

ANALISI DINAMICA CON IL MEF

Principali tipi di analisi

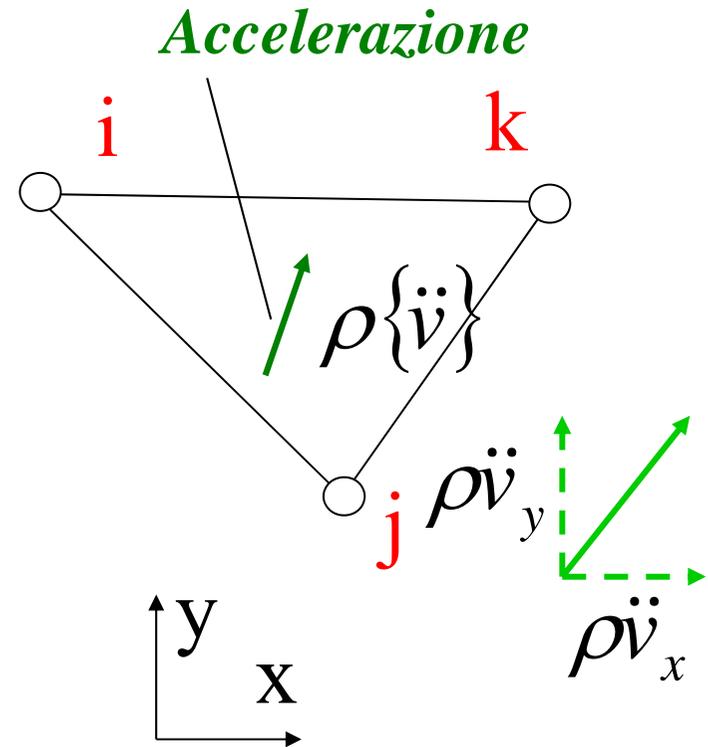
- analisi modale
- analisi della risposta armonica
- analisi di transitorio dinamico

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/1

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



$$dL_i = -\{\delta v\}^T \rho\{\ddot{v}\}dV$$

$$L_i = -\int_V \{\delta v\}^T \rho\{\ddot{v}\}dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho[N]\{\ddot{U}^e\}dV =$$

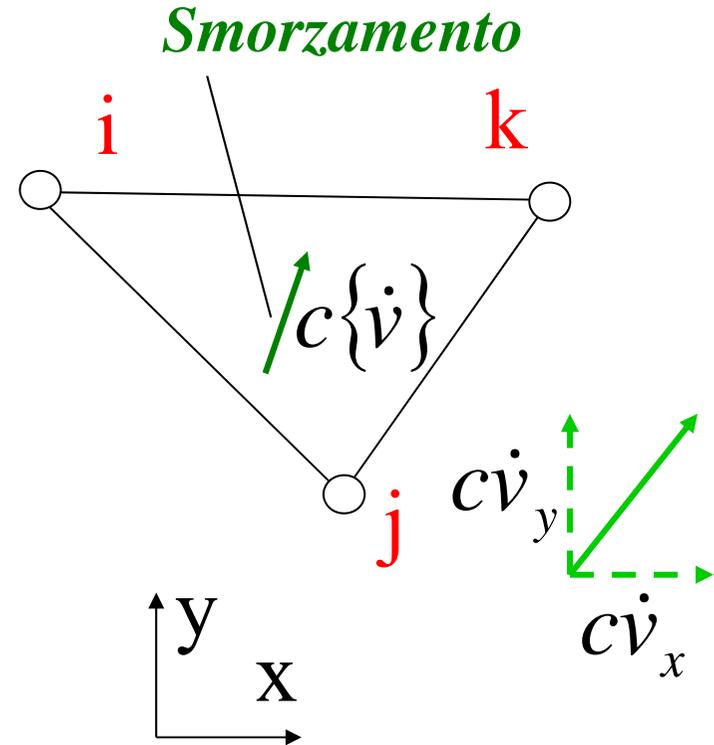
$$= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho[N]dV \{\ddot{U}^e\}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/2

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento

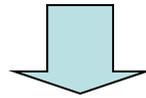


$$dL_s = -\{\delta v\}^T c\{\dot{v}\}dV$$

$$\begin{aligned} L_s &= -\int_V \{\delta v\}^T \rho\{\dot{v}\}dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho[N]\{\dot{U}^e\}dV = \\ &= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho[N]dV \{\dot{U}^e\} \end{aligned}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/3

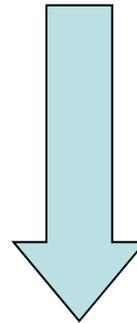
$$\begin{aligned} & \cancel{\{\delta U^e\}}^T \left(\{P^e\} - \int_V [N]^T c [N] dV \{\dot{U}^e\} - \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\ddot{U}^e\} \right) = \\ & = \cancel{\{\delta U^e\}}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{U^e\} \end{aligned}$$



$$[M^e] \{\ddot{U}^e\} + [C^e] \{\dot{U}^e\} + [K^e] \{U^e\} = \{P^e\}$$

$$\int_V [N]^T \rho [N] dV$$

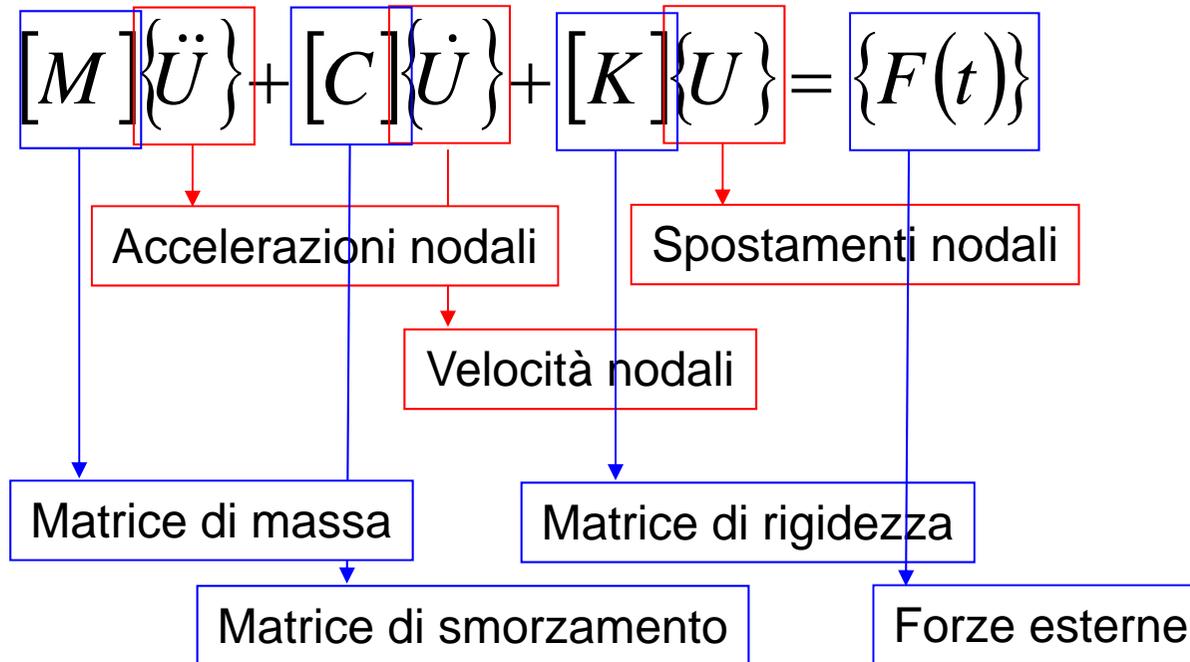
$$\int_V [N]^T c [N] dV$$



$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/4

Equazione di equilibrio dinamico



FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/1

Matrice di massa "consistent": $[M^e] = \int [N]^T \rho [N] dV$

Elemento triangolare piano

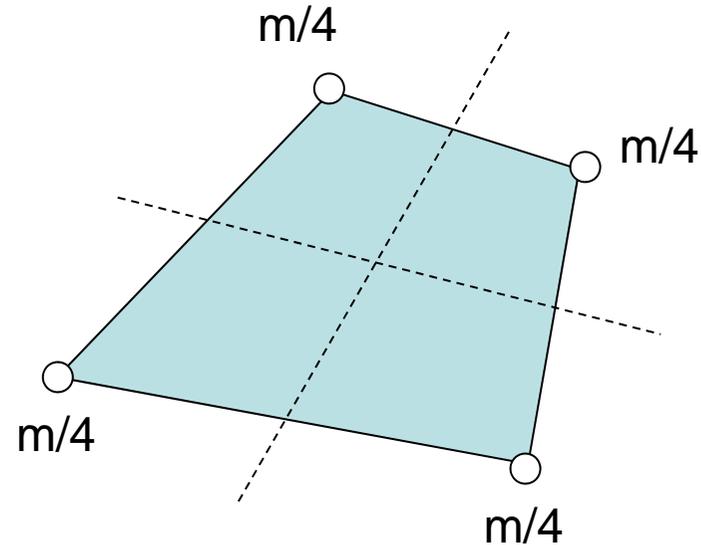
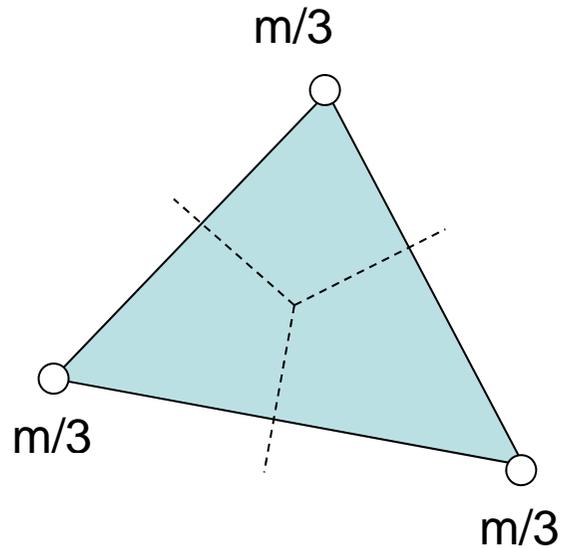
$$\int [N]^T \rho [N] dV = \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix} dV =$$

$$= \rho \begin{bmatrix} \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV \end{bmatrix}$$

- simmetrica
- sostanzialmente piena

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/2

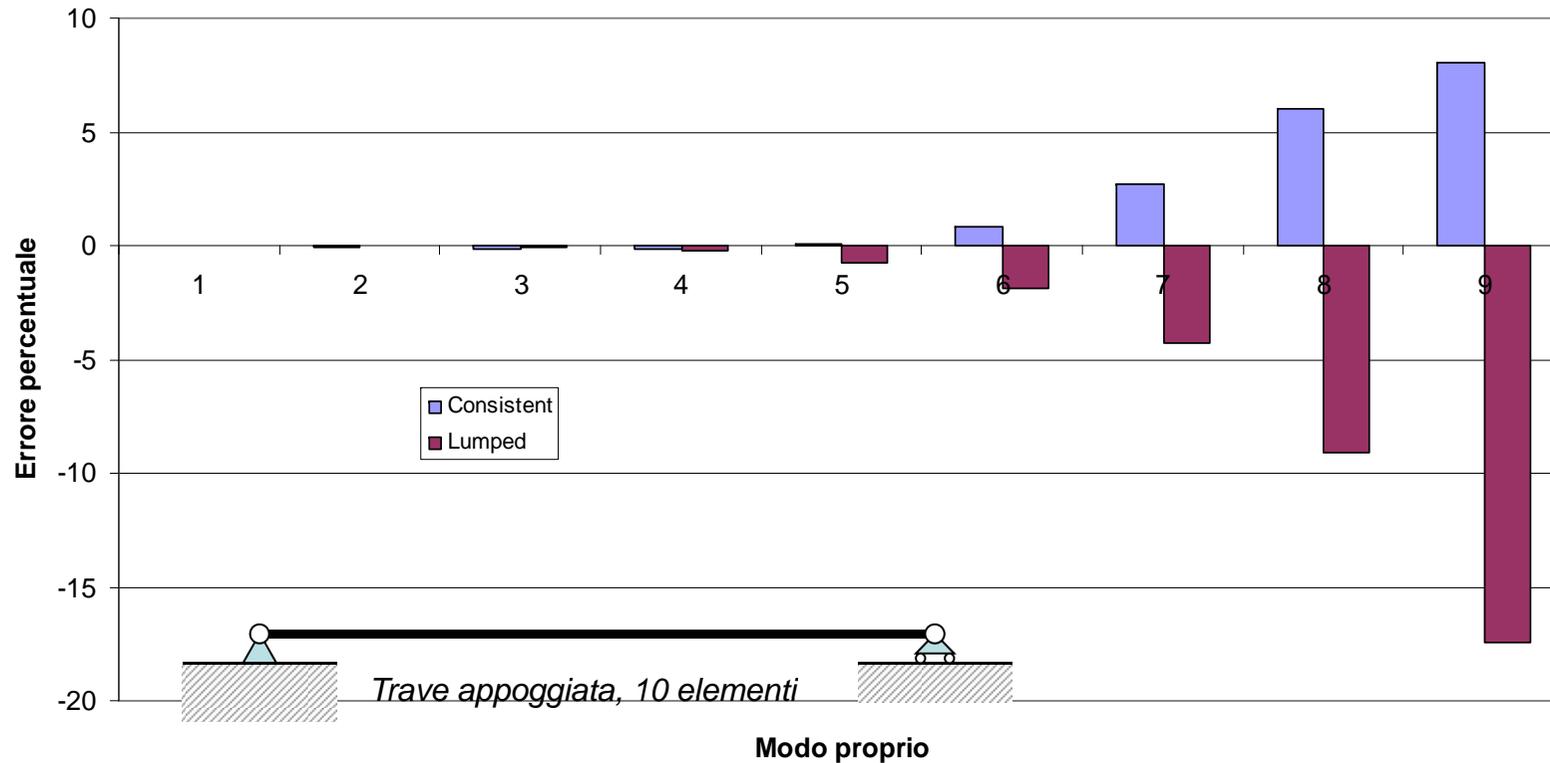
Matrice di massa "lumped": la massa viene concentrata nei nodi in qualche modo fisicamente accettabile (di solito ovvio per gli elementi con nodi nei vertici, meno ovvio per quelli con nodi intermedi), in modo che risulti: $\sum_j M_j = \int \rho dV$



- la struttura della matrice di massa è diagonale

$$[M] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/3



- La formulazione “consistente” produce errori minori in valore assoluto
- Le matrici “consistente” e “lumped” tendono a produrre rispettivamente una sovrastima ed una sottostima delle pulsazioni proprie
- La struttura diagonale può risultare molto vantaggiosa in alcune soluzioni iterative (es. analisi di transitorio) in quanto non richiede inversione

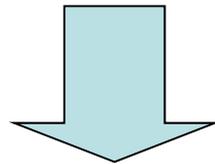
ANALISI MODALE/2

Si propone di determinare le pulsazioni proprie di una struttura e le relative forme modali.

Analizza le oscillazioni libere della struttura, in assenza dei carichi esterni

Effetto dello smorzamento solitamente molto piccolo

$$[M]\{\ddot{U}\} + \cancel{[C]}\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \cancel{\{F(t)\}}$$

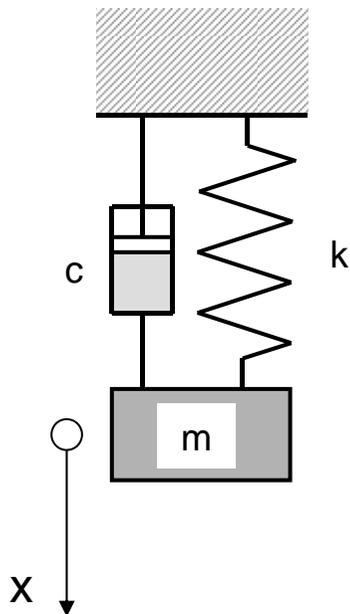


$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Per $\xi = 0.1$ (10%) si ha $\omega_s = 0.995 \cdot \omega_n$



ANALISI MODALE/3

Calcolo delle pulsazioni proprie

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0$$

$$\{U\} = \{\phi\} \sin(\omega \cdot t)$$

$$\{\dot{U}\} = \omega \{\phi\} \cos(\omega \cdot t)$$

$$\{\ddot{U}\} = -\omega^2 \{\phi\} \sin(\omega \cdot t)$$

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) + [K] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) = 0$$

ANALISI MODALE/4

Calcolo delle pulsazioni proprie

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) + [K] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) = 0$$

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0$$

Sistema lineare omogeneo nelle incognite $\{\phi\}$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) \begin{cases} \neq 0 & 1 \text{ soluzione } \{\phi\} = 0 \\ = 0 & \infty \text{ soluzioni} \end{cases}$$

ANALISI MODALE/5

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

$$(\omega^2)^n + a_1 \cdot (\omega^2)^{n-1} + a_2 \cdot (\omega^2)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot \omega^2 + a_n = 0$$

Radici

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_n$$

$$\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \{\phi_3\} \dots \{\phi_i\} \dots \{\phi_n\} \quad \text{Forme modali}$$

ANALISI MODALE/6

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\phi\} = 0$$

$n-1$ equazioni indipendenti

n incognite

∞^1 soluzioni

Le componenti della forma modale sono note a meno di una costante

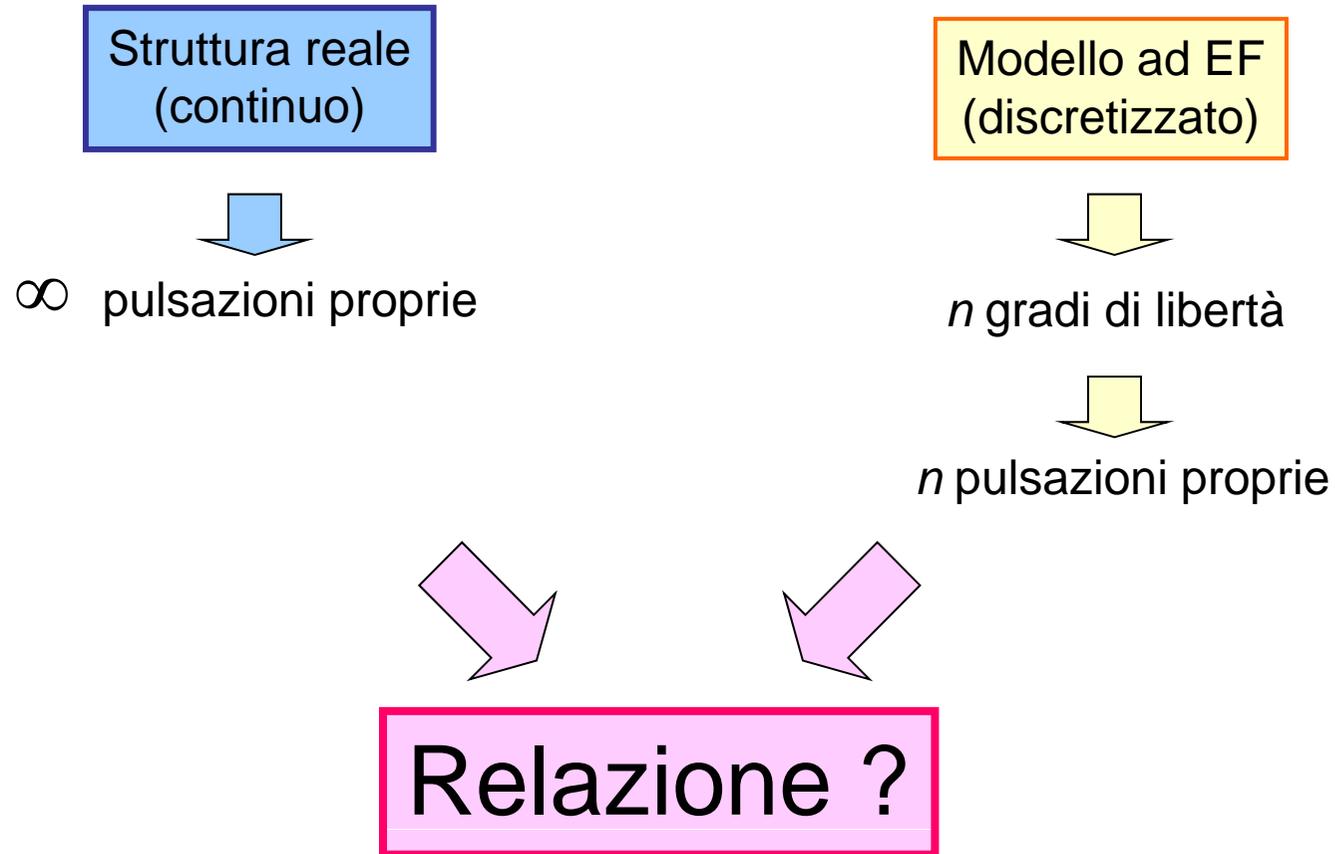
Rappresentano solo la forma della deformata, non i valori effettivi degli spostamenti

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{in} \end{Bmatrix}$$

Normalizzazioni tipiche

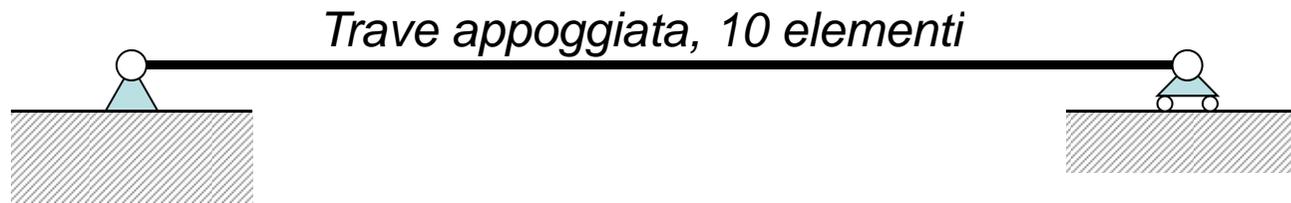
$$\begin{cases} \max |\phi_{ij}| = 1 \\ \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1 \end{cases}$$

ANALISI MODALE/7

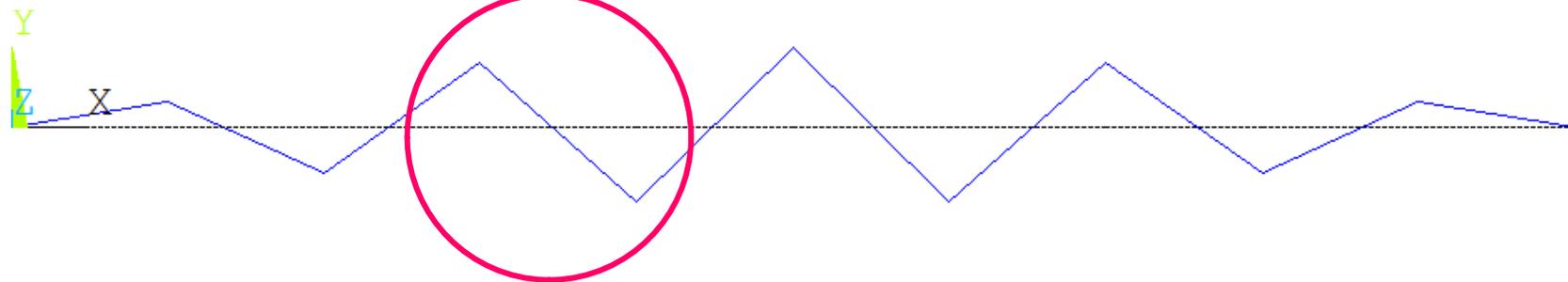


ANALISI MODALE/8

Tipico andamento spaziale delle Forme modali



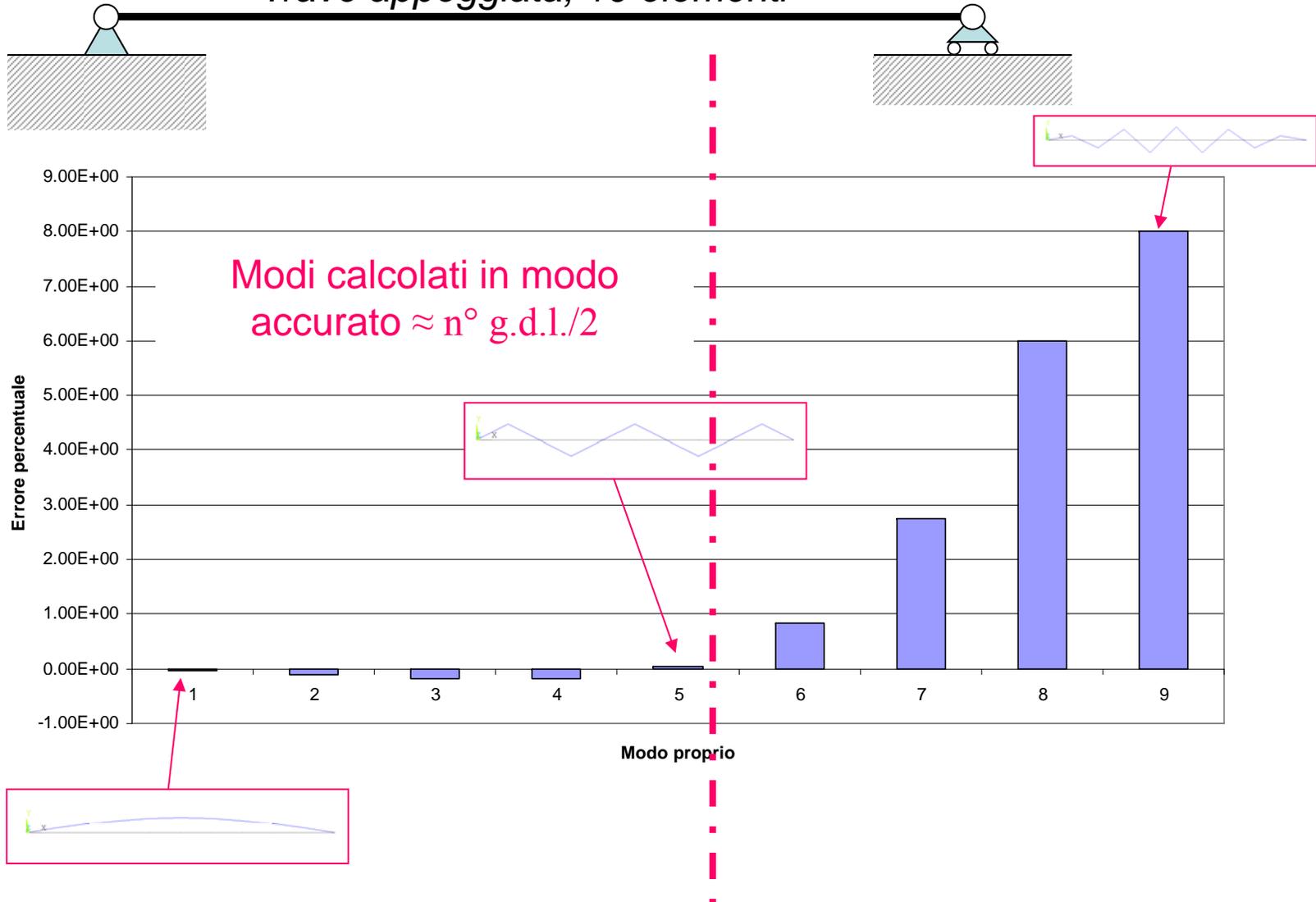
9° modo .



1 solo elemento: rappresentazione poco accurata del campo di velocità ed accelerazione

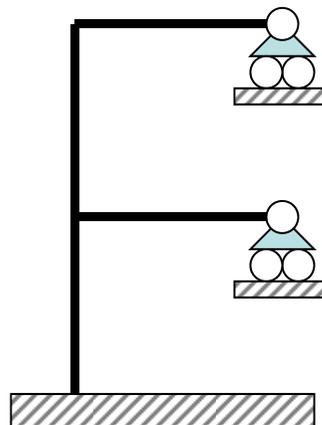
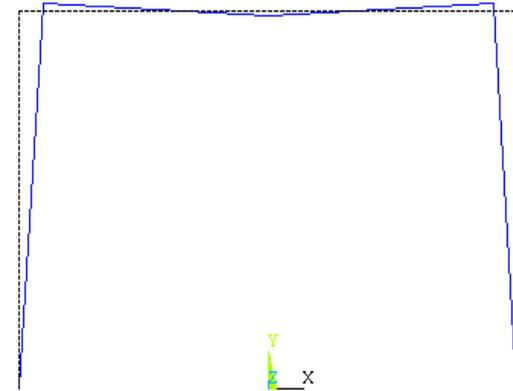
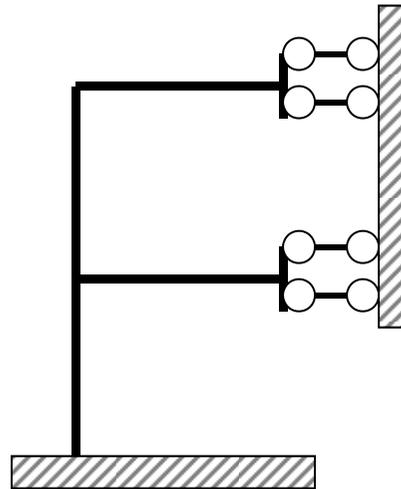
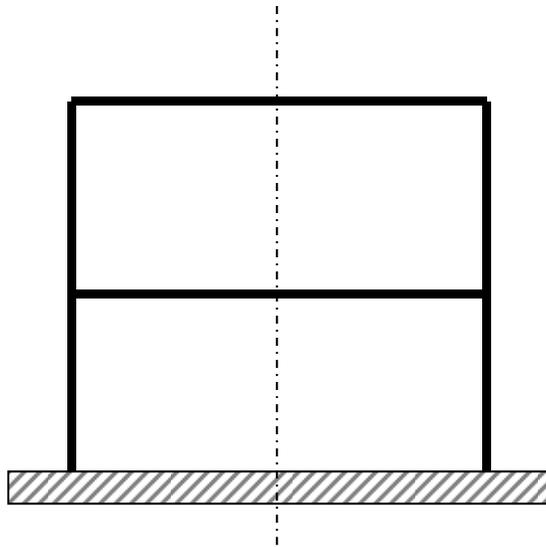
ANALISI MODALE/9

Trave appoggiata, 10 elementi



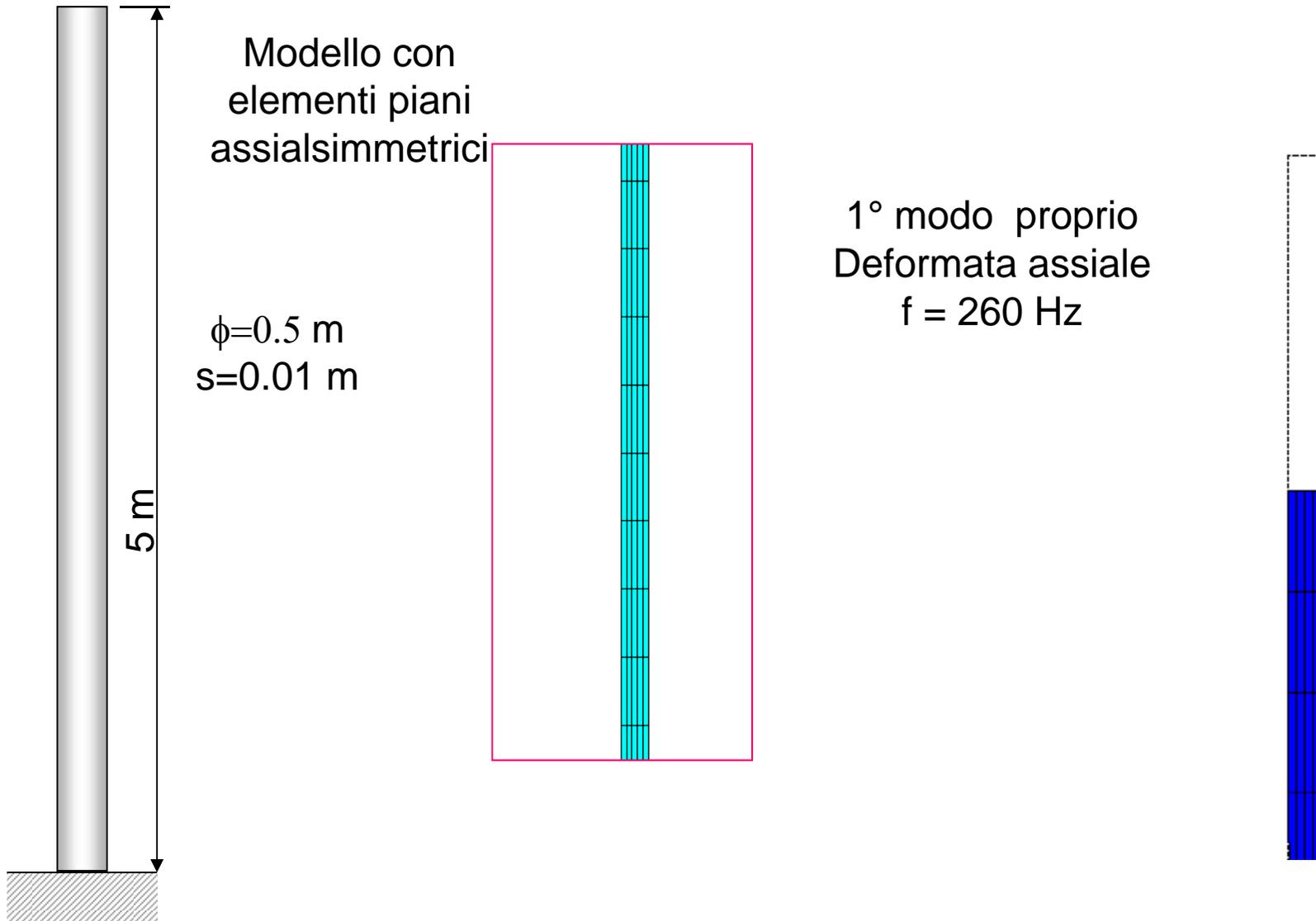
SIMMETRIA STRUTTURALE/1

Se si usano considerazioni di simmetria per ridurre le dimensioni di un modello, si otterranno solo i modi propri le cui forme modali rispettano la stessa simmetria.



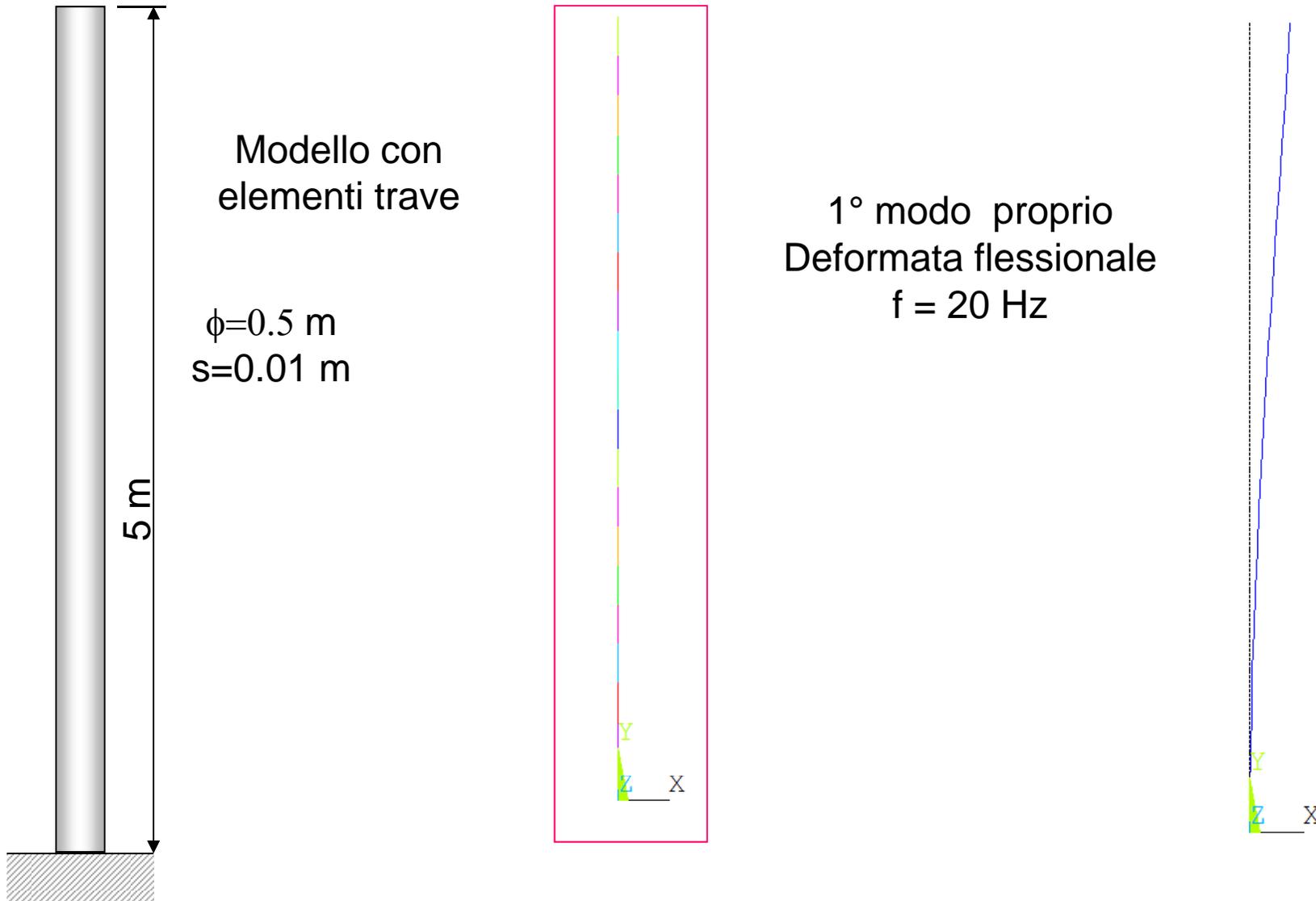
SIMMETRIA STRUTTURALE/2

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica



SIMMETRIA STRUTTURALE/3

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica



UNITÀ DI MISURA/1

È preferibile usare il sistema m.k.s

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m}$$

kg

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1000}{s^2}} = \frac{1}{s} \sqrt{10^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{mm} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm}$$

kg

ANALISI RIDOTTA/1

Nell'analisi ridotta, lo stato di spostamento, velocità ed accelerazione della struttura viene espresso in termini di un sottoinsieme dei nodi (Nodi "Master"). Gli spostamenti dei nodi rimanenti (Nodi "Slave") sono quindi calcolati a partire da quelli dei nodi Master.

L'analisi ridotta può essere applicata anche in capo statico, per ridurre l'onere computazionale dell'analisi.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_M\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \text{g.d.l. "Master"} \\ \text{g.d.l. "Slave"} \end{array} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_M\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

ANALISI RIDOTTA/2

$$\begin{cases} [K_{MM}] \{U_M\} + [K_{MS}] \{U_S\} = \{F_M\} \\ [K_{SM}] \{U_M\} + [K_{SS}] \{U_S\} = \{F_S\} \end{cases}$$

$$\{U_S\} = [K_{SS}]^{-1} (\{F_S\} - [K_{SM}] \{U_M\})$$

$$[K_{MM}] \{U_M\} + [K_{MS}] [K_{SS}]^{-1} (\{F_S\} - [K_{SM}] \{U_M\}) = \{F_M\}$$

$$([K_{MM}] - [K_{MS}] [K_{SS}]^{-1} [K_{SM}]) \{U_M\} = \{F_M\} - [K_{MS}] [K_{SS}]^{-1} \{F_S\}$$

$$[\hat{K}] \{U_M\} = \{\hat{F}\} \qquad \{U_M\} = [\hat{K}]^{-1} \{\hat{F}\}$$

ANALISI RIDOTTA/3

Introducendo la suddivisione tra “Master” e “Slave” nell’equazione di equilibrio dinamico si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [M_{MM}] & [M_{MS}] \\ [M_{SM}] & [M_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_M \\ \ddot{U}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{MM}] & [C_{MS}] \\ [C_{SM}] & [C_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_M \\ \dot{U}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_M \\ U_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_M \\ F_S \end{Bmatrix}$$

La riduzione delle matrici di massa e smorzamento ai soli g.d.l. “Master” non può essere fatta in modo esatto, come per la matrice di rigidità. Si usa pertanto una formula di riduzione semplificata ed approssimata proposta da Guyan (“Guyan reduction”)

ANALISI RIDOTTA/4

Si ottiene in tal modo:

$$[\hat{M}]\{\ddot{U}_M\} + [\hat{C}]\{\dot{U}_M\} + [\hat{K}]\{U_M\} = \{\hat{F}\}$$

$$[\hat{M}] = [M_{MM}] - [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[M_{SM}] - [M_{MS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}] + \\ + [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[M_{SS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]$$

$$[\hat{C}] = [C_{MM}] - [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[C_{SM}] - [C_{MS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}] + \\ + [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[C_{SS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]$$

ANALISI RIDOTTA/5

Criteri di selezione dei g.d.l. “Master” (MDOF):

- i MDOF devono essere in numero **almeno doppio** dei modi da estrarre
- scegliere i MDOF nelle direzioni in cui si vuole analizzare le vibrazioni della struttura
- scegliere i MDOF in punti della struttura caratterizzati da bassa rigidezza e/o elevata massa
- scelta automatica: si basa sul rapporto: $Q_i = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}$

Verifica qualità analisi:

- la massa ridotta deve differire da quella totale per non più del 10-15%
- studio di convergenza al variare del numero di MDOF

ANALISI RIDOTTA/6

Principali algoritmi di estrazione di autovalori ed autovettori (ANSYS) :

Algoritmo	N° modi	N° g.d.l. modello	Velocità	RAM	Hard disk	Note
Block Lanczos	Elevato	Elevato	Elevata	Media	Bassa	Shell o shell+solid. Elementi distorti
Subspace iteration	Basso	Elevato	Media	Bassa	Elevata	Elementi non distorti
Power Dynamics	Basso	Elevato	Elevata	Elevata	Bassa	Richiede mesh fini
Reduced (Householder)	Tutti	Medio-piccolo	Elevata	Bassa	Bassa	Usa MDOF

ANALISI RIDOTTA/7

Potenziati applicazioni dell'analisi ridotta:

- riduzione degli oneri computazionali dell'analisi
- riduzione del numero di g.d.l. attivi nell'analisi modale, rispetto a quella statica, pur utilizzando un unico modello
- in modelli semplici, separazione dell'effetto dei diversi g.d.l. nodali (es. in una trave si possono analizzare separatamente i modi flessionali, estensionali, etc.)

COMANDI ANSYS/1 ANALISI NON RIDOTTA

/SOLU

ANTYPE, MODAL

Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *Method*, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Nrmkey*

- LANB
- SUBSP
-

Block-Lanczos (Default)
Subspace

Frequenza iniziale e
finale per la ricerca dei
modi

N° modi da estrarre
(per SUBSP, al massimo n° g.d.l./2)

- OFF: forme modali normalizzate su [M]
- ON: forme modali normalizzate al valore 1

Per Power Dynamics:

- MODOPT, SUBSP
- EQSLV, PCG

COMANDI ANSYS/2 ANALISI RIDOTTA

LUMPM, OPZ Attiva la matrice di massa "Lumped"

OFF: matrice "consistent" (default)
ON: matrice "lumped" (default per "Power Dynamics")

/POST1
SET,LIST

Gli "n" modi richiesti compaiono come "n" substep del
Load step 1

SET,1,n

Carica il modo "n"

PLDISP, PRDISP Rappresentano la deformata

COMANDI ANSYS/3 ANALISI RIDOTTA

/SOLU

ANTYPE, MODAL

Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, REDUC, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey

M, Node, Lab1, ...

SOLVE

Nodo in cui mettere il MDOF

g.d.l. da usare come MDOF:
-UX, UY, UZ
-ROTX, ROTY, ROTZ
-ALL

COMANDI ANSYS/4 ANALISI RIDOTTA

FINISH
/SOLU
EXPASS,ON

Esce dalla soluzione
Rientra nella soluzione per il passo di “espansione”
Attiva il passo di espansione

MXPAND, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Elcalc*, *SIGNIF*

N° di modi da estrarre
(al massimo, tutti quelli indicati in *MODOPT*)

Frequenza iniziale e
finale per la ricerca dei
modi

SOLVE

OFF: non calcola i risultati completi per gli elementi (default)
ON: calcola i risultati completi per gli elementi