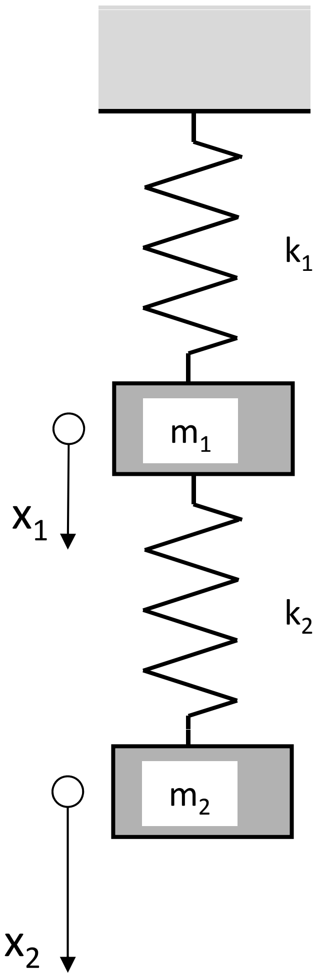
SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



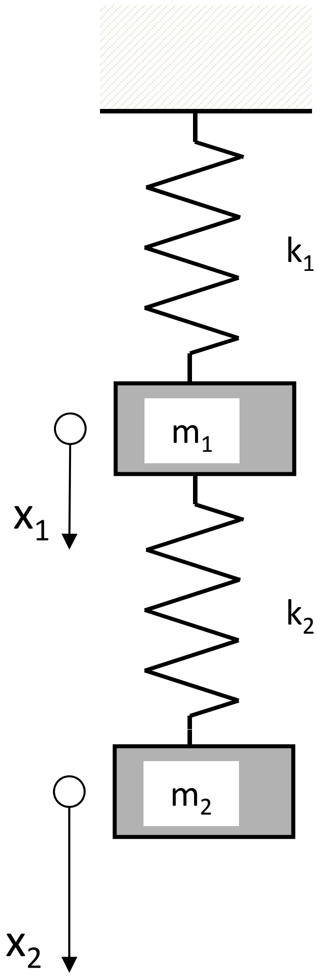
Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\omega t} \\ X_2 e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$
$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = 0$$

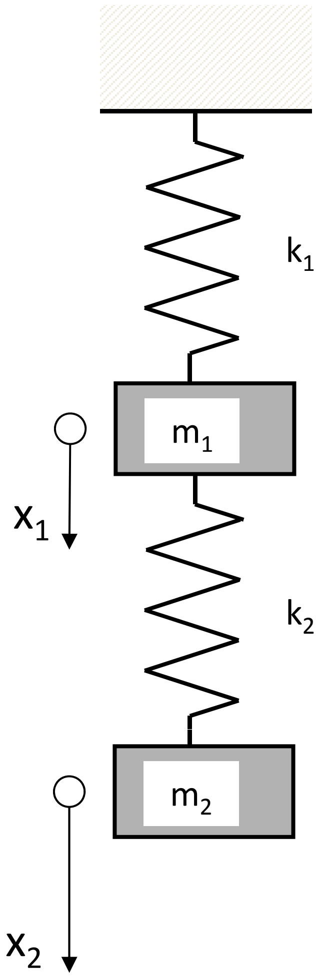
$$-\omega^2 [M]\{X\} e^{i\omega t} + [K]\{X\} e^{i\omega t} = 0$$

$$\left([K] - \omega^2 [M]\right)\{X\} = 0$$

$$\det\left([K] - \omega^2 [M]\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$\det\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\left(k_1+k_2-\omega^2 m_1\right)\left(k_2-\omega^2 m_2\right)-k_2^2=$$

$$=k_1k_2-\omega^2 m_2 k_1+k_2^2-\omega^2 m_2 k_2-\omega^2 m_1 k_2+\omega^4 m_1 m_2-k_2^2=$$

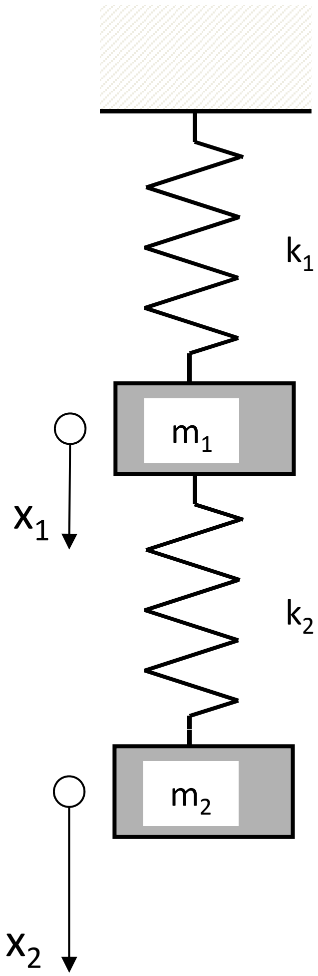
$$=k_1k_2-\omega^2 m_2 k_1-\omega^2 m_2 k_2-\omega^2 m_1 k_2+\omega^4 m_1 m_2=$$

$$=\omega^4 m_1 m_2-\omega^2\left(m_2k_1+m_2k_2+m_1k_2\right)+k_1k_2=$$

$$=\omega^4-\omega^2\left(\frac{k_1}{m_1}+\frac{k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)+\frac{k_1k_2}{m_1m_2}=0$$

$$\omega^2=\frac{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}}{2}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Pulsazioni proprie

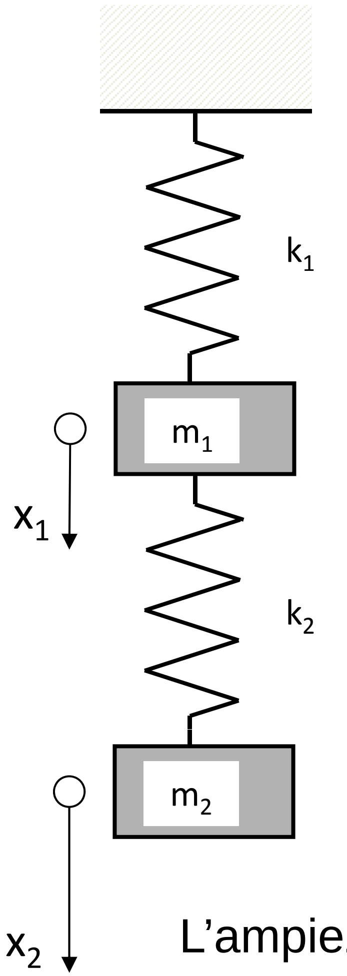
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)-\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}}{2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)+\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}}{2}}$$

Solitamente sono ordinate in modo crescente, per cui:

$$\omega_1 < \omega_2$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Sostituendo una delle due pulsazioni proprie nelle equazioni di equilibrio dinamico si ottiene un sistema di due equazioni dalle quali ricavare quale ricavare X_1 ed X_2.

$$\left\{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

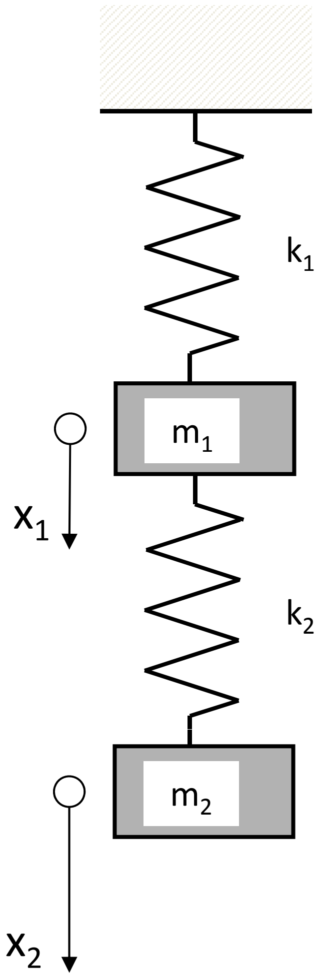
È necessario osservare che le due equazioni non sono **linearmente indipendenti** (Det=0).
Si ha, quindi, **una sola equazione** dalla quale ricavare X_1 ed X_2.
Se si indica con:

$$X_i^{(j)}$$

L'ampiezza relativa al grado di libertà "i", ottenuta per $\omega = \omega_j$, si ottiene:

$$\left\{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega_j^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} X_1^{(j)} \\ X_2^{(j)} \end{Bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Da cui si ricava:

$$\left[\left(k_1 + k_2\right) - \omega_j^2 m_1\right] X_1^{(j)} - k_2 X_2^{(j)} = 0$$

che non consente di determinare i valori effettivi dei due spostamenti, ma fissa il loro rapporto:

$$r_j = \frac{X_2^{(j)}}{X_1^{(j)}} = \frac{\left(k_1 + k_2\right) - \omega_j^2 m_1}{k_2}$$

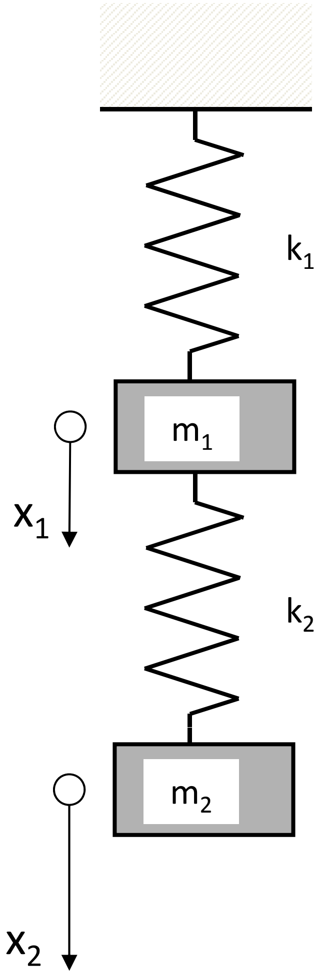
Gli effettivi spostamenti, noti a meno di una costante, possono essere determinati solo fissando le condizioni iniziali. Risulta tuttavia fissata la “forma” della deformata assunta dal sistema per ogni modo proprio:

$$\{Y_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{Y_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_2 \end{Bmatrix}$$

“forme modali”

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

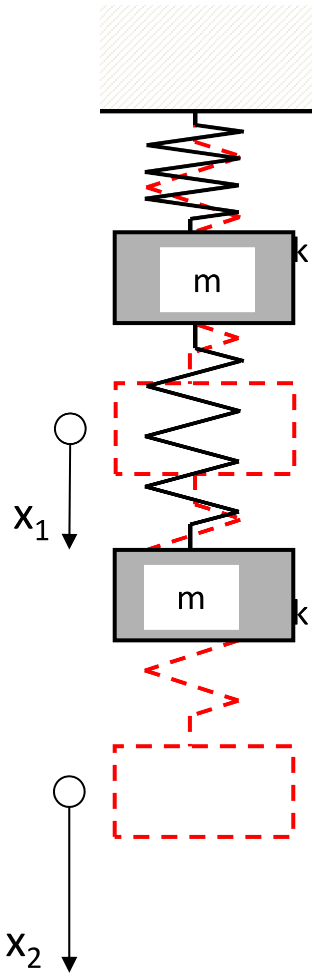


Caso particolare: $k_1=k_2=k,\ m_1=m_2=m$

$$\omega^2 = \frac{\frac{3k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{3k}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)^2}}{2} = \frac{k}{m}\frac{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



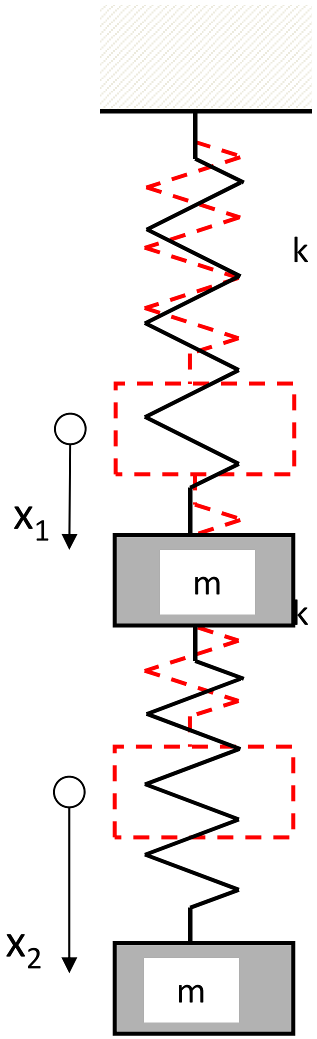
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.618$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_1 = \left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx 1.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



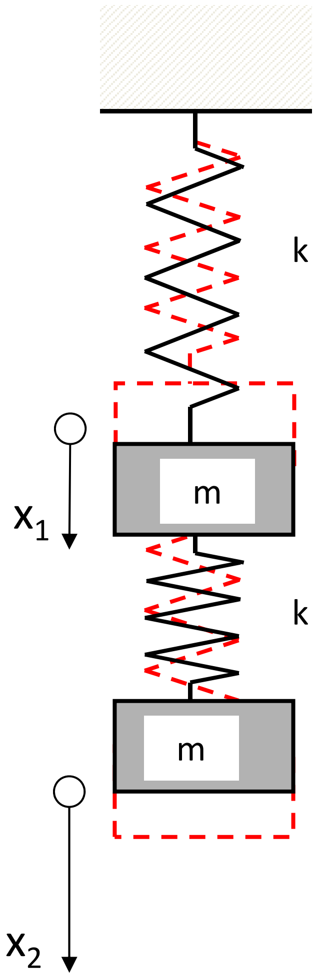
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0.618$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_1 = \left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx 1.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



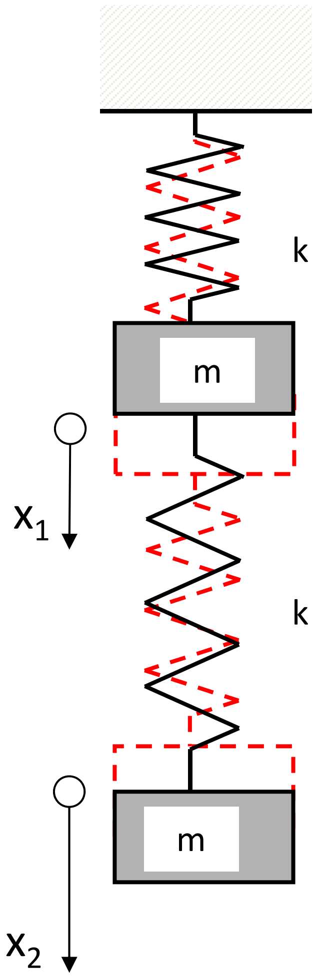
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 1.62$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_2 = \left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx -0.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



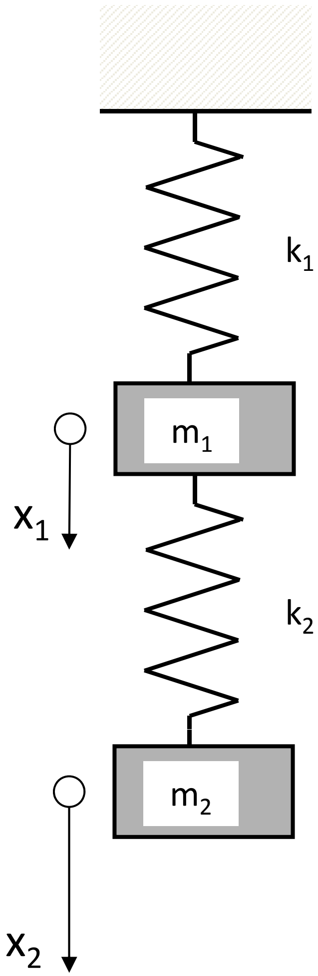
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 1.62$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_2 = \left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx -0.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Condizioni iniziali
Tipicamente vengono fissati spostamenti e velocità delle due masse ad un istante dato:

$$x_1(0) = x_{10}$$
$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$$
$$x_2(0) = x_{20}$$
$$\dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$

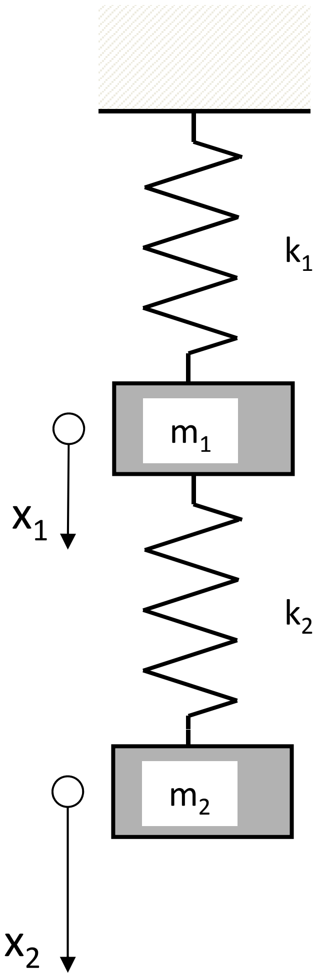
In generale, l'oscillazione del sistema sarà **una combinazione dei due modi propri**:

$$\{x(t)\} = A_1 \{Y_1\} e^{i\omega_1 t} + A_2 \{Y_2\} e^{i\omega_2 t}$$

A_1 ed A_2 in generale complessi, con variazioni tra i due modi propri in modulo e fase.

$$\{x(t)\} = a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} e^{i\omega_2 t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



$$\{x(t)\} = a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} e^{i\omega_2 t}$$

Derivando ed imponendo le condizioni iniziali:

$$\{x(0)\} = a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} + a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} = \{x_0\}$$

$$\{\dot{x}(0)\} = i\omega_1 a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} + i\omega_2 a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix} = \{\dot{x}_0\}$$

Considerando la parte reale si ottengo 4 eq.ni algebriche:

$$a_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2) = x_{10}$$

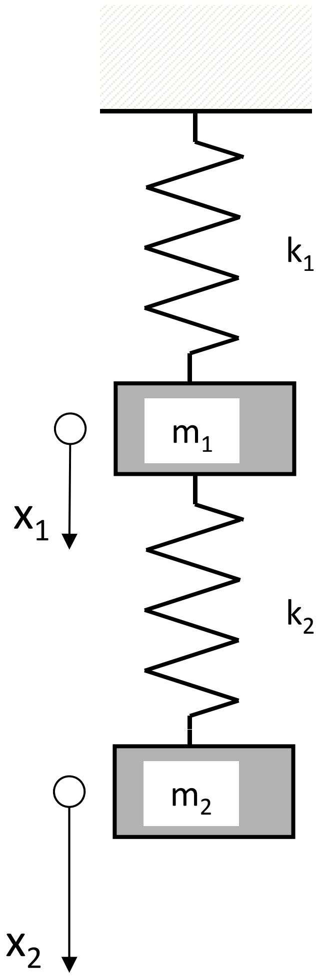
$$a_1 r_1 \cos(\varphi_1) + a_2 r_2 \cos(\varphi_2) = x_{20}$$

$$-\omega_1 a_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\varphi_2) = \dot{x}_{10}$$

$$-\omega_1 a_1 r_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 r_2 \sin(\varphi_2) = \dot{x}_{20}$$

da cui si possono ottenere i 4 coefficienti incogniti

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



È particolarmente interessante il caso di velocità iniziali entrambe nulle, per il quale si ottiene:

$$a_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2) = x_{10}$$
$$a_1 r_1 \cos(\varphi_1) + a_2 r_2 \cos(\varphi_2) = x_{20}$$
$$-\omega_1 a_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\varphi_2) = 0$$
$$-\omega_1 a_1 r_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 r_2 \sin(\varphi_2) = 0$$

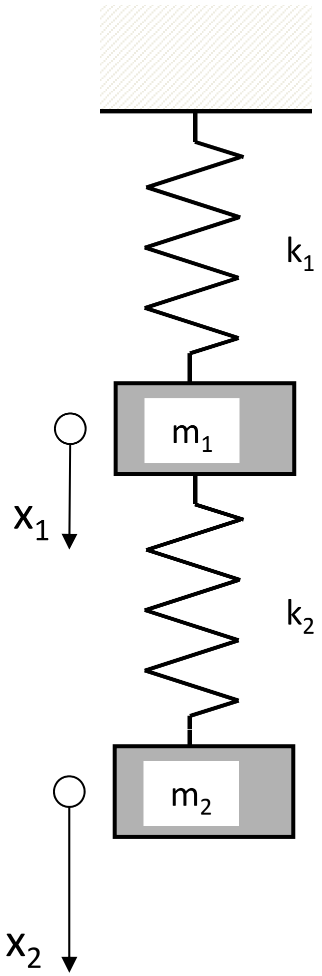
da cui:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \sin(\varphi_1) = 0 \\ a_2 \sin(\varphi_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$a_1 = \frac{(x_{20} - r_2 x_{10})}{r_1 - r_2}$$

$$a_2 = \frac{(r_1 x_{10} - x_{20})}{r_1 - r_2}$$

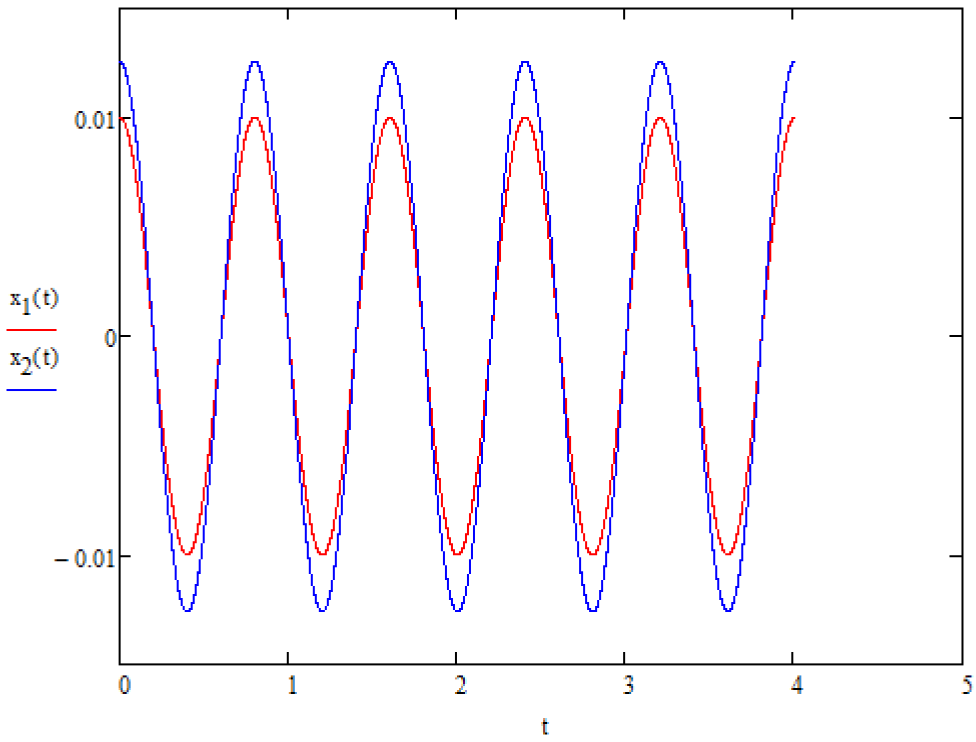
SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



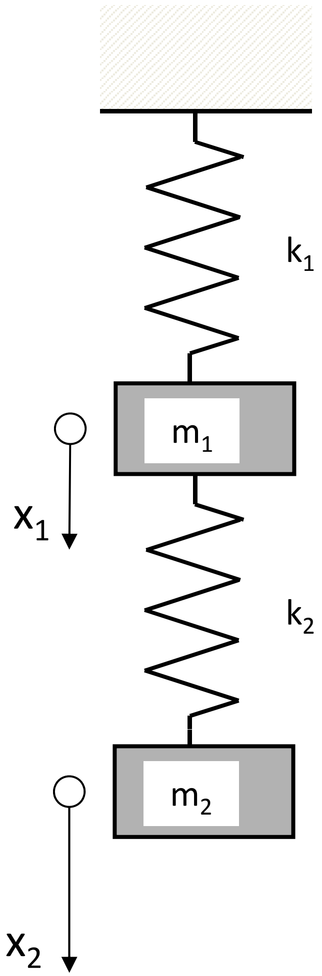
Caso : $x_{20} = r_1 x_{10}$

$$a_2 = \frac{(r_1 x_{10} - x_{20})}{r_1 - r_2} = 0$$

per cui il sistema vibra solo secondo il modo proprio 1.



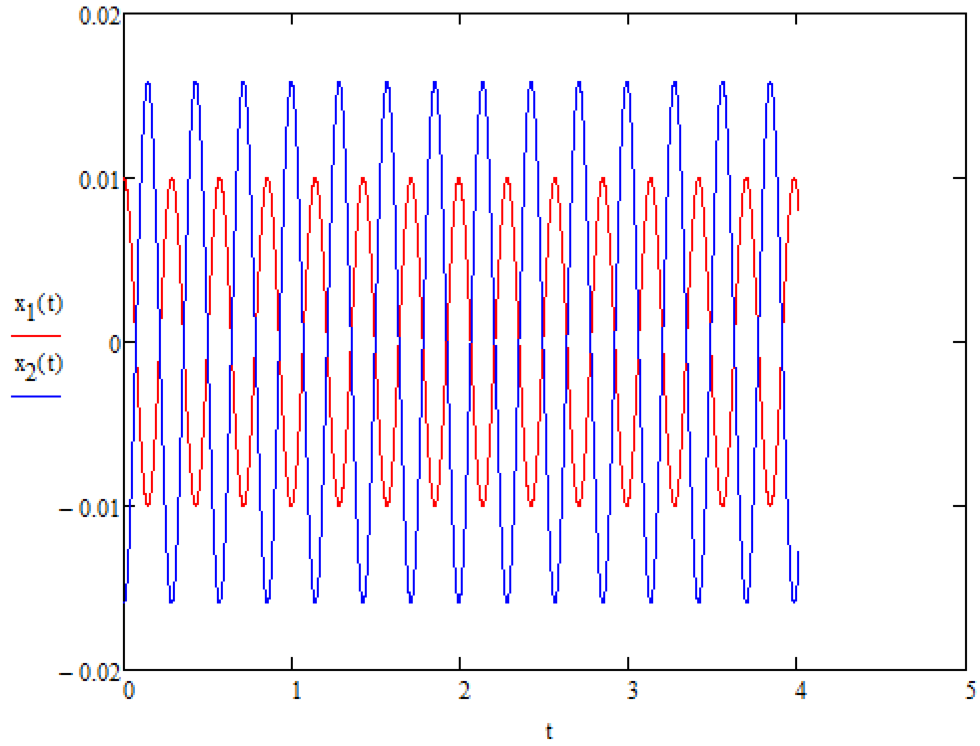
SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



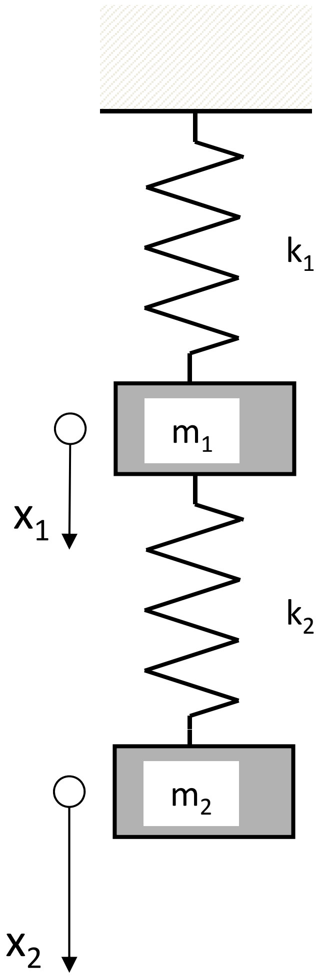
Caso : $x_{20} = r_2 x_{10}$

$$a_1 = \frac{\left(x_{20} - r_2 x_{10}\right)}{r_1 - r_2} = 0$$

per cui il sistema vibra solo secondo il modo proprio 2.

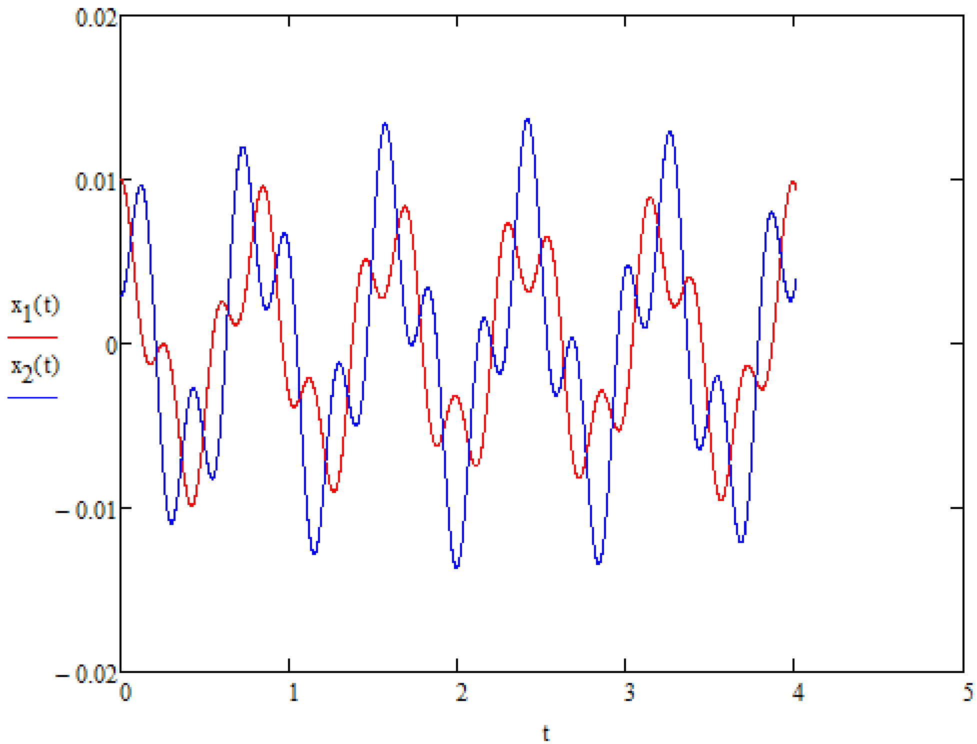


SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Caso generale $a_1 \neq 0; \quad a_2 \neq 0$

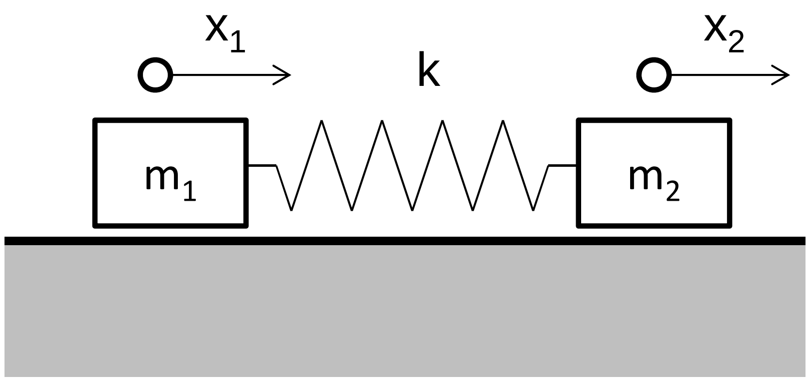
per cui l'oscillazione è una combinazione di quelle corrispondenti ai due modi propri



Nota: in generale, a meno che T_1/T_2 non sia un numero razionale, il moto, a stretto rigore di termini, non può nemmeno dirsi periodico.

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Sistemi con possibilità di moti rigidi (labili)



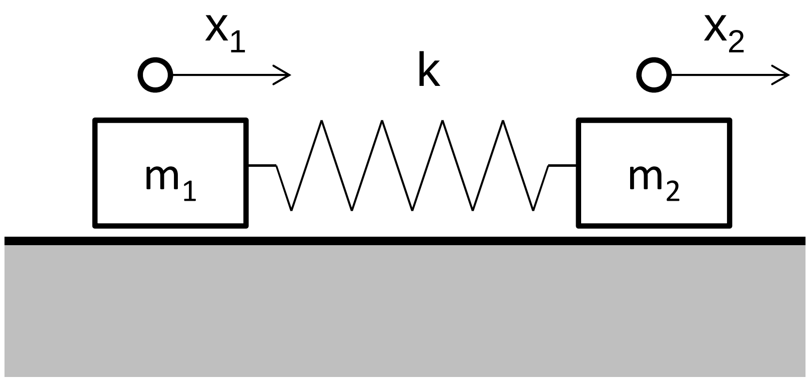
$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Sistemi con possibilità di moti rigidi (labili)



$$-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}=0$$

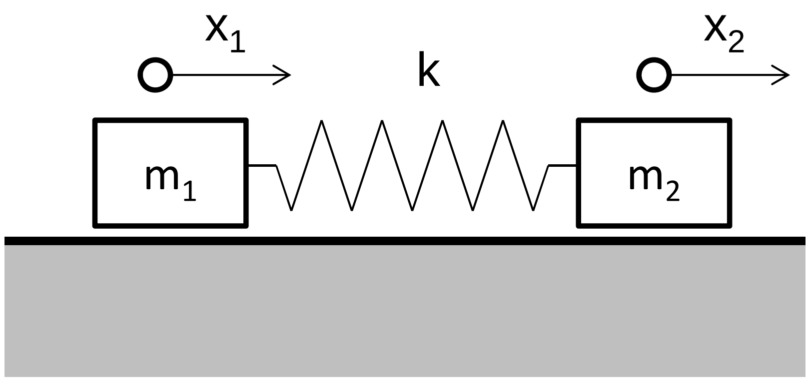
$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}=0$$

$$\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

$$\det\begin{bmatrix} k-\omega^2 m_1 & -k \\ -k & k-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}=0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Sistemi con possibilità di moti rigidi (labili)



$$\det\begin{bmatrix} k-\omega^2 m_1 & -k \\ -k & k-\omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(k-\omega^2 m_1\right)\left(k-\omega^2 m_2\right) - k^2 =$$

$$= k^2 - \omega^2 m_2 k - \omega^2 m_1 k + \omega^4 m_1 m_2 - k^2 =$$

$$= \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 k\left(m_2 + m_1\right) = \omega^2\left(\omega^2 m_1 m_2 - k\left(m_2 + m_1\right)\right) = 0$$

$\omega^2 = 0 \longrightarrow$ Moto rigido

$\omega^2 = \dfrac{k\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2} \longrightarrow$ Oscillazione