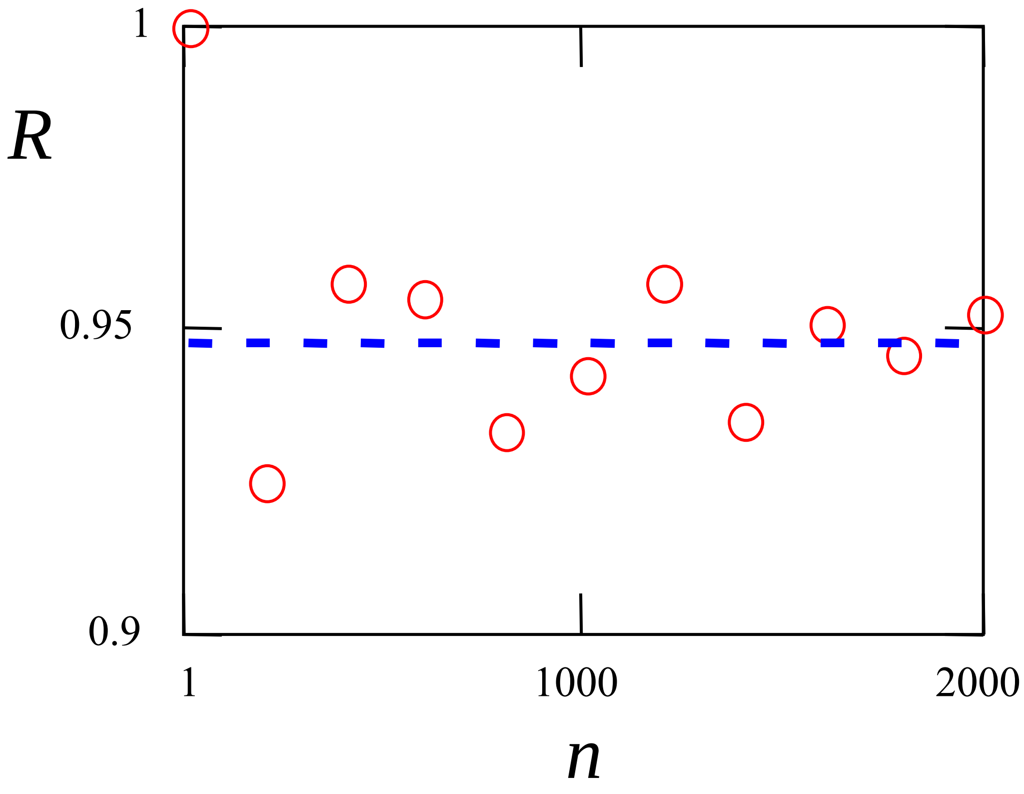
Distribuzioni



$$R_{th} = 0.948$$

Soluzione con Montecarlo

Soluzione numerica in funzione della numerosità del campione di valori del metodo Montecarlo



Precisione e convergenza con Montecarlo

Indichiamo con n il numero di tentativi della simulazione e rispet.:

$$P,\ P_n$$

la probabilità teorica da calcolare e quella ottenuta con Montecarlo

È stato dimostrato che:

$$\text{Prob}\left(|P - P_n| < 2\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\right) = 0.95$$

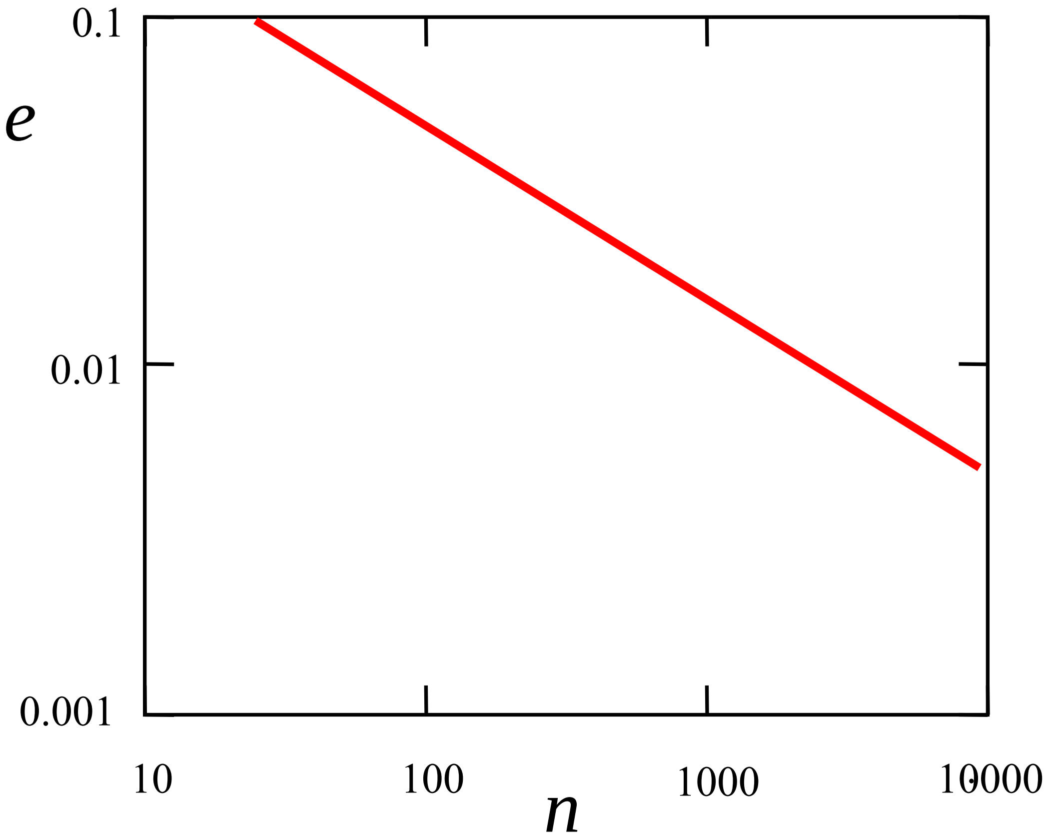
Oppure, equivalentemente, che con la confidenza del 95% l'incertezza relativa sulla probabilità (semiampiezza dell'intervallo relativo di previsione) è:

$$e = \frac{|P - P_n|}{P} = 2\sqrt{\frac{1}{P} - 1}\sqrt{\frac{1}{n}}$$

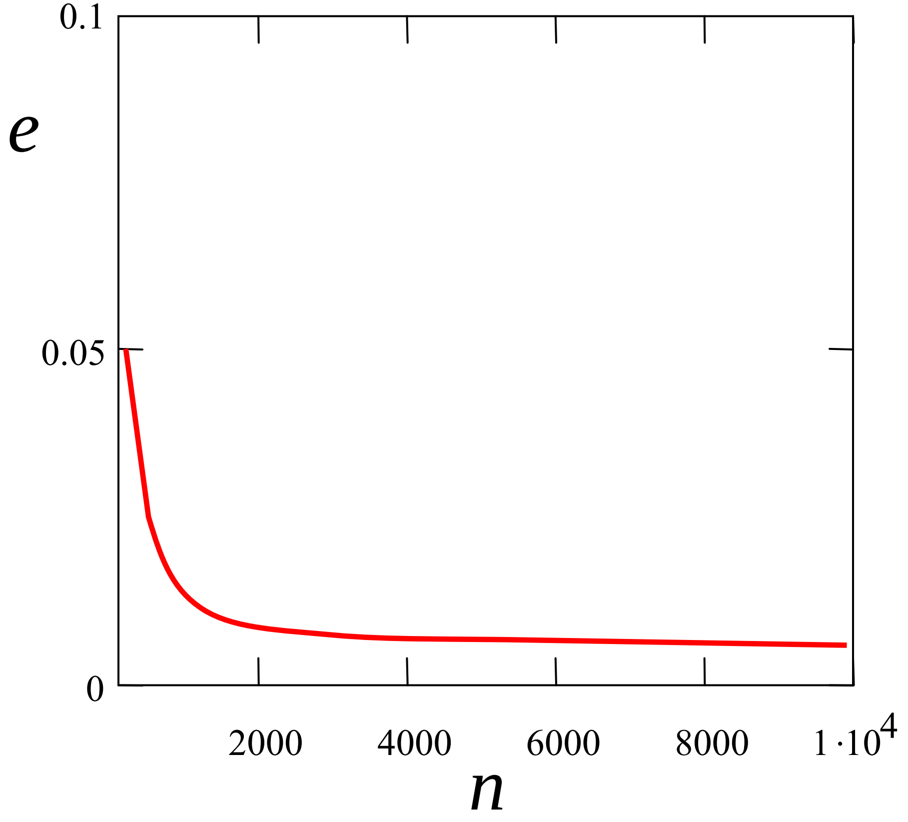
La formula mostra che l'incertezza relativa è più alta per la stima di probabilità basse (necessità di n elevati)

Nel caso esaminato: $P = 0.948$

Stima della semiampiezza dell'intervallo relativo di previsione



Stima della semiampiezza dell'intervallo relativo di previsione: scala lineare



Intervalli di confidenza del 95% per il caso esaminato