Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

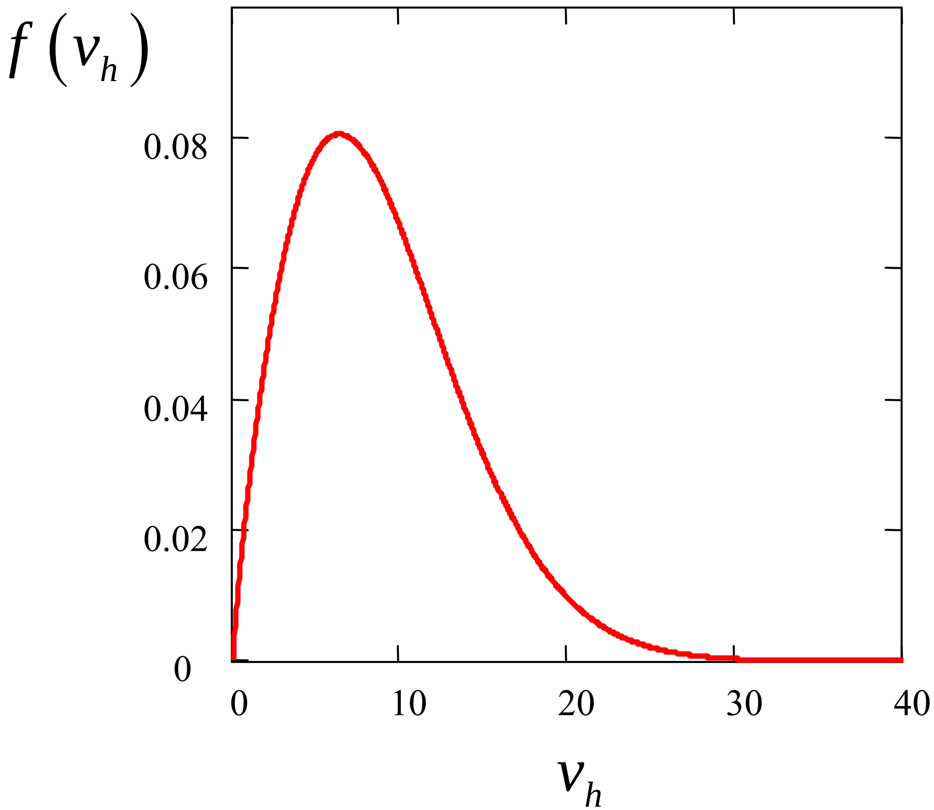
Lezione 8:

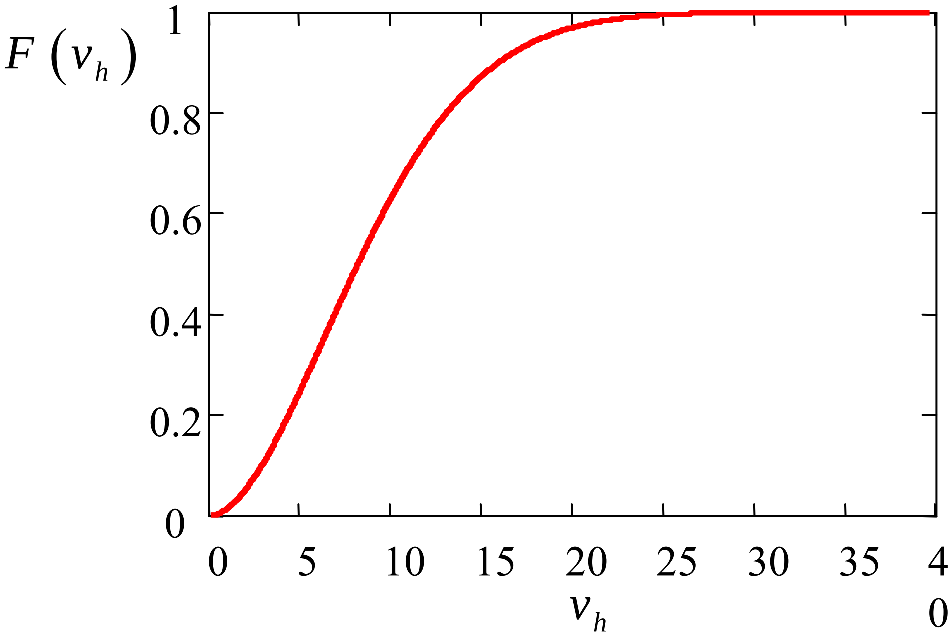
Affidabilità per carichi ripetuti

Esempio 8.1

Il rilievo orario dei venti v_h (definisci) su un periodo di 40 anni in un luogo indica una densità di probabilità di Weibull con caratteristiche (valori in m/s):

$$\alpha = 10\text{m/s}; \quad \beta = 1.8$$





Il campione è così numeroso (n=40·365·24=350040) che la cumulata numerica riproduce la popolazione in modo perfetto.

La probabilità che v_h superi i seguenti valori è indicata nella tabella:

v_h maggiore di	Probabilità
30 m/s	$7.284 \cdot 10^{-4}$
40 m/s	$5.418 \cdot 10^{-6}$

Supponiamo di dover progettare (staticamente) un elemento che rimane esposto al vento per molto tempo (per fissare le idee un anno).

In questo caso non interessa il vento che si verifica in un'ora e nemmeno il vento medio ma il valore del vento **massimo** che possiamo prevedere si verifichi nel corso di un anno.

Operiamo in modo empirico cercando un campione di tale quantità: aggreghiamo i dati raccolti in campioni annui ognuno di numerosità n=24·365=8760:

Misure nell'anno:

primo $\left\{v_{h1}^{(1)}, v_{h2}^{(1)}, \ldots, v_{hn}^{(1)}\right\}$ $\quad v_{a1} = \max\left\{v_{hi}^{(1)}\right\}$

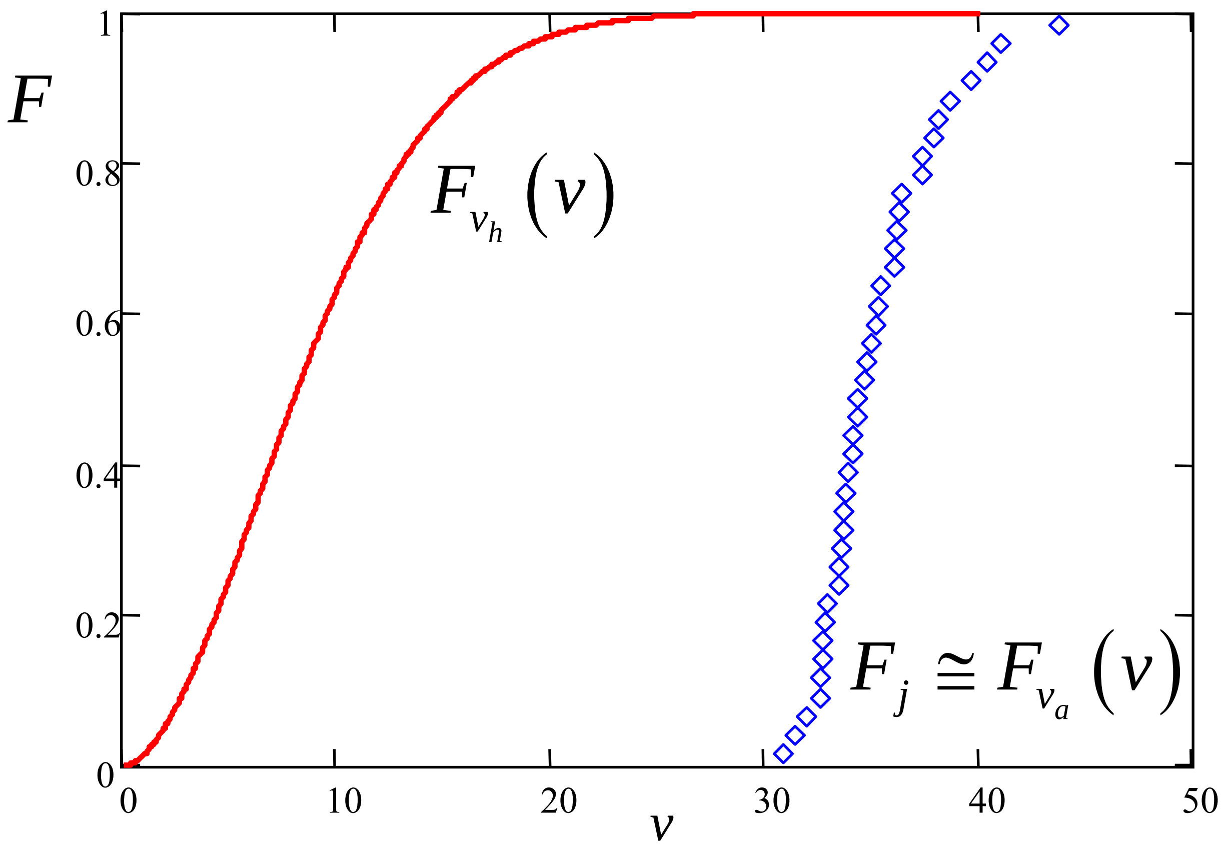
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

j esimo $\left\{v_{h1}^{(j)}, v_{h2}^{(j)}, \ldots, v_{hn}^{(j)}\right\}$ $\quad v_{aj} = \max\left\{v_{hi}^{(j)}\right\}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ultimo M=40 $\left\{v_{h1}^{(M)}, v_{h2}^{(M)}, \ldots, v_{hn}^{(M)}\right\}$ $\quad v_{aM} = \max\left\{v_{hi}^{(M)}\right\}$

È stato ottenuto un campione di numerosità M=40 della variabile aleatoria: vento annuale massimo v_a, che possiamo rappresentare in termini di distribuzione cumulata a confronto con la precedente:



Da dove deriva la nuova distribuzione dei massimi?

$$\left\{v_a < v\right\} = \underbrace{\left\{v_{h1} < v\right\} \bigcap \left\{v_{h2} < v\right\} \bigcap ..... \bigcap \left\{v_{hn} < v\right\}}_{n=24\cdot 365=8760 \text{ (ore in un anno)}}$$

in ipotesi di indipendenza (discuti):

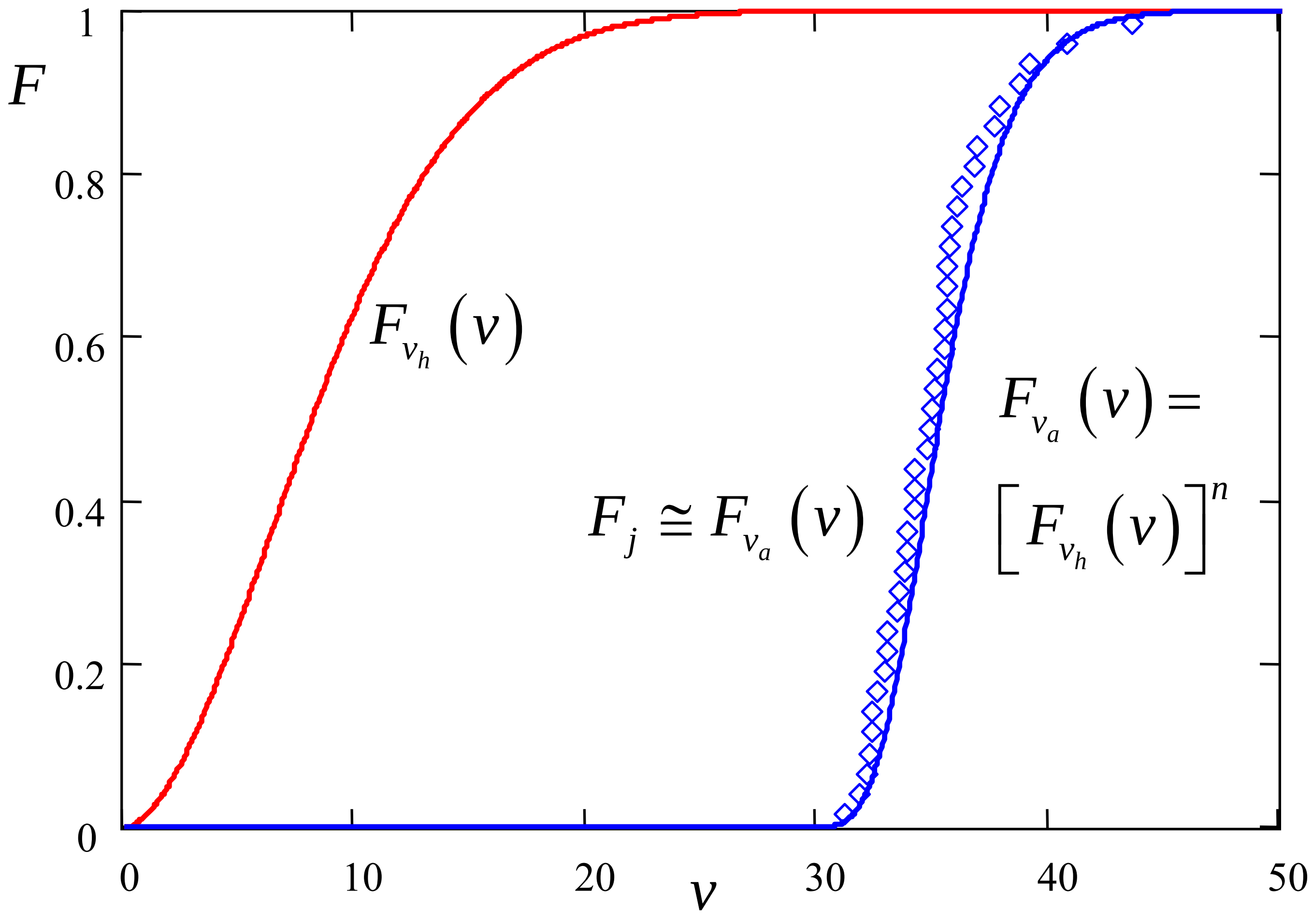
$$P\left\{v_a < v\right\} = P\left\{v_{h1} < v\right\} \cdot P\left\{v_{h2} < v\right\} \cdot ..... \cdot P\left\{v_{hn} < v\right\}$$

$$F_{v_a}\left(v\right) = \prod_{i=1}^{n} F_{v_h}\left(v\right) = \left[F_{v_h}\left(v\right)\right]^n$$

La funzione cumulata F_n dei massimi su n ripetizioni indipendenti di una V.A. x con cumulata $F=F_1$ è espressa dalla relazione:

$$F_n\left(x\right) = \left[F_1\left(x\right)\right]^n$$

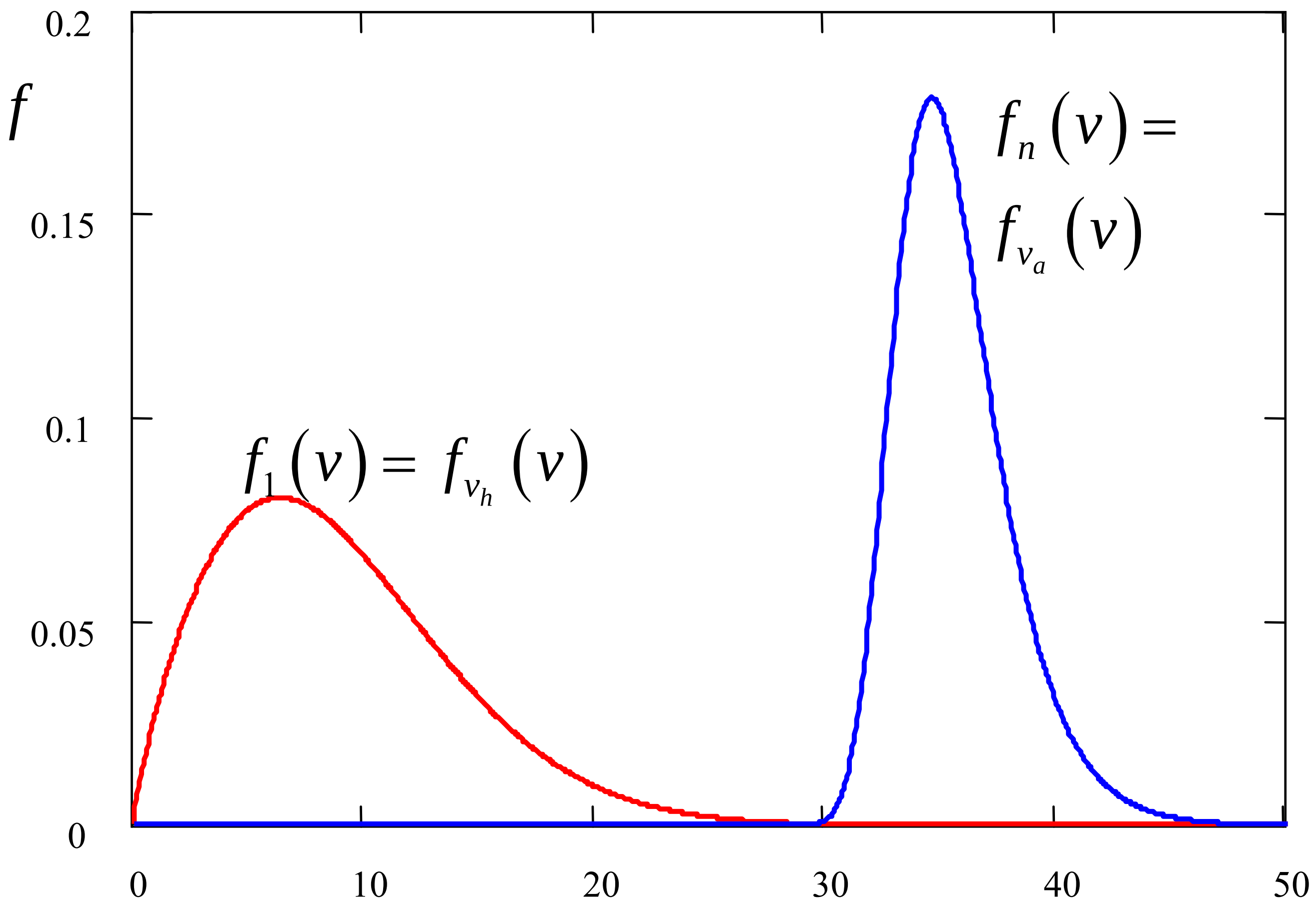
Confronto



F
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
v
$F_{v_h}(v)$
$F_j \cong F_{v_a}(v)$
$F_{v_a}(v) = \left[F_{v_h}(v)\right]^n$

La densità di probabilità dell'evento massimo per *n* ripetizioni è quindi:

$$f_n(x) = \frac{d}{dx} F_n(x) = n \cdot f_1(x) \cdot \left[F_1(x) \right]^{n-1}$$



La probabilità che nel periodo di esercizio (un anno) il vento superi i soliti valori è indicata nella tabella:

v_a maggiore di	Probabilità
30 m/s	0.9997
40 m/s	0.058

Generalizzando:

la probabilità di superamento del valore x_0 è quindi:

$$P\left\{x_m > x_0\right\} = 1 - F_n\left(x_0\right) = 1 - \left[F_1\left(x_0\right)\right]^n = 1 - \left[1 - P_1\left\{x > x_0\right\}\right]^n$$

Esempio 8.2

Un elemento strutturale è sottoposto nella vita operativa a 600 cicli di carico. Il singolo carico è descritto dalla V.A. normale:

$$L = N\left(x, 150, 30\right)$$

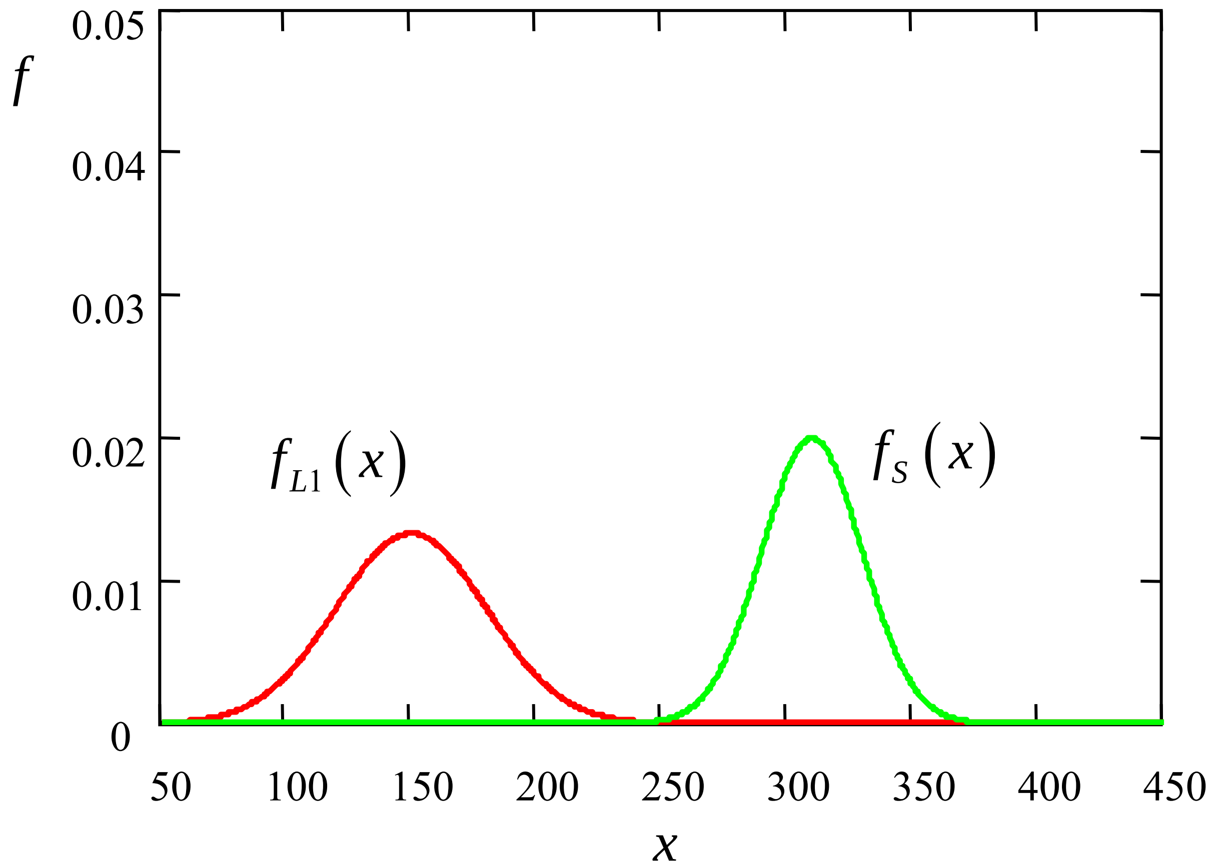
La resistenza statica è una V.A. normale con caratteristiche:

$$S = N\left(x, 310, 20\right)$$

Determinare l'affidabilità (probabilità che non si rompa).

Nota. Considerare i cicli di carico indipendenti significa in particolare che non è significativo il danneggiamento dovuto alla fatica (la probabilità di rottura del componente non dipende dai carichi precedentemente applicati).

Calcoliamo in un primo momento l'affidabilità prodotta dalla applicazione di un singolo carico:



L'affidabilità per una singola applicazione del carico risulta:

$$R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(x) F_{L1}(x) dx = 0.9999955$$

La probabilità di rottura per una singola applicazione del carico:

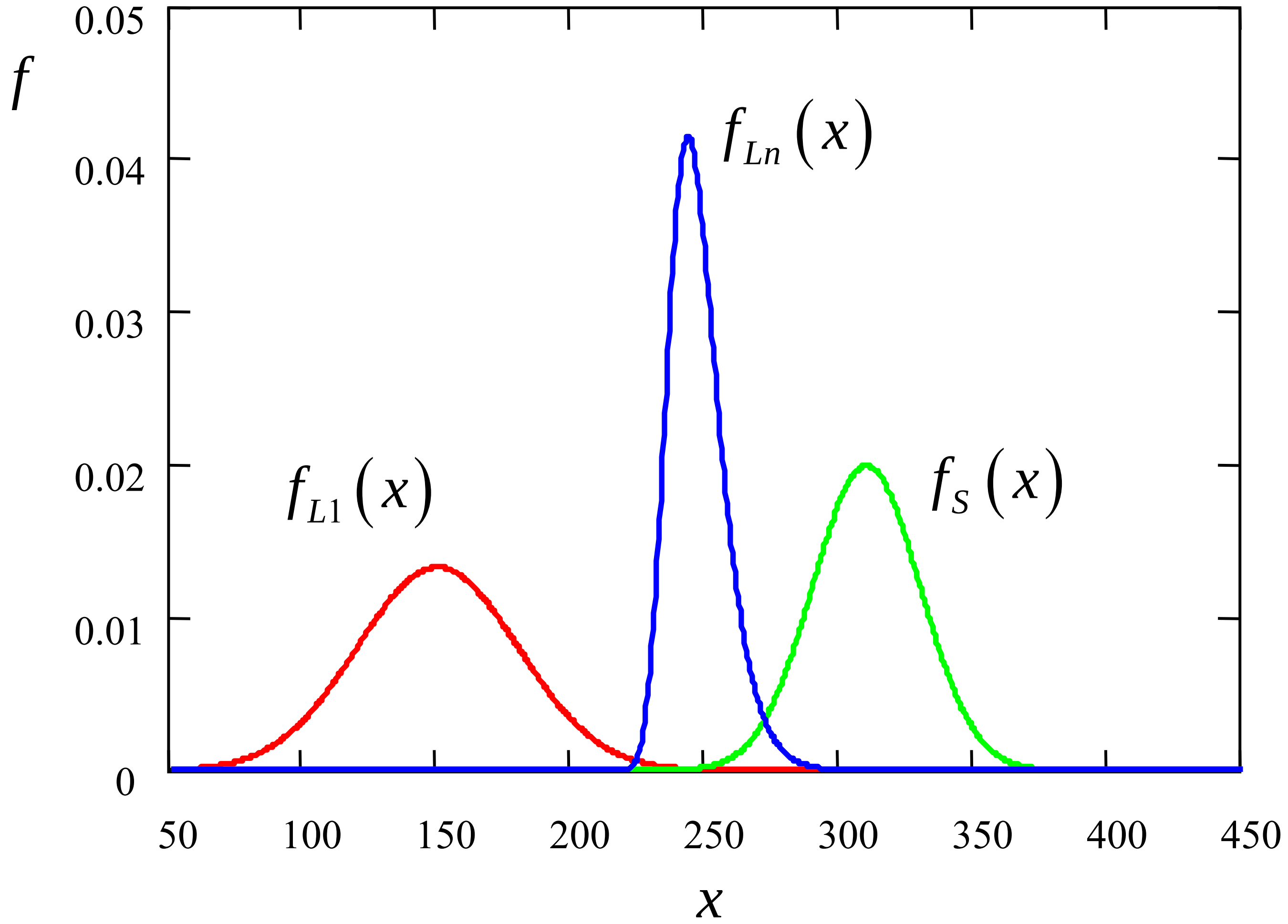
$$P_{F1} = 1 - R_1 = 4.5 \cdot 10^{-6}$$

se vi sono n=600 applicazioni indipendenti del carico, l'affidabilità statica è dominata dal massimo valore del carico e quindi è necessario considerare la distribuzione del carico massimo su n ripetizioni, che ha distribuzione definita come:

$$F_{Ln}(x) = \left[F_{L1}(x)\right]^n$$

$$f_{Ln}(x) = n \cdot f_{L1}(x)\left[F_{L1}(x)\right]^{n-1}$$

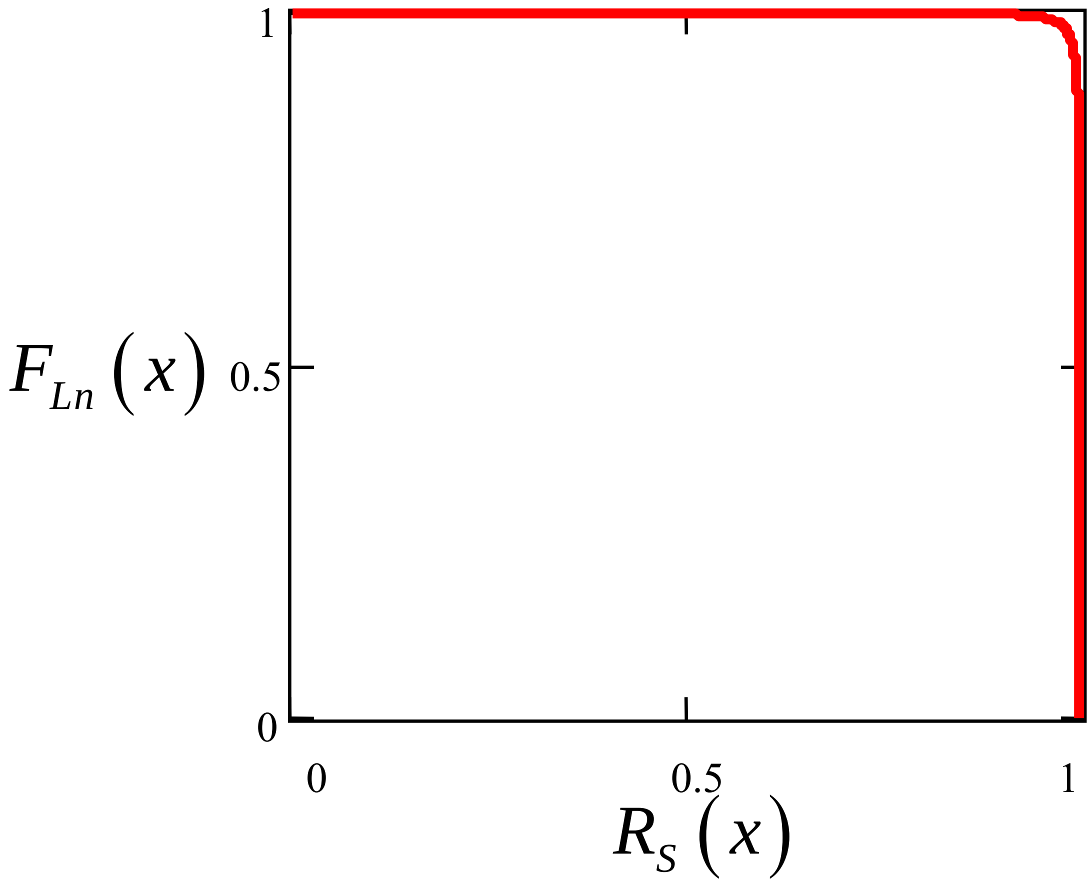
Confronto tra la distribuzione del singolo carico e quella del carico massimo su 600 ripetizioni



Pertanto l'affidabilità è:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(x) F_{Ln}(x) dx = 0.9976$$

$$P_{F\,600} = 2.4 \cdot 10^{-3}$$



Tasso unitario di rottura del carico

Consideriamo la sequenza di applicazione dei carichi i=1,..,n ripetuti con passo temporale (ininfluente) costante: Δt

Assumendo un tasso di guasto λ costante nell'intervallo di prova

$$0 < t < n \cdot \Delta t$$

L'affidabilità diviene:

$R(t) = e^{-\lambda t}$ dopo il generico carico: $R(i\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t i}$

L'affidabilità alla fine della sequenza di applicazione dei carichi:

$$R(n\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t n} = \left(e^{-\lambda \Delta t}\right)^n = R_u{}^n = \left(1 - P_{Fu}\right)^n$$

in cui :

R_u l'affidabilità unitaria, ovvero associata alla applicazione di un singolo carico della sequenza di n valori

P_{Fu} la probabilità di guasto unitaria associata al singolo carico della sequenza di n valori dato che $P_{Fu} \ll 1$

$$\left(1-P_{Fu}\right)^n = e^{-n\cdot P_{Fu}}$$

deriviamo la definizione di **tasso unitario di guasto**:

$$P_{Fu} = \lambda \cdot \Delta t$$

ma, soprattutto, la seguente relazione valida per i carichi ripetuti:

$$\boxed{P_{Fu} = -\frac{\ln\left(R_u\right)}{n}}$$

Nel caso in esame, il tasso unitario di rottura:

$$P_{Fu} = -\frac{\ln\left(1-2.4\cdot 10^{-3}\right)}{600} = 3.97\cdot 10^{-6}$$

Un po' diverso dalla probabilità di rottura del singolo carico

$$P_{F1} = 4.5\cdot 10^{-6}$$

Approssimazioni e maggiorazioni

Consideriamo situazioni di pratico interesse con l'applicazione di un elevato numero di carichi:

$$n \gg 1 \qquad\qquad P_F = 1 - R \ll 1$$

Al limite sarà quindi:

$$R = \left(1 - P_{Fu}\right)^n = e^{-nP_{Fu}} \cong 1 - n \cdot P_{Fu}$$

$$P_{Fu} = \frac{P_F}{n}$$

Inoltre il tasso unitario di rottura può essere approssimato con la probabilità di rottura del singolo caricamento:

$$P_{Fu} \cong P_{F1}$$

In generale infatti vale la seguente relazione:

$$P_{Fu} \leq P_{F1}$$

Esercizio 8.1

Un componente deve essere sottoposto a 10^5 cicli di carico, determinare il *SM* sul singolo carico per avere nella vita operativa una affidabilità di almeno 0.99

$$P_R = 1 - 0.99 = 10^{-2} \qquad P_{Ru} = \frac{P_R}{10^5} = 10^{-7}$$

$$P_{R1} \cong P_{Ru}$$

$$SM > 5.2$$

Considerare la probabilità di rottura per n ripetizioni pari a:

$$P_{Rn} = n \cdot P_{R1}$$

è un procedimento cautelativo

Distribuzioni limite (1/2)

Cosa succede alla distribuzione dei carichi massimi quando n diventa molto elevato?

La forma della distribuzione $f_{Ln}(x)$ tende a modificarsi sempre meno con n, convergendo verso una distribuzione limite che diventa indifferente a n: $f_{L\infty}(x)$ LEVD: *Largest Extreme Value Distribution*

La cumulata della LEVD ha la seguente espressione generale:

$$F(x) = e^{-\left[1+\gamma\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}}$$

con parametro γ che dipende dalla forma della coda destra della distribuzione dei carichi unitari:

$\gamma \simeq 0$ Gumbel se $F_1(x) \sim 1 - e^{g(x)}$ con $g(x)$ monotona crescente

$\gamma > 0$ Type II se $F_1(x) \sim 1 - \alpha \cdot x^{-m}$ con $\alpha, m > 0$

$\gamma < 0$ Type III se $F_1(x) \sim 1 - \alpha \cdot (\omega - x)^m$ con $\alpha, m > 0$ e $x \leq \omega$

Distribuzioni limite (2/2)

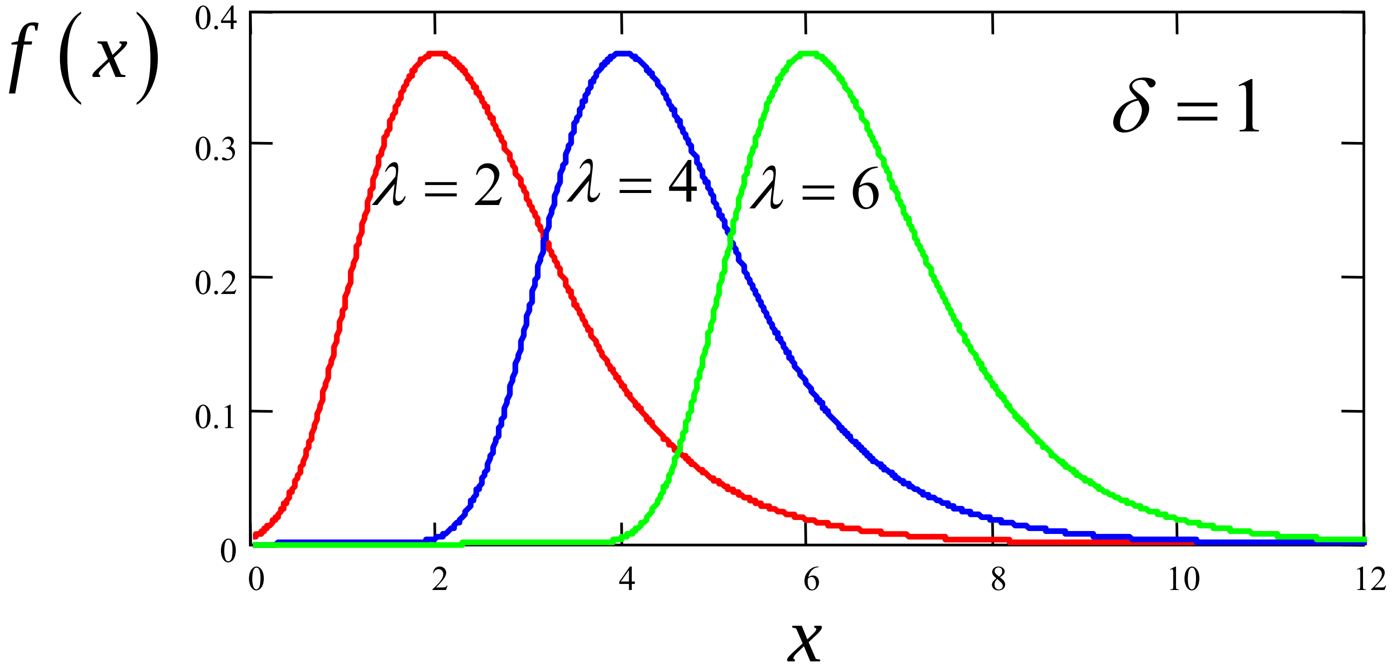
Dettaglio delle distribuzione di Gumbel

Densità: $$f(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\left[\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)+e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}\right]}$$

Cumulata: $$F(x) = e^{-e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}}$$

Inversa della cumulata: $$x_P = \lambda - \delta \cdot \ln\left[-\ln(P)\right]$$

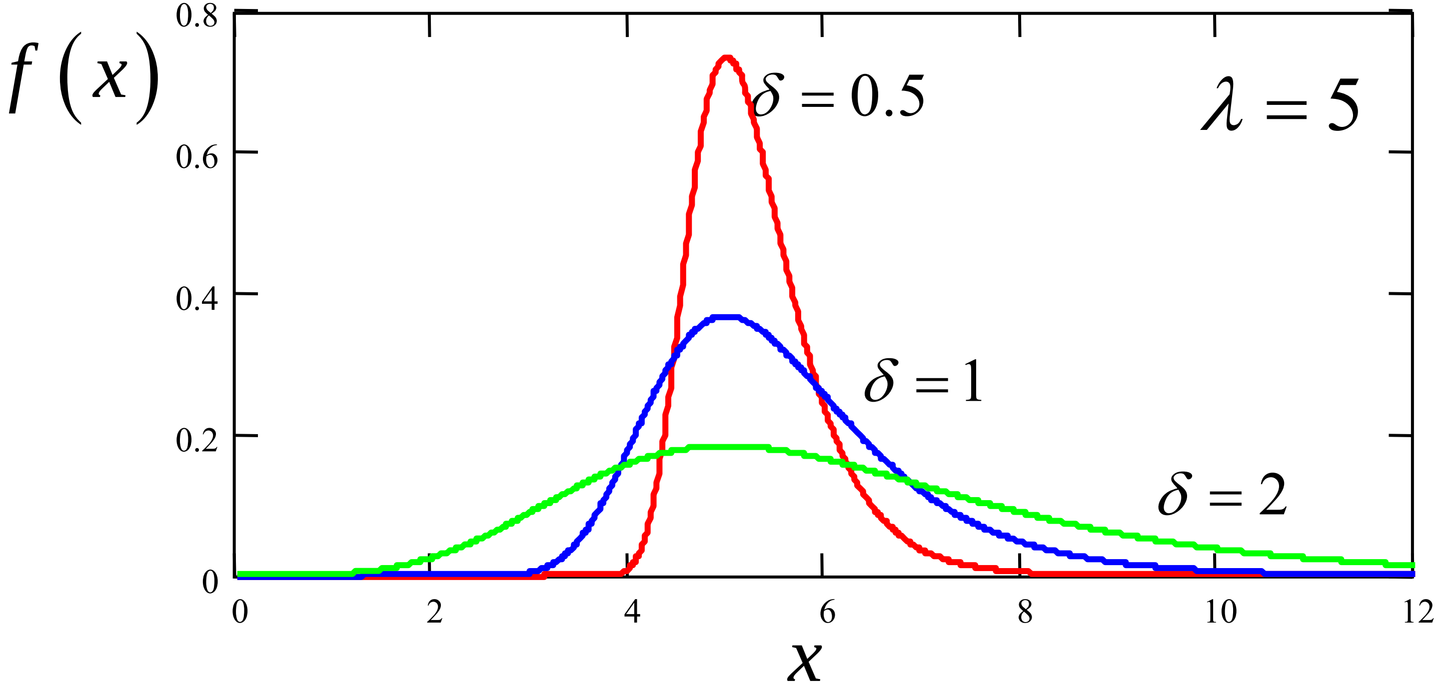
Distribuzione di Gumbel: effetto di λ



$$\mu = \lambda + 0.577 \cdot \delta$$

0.577 : costante di Eulero

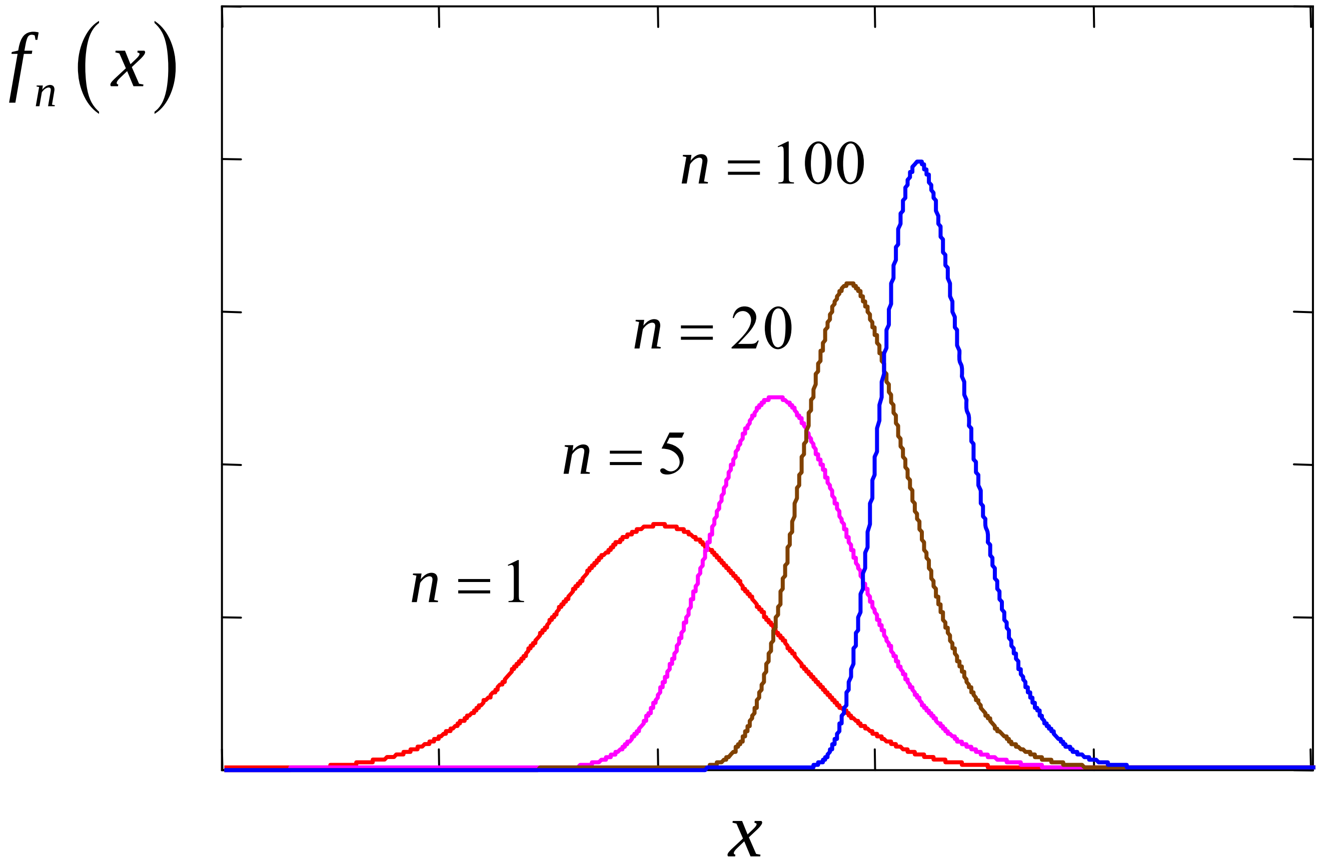
Distribuzione di Gumbel: effetto di δ



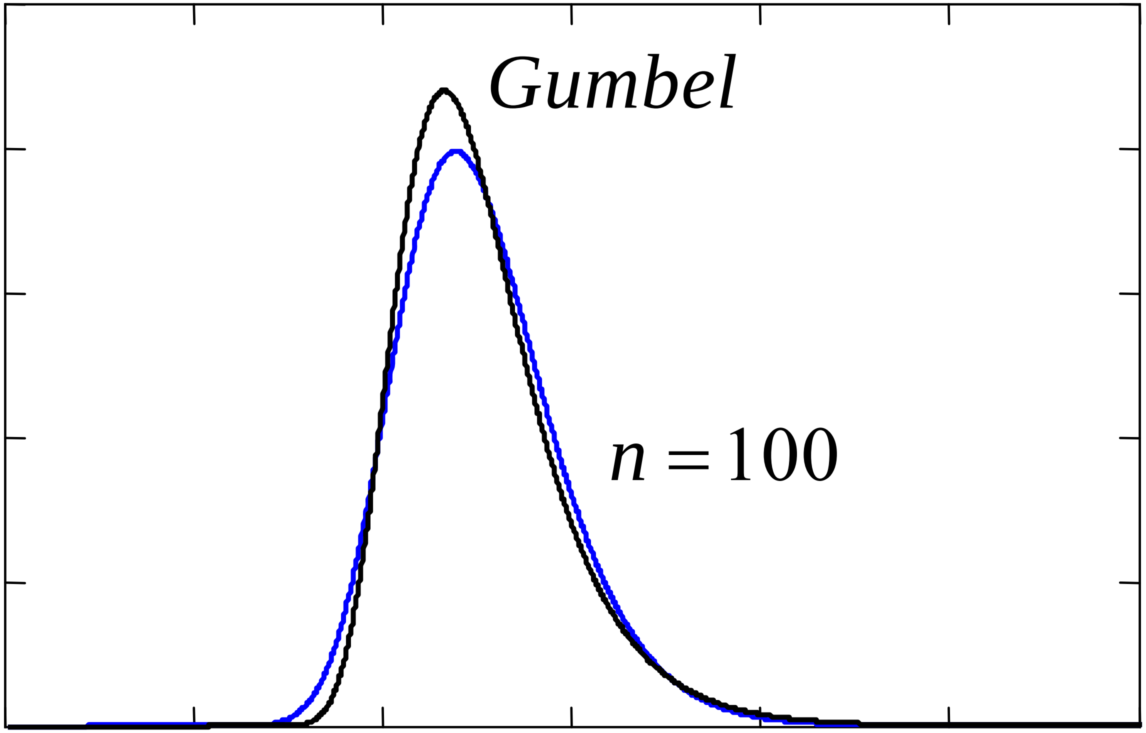
$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \delta = 1.282 \cdot \delta$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta = 078 \cdot \sigma \\ \lambda = \mu - 0.45\sigma \end{array}}$$

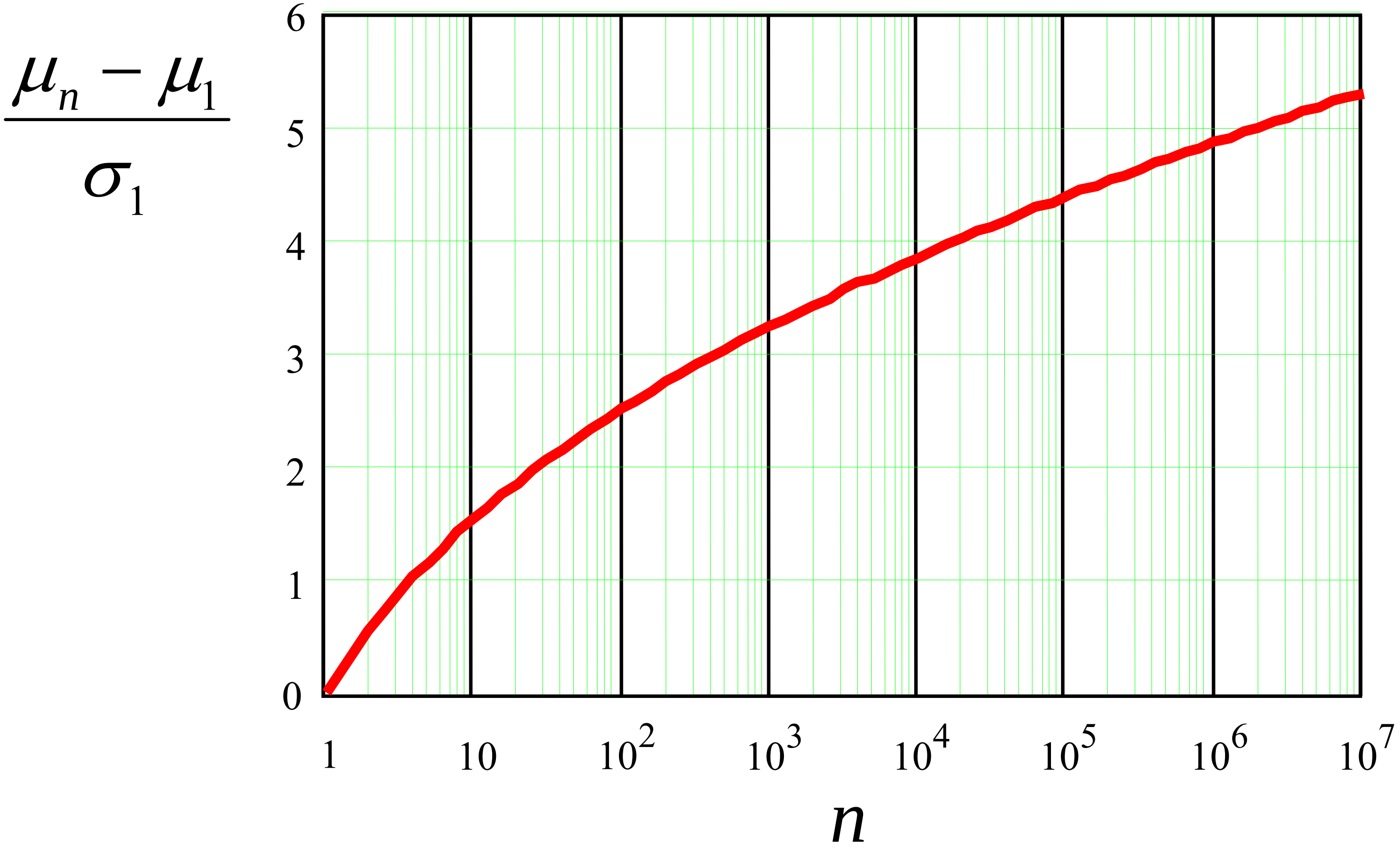
Distribuzioni limite valori estremi di una gaussiana



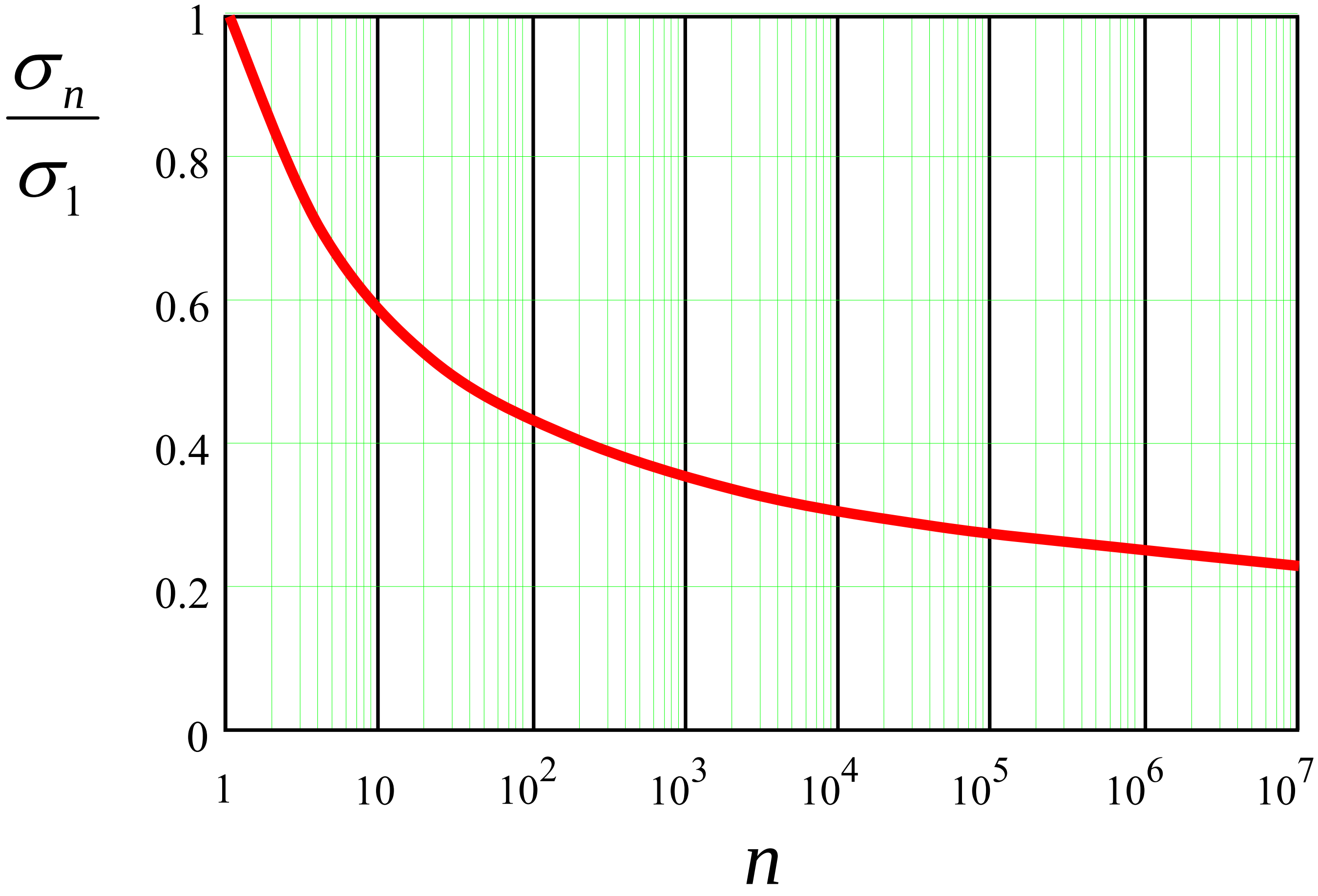
Modello di Gumbel



Effetto di *n* sulla media



Effetto di n sulla dispersione

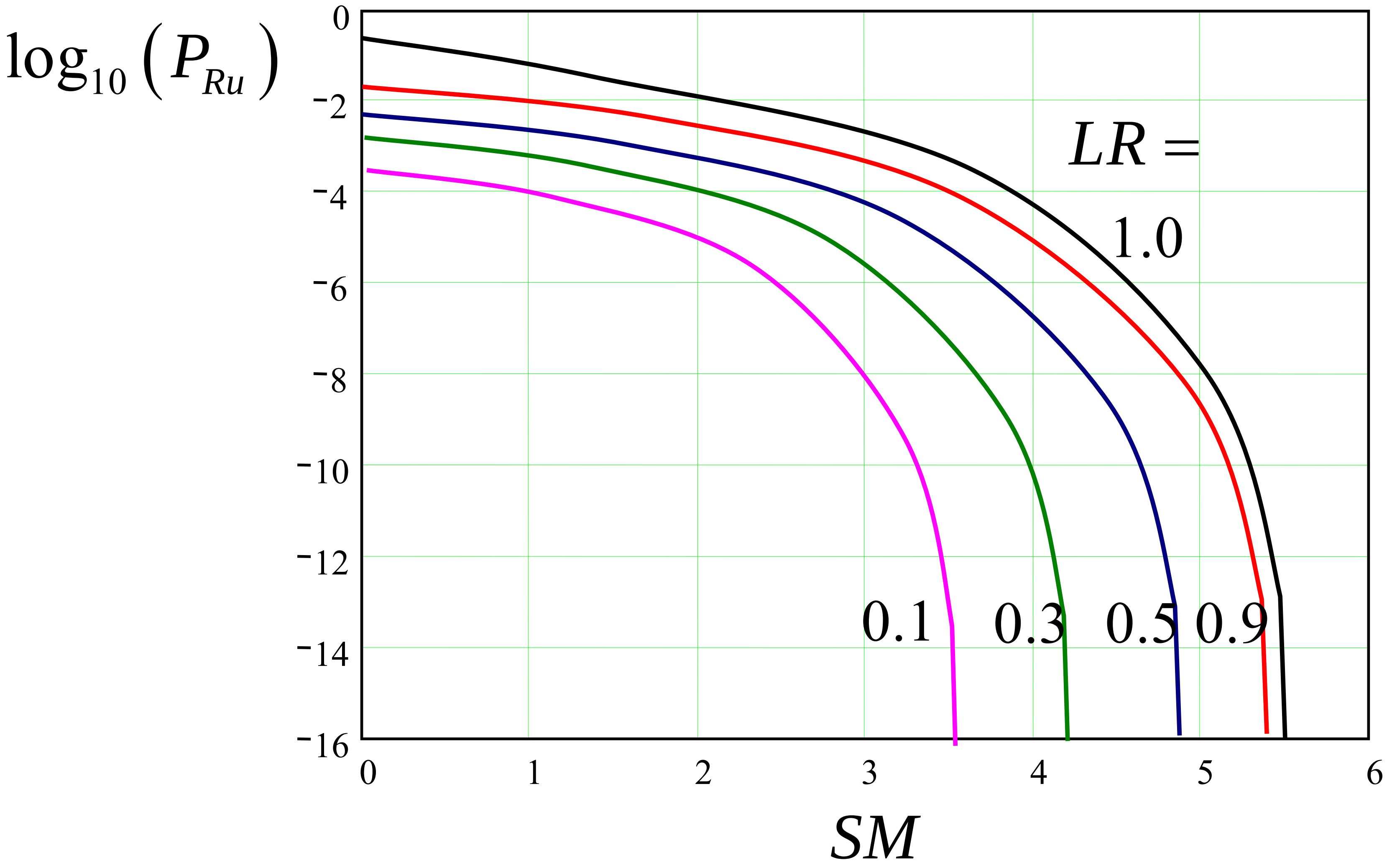


Progettazione intrinsecamente sicura (1/4)

Safety margin
$$SM = \frac{\mu_S - \mu_L}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}}$$

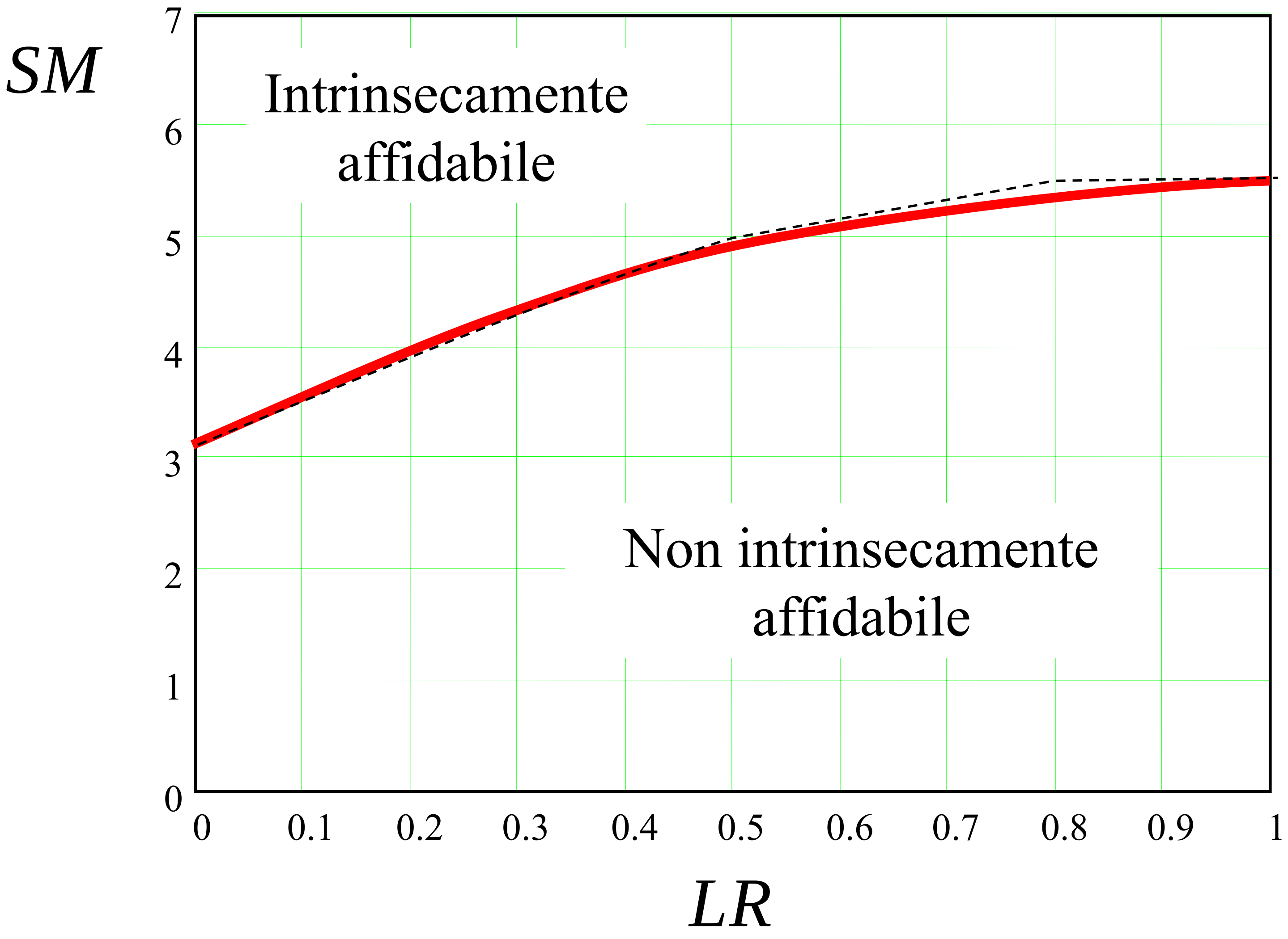
Loading roughness
$$LR = \frac{\sigma_L}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_L^2}}$$

Progettazione intrinsecamente sicura (2/4)



Valori riferiti alla distribuzione del carico singolo

Progettazione intrinsecamente sicura (3/4)



Andamento ottenuto tenendo conto degli asintoti verticali

Progettazione intrinsecamente sicura (4/4)

Rappresentazione approssimata lineare a tratti:

$$SM = \begin{cases} 3.8 \cdot LR + 3.1 & 0 \le LR < 0.5 \\ 1.66 \cdot LR + 4.16 & 0.5 \le LR < 0.8 \\ 5.5 & LR \ge 0.8 \end{cases}$$

Esempio 8.3

Assumendo distribuzioni gaussiane per il singolo carico e per la resistenza:

$$L = N\left(x, \mu_L, \sigma_L\right); \quad S = N\left(x, \mu_S, \sigma_S\right)$$

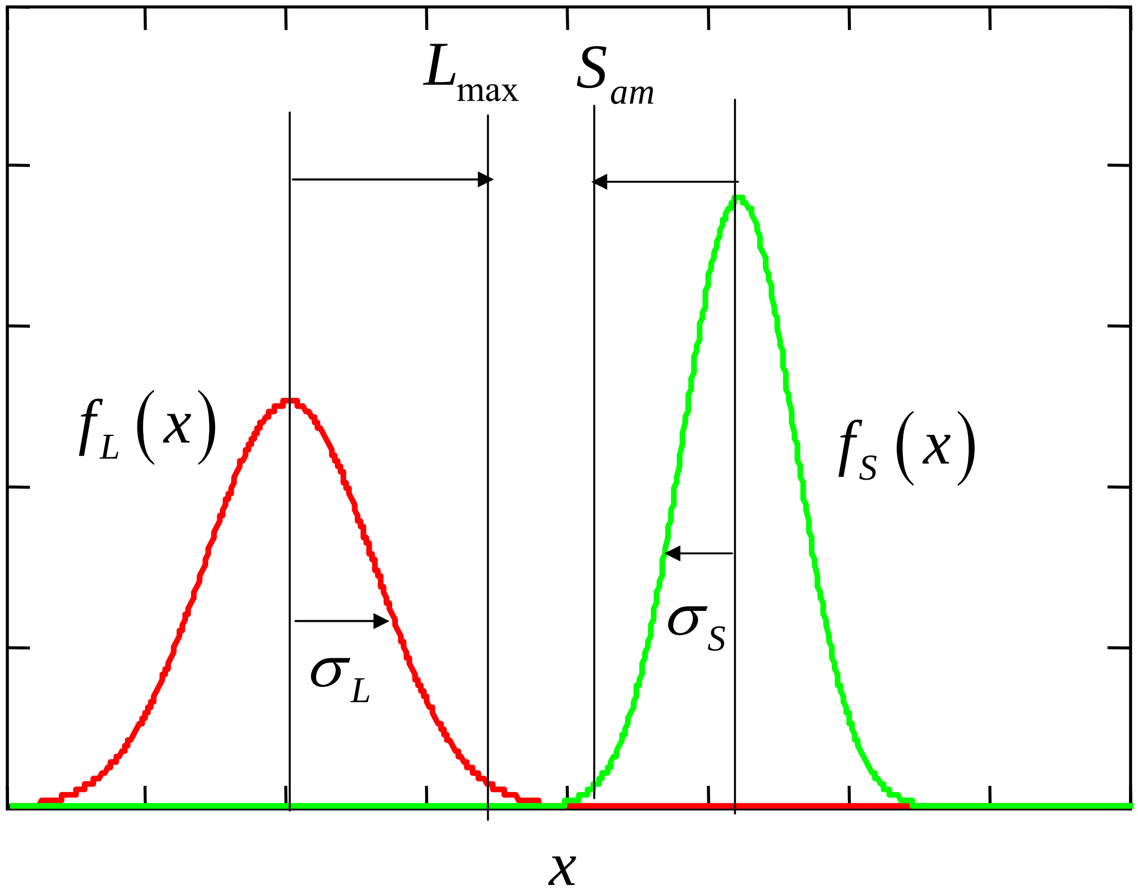
determinare il fattore comune *k* da applicare alle deviazioni standard per definire il massimo valore del carico e il valore della resistenza ammissibile:

$$L_{max} = \mu_L + k\sigma_L; \quad S_{am} = \mu_S - k\sigma_S$$

in modo da garantire una progettazione intrinsecamente sicura (indipendente dal numero di ripetizioni del carico) usando il procedimento convenzionale basato sul coefficiente di sicurezza:

$$\eta = \frac{S_{am}}{L_{max}} \geq 1$$

Esempio per k=2

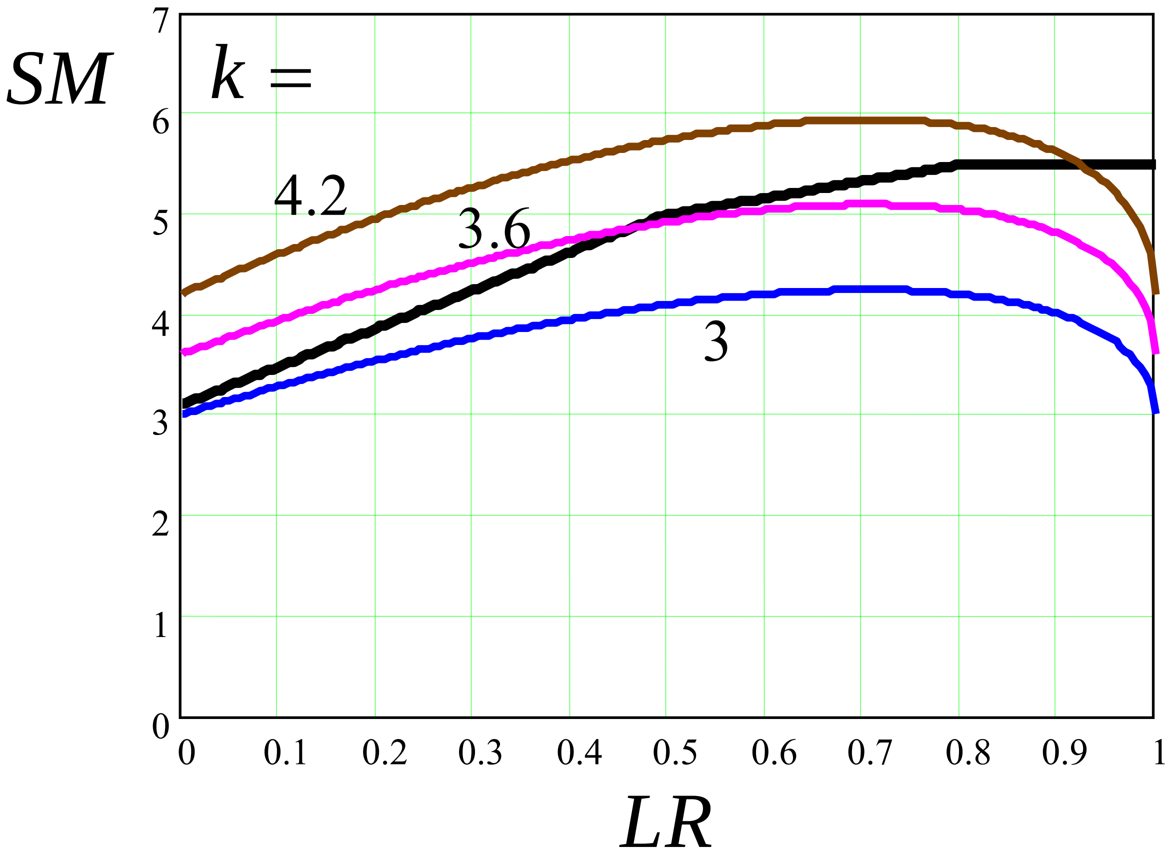


$$\eta \geq 1 \Rightarrow S_{am} \geq L_{max}$$

$$\mu_S - k\sigma_S \geq \mu_L + k\sigma_L$$

$$\mu_S - \mu_L \geq k\left(\sigma_L + \sigma_S\right)$$

$$SM \geq k \cdot \left(LR + \sqrt{1 - LR^2}\right)$$



Tempo di ritorno dei carichi estremi

Concetto tipico dei carichi estremi legati a eventi naturali es:

- il tempo di ritorno di un terremoto di magnitudo 6.0 della scala Richter è di 20 anni
- il tempo di ritorno di una portata doppia di quella media di un fiume è 50 anni
- il tempo di ritorno di un'onda di 5 metri è 120 anni

Come si interpretano affidabilisticamente?

Definizione

Tempo di ritorno T_R è il **tempo medio** tra il manifestarsi di due eventi con magnitudo uguale o maggiore di quella indicata

Concetto strettamente legato alla distribuzione degli eventi estremi

La probabilità che tali eventi estremi si verifichino nell'unità di tempo è dato da:

$$P_u = \frac{1}{T_R}$$

Esempio 8.4

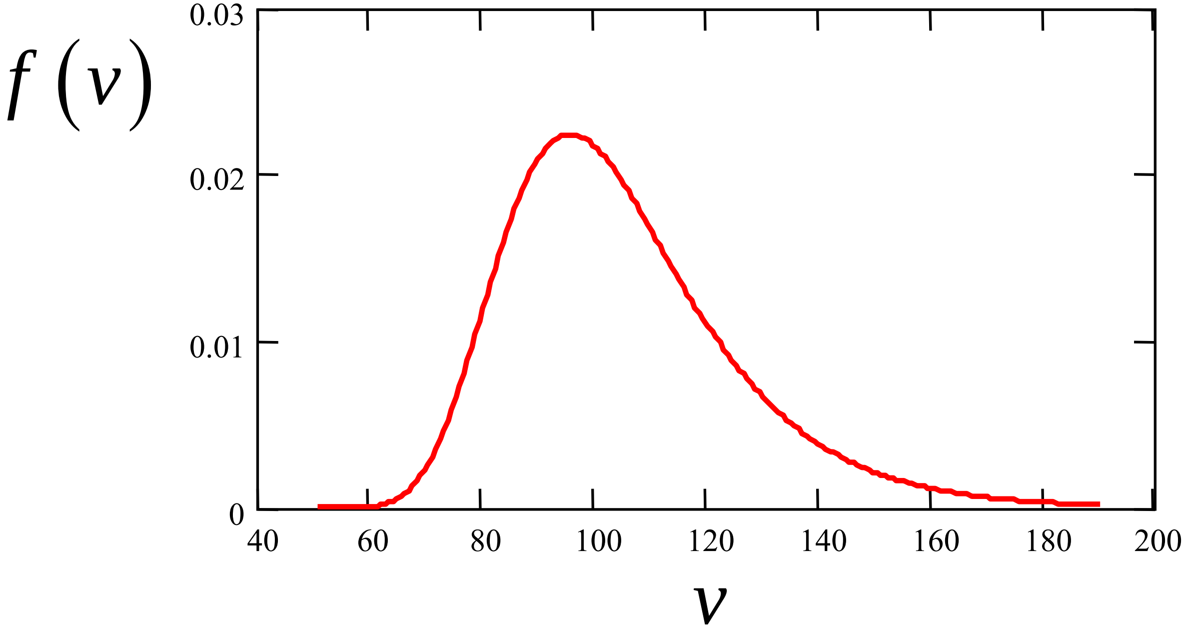
Il vento massimo annuale ha valore medio μ=95km/h e CV =0.2, calcolare il periodo di ritorno del vento massimo di 160km/h

$$\sigma = 0.2 \cdot 95 = 21\text{km/h}$$

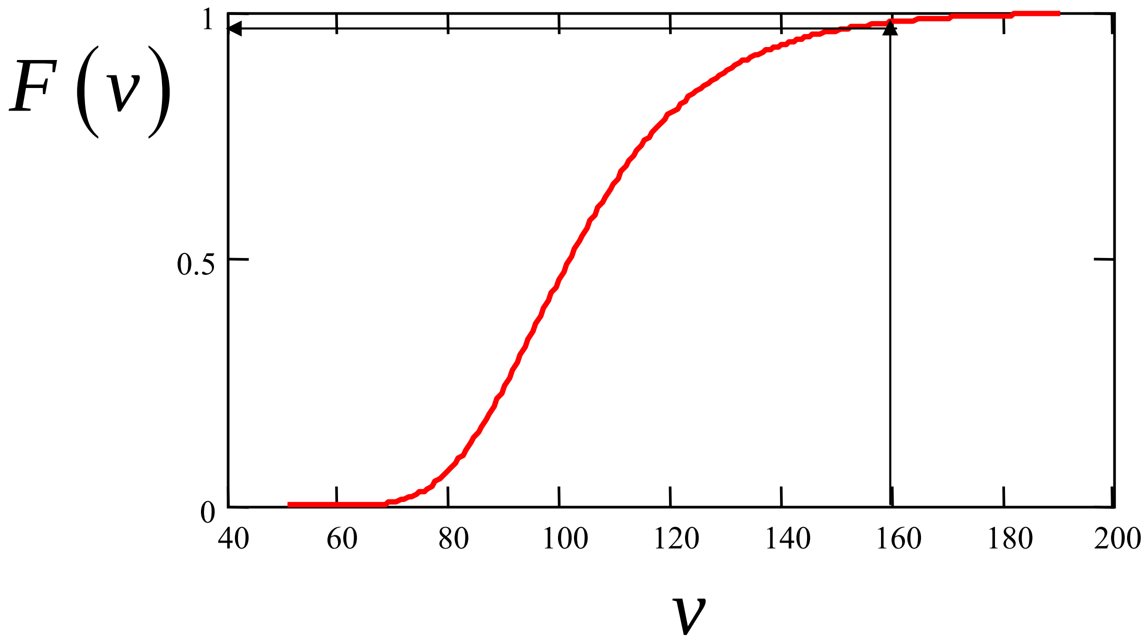
Assumiamo una distribuzione di Gumbel:

$$\delta = 078 \cdot \sigma = 16.4\text{km/h}$$

$$\lambda = \mu - 0.45 \cdot \sigma = 95.6\text{km/h}$$



$$F(160) = 1 - 0.019$$



$$P(v > 160) = 0.019$$

Probabilità che ogni singolo anno il vento superi il valore prefissato

$$\boxed{T_R = \frac{1}{P(v > 160)} = 51.6\text{anni}}$$

Distribuzioni *weakest link*

Esempio 8.5

La resistenza statica del singolo anello di una catena sollecitato a trazione come in esercizio segue una gaussiana con caratteristiche (valori in kN):

$$S = N\left(x, 12, 1.5\right)$$

Determinare la massima sollecitazione a cui può essere sottoposta una catena composta di *n*=20 anelli nominalmente uguali per avere una affidabilità di almeno 0.99.

La risposta nel caso del singolo anello è elementare, usiamo i quantili della normale:

$$T_1 = 8.51\mathrm{kN}$$

questa soluzione non è corretta (e non è cautelativa!) in quanto la catena si rompe quando cede **l'anello più debole** (*the weakest link*)

Conviene ragionare al contrario:
La catena **non si rompe** se tutti gli anelli reggono.

Indichiamo con S_c la resistenza della catena e con S_i la resistenza del singolo anello (i=1..n), per un carico x **non si ha rottura** se:

$$\{x < S_c\} = \{x < S_1\} \cap \{x < S_2\} \cap ..... \cap \{x < S_n\}$$

Se la resistenza di un anello è indipendente da quella di ogni altro:

$$P\{x < S_c\} = P\{x < S_1\} \cdot P\{x < S_2\} \cdot ..... \cdot P\{x < S_n\}$$

Queste probabilità di non rottura sono le affidabilità (al carico x) del singolo anello, considerando che le distribuzioni degli resistenze degli anelli sono le stesse:

$$R_c = R_1 \cdot R_1 \cdot ..... \cdot R_1 = R_1^n$$

$$1 - P_{Fc} = \left(1 - P_{F1}\right)^n$$

$$P_{Fc} = 1 - \left(1 - P_{F1}\right)^n$$

Lo stesso ragionamento vale per la distribuzione cumulata della resistenza:

$$F_{Sn}\left(x\right) = 1 - \left[1 - F_{S1}\left(x\right)\right]^n$$

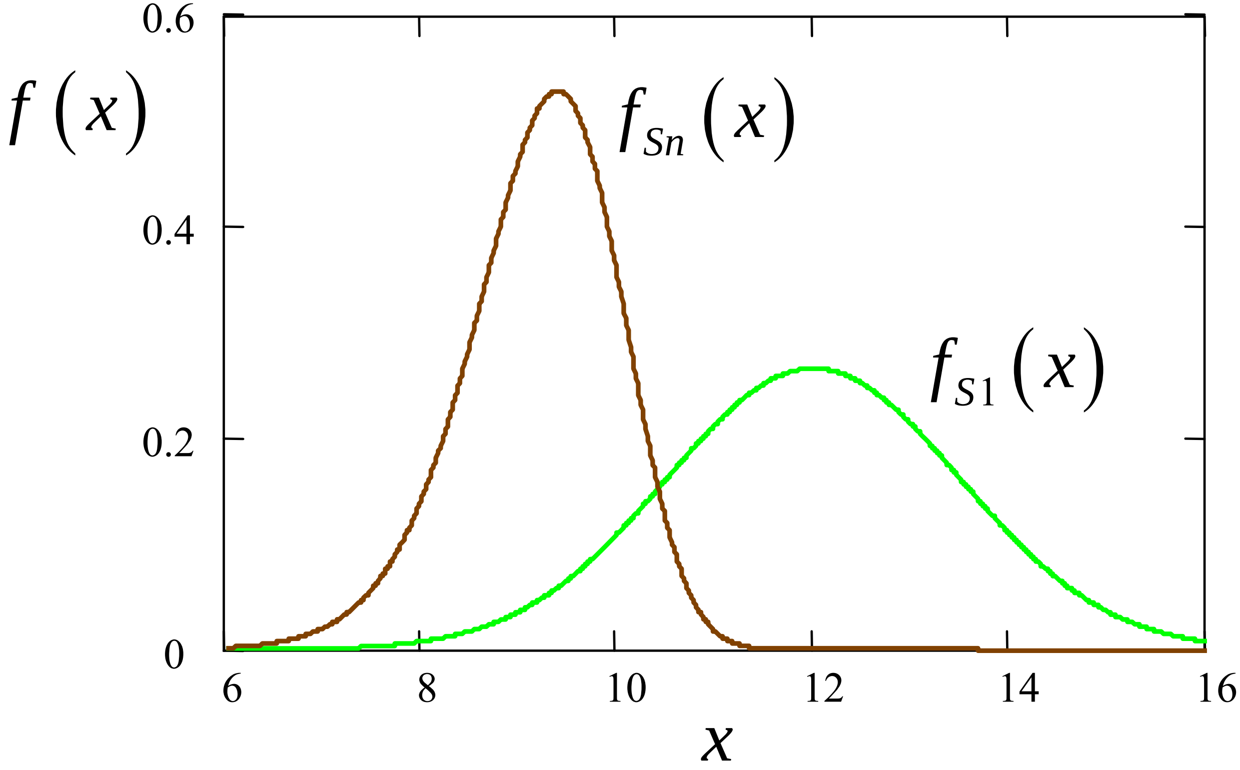
in cui $F_{Sn}\left(x\right)$ è la cumulata della resistenza della sequenza di *n* elementi uguali, ognuno dei quali ha cumulata: $F_{S1}\left(x\right)$

Per derivazione otteniamo la distribuzione di densità della resistenza:

$$f_{Sn}\left(x\right) = \frac{dF_{Sn}\left(x\right)}{dx} = n \cdot f_{S1}\left(x\right) \cdot \left[1 - F_{S1}\left(x\right)\right]^{n-1}$$

Nota: abbiamo attuato un procedimento analogo a quello sviluppato per la distribuzione dei valori estremi considerando i valori minimi al posto dei massimi

Resistenza della catena vs resistenza dell'anello



$$F_{Sn}(x) = 0.01 \Rightarrow x = 7.07\text{kN}$$

$$F_{S1}(7.07) = 0.0005$$

Distribuzioni *weakest link: SEVD* (1/2)

Si possono ripetere le stesse considerazioni asintotiche (per n grande) sviluppate per la distribuzione dei massimi ottenendo la distribuzione limite dei minimi: SEVD (*Smallest Extreme Value Distribution*)

In particolare la SEVD tipo II di Gumbel ha espressioni:

Densità: $$f(x) = \frac{1}{\delta} e^{\frac{x-\lambda}{\delta} - e^{\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}}$$

Cumulata: $$F(x) = 1 - e^{-e^{\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}}$$

Inversa della cumulata: $$x_P = \lambda + \delta \cdot \ln\left[-\ln\left(1-P\right)\right]$$

Distribuzioni *weakest link: SEVD* (2/2)

$$\sigma = 1.282 \cdot \delta$$

$$\mu = \lambda - 0.577 \cdot \delta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta &= 078 \cdot \sigma \\ \lambda &= \mu + 0.45\sigma \end{aligned}}$$

Esempio 8.6 (famoso)

The tethered satellite, TSS-1R (23805/96012B), was lost around 0130 UTC, February 27, 1996, whilst nearing full deploy during the STS-75 shuttle mission. This satellite was to have been flown on the end of a 20 km long tether in order to investigate tether electrodynamics, orbital adjustment via a tether and the upper atmosphere.

Supponendo che il cavo fosse stato provato con molte prove su spezzoni di 1 metro che avevano mostrato una resistenza gaussiana con $CV = 0.05$ e fosse stato dimensionato in modo che il carico massimo garantisse una affidabilità $R = 0.9999 = 1.0 - 10^{-4}$ sul singolo spezzone di prova, determinare l'affidabilità dell'intero cavo svolto.

$$n = 20000$$

$$\mu_n = 0.799; \sigma_n = 0.015$$

$$\lambda = 0.806; \delta = 0.011$$

Posto 1 il valor medio della resistenza di un metro di cavo, il valore della resistenza prevista con l'affidabilità richiesta:

$$x_0 = 0.814$$

A questo valore corrisponde una affidabilità complessiva del cavo di:

$$\boxed{R = 1 - F\left(x_0\right) = 0.125}$$

Non è strano che si sia rotto!!!