SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{X\}e^{i\omega t}$$

$$\{\ddot{x}\}=-\omega^2\{X\}e^{i\omega t}$$

Sostituendo

$$-\omega^2[M]\{X\}e^{i\omega t}+[K]\{X\}e^{i\omega t}=0$$

$$([K]-\omega^2[M])\{X\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Condizione per avere una soluzione non banale

$$\det\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)=0$$

$$\left(\omega^2\right)^n+a_{n-1}\left(\omega^2\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(\omega^2\right)+a_n=0$$

"Polinomio caratteristico"

$$\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_n$$

n radici (autovalori) tutte reali (K ed M simmetriche)

Sostituendo un autovalore ω_j è possibile determinare il relativo autovettore Y_j (forma modale), soluzione di:

$$\left(\left[K\right]-\omega_j^2\left[M\right]\right)\left\{Y_j\right\}=0$$

Dato che il determinante è uguale a 0, la soluzione è nota a meno di una costante e deve essere normalizzata, ad esempio:

$$\left\{Y_j\right\}^T\left[M\right]\left\{Y_j\right\}=1$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Problema agli autovalori in forma standard:

$$[K]\{Y_j\} = \omega_j^2 [M]\{Y_j\}$$

$$[M]^{-1}[K]\{Y_j\} = \omega_j^2 \{Y_j\}$$

$$[A] = [M]^{-1}[K]$$

$$\lambda_j = \omega_j^2$$

$$[A]\{Y_j\} = \lambda_j \{Y_j\}$$

$$[A]\{Y_j\} = \omega_j^2 \{Y_j\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Gli autovalori ω_j^2 ed i relativi autovettori Y_j sono solitamente organizzati in due matrici n x n

$$\left[\omega_j^2\right]=\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[Y\right]=\left[\{Y_1\} \quad \{Y_2\} \quad - \quad \{Y_n\}\right]$$ “Matrice modale”

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Presi due modi propri qualsiasi:

$$\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

$$\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_s\}=0$$

Premoltiplicando la prima per $\{Y_s\}^T$

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

Trasponendo la seconda e postmoltiplicando per $\{Y_r\}$

$$\{Y_s\}^T\left([K]^T-\omega_s^2[M]^T\right)\{Y_r\}=0$$

Dato che M e K sono simmetriche

$$\{Y_s\}^T\left([K]^T-\omega_s^2[M]^T\right)\{Y_r\}=\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_r\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Si ha:

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

Sottraendo

$$\left(\omega_s^2-\omega_r^2\right)\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}=0 \qquad \begin{cases}\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}=0 & se\ \omega_s \neq \omega_r\\ \{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}\neq 0 & se\ \omega_s = \omega_r\end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}=\omega_r^2\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\} \qquad \begin{cases}\{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}=0 & se\ \omega_s \neq \omega_r\\ \{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}\neq 0 & se\ \omega_s = \omega_r\end{cases}$$

Infine:

$$\omega_r^2=\frac{\{Y_r\}^T[K]\{Y_r\}}{\{Y_r\}^T[M]\{Y_r\}}=\boxed{\frac{k_r}{m_r}}$$

Rapporto di Rayleigh
(k_r, m_r rigidezza e massa "modali" per il modo r)

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Indipendenza lineare

Un sistema di vettori è linearmente indipendente se la condizione:

$$\sum_i a_i \{Y_i\} = 0$$

implica che tutti gli a_i siano uguali a 0.

Si osserva che la condizione è equivalente al sistema lineare, omogeneo:

$$[Y]\{a_i\} = 0$$

Dato che si ha:

$$[Y]^T [M][Y] = [I]$$

$$\det\left([Y]^T [M][Y]\right) = \det[Y]^T \det[M]\det[Y] = \det[I] = 1$$

Per cui:

$$\det[Y] \neq 0$$

e di conseguenza si ha la sola soluzione banale $\{a_i\} = 0$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Forme modali come base

Date le proprietà di indipendenza ed ortogonalità, le forme modali costituiscono una "base", per cui qualsiasi vettore dello spazio vettoriale può essere espresso come combinazione lineare di essi:

$$V = \sum_i b_i \{Y_i\} = [Y]\{b_i\}$$

con i coefficienti b, scalari univocamente determinati

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa :

$$[Y]^T[M][Y] = \boxed{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}}$$

masse modali

Matrice di massa principale

$$[Y]^T[K][Y] = \boxed{\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}}$$

rigidezze modali

Matrice di rigidezza principale

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Se, in particolare, si normalizzano le forme modali in modo che risulti:

$$\{Y_r\}^T [M] \{Y_r\} = 1$$

si ha:

$$\{Y_r\}^T [K] \{Y_r\} = \omega_r^2$$

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa diviene:

$$\{Y\}^T [M] \{Y\} = [I]$$

$$\{Y\}^T [K] \{Y\} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori nulli

Dato che risulta :

$$[Y]^T[K][Y] = [\omega_i^2]$$

si ha:

$$\det\left([Y]^T[K][Y]\right) = \det[Y]^T \det[K]\det[Y] = \det[\omega_i^2] = \prod_i \omega_i^2$$

Se la struttura è labile, si ha:

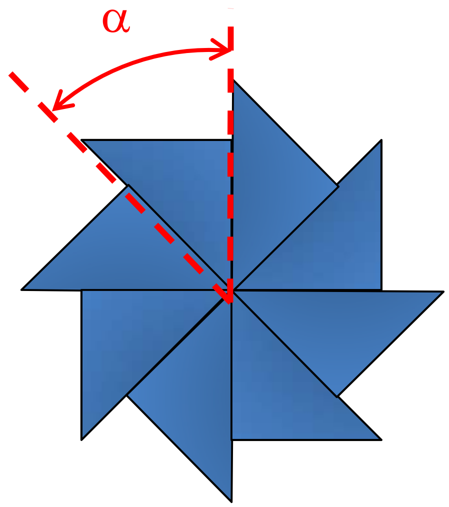
$$\det[K] = 0$$

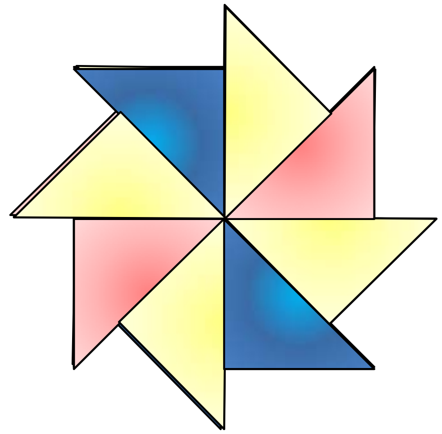
il che implica che alcuni degli autovalori siano nulli. Il numero di autovalori nulli è pari al grado di labilità della struttura

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

In alcuni casi è possibile ottenere degli autovalori coincidenti (aventi quindi molteplicità maggiore di 1).
Un primo caso in cui questo può verificarsi, si ha quando la struttura presenta una simmetria di rotazione, con angolo caratteristico < 180°.

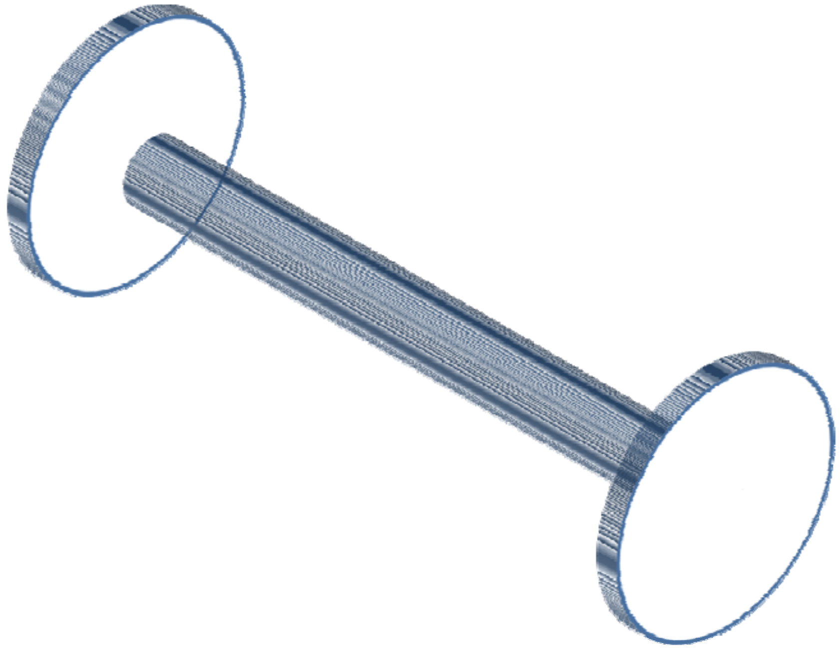




SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

<u>Autovalori coincidenti</u>

La coincidenza degli autovalori può inoltre verificarsi, anche tra modi di vibrare indipendenti.
Ad esempio, è possibile fare in modo che, in un albero con due volani, la prima pulsazione flessionale e la prima torsionale coincidano.



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
DISACCOPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Le proprietà delle forme modali consentono di esprimere il vettore spostamento come una loro combinazione lineare:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i\} \qquad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}_i\} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [K][Y]\{q_i\} = 0$$

Pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [Y]^T[K][Y]\{q_i\} = [I]\{\ddot{q}_i\} + [\omega_i^2]\{q_i\} = 0$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si dovrebbero cercare soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{x\}=\{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\ddot{x}\}=\lambda^2\{Z\}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2[M]\{Z\}e^{\lambda t}+\lambda[C]\{Z\}e^{\lambda t}+[K]\{Z\}e^{\lambda t}=0$$

da cui:

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)=0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2N}+a_1\lambda^{2N-1}+\ldots+a_{2N-1}\lambda^1+a_{2N}=0$$

N coppie di radici (autovalori) λ_j complesse coniugate, che sostituite, forniscono N coppie di autovettori complessi $\{Z_j\}$.
Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente per piccoli N, o con metodi numerici per N grandi.

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE

In generale il prodotto

$$[Y]^T [C][Y]$$

fornisce una matrice non diagonale. Tuttavia se lo smorzamento è piccolo, è spesso possibile assumere che risulti:

$$[Y]^T [C][Y] \approx \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix}$$

ad esempio perché i termini fuori dalla diagonale possono ritenersi trascurabili

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE

In questo caso si può porre:

$$c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$$

Se si esprime il vettore smorzamento come combinazione delle forme modali del sistema non smorzato:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i(t)\}$$

$$\{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}_i\}$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nella equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [C][Y]\{\dot{q}_i\} + [K][Y]\{q_i\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\}+[C][Y]\{\dot{q}_i\}+[K][Y]\{q_i\}=0$$

Premoltiplicando per $[Y]^T$

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}_i\}+[Y]^T[C][Y]\{\dot{q}_i\}+[Y]^T[K][Y]\{q_i\}=0$$

Da cui:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}++[2\xi_i\omega_i]\{\dot{q}_i\}+[\omega_i^2]\{q_i\}=0$$

N equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2 q_i=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

cui corrispondono autovalori:

$$\lambda_i = \omega_{si} = -\xi_i\omega_{ni} \pm \omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i^2}$$

che, sostituiti nell'equazione originale, consentono di determinare gli autovettori

Un modello di smorzamento per il quale si ha:

$$[Y]^T[C][Y] = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix}$$

è detto **smorzamento classico** (“classical damping”)

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO CLASSICO

Si dimostra che la matrice di smorzamento è diagonalizzabile se:

$$[C] = [M]\sum_{l=0}^{m} \alpha_l \left([M]^{-1}[K]\right)^l$$

Se si pone m=1, si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO CLASSICO

Combinando:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

con:

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [M]\{Y_r\} = 0 \quad per\ "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [M]\{Y_r\} = 1 \quad per\ "s" = "r" \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [K]\{Y_r\} = 0 \quad per\ "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [K]\{Y_r\} = \omega_r^2 \quad per\ "s" = "r" \end{cases}$$

si ottiene:

$$c_{jd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO CLASSICO

$$c_{jd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

Combinando con : $c_{jd} = 2\xi_j\omega_j$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_r = \alpha + \beta\omega_r^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta\omega_r\right)$$