

ANALISI DINAMICA CON IL MEF

Principali tipi di analisi

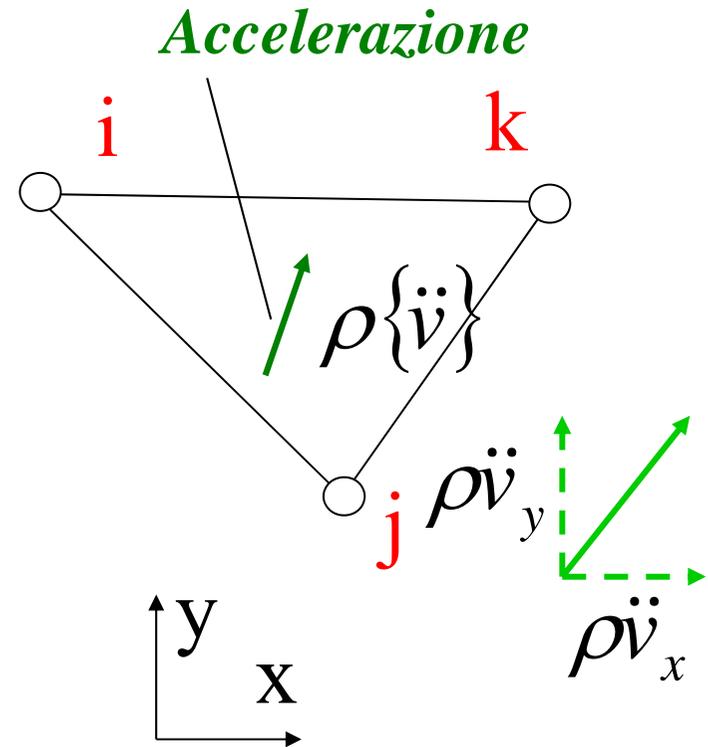
- analisi modale
- analisi della risposta armonica
- analisi di transitorio dinamico

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/1

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



$$dL_i = -\{\delta v\}^T \rho \{\ddot{v}\} dV$$

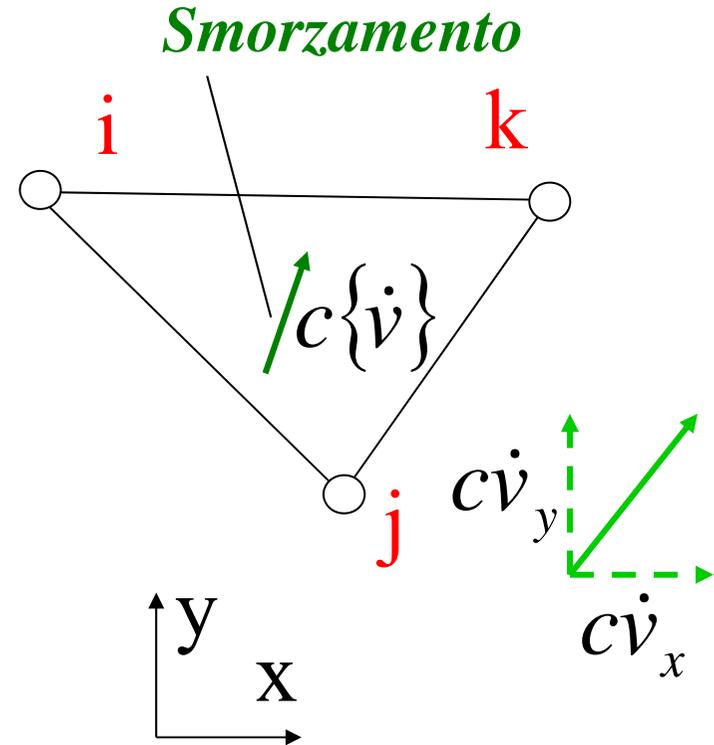
$$\begin{aligned} L_i &= -\int_V \{\delta v\}^T \rho \{\ddot{v}\} dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho [N] \{\ddot{U}^e\} dV = \\ &= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\ddot{U}^e\} \end{aligned}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/2

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento

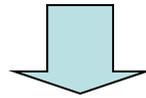


$$dL_s = -\{\delta v\}^T c\{\dot{v}\}dV$$

$$\begin{aligned} L_s &= -\int_V \{\delta v\}^T \rho\{\dot{v}\}dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho[N]\{\dot{U}^e\}dV = \\ &= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho[N]dV \{\dot{U}^e\} \end{aligned}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/3

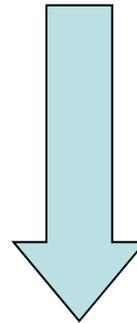
$$\begin{aligned} & \cancel{\{\delta U^e\}}^T \left(\{P^e\} - \int_V [N]^T c [N] dV \{\dot{U}^e\} - \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\ddot{U}^e\} \right) = \\ & = \cancel{\{\delta U^e\}}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{U^e\} \end{aligned}$$



$$[M^e] \{\ddot{U}^e\} + [C^e] \{\dot{U}^e\} + [K^e] \{U^e\} = \{P^e\}$$

$$\int_V [N]^T \rho [N] dV$$

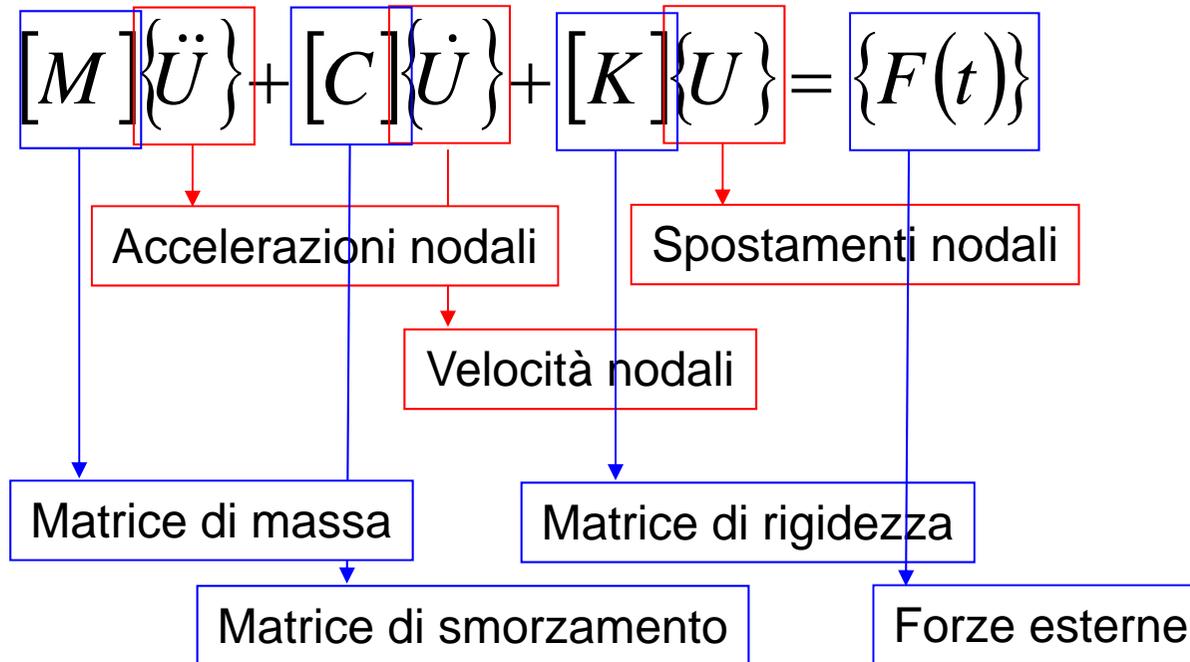
$$\int_V [N]^T c [N] dV$$



$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/4

Equazione di equilibrio dinamico



FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/1

Matrice di massa “consistent”: $[M^e] = \int [N]^T \rho [N] dV$

Elemento triangolare piano

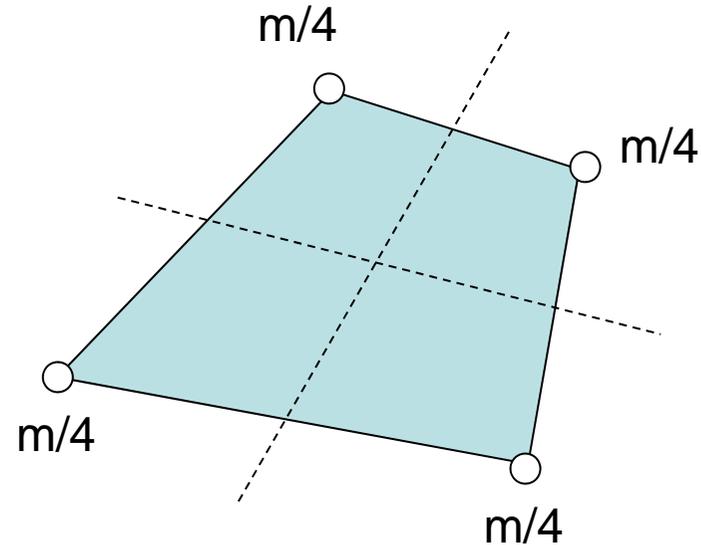
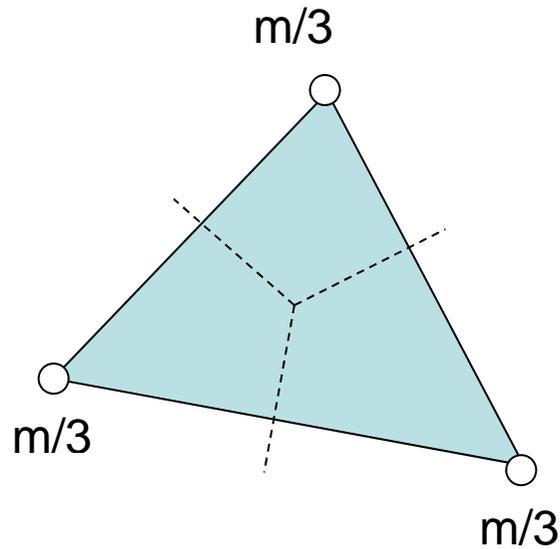
$$\int [N]^T \rho [N] dV = \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix} dV =$$

$$= \rho \begin{bmatrix} \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV \end{bmatrix}$$

- simmetrica
- sostanzialmente piena

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/2

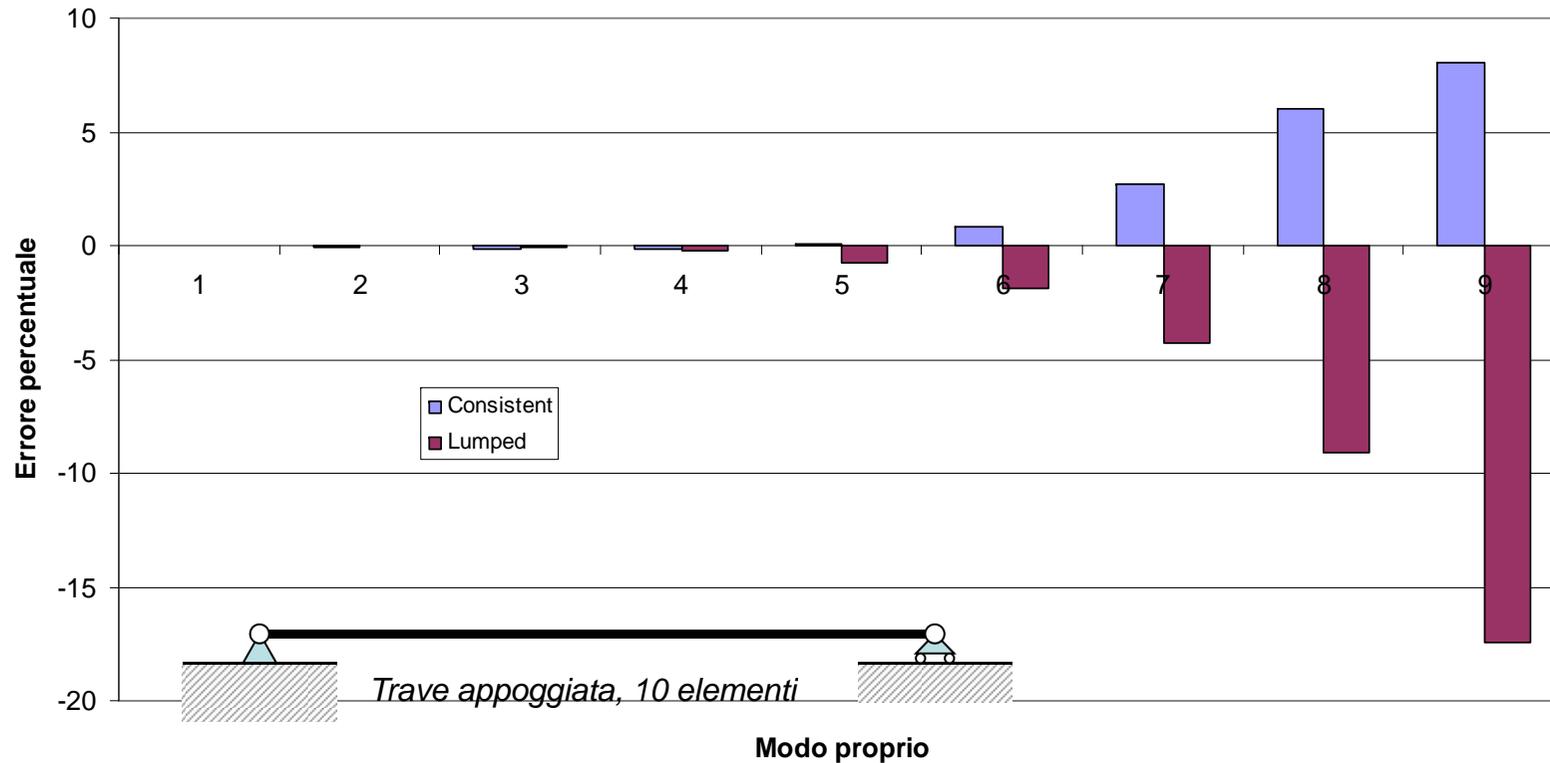
Matrice di massa "lumped": la massa viene concentrata nei nodi in qualche modo fisicamente accettabile (di solito ovvio per gli elementi con nodi nei vertici, meno ovvio per quelli con nodi intermedi), in modo che risulti: $\sum_j M_j = \int \rho dV$



- la struttura della matrice di massa è diagonale

$$[M] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/3



- La formulazione “consistente” produce errori minori in valore assoluto
- Le matrici “consistente” e “lumped” tendono a produrre rispettivamente una sovrastima ed una sottostima delle pulsazioni proprie
- La struttura diagonale può risultare molto vantaggiosa in alcune soluzioni iterative (es. analisi di transitorio) in quanto non richiede inversione

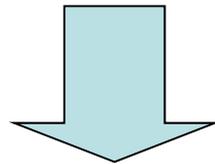
ANALISI MODALE/2

Si propone di determinare le pulsazioni proprie di una struttura e le relative forme modali.

Analizza le oscillazioni libere della struttura, in assenza dei carichi esterni

Effetto dello smorzamento solitamente molto piccolo

$$[M]\{\ddot{U}\} + \cancel{[C]}\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \cancel{\{F(t)\}}$$

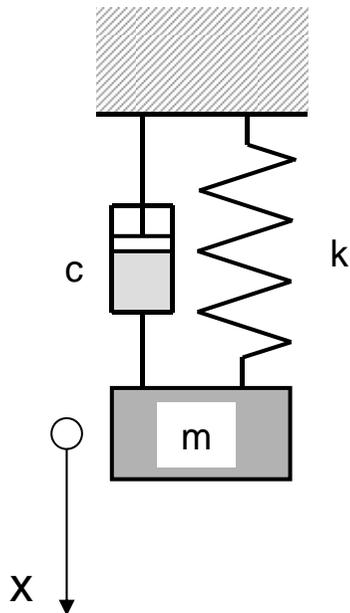


$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Per $\xi = 0.1$ (10%) si ha $\omega_s = 0.995 \cdot \omega_n$



ANALISI MODALE/3

Calcolo delle pulsazioni proprie

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0$$

$$\{U\} = \{\phi\} \sin(\omega \cdot t)$$

$$\{\dot{U}\} = \omega \{\phi\} \cos(\omega \cdot t)$$

$$\{\ddot{U}\} = -\omega^2 \{\phi\} \sin(\omega \cdot t)$$

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) + [K] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) = 0$$

ANALISI MODALE/4

Calcolo delle pulsazioni proprie

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) + [K] \{\phi\} \sin(\omega \cdot t) = 0$$

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0$$

Sistema lineare omogeneo nelle incognite $\{\phi\}$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) \begin{cases} \neq 0 & 1 \text{ soluzione } \{\phi\} = 0 \\ = 0 & \infty \text{ soluzioni} \end{cases}$$

ANALISI MODALE/5

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = 0$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

$$(\omega^2)^n + a_1 \cdot (\omega^2)^{n-1} + a_2 \cdot (\omega^2)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot \omega^2 + a_n = 0$$

Radici

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_n$$

$$\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \{\phi_3\} \dots \{\phi_i\} \dots \{\phi_n\} \quad \text{Forme modali}$$

ANALISI MODALE/6

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\phi\} = 0$$

$n-1$ equazioni indipendenti

n incognite

∞^1 soluzioni

Le componenti della forma modale sono note a meno di una costante

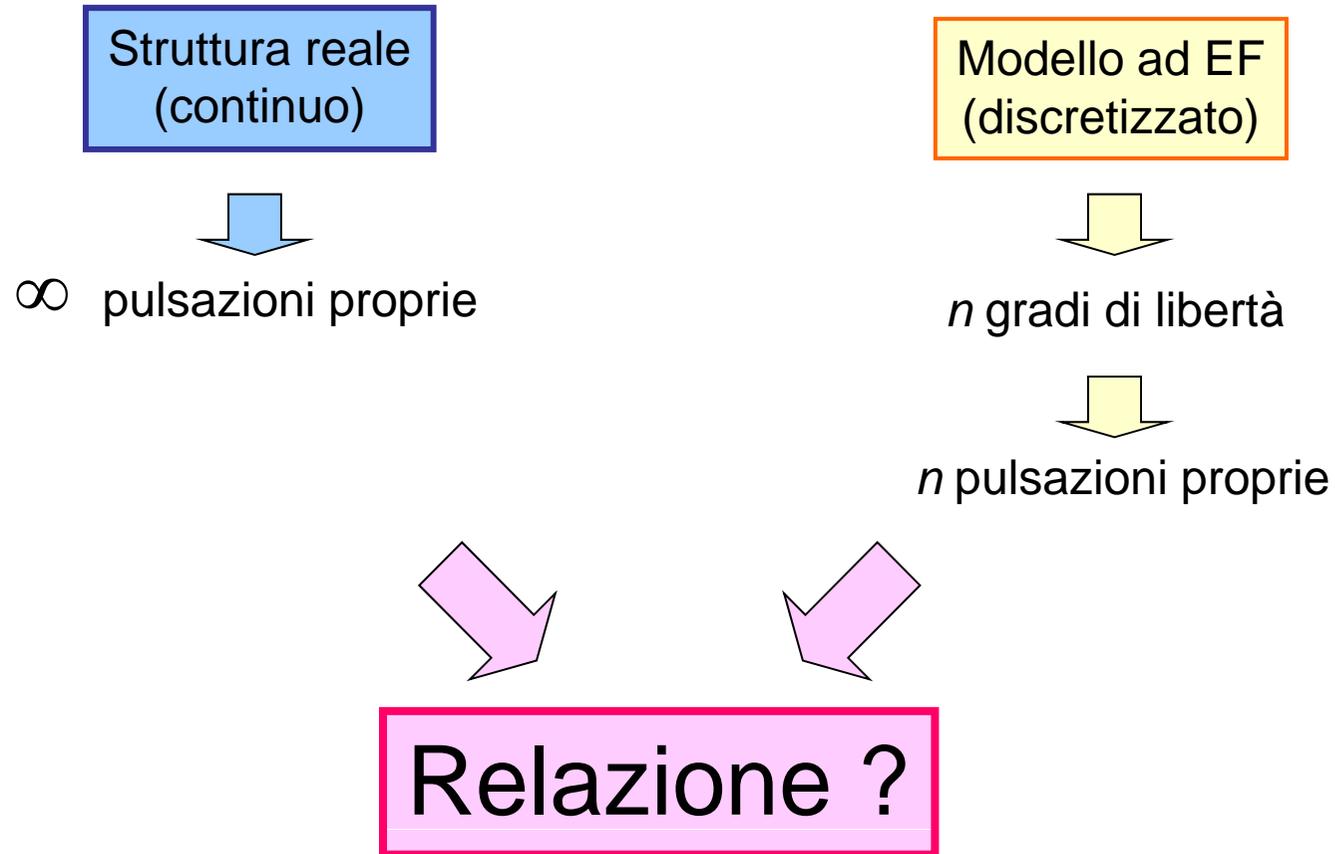
Rappresentano solo la forma della deformata, non i valori effettivi degli spostamenti

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ \vdots \\ \phi_{in} \end{Bmatrix}$$

Normalizzazioni tipiche

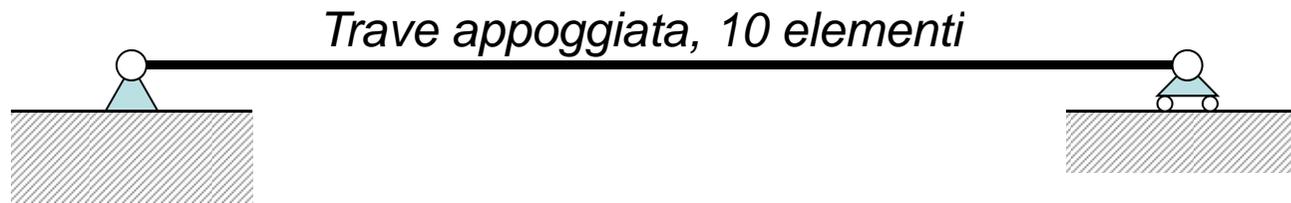
$$\begin{cases} \max |\phi_{ij}| = 1 \\ \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1 \end{cases}$$

ANALISI MODALE/7

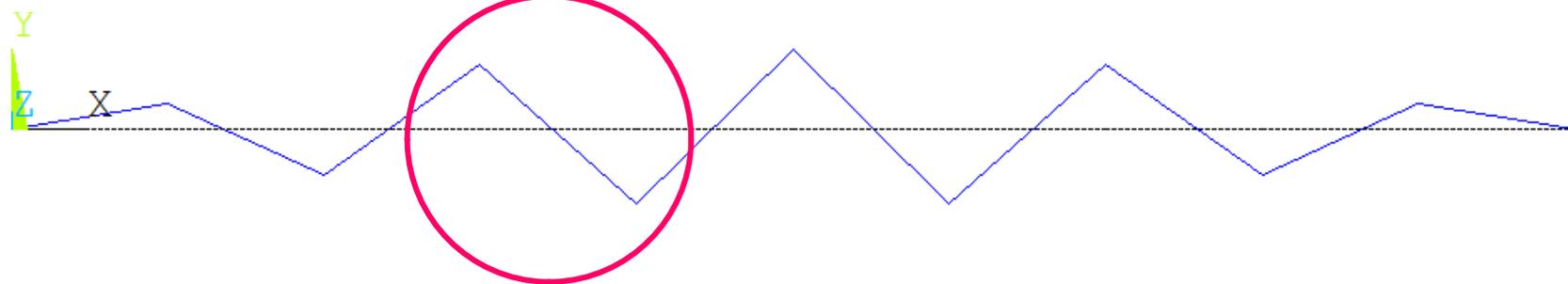


ANALISI MODALE/8

Tipico andamento spaziale delle Forme modali



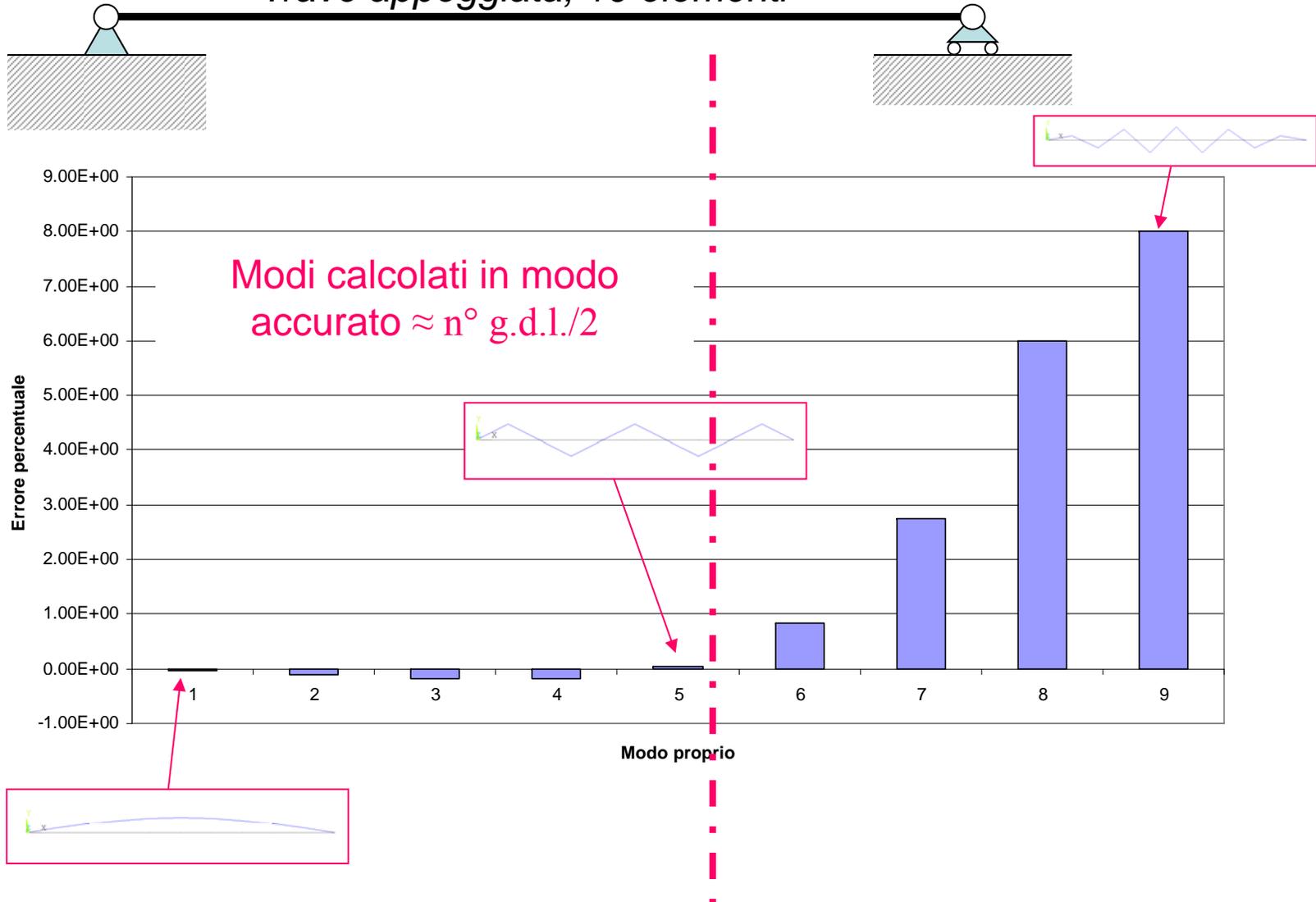
9° modo .



1 solo elemento: rappresentazione poco accurata del campo di velocità ed accelerazione

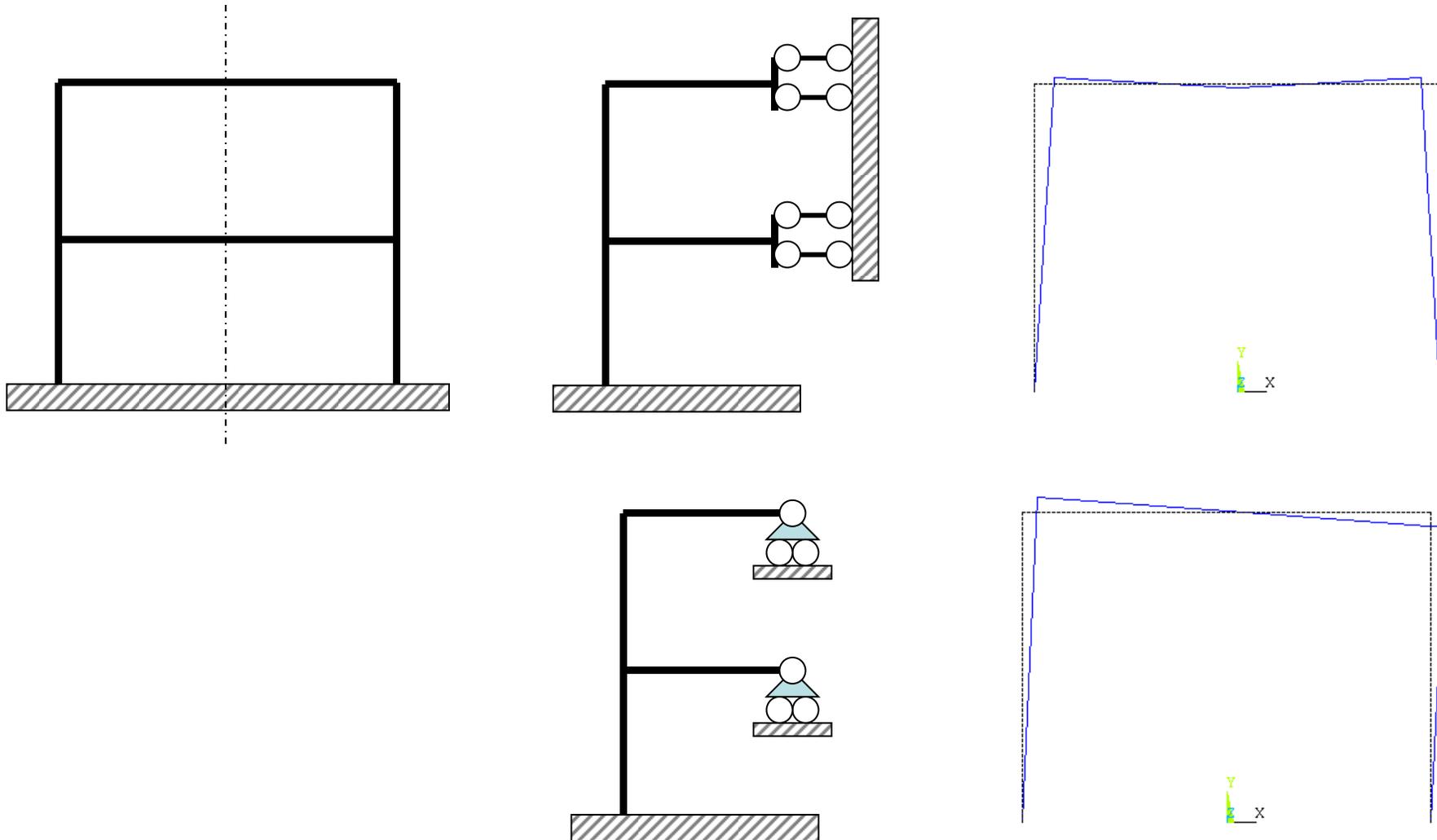
ANALISI MODALE/9

Trave appoggiata, 10 elementi



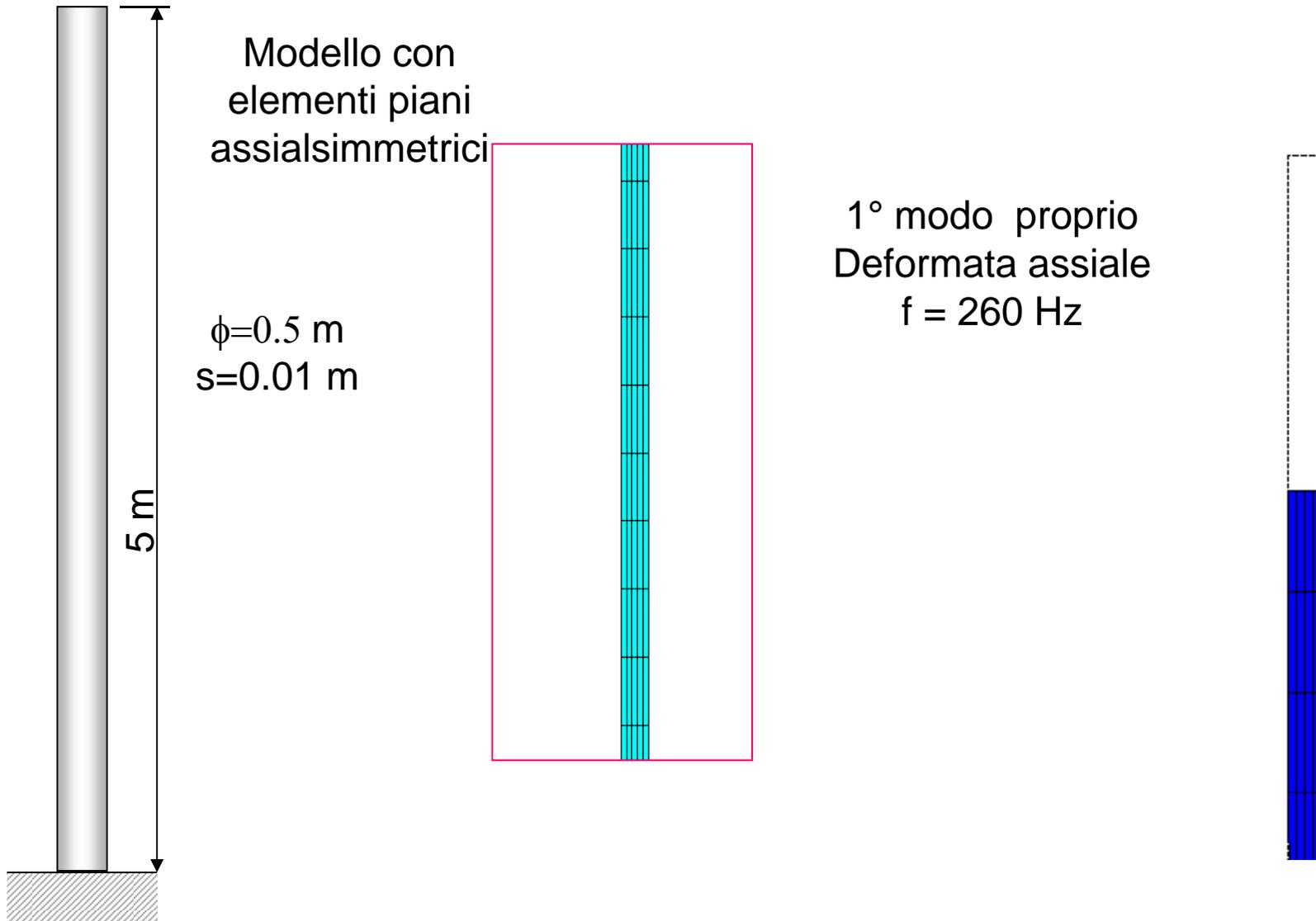
SIMMETRIA STRUTTURALE/1

Se si usano considerazioni di simmetria per ridurre le dimensioni di un modello, si otterranno solo i modi propri le cui forme modali rispettano la stessa simmetria.



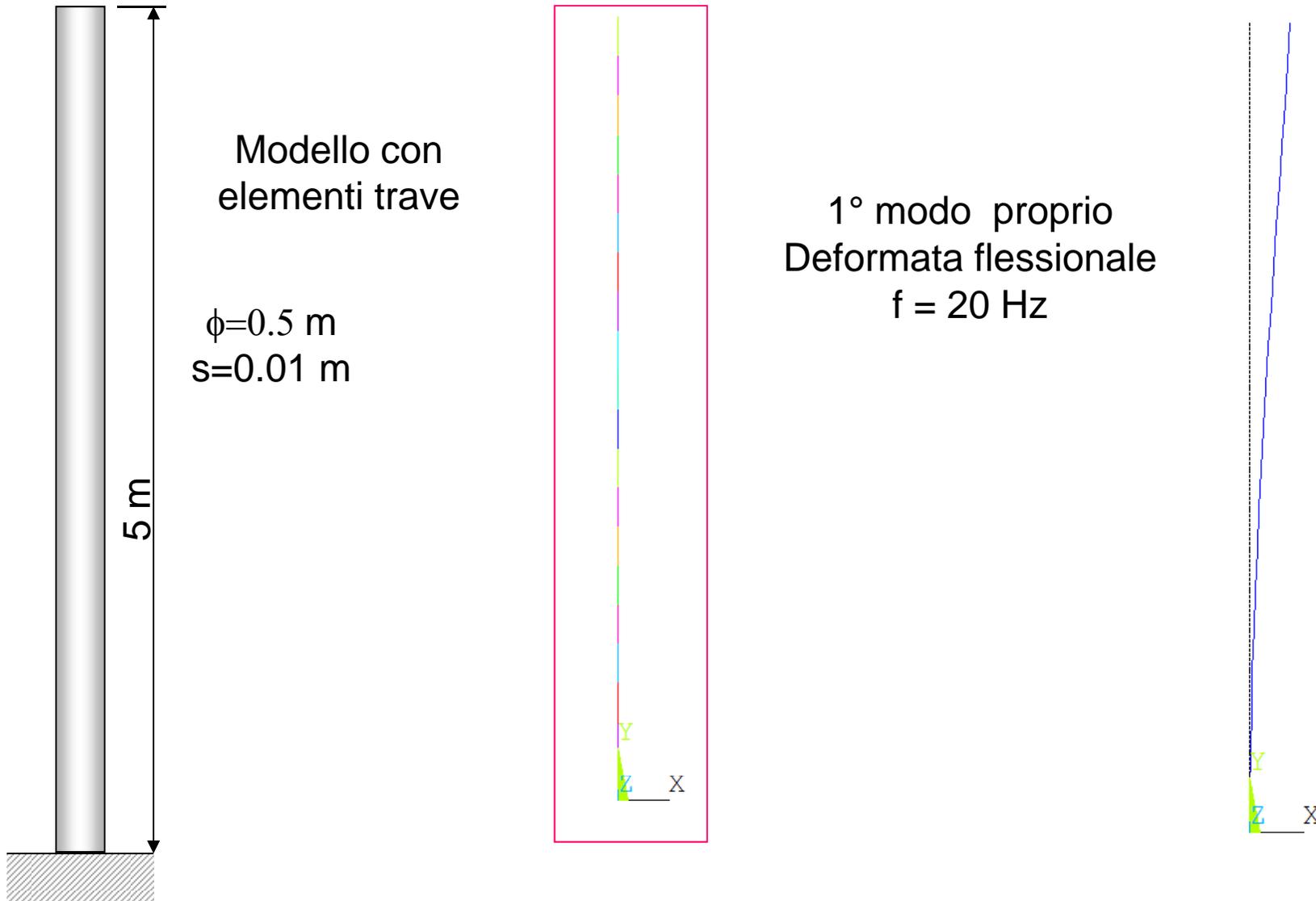
SIMMETRIA STRUTTURALE/2

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica



SIMMETRIA STRUTTURALE/3

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica



UNITÀ DI MISURA/1

È preferibile usare il sistema m.k.s

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m}$$

kg

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1000}{s^2}} = \frac{1}{s} \sqrt{10^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{mm} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm}$$

kg

ANALISI RIDOTTA/1

Nell'analisi ridotta, lo stato di spostamento, velocità ed accelerazione della struttura viene espresso in termini di un sottoinsieme dei nodi (Nodi "Master"). Gli spostamenti dei nodi rimanenti (Nodi "Slave") sono quindi calcolati a partire da quelli dei nodi Master.

L'analisi ridotta può essere applicata anche in capo statico, per ridurre l'onere computazionale dell'analisi.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_M\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{g.d.l. "Master"} \\ \text{g.d.l. "Slave"} \end{array} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_M\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

ANALISI RIDOTTA/2

$$\begin{cases} [K_{MM}] \{U_M\} + [K_{MS}] \{U_S\} = \{F_M\} \\ [K_{SM}] \{U_M\} + [K_{SS}] \{U_S\} = \{F_S\} \end{cases}$$

$$\{U_S\} = [K_{SS}]^{-1} (\{F_S\} - [K_{SM}] \{U_M\})$$

$$[K_{MM}] \{U_M\} + [K_{MS}] [K_{SS}]^{-1} (\{F_S\} - [K_{SM}] \{U_M\}) = \{F_M\}$$

$$([K_{MM}] - [K_{MS}] [K_{SS}]^{-1} [K_{SM}]) \{U_M\} = \{F_M\} - [K_{MS}] [K_{SS}]^{-1} \{F_S\}$$

$$[\hat{K}] \{U_M\} = \{\hat{F}\} \quad \{U_M\} = [\hat{K}]^{-1} \{\hat{F}\}$$

ANALISI RIDOTTA/3

Introducendo la suddivisione tra “Master” e “Slave” nell’equazione di equilibrio dinamico si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [M_{MM}] & [M_{MS}] \\ [M_{SM}] & [M_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_M \\ \ddot{U}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{MM}] & [C_{MS}] \\ [C_{SM}] & [C_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_M \\ \dot{U}_S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_M \\ U_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_M \\ F_S \end{Bmatrix}$$

La riduzione delle matrici di massa e smorzamento ai soli g.d.l. “Master” non può essere fatta in modo esatto, come per la matrice di rigidità. Si usa pertanto una formula di riduzione semplificata ed approssimata proposta da Guyan (“Guyan reduction”)

ANALISI RIDOTTA/4

Si ottiene in tal modo:

$$[\hat{M}]\{\ddot{U}_M\} + [\hat{C}]\{\dot{U}_M\} + [\hat{K}]\{U_M\} = \{\hat{F}\}$$

$$[\hat{M}] = [M_{MM}] - [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[M_{SM}] - [M_{MS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}] + \\ + [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[M_{SS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]$$

$$[\hat{C}] = [C_{MM}] - [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[C_{SM}] - [C_{MS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}] + \\ + [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[C_{SS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]$$

ANALISI RIDOTTA/5

Criteri di selezione dei g.d.l. “Master” (MDOF):

- i MDOF devono essere in numero **almeno doppio** dei modi da estrarre
- scegliere i MDOF nelle direzioni in cui si vuole analizzare le vibrazioni della struttura
- scegliere i MDOF in punti della struttura caratterizzati da bassa rigidezza e/o elevata massa
- scelta automatica: si basa sul rapporto: $Q_i = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}$

Verifica qualità analisi:

- la massa ridotta deve differire da quella totale per non più del 10-15%
- studio di convergenza al variare del numero di MDOF

ANALISI RIDOTTA/6

Principali algoritmi di estrazione di autovalori ed autovettori (ANSYS) :

Algoritmo	N° modi	N° g.d.l. modello	Velocità	RAM	Hard disk	Note
Block Lanczos	Elevato	Elevato	Elevata	Media	Bassa	Shell o shell+solid. Elementi distorti
Subspace iteration	Basso	Elevato	Media	Bassa	Elevata	Elementi non distorti
Power Dynamics	Basso	Elevato	Elevata	Elevata	Bassa	Richiede mesh fini
Reduced (Householder)	Tutti	Medio-piccolo	Elevata	Bassa	Bassa	Usa MDOF

ANALISI RIDOTTA/7

Potenziati applicazioni dell'analisi ridotta:

- riduzione degli oneri computazionali dell'analisi
- riduzione del numero di g.d.l. attivi nell'analisi modale, rispetto a quella statica, pur utilizzando un unico modello
- in modelli semplici, separazione dell'effetto dei diversi g.d.l. nodali (es. in una trave si possono analizzare separatamente i modi flessionali, estensionali, etc.)

COMANDI ANSYS/1 ANALISI NON RIDOTTA

/SOLU

ANTYPE, MODAL

Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *Method*, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Nrmkey*

- LANB
- SUBSP
-

Block-Lanczos (Default)
Subspace

Frequenza iniziale e
finale per la ricerca dei
modi

N° modi da estrarre
(per SUBSP, al massimo n° g.d.l./2)

- OFF: forme modali normalizzate su [M]
- ON: forme modali normalizzate al valore 1

Per Power Dynamics:

- MODOPT, SUBSP
- EQSLV, PCG

COMANDI ANSYS/2 ANALISI RIDOTTA

LUMPM, **OPZ** Attiva la matrice di massa "Lumped"

OFF: matrice "consistent" (default)
ON: matrice "lumped" (default per "Power Dynamics")

/POST1
SET,LIST

Gli "n" modi richiesti compaiono come "n" substep del
Load step 1

SET,1,n

Carica il modo "n"

PLDISP, PRDISP Rappresentano la deformata

COMANDI ANSYS/3 ANALISI RIDOTTA

/SOLU

ANTYPE, MODAL

Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *REDUC*, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *,Nrmkey*

M, *Node*, *Lab1*, ...

SOLVE

Nodo in cui mettere il MDOF

g.d.l. da usare come MDOF:
-UX, UY, UZ
-ROTX, ROTY, ROTZ
-ALL

COMANDI ANSYS/4 ANALISI RIDOTTA

FINISH
/SOLU
EXPASS,ON

Esce dalla soluzione
Rientra nella soluzione per il passo di “espansione”
Attiva il passo di espansione

MXPAND, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Elcalc*, *SIGNIF*

N° di modi da estrarre
(al massimo, tutti quelli indicati in *MODOPT*)

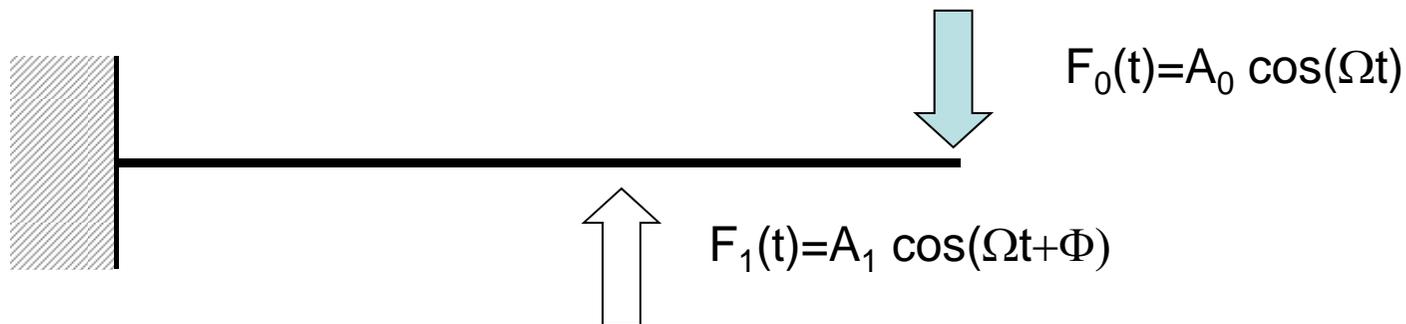
Frequenza iniziale e
finale per la ricerca dei
modi

SOLVE

OFF: non calcola i risultati completi per gli elementi (default)
ON: calcola i risultati completi per gli elementi

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

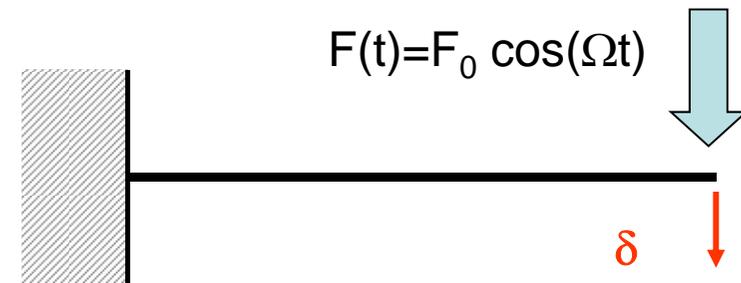
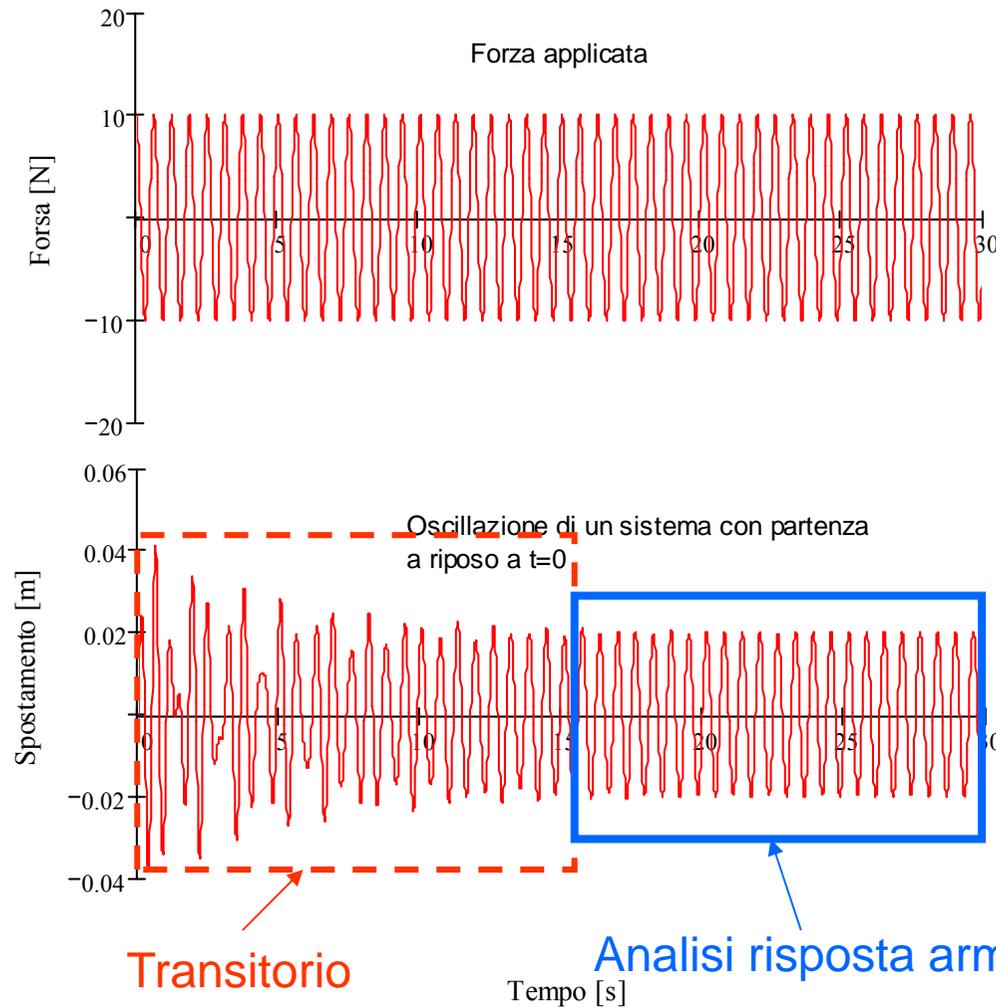
SCOPO: Valutare la risposta del sistema in presenza di una forzante esterna di tipo **sinusoidale** ed ampiezza **costante nel tempo**.



Su di una struttura, la “forzante” è in generale costituita da una o più forze esterne, aventi tutte la **stessa pulsazione**, ma **ampiezza e fase distinte**.

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

Se si applica la forzante a partire dall'istante $t=0$, con la struttura inizialmente a riposo, la risposta mostra un **transitorio** iniziale, che si esaurisce dopo un certo tempo, dopodiché la struttura oscilla con **ampiezza costante**.



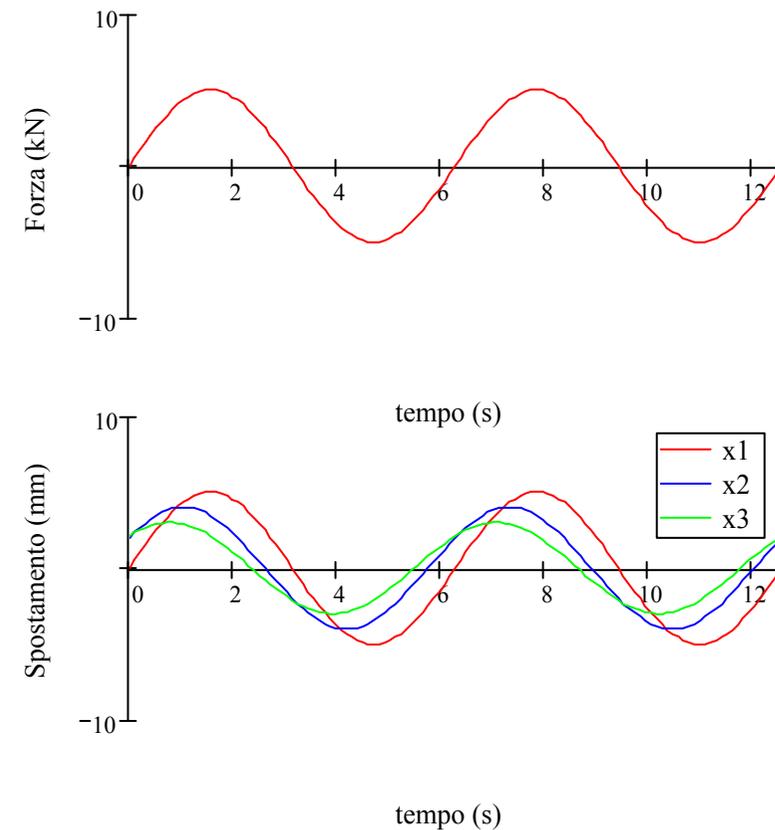
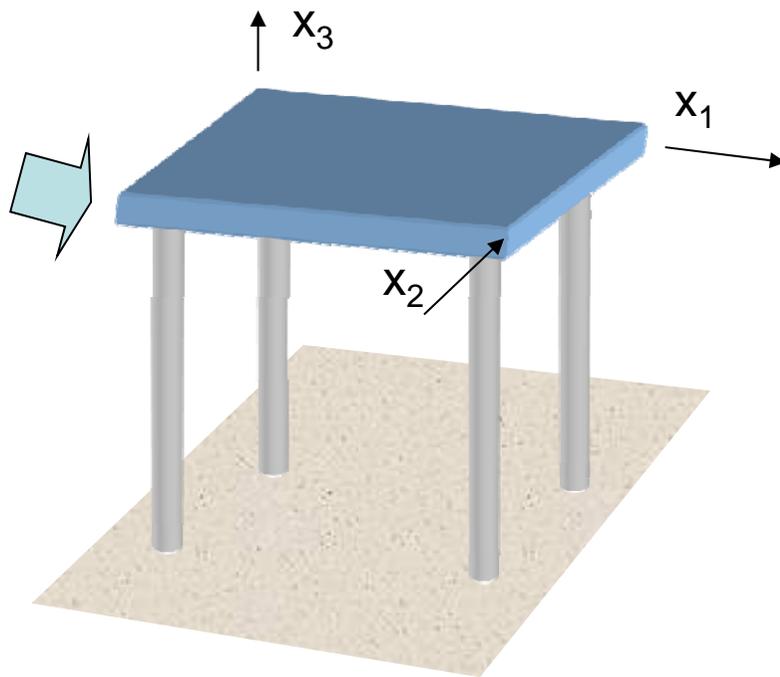
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

Ipotesi: comportamento lineare della struttura ($[M]$, $[C]$ e $[K]$ costanti)



I vari g.d.l. della struttura vibrano con una legge del moto avente:

- andamento nel tempo di tipo **sinusoidale**
- **pulsazione** uguale a quella della forzante
- **ampiezza** e **fase** variabili da punto a punto



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} f_{1\max} \cdot \cos(\Omega t + \psi_1) \\ f_{2\max} \cdot \cos(\Omega t + \psi_2) \\ - \\ - \\ f_{j\max} \cdot \cos(\Omega t + \psi_j) \\ - \\ - \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1\max} \cdot e^{i\psi_1} \cdot e^{i\Omega t} \\ f_{2\max} \cdot e^{i\psi_2} \cdot e^{i\Omega t} \\ - \\ - \\ f_{j\max} \cdot e^{i\psi_j} \cdot e^{i\Omega t} \\ - \\ - \end{Bmatrix} = \{f_{\max} \cdot e^{i\psi}\} e^{i\Omega t}$$

$$\{F(t)\} = \{f_{\max} \cdot e^{i\psi}\} e^{i\Omega t} = \{f_{\max} (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))\} e^{i\Omega t}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

$$\{U(t)\} = \{u_{\max} \cdot e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t} = \{u_{\max} (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))\} e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{U}(t)\} = i\Omega \{u_{\max} \cdot e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{U}(t)\} = -\Omega^2 \{u_{\max} \cdot e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t}$$

$$\{F(t)\} = \{f_{\max} \cdot e^{i\psi}\} e^{i\Omega t}$$

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$

$$-\Omega^2 [M] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t} + i\Omega [C] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t} + [K] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t} = \{f_{\max} e^{i\psi}\} e^{i\Omega t}$$

$$([K] - \Omega^2 [M] + i\Omega [C]) \{u_{\max} e^{i\varphi}\} = \{f_{\max} e^{i\psi}\}$$

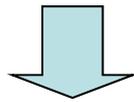
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MD

Principali tecniche di soluzione:

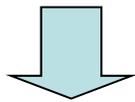
- Metodo diretto
- Metodo di sovrapposizione modale

Soluzione: **metodo diretto (MD)**

$$\left(([K] - \Omega^2 [M]) + i\Omega [C] \right) \{u_{\max} e^{i\varphi}\} = \{f_{\max} e^{i\psi}\}$$



$$[K_c] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} = \{f_{\max} e^{i\psi}\}$$



$$\{u_{\max} e^{i\varphi}\} = [K_c]^{-1} \{f_{\max} e^{i\psi}\}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

Soluzione: metodo di sovrapposizione modale (MSM)

Proprietà modi propri $\{\Phi\}_j$

- i modi propri sono ortogonali rispetto alle matrici $[M]$ e $[K]$
- i modi propri costituiscono una base di vettori linearmente indipendenti

$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_j \begin{cases} = 0 & \text{se } j \neq k \\ \neq 0 & \text{se } j = k \end{cases}$$

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t)$$

$$\{\dot{U}(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j \dot{Y}_j(t)$$

$$\{\ddot{U}(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j \ddot{Y}_j(t)$$

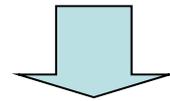
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\{\ddot{U}(t)\} = \sum_{j=1}^{\infty} \{\Phi\}_j \ddot{Y}_j(t)$$

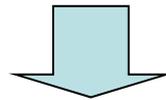
$$\{\dot{U}(t)\} = \sum_{j=1}^{\infty} \{\Phi\}_j \dot{Y}_j(t)$$

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{\infty} \{\Phi\}_j Y_j(t)$$

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$



$$[M] \sum_j \{\Phi\}_j \ddot{Y}_j + [C] \sum_j \{\Phi\}_j \dot{Y}_j + [K] \sum_j \{\Phi\}_j Y_j = \{F(t)\}$$



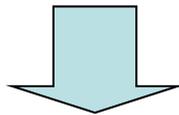
$$\{\Phi\}_k^T \left([M] \sum_j \{\Phi\}_j \ddot{Y}_j + [C] \sum_j \{\Phi\}_j \dot{Y}_j + [K] \sum_j \{\Phi\}_j Y_j \right) = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\{\Phi\}_k^T \left([M] \sum_j \{\Phi\}_j \ddot{Y}_j + [C] \sum_j \{\Phi\}_j \dot{Y}_j + [K] \sum_j \{\Phi\}_j Y_j \right) = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_j \begin{cases} = 0 & \text{se } j \neq k \\ \neq 0 & \text{se } j = k \end{cases}$$

$$\{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_j \begin{cases} = 0 & \text{se } j \neq k \\ \neq 0 & \text{se } j = k \end{cases}$$



$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k \ddot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [C] \sum_j \{\Phi\}_j \dot{Y}_j + \{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k \ddot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [C] \sum_j \{\Phi\}_j \dot{Y}_j + \{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

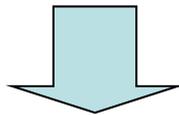
Ipotesi aggiuntiva: smorzamento proporzionale (di Rayleigh) o costante

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] + \delta[I]$$

$$\{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_j \begin{cases} = 0 & \text{se } j \neq k \\ \neq 0 & \text{se } j = k \end{cases}$$

La matrice di smorzamento deve avere anch'essa una forma che garantisca la normalità rispetto ad essa delle forme modali.

Non sono ammessi, ad esempio, smorzatori "localizzati".



$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k \ddot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_k \dot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

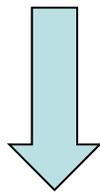
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k \ddot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_k \dot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

Normalizzazione

$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k = 1$$

$$\{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k \ddot{Y}_k = \ddot{Y}_k$$

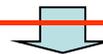


$$\ddot{Y}_k + \{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

$$([K] - \omega_k^2 [M]) \{\Phi\}_k = 0$$



$$\{\Phi\}_k^T ([K] - \omega_k^2 [M]) \{\Phi\}_k = 0$$



$$\{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k - \omega_k^2 \{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k = 0$$



$$\{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k Y_k = \omega_k^2 Y_k$$



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\ddot{Y}_k + \boxed{\{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_k} \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}$$

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_k &= \{\Phi\}_k^T (\alpha [M] + \beta [K] + \delta [I]) \{\Phi\}_k = \\ &= \alpha \{\Phi\}_k^T [M] \{\Phi\}_k + \beta \{\Phi\}_k^T [K] \{\Phi\}_k + \delta \{\Phi\}_k^T [I] \{\Phi\}_k = \alpha + \beta \omega_k^2 + \delta_1(\omega_k) \end{aligned}$$

Sistema 1 gdl: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \ddot{x} + \boxed{2\xi\omega_n} \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

$$\{\Phi\}_k^T [C] \{\Phi\}_k = 2\xi_k \omega_k \quad \xi_k = \frac{\alpha}{\omega_k} + \beta \omega_k + \frac{\delta_1(\omega_k)}{\omega_k}$$

$$\boxed{\ddot{Y}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\}}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\ddot{Y}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\} = f_k$$

$$f_k = (f_{k,\max} e^{i\psi_k}) e^{i\Omega t} = f_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$Y_k = Y_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$\dot{Y}_k = i\Omega Y_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{Y}_k = -\Omega^2 Y_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Y_{kc} e^{i\Omega t} + 2\xi_k \omega_k i\Omega Y_{kc} e^{i\Omega t} + \omega_k^2 Y_{kc} e^{i\Omega t} = f_{kc} e^{i\Omega t}$$

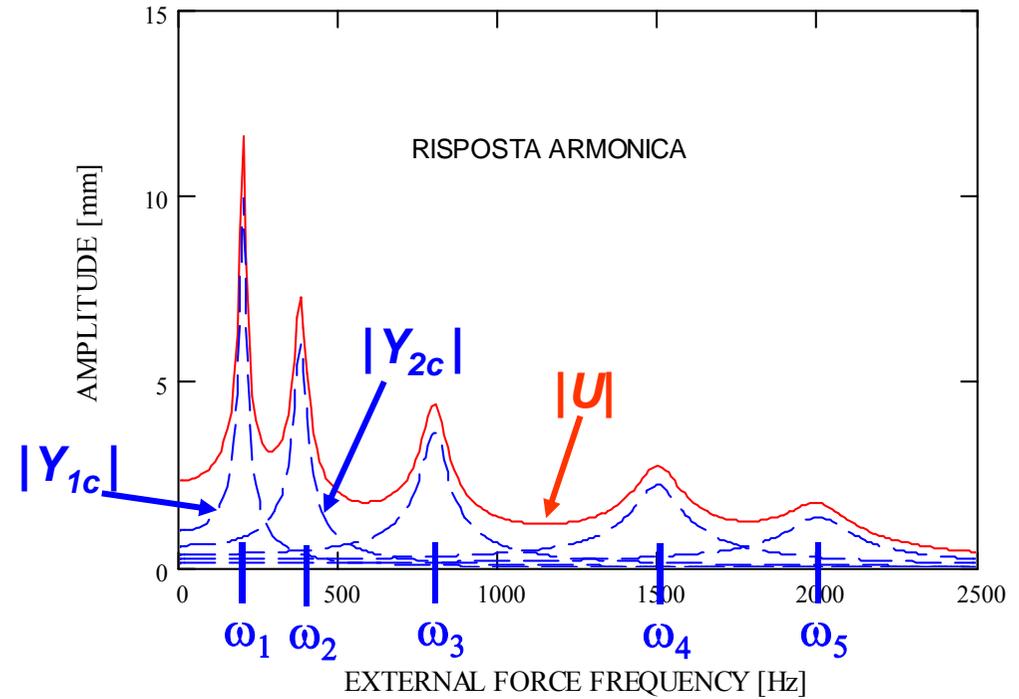
$$(\omega_k^2 - \Omega^2 + 2i\xi_k \omega_k \Omega) Y_{kc} = f_{kc}$$

$$Y_{kc} = \frac{f_{kc}}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + 2i\xi_k \omega_k \Omega}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$Y_{kc} = \frac{f_{kc}}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + 2i\xi_k \omega_k \Omega} =$$

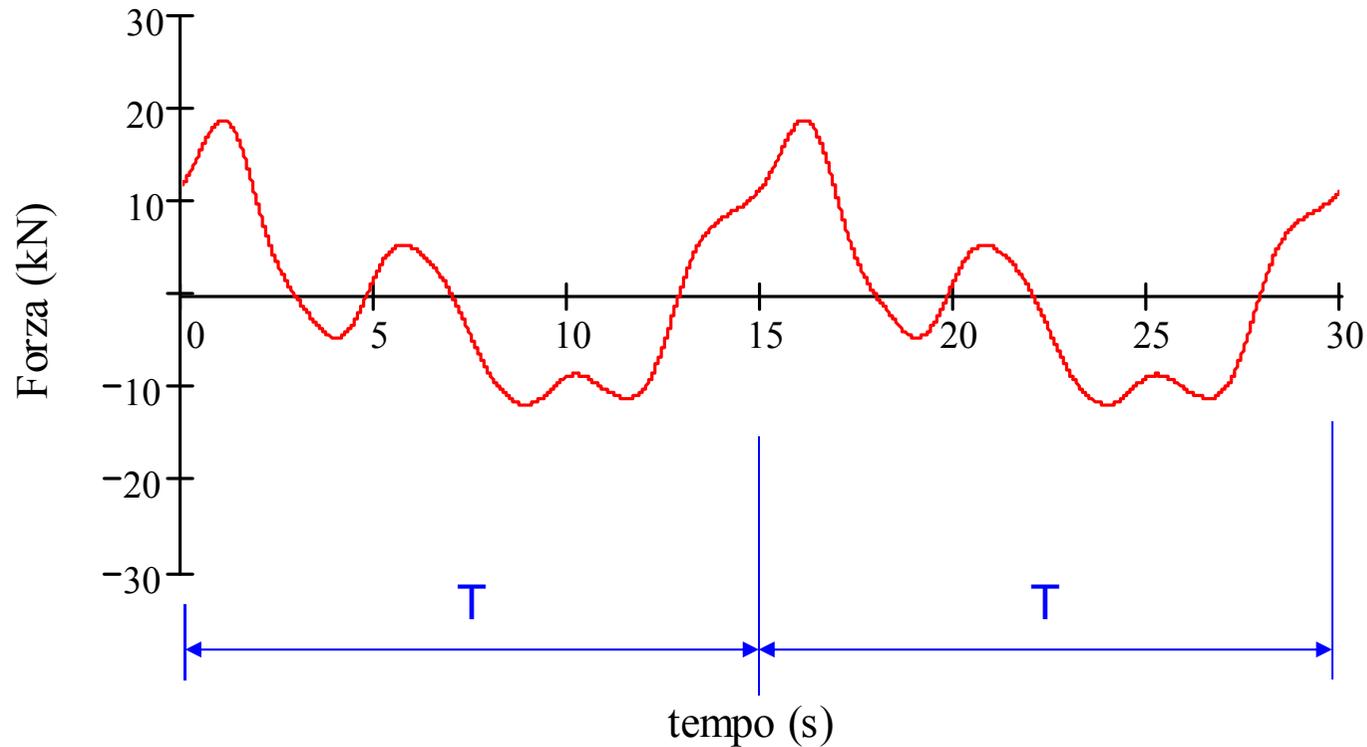
$$= \frac{\frac{f_{kc}}{\omega_k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_k^2}\right)^2 + \left(2\xi_k \frac{\Omega}{\omega_k}\right)^2}}$$



$$\{U(t)\} = \sum_{k=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_k Y_{kc} e^{i\Omega t} = \left(\sum_{k=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_k Y_{kc} \right) e^{i\Omega t}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

Forzanti: le forzanti esterne agenti sulla struttura hanno generalmente un andamento nel tempo di tipo **periodico**, ma non **armonico**.



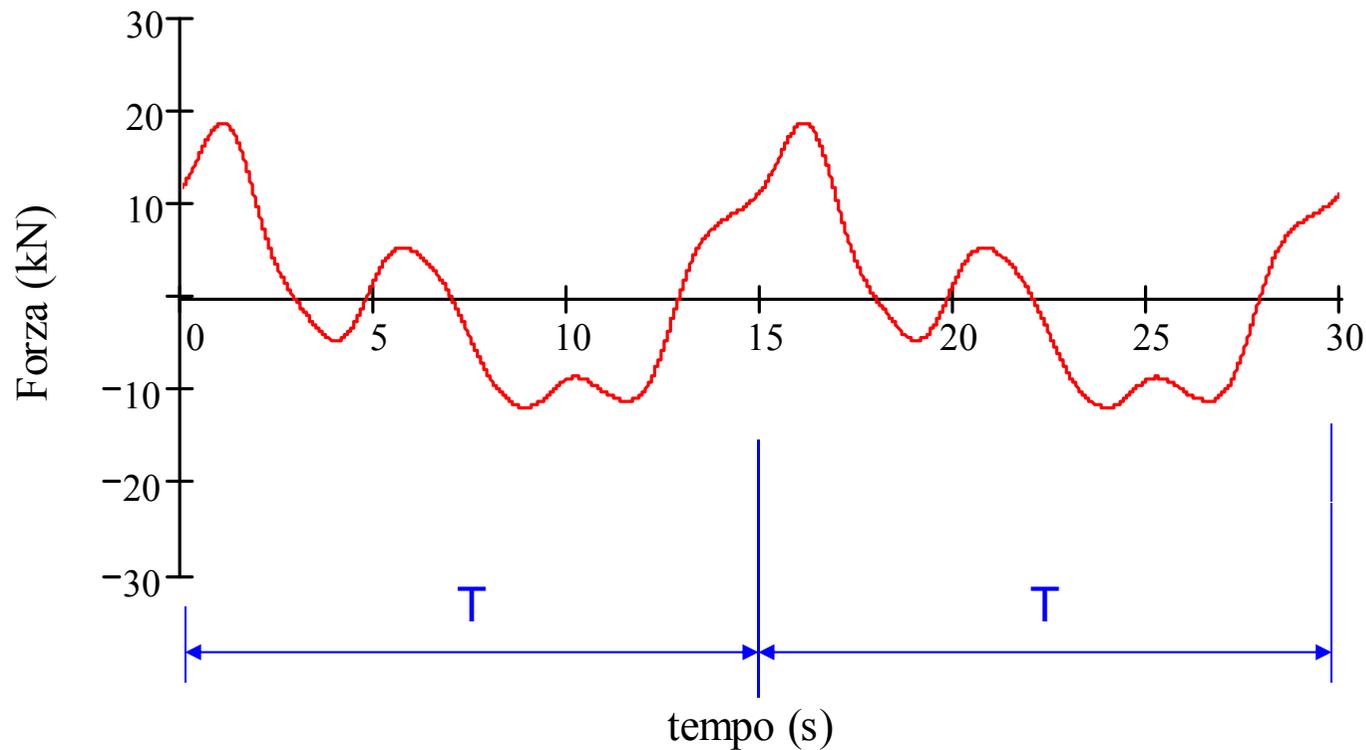
Per determinare il loro effetto sulla struttura è quindi necessario:

- scomporre la forzante in una somma di funzioni armoniche (serie di Fourier)
- ottenere la risposta complessiva tramite la sovrapposizione degli effetti

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

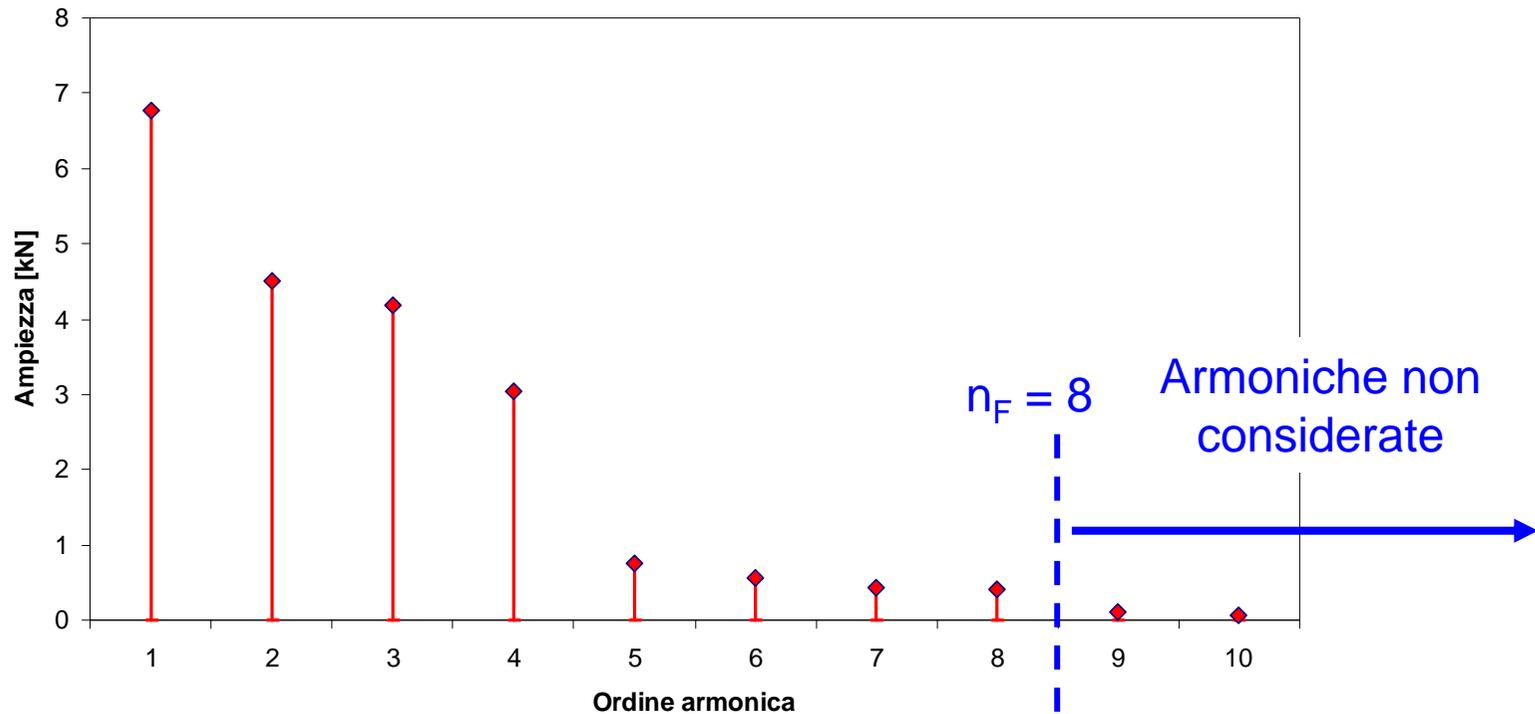
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h) \cong A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$



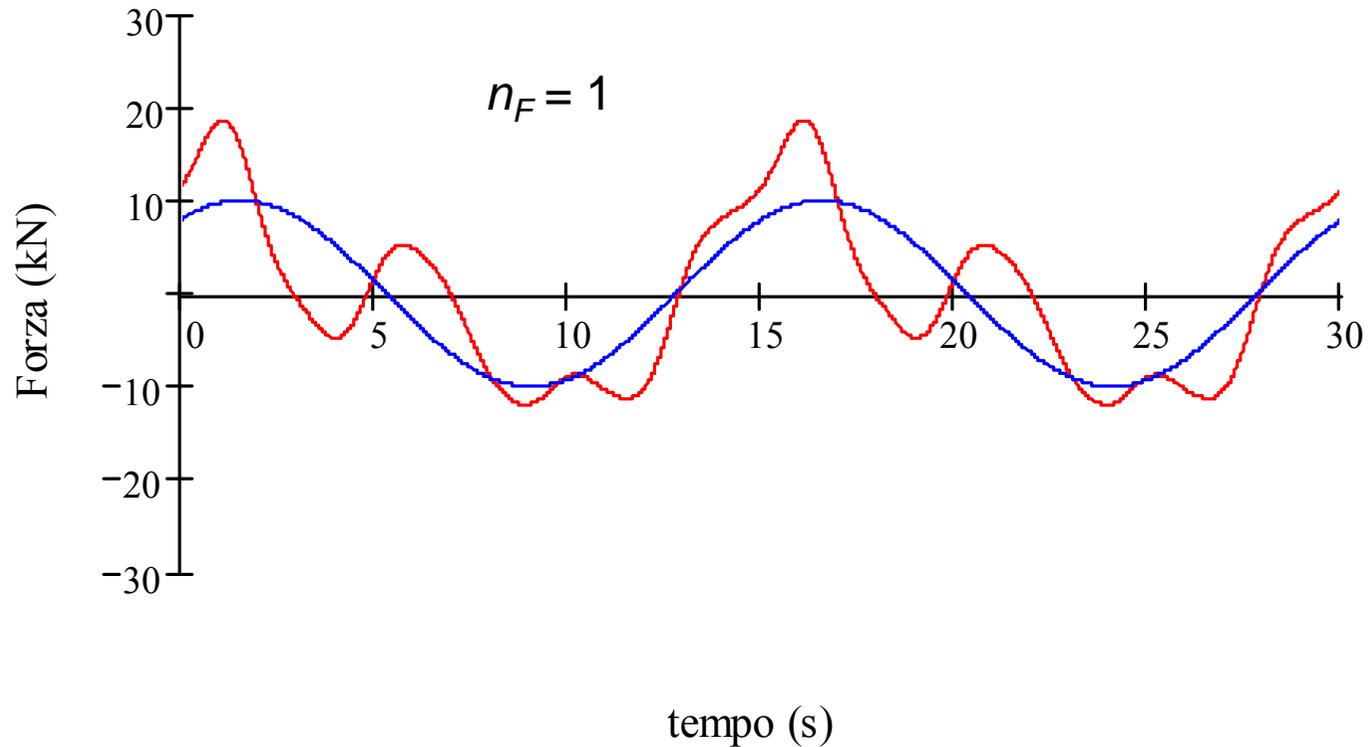
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

Andamento tipico delle ampiezze delle diverse armoniche eccitatrici con il relativo ordine h



Oss: al di sopra di un certo numero d'ordine l'ampiezza A_h diviene usualmente trascurabile.

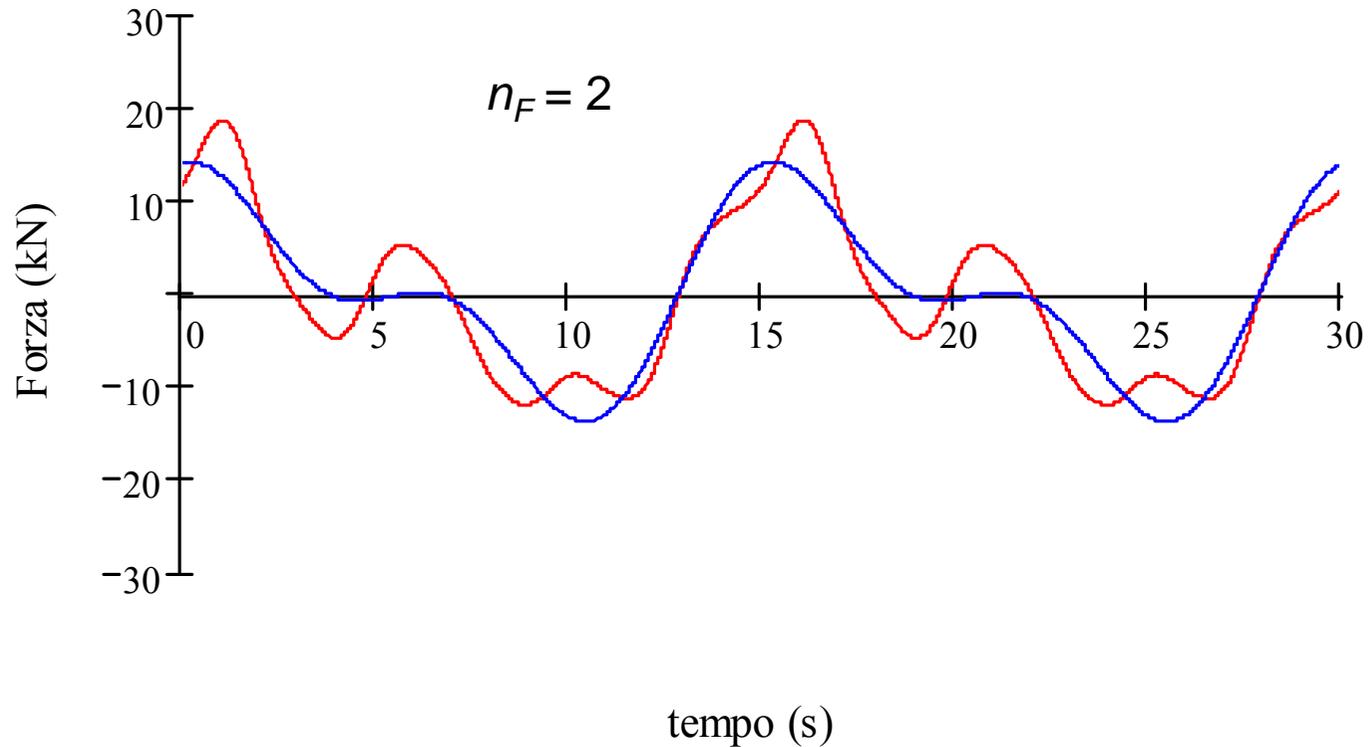
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F : confronto tra $F(t)$ e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

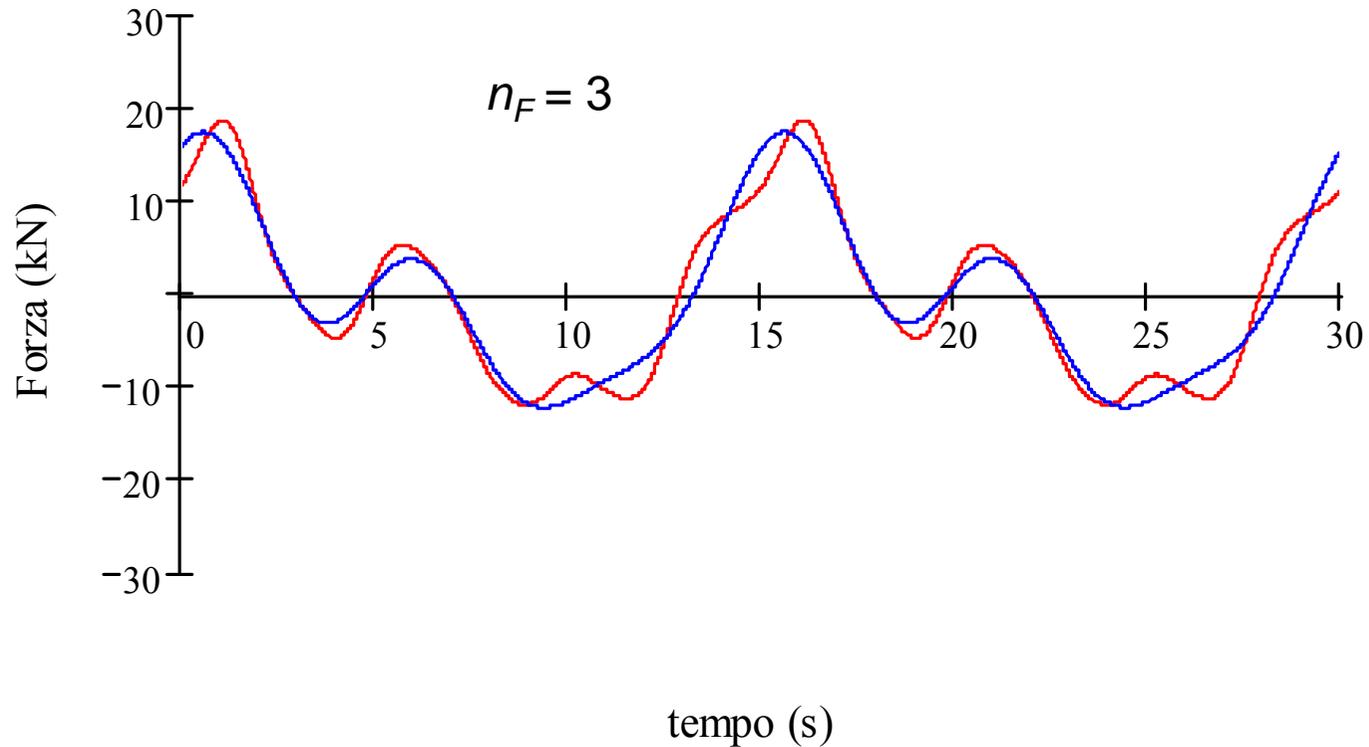
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F : confronto tra $F(t)$ e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

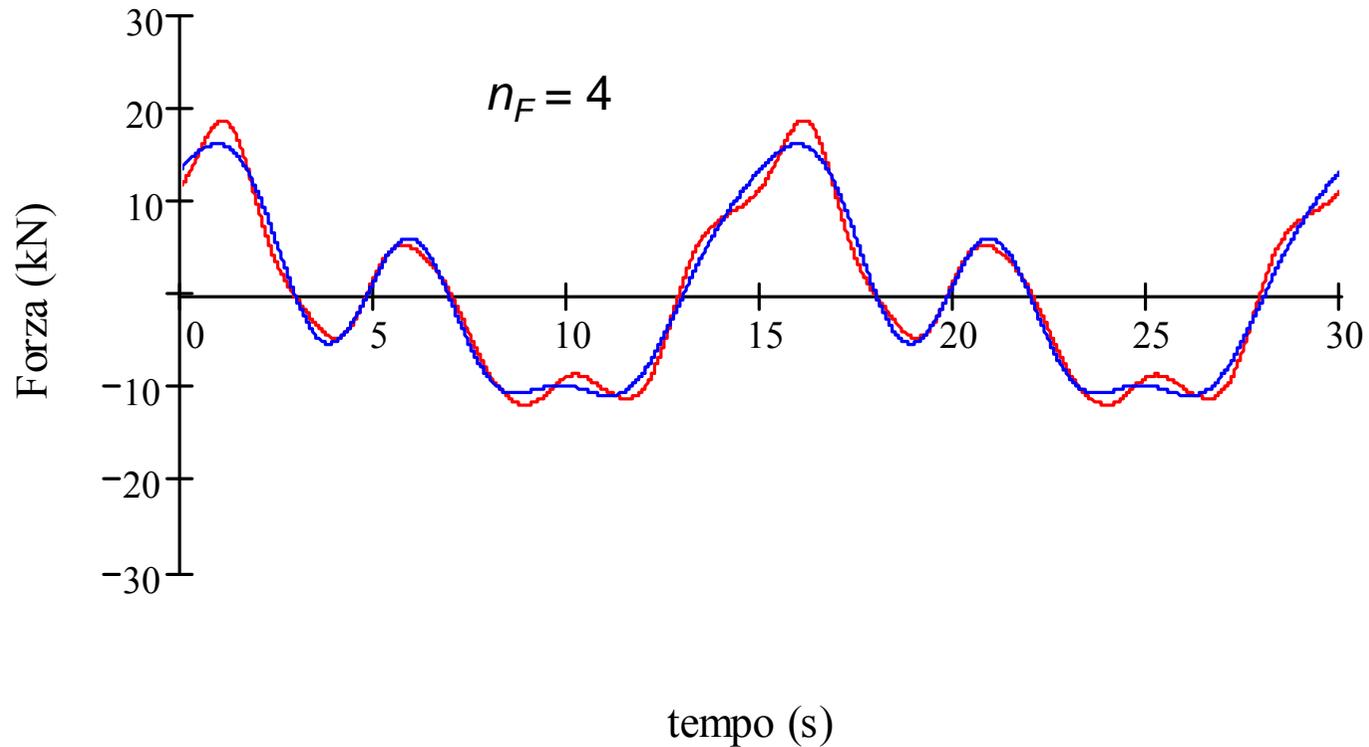
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F : confronto tra $F(t)$ e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

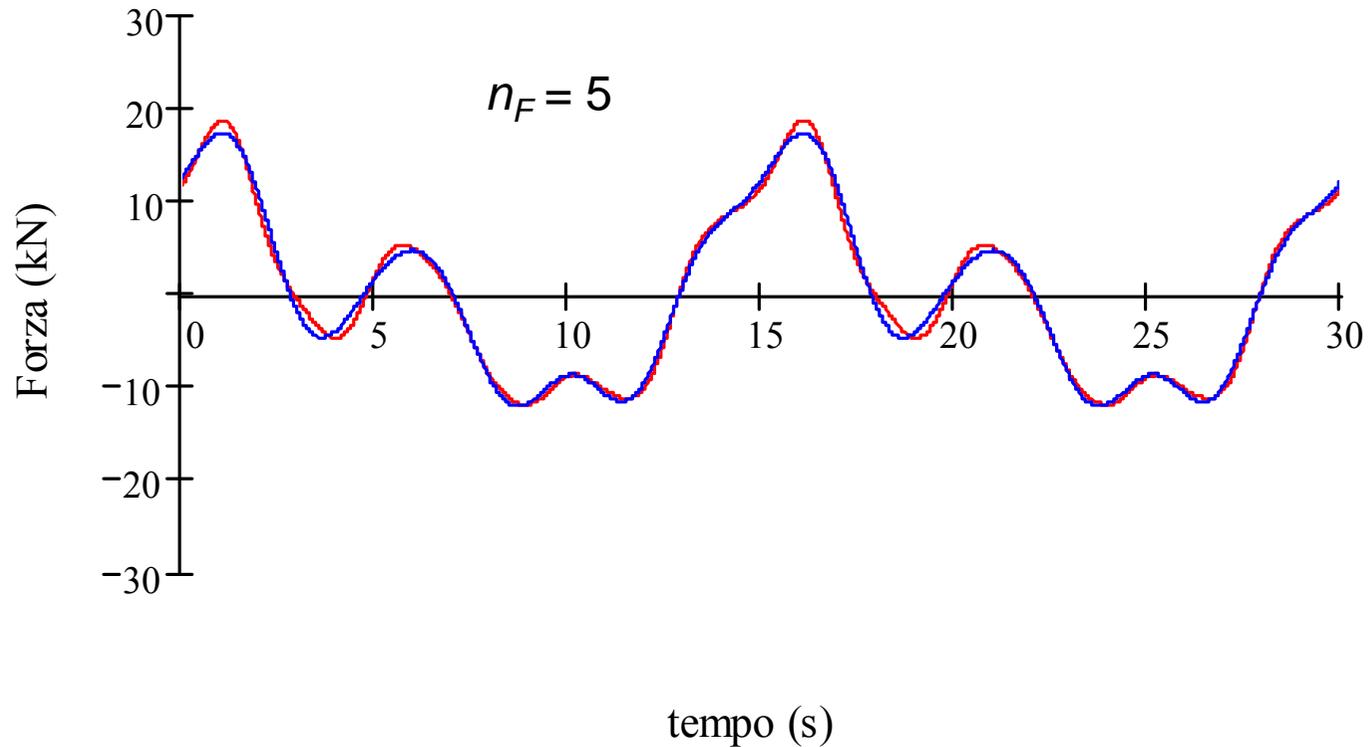
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F : confronto tra $F(t)$ e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

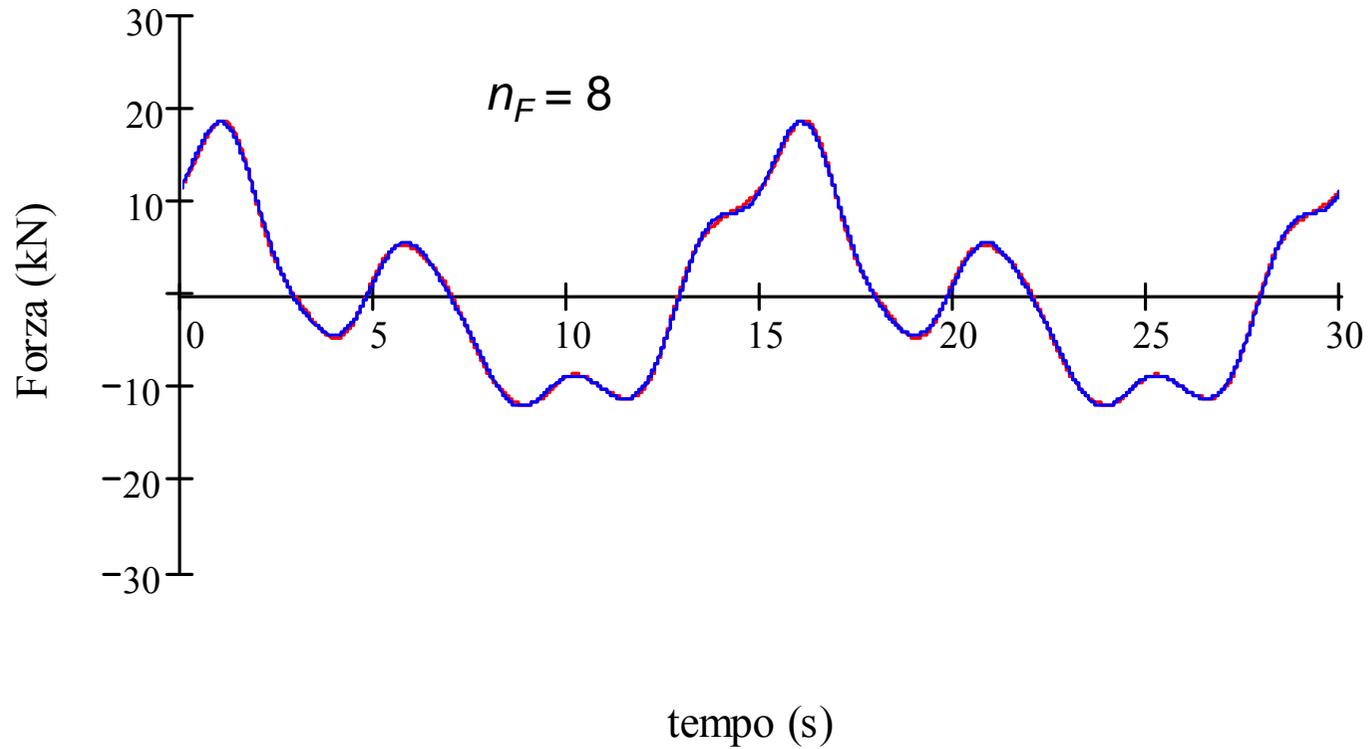
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F : confronto tra $F(t)$ e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F : confronto tra $F(t)$ e

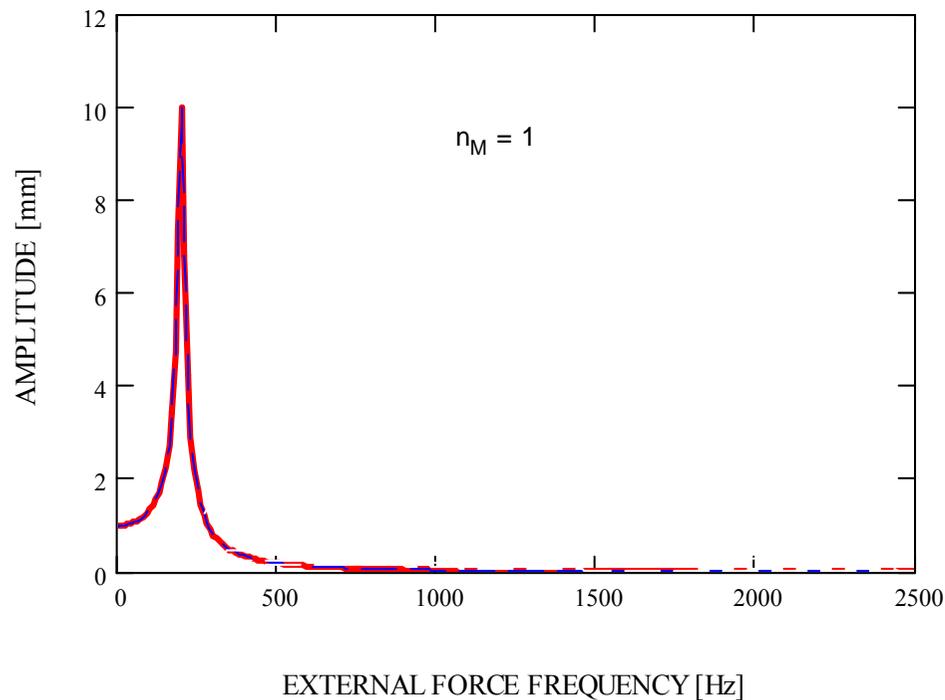
$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

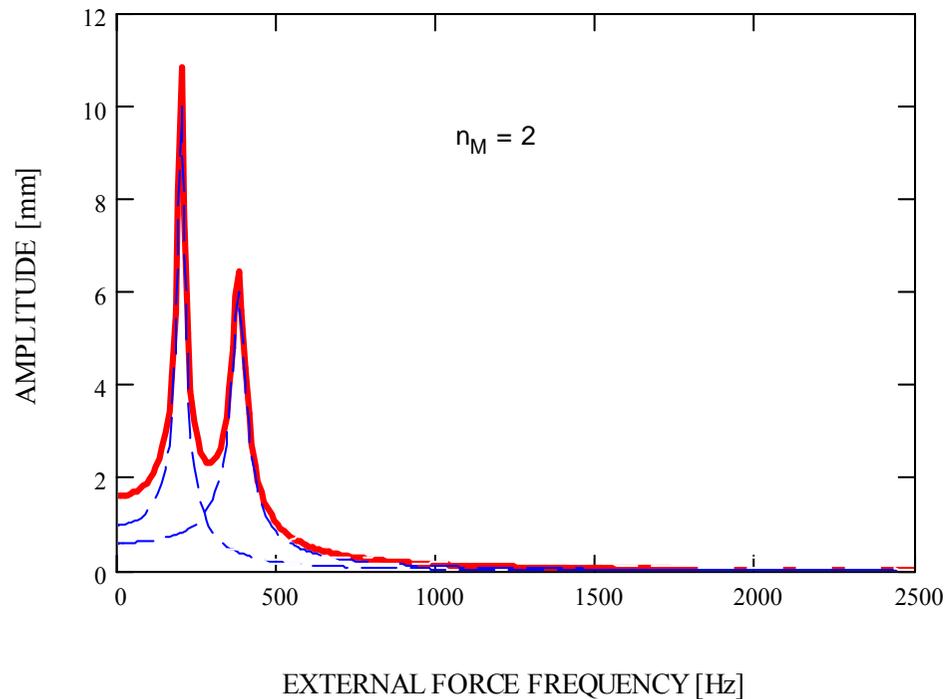


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

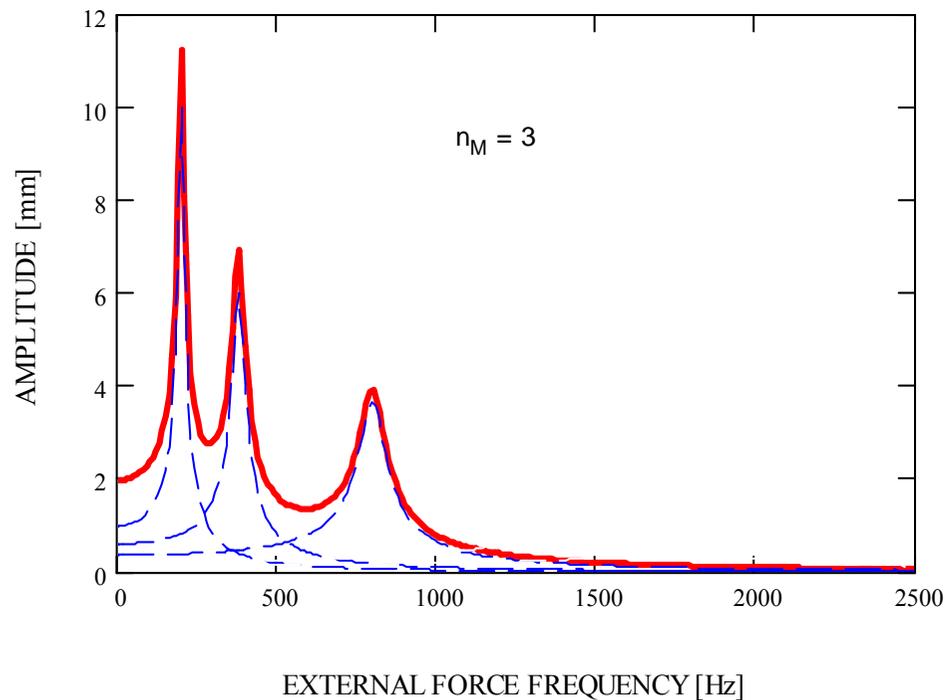


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

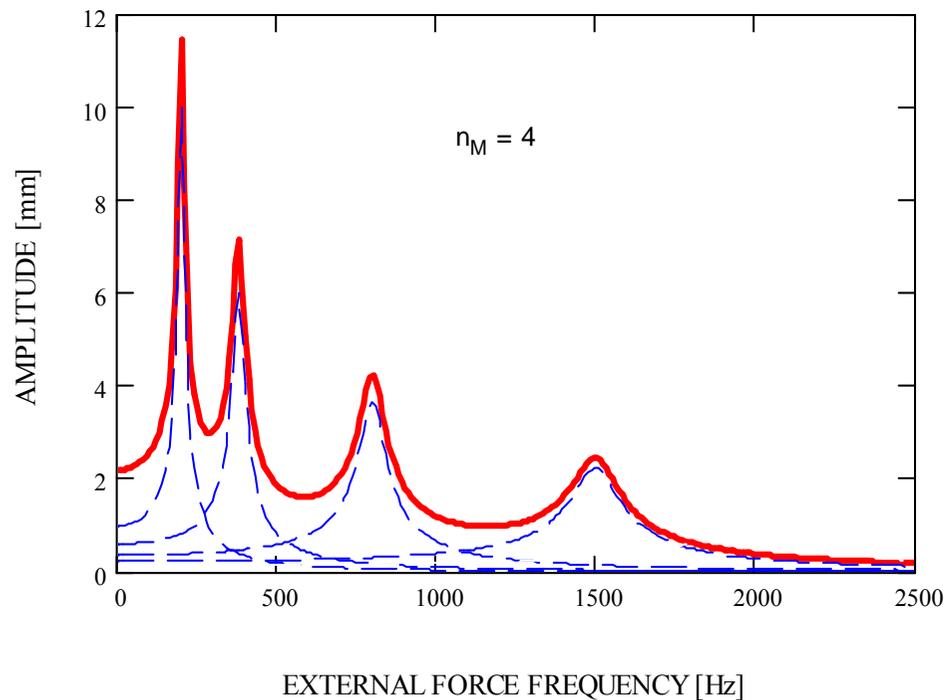


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

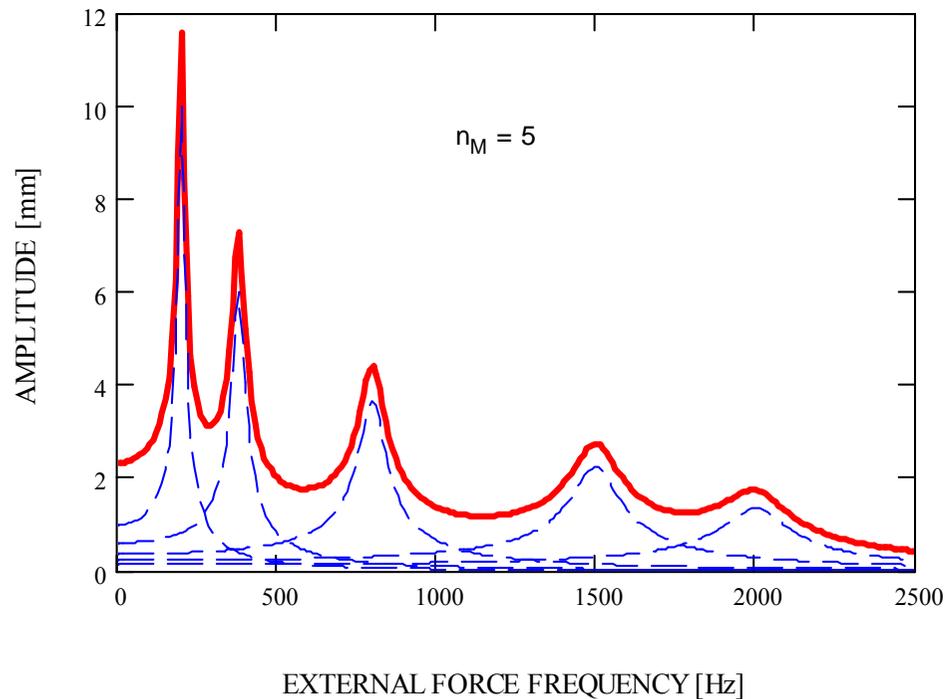


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

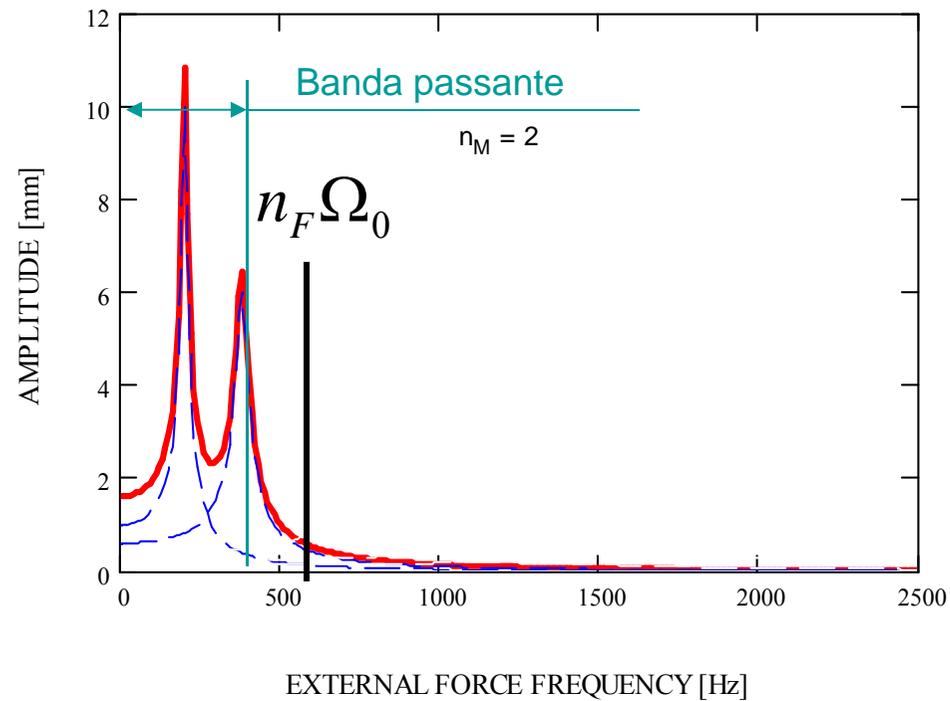
Effetto della scelta di n_M : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello

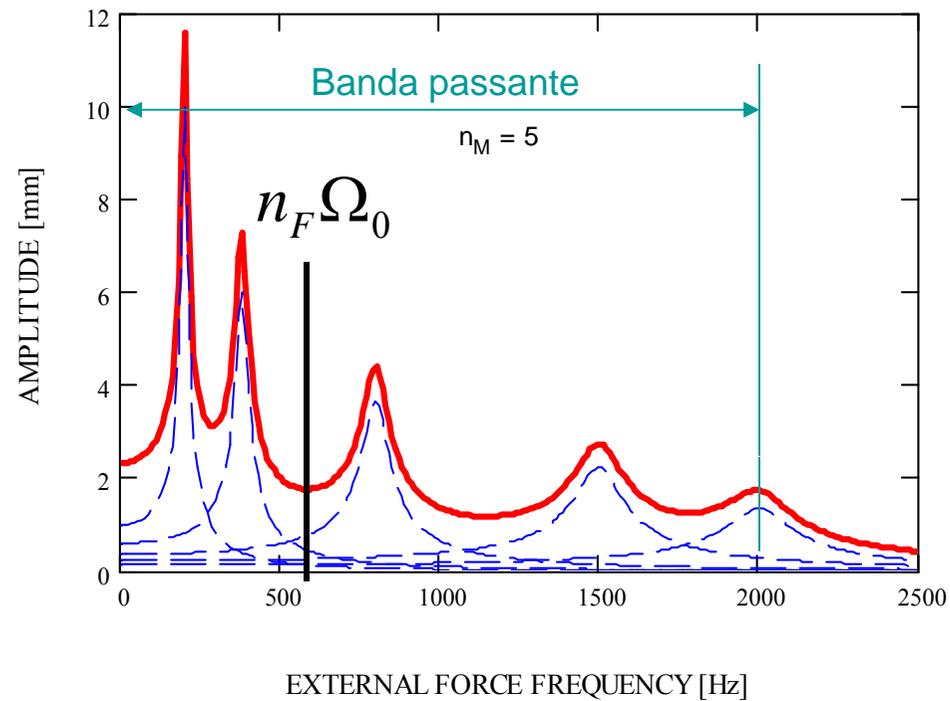


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello

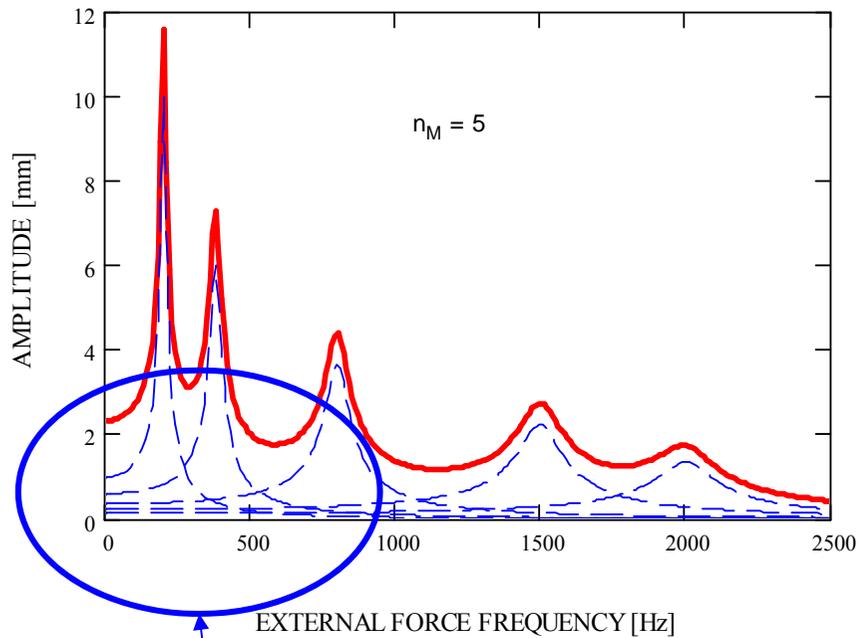
$$\omega_{n_M} > n_F \Omega_0$$



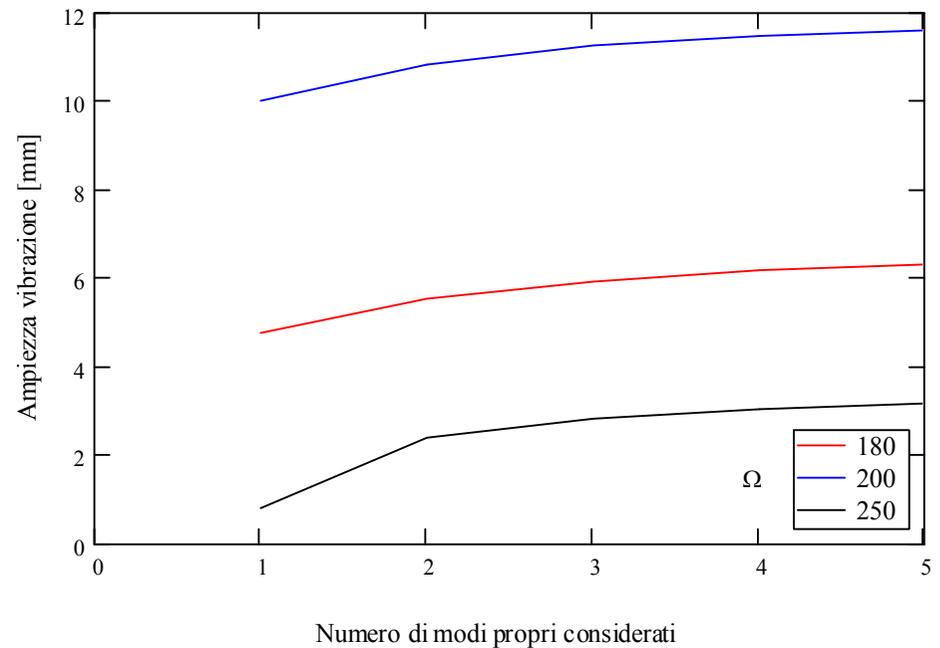
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



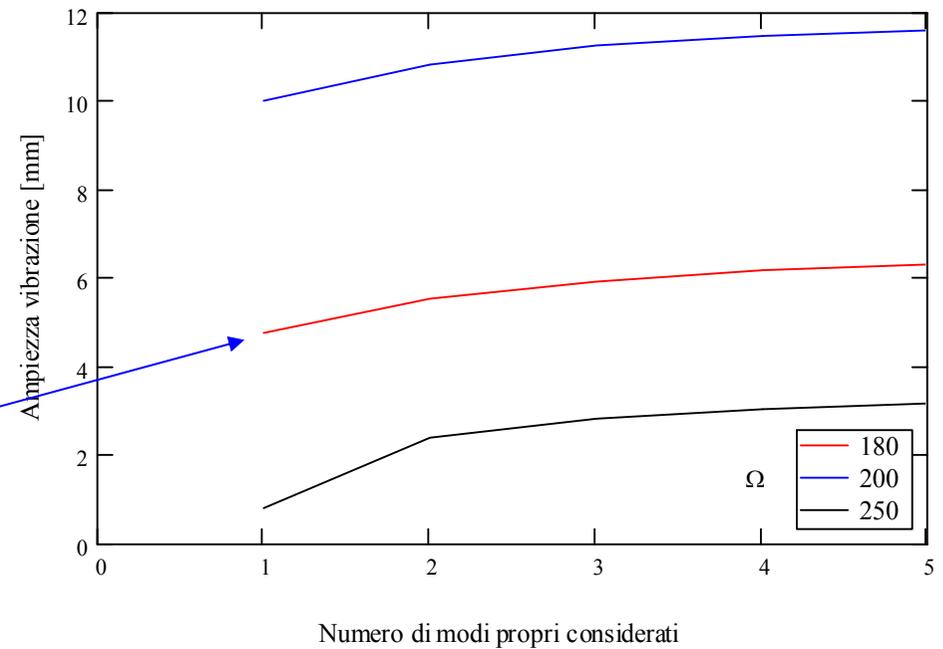
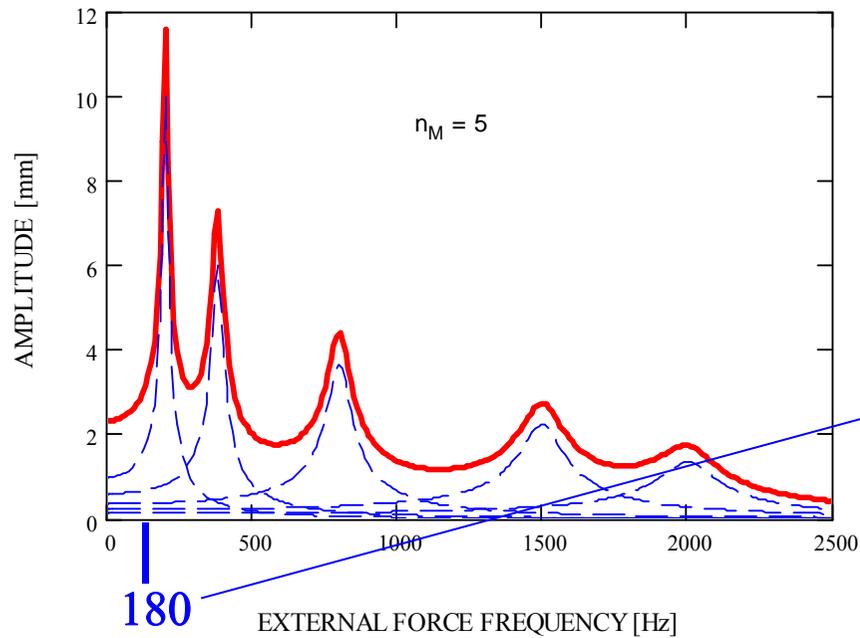
I modi propri di alta frequenza mantengono un contributo anche alle basse frequenze



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

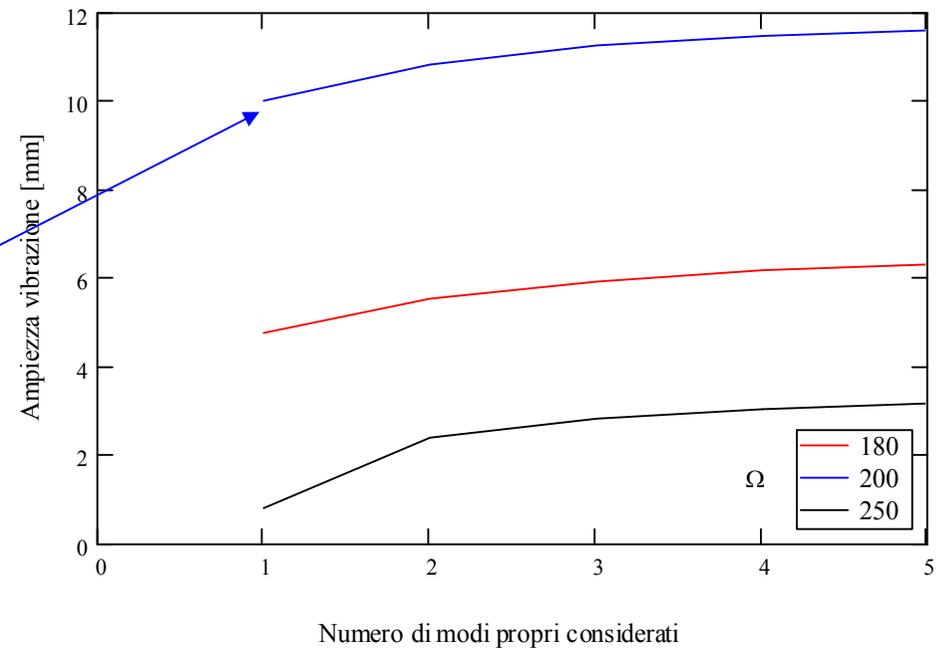
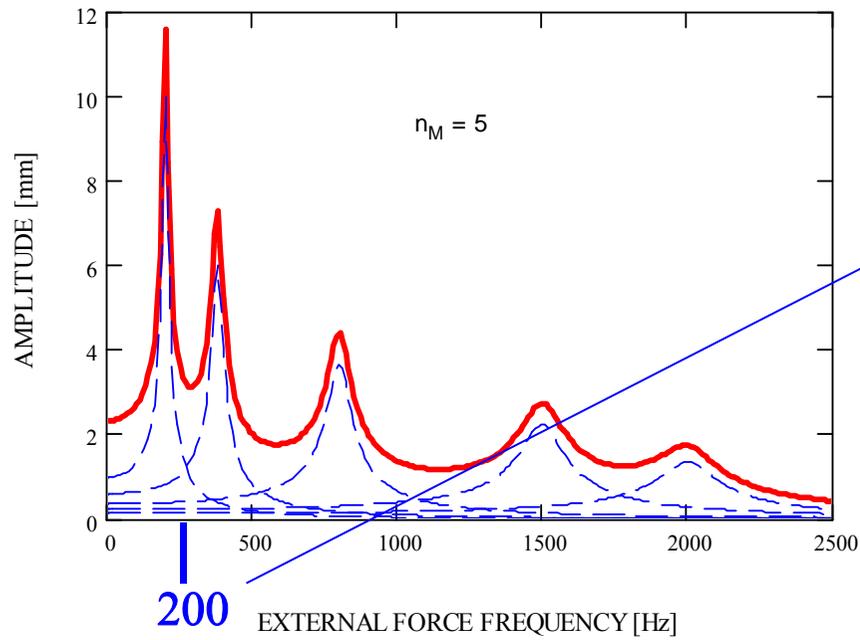
- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



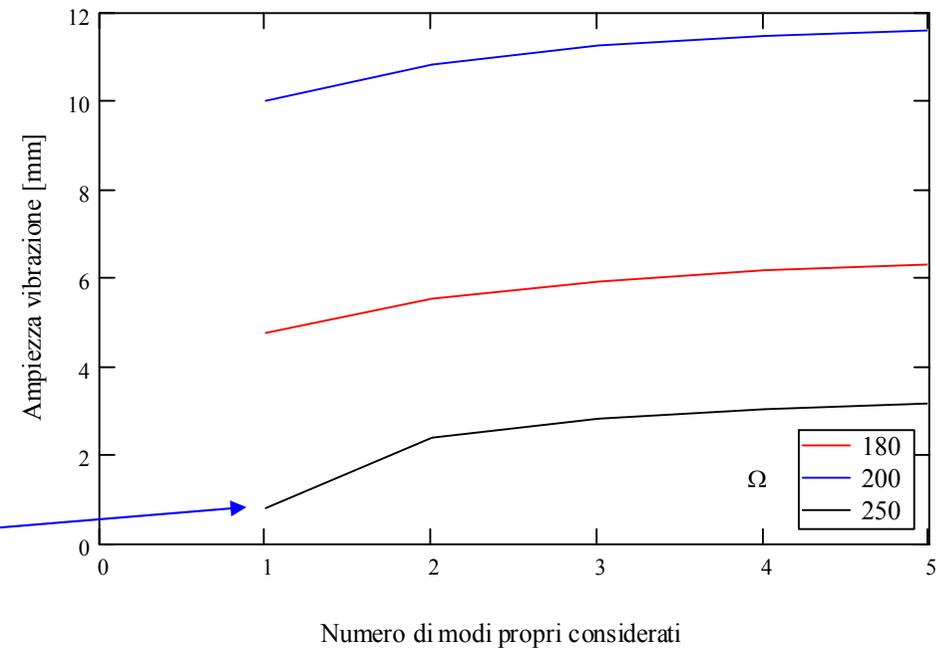
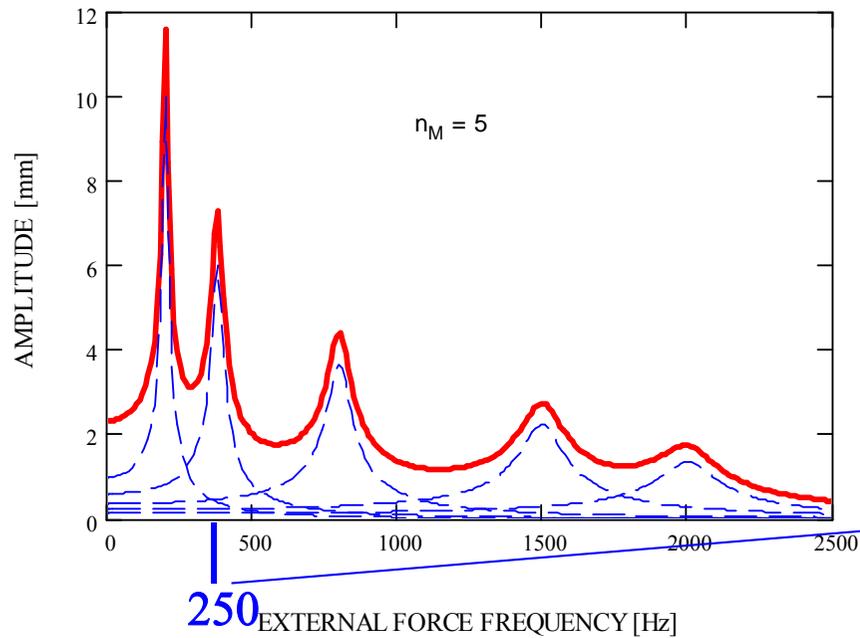
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza

$$\omega_{n_M} \gg n_F \Omega_0$$

$$\omega_{n_M} > 1.5 \cdot n_F \Omega_0$$



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – MSM + MD - APPLICAZIONI

Ulteriore requisito per MD e per MSM:

- il modello FEM deve essere costruito in maniera da rappresentare in maniera sufficientemente accurata tutti i modi che danno un contributo significativo alla risposta del sistema (tutti gli n_M modi propri nel caso del MSM)

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – SMORZAMENTO

$$\xi_k = \frac{\alpha}{\omega_k} + \beta\omega_k + \frac{\delta_1(\omega_k)}{\omega_k} = \frac{\alpha}{\omega_k} + \beta\omega_k + \beta^m \omega_k + \xi + \xi^m + \xi_k$$

α-damping (ALPHAD)

β-damping (BETAD)

β-damping dip. materiale (MP,DAMP)

Constant damping ratio (DMPRAT) (Anal. arm. e anal. trans. con MSM)

Constant damping ratio dip materiale (MP,DMPR) (Anal. armonica non ridotta)

Modal damping ratio (MDAMP)

Element damping (applicabile con metodi particolari)

COMANDI ANSYS/1 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

/SOLU

ANTYPE, HARMIC

Definisce il tipo di analisi richiesta

HROPT, FULL,

Sceglie il tipo di analisi diretto completo

HARFRQ, FREQB, FREQE

Frequenza iniziale e finale per l'analisi

NSUBST, NSBSTP

N° di "step" in cui suddividere l'intervallo di frequenze da analizzare

COMANDI ANSYS/2 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*

- ON Stampa i risultati come parti reale ed immaginaria
- OFF Stampa i risultati come ampiezza e fase

- OFF “Step” di frequenza equispaziati
- ON “Step” di frequenza addensati attorno ai modi propri

- OFF Non stampa il contributo dei diversi modi
- ON Stampa il contributo dei diversi modi

F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*

Parti reale ed immaginaria della forza

SOLVE
FINISH

COMANDI ANSYS/3

ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

/POST26

NSOL

ESOL Definizione grandezze da estrarre dal database

RFORCE

etc.

PRCPLX, KEY

PRVAR

0 – Stampa i risultati nella forma parte reale + parte immaginaria
1 – Stampa i risultati nella forma ampiezza + fase

PLCPLX, KEY

PLVAR

0 — Ampiezza
1 — Fase
2 — Parte reale
3 — Parte immaginaria

COMANDI ANSYS/4 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO RIDOTTO

/SOLU

ANTYPE, HARMIC Definisce il tipo di analisi richiesta

HROPT, REDUC, Sceglie il tipo di analisi diretto ridotto

HARFRQ, FREQB, FREQE

NSUBST, NSBSTP

HROUT, Reimky, Clust, Mcont

F, NODE, Lab, VALUE, VALUE2, NEND, NINC

SOLVE

FINISH

COMANDI ANSYS/5 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO RIDOTTO

/SOLU

EXPASS, *ON* Passo di espansione

NUMEXP, *NUM*, *BEGRNG*, *ENDRNG*, ...

Numero di soluzioni da espandere (se ALL espande tutti gli “step” disponibili)

“Range” di frequenza sul quale effettuare l’espansione delle soluzioni

EXPSOL, *LSTEP*, *SBSTEP*, *TIMFRQ*, *Elcalc*

SOLVE

FINISH

COMANDI ANSYS/6

ANALISI ARMONICA – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

/SOLU

ANTYPE, MODAL Analisi modale preliminare

MODOPT, Method, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey

SOLVE

FINISH

/SOLU

Analisi armonica con MSM

HROPT, MSUP, MAXMODE, MINMODE

N° d'ordine finale (default e max.: NMODE) ed iniziale (default: 1) dei modi da impiegare

HROUT, Reimky, Clust, Mcont

F, NODE, Lab, VALUE, VALUE2, NEND, NINC

SOLVE

FINISH

COMANDI ANSYS/7

ANALISI ARMONICA – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE RIDOTTO

/SOLU

ANTYPE, MODAL Analisi modale preliminare ridotta

MODOPT, *REDUC*, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *,Nrmkey*

SOLVE

FINISH

/SOLU Analisi armonica con MSM

HROPT, *MSUP*, *MAXMODE*, *MINMODE*

HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*

F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*

SOLVE

FINISH

/SOLU Passo di espansione

EXPASS, *ON*

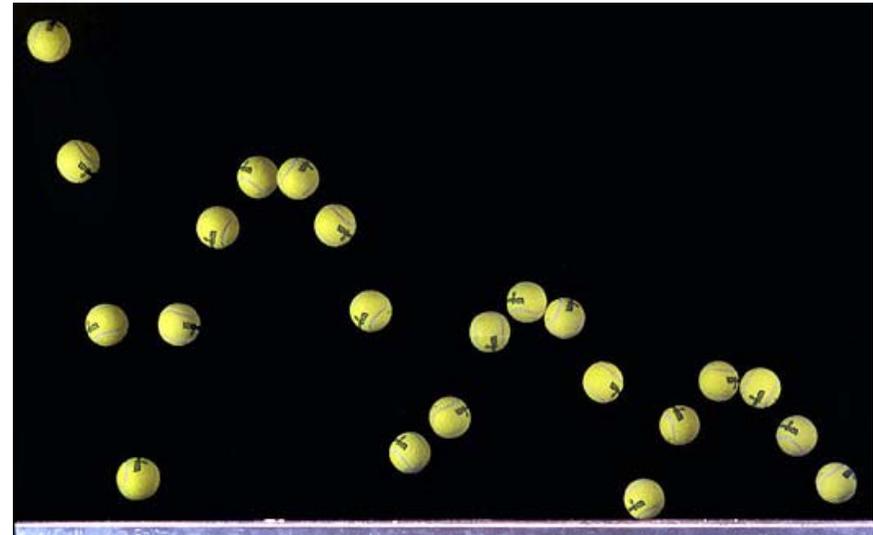
NUMEXP, *NUM*, *BEGRNG*, *ENDRNG*

SOLVE

FINISH

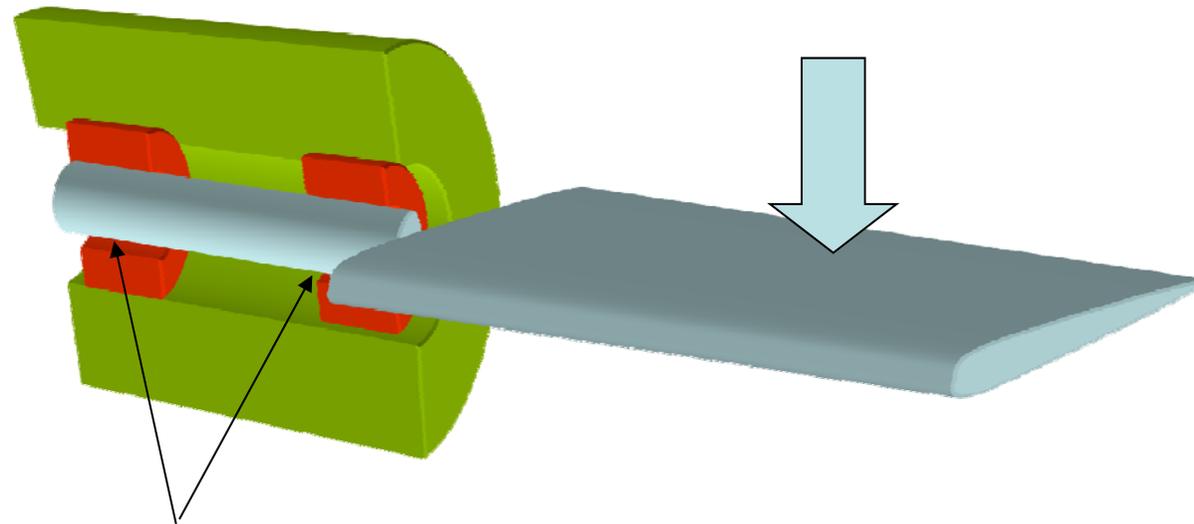
ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

SCOPO: Valutare la risposta del sistema in presenza di forze o sollecitazioni esterne, generalmente di tipo **non periodico**, applicate abbastanza rapidamente **da rendere non trascurabili gli effetti delle forze di inerzia**.

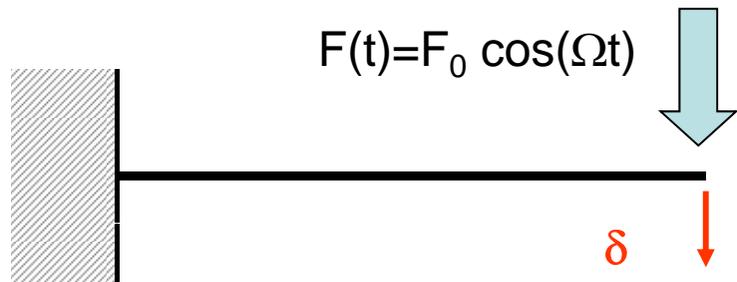


ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Può essere impiegato anche per valutare la risposta del sistema a forze o sollecitazioni esterne di tipo **periodico**, in **presenza di effetti non lineari**.



Non linearità di contatto



Materiale elastico non lineare

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Principali tecniche di soluzione:

➤ **Metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

▪ Ipotesi:

- *Struttura in campo lineare, con matrici $[M]$, $[C]$ e $[K]$ costanti*
- *Matrice di smorzamento proporzionale o costante*

➤ **Metodi di integrazione diretta (MID)**

▪ Ipotesi:

- *Struttura operante anche in campo non lineare*
- *Matrici $[M]$, $[C]$ e $[K]$ anche non costanti*
- *Matrice di smorzamento qualsiasi*

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Soluzione: **metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t)$$

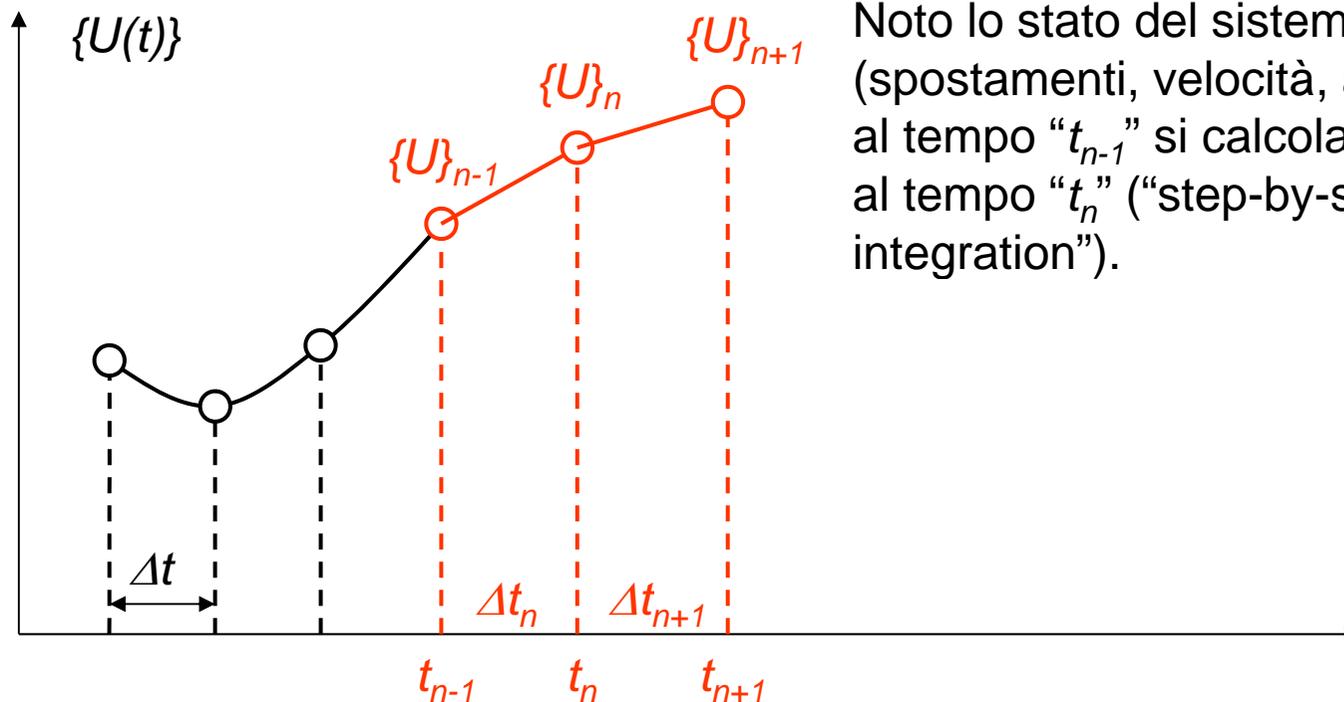
$$\ddot{Y}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\} = f_k(t)$$

Soluzione della equazione relativa ad ogni modo con metodi “passo-passo”
(Es. Runge-Kutta)

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodi di integrazione diretta (MID): nessuna ipotesi preliminare sulla linearità del problema, né sulle matrici $[M]$, $[C]$ e $[K]$

L'intervallo temporale in cui si vuole studiare il comportamento del sistema viene suddiviso in intervalli ("passi") temporali successivi.



Noto lo stato del sistema (spostamenti, velocità, accelerazioni) al tempo " t_{n-1} " si calcola il nuovo stato al tempo " t_n " ("step-by-step integration").

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodi di integrazione diretta (MID): nessuna ipotesi preliminare sulla linearità del problema, né sulle matrici $[M]$, $[C]$ e $[K]$

Tra i metodi di integrazione diretta, rientrano **due tipi principali di algoritmi:**

Algoritmi di tipo implicito: la soluzione al passo temporale $n+1$ è ottenuta tramite la conoscenza della **soluzione al passo n** e delle **condizioni imposte al passo $n+1$** (Es.: metodo di Newmark)

Algoritmi di tipo esplicito: la soluzione al passo temporale $n+1$ è ottenuta tramite la conoscenza della **soluzione e delle condizioni imposte al passo n** (Es.: metodo delle differenze centrali)

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo delle differenze centrali (Esplicito)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ t_n ” (nota)

$$[M]\{\ddot{U}\}_n + [C]\{\dot{U}\}_n + [K]\{U\}_n = \{F(t_n)\}$$

Si assume: $\{\dot{U}\} \approx \frac{1}{2} \left(\{\dot{U}\}_{\Delta t_n} + \{\dot{U}\}_{\Delta t_{n+1}} \right)$

$$\{\dot{U}\} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\Delta t} + \frac{\{U\}_n - \{U\}_{n-1}}{\Delta t} \right) \approx \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\{\ddot{U}\} \approx \frac{\{\dot{U}\}_{\Delta t_{n+1}} - \{\dot{U}\}_{\Delta t_n}}{\Delta t}$$

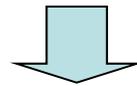
$$\{\ddot{U}\} \approx \frac{\frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\Delta t} - \frac{\{U\}_n - \{U\}_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} \approx \frac{\{U\}_{n+1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2}$$

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

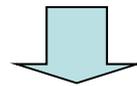
Metodo delle differenze centrali (Esplicito)

Sostituendo: $\{\ddot{U}\} \approx \frac{\{U\}_{n+1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2}$ $\{\dot{U}\} \approx \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1}}{2\Delta t}$

$$[M]\{\ddot{U}\}_n + [C]\{\dot{U}\}_n + [K]\{U\}_n = \{F(t_n)\}$$



$$[M] \frac{\{U\}_{n+1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2} + [C] \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1}}{2\Delta t} + [K]\{U\}_n = \{F(t_n)\}$$



$$\{U\}_{n+1} = \frac{\Delta t^2 (\{F(t_n)\} - [K]\{U\}_n) + 2[M]\{U\}_n - \left([M] - [C] \frac{\Delta t}{2} \right) \{U\}_{n-1}}{[M] + [C] \frac{\Delta t}{2}}$$

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo delle differenze centrali (Esplicito)

$$\{U\}_{n+1} = \frac{\Delta t^2 (\{F(t_n)\} - [K]\{U\}_n) + 2[M]\{U\}_n - \left([M] - [C]\frac{\Delta t}{2} \right) \{U\}_{n-1}}{[M] + [C]\frac{\Delta t}{2}}$$

Se si fa in modo che [M] e [C] siano diagonali il calcolo è immediato.

Stabilità: $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$ **Massima pulsazione propria del modello EF**

L'algoritmo risulta **condizionatamente stabile**, vale a dire che la stabilità dipende dal passo temporale prescelto.

Possibili stime Δt :

$$\Delta t \leq \mu L \left(\frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

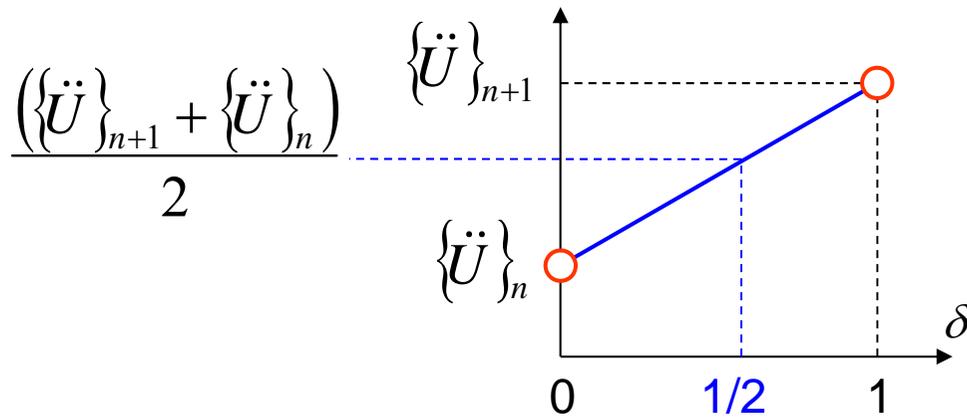
ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di Newmark (Implicito)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ t_{n+1} ” (non nota)

$$[M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\}$$

Si assume: $\{\dot{U}\}_{n+1} \approx \{\dot{U}\}_n + \left((1-\delta)\{\ddot{U}\}_n + \delta\{\ddot{U}\}_{n+1} \right)\Delta t$ $\delta \in \{0,1\}$

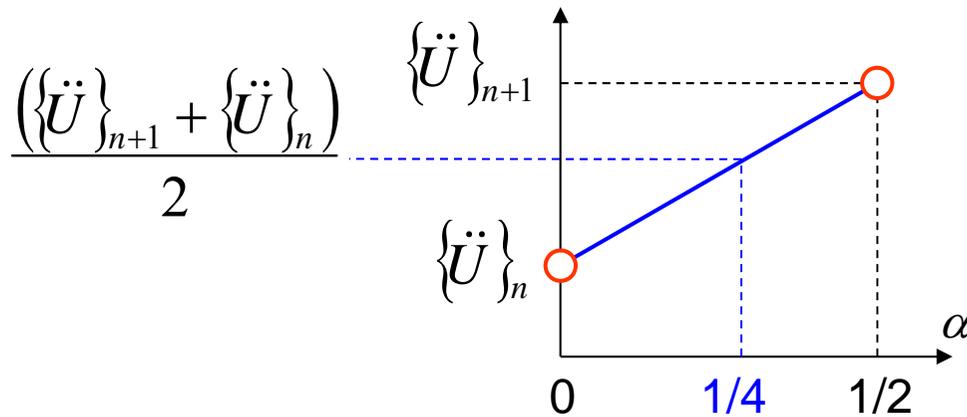


ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di Newmark (Implicito)

Si assume:

$$\{U\}_{n+1} \approx \{U\}_n + \{\dot{U}\}_n \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}_n + \alpha \{\ddot{U}\}_{n+1} \right) \Delta t^2 \quad \alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$$

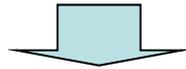


ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di Newmark (Implicito)

Eq. di eq. dinamico al tempo " t_{n+1} " (non nota)

$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\} \\ \{\dot{U}\}_{n+1} \approx \{\dot{U}\}_n + ((1-\delta)\{\ddot{U}\}_n + \delta\{\ddot{U}\}_{n+1})\Delta t \\ \{U\}_{n+1} \approx \{U\}_n + \{\dot{U}\}_n \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}_n + \alpha \{\ddot{U}\}_{n+1} \right) \Delta t^2 \end{array} \right.$$



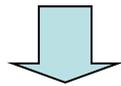
$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\} \\ \{\dot{U}\}_{n+1} \approx \{\dot{U}\}_n + ((1-\delta)\{\ddot{U}\}_n + \delta\{\ddot{U}\}_{n+1})\Delta t \\ \{\ddot{U}\}_{n+1} = \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha\Delta t^2} - \frac{\{\dot{U}\}_n}{\alpha\Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{U}\}_n \end{array} \right.$$

Risolvendo per

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di Newmark (Implicito)

$$\left[\begin{array}{l}
 [M] \{\ddot{U}\}_{n+1} + [C] \{\dot{U}\}_{n+1} + [K] \{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\} \\
 \{\dot{U}\}_{n+1} \approx \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \{\dot{U}\}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \{\ddot{U}\}_n \Delta t + \delta \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t} \\
 \{\ddot{U}\}_{n+1} = \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\{\dot{U}\}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \{\ddot{U}\}_n
 \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
 & [M] \left(\frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\{\dot{U}\}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \{\ddot{U}\}_n \right) + \\
 & + [C] \left(\delta \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t} + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) \{\dot{U}\}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) \{\ddot{U}\}_n \Delta t \right) + \\
 & + [K] \{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\}
 \end{aligned}$$

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di Newmark (Implicito)

$$\{U\}_{n+1} \left(\frac{[M]}{\alpha \Delta t^2} + \frac{\delta [C]}{\alpha \Delta t} + [K] \right) = \{F(t_{n+1})\} +$$
$$+ [M] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{U\}_n + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{U}\}_n + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{U}\}_n \right) +$$
$$+ [C] \left(\frac{\delta}{\alpha \Delta t} \{U\}_n + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{U}\}_n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \{\ddot{U}\}_n \right)$$

$$[\hat{K}] \{U\}_{n+1} = [\hat{F}]$$

Risoluzione:

$$\{U\}_{n+1} = [\hat{K}]^{-1} [\hat{F}]$$

Oss.: se $[M]$, $[C]$ e $[K]$ sono costanti, la matrice $[\hat{K}]$ è anch'essa costante e può essere costruita ed invertita una sola volta.

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Condizioni di stabilità:

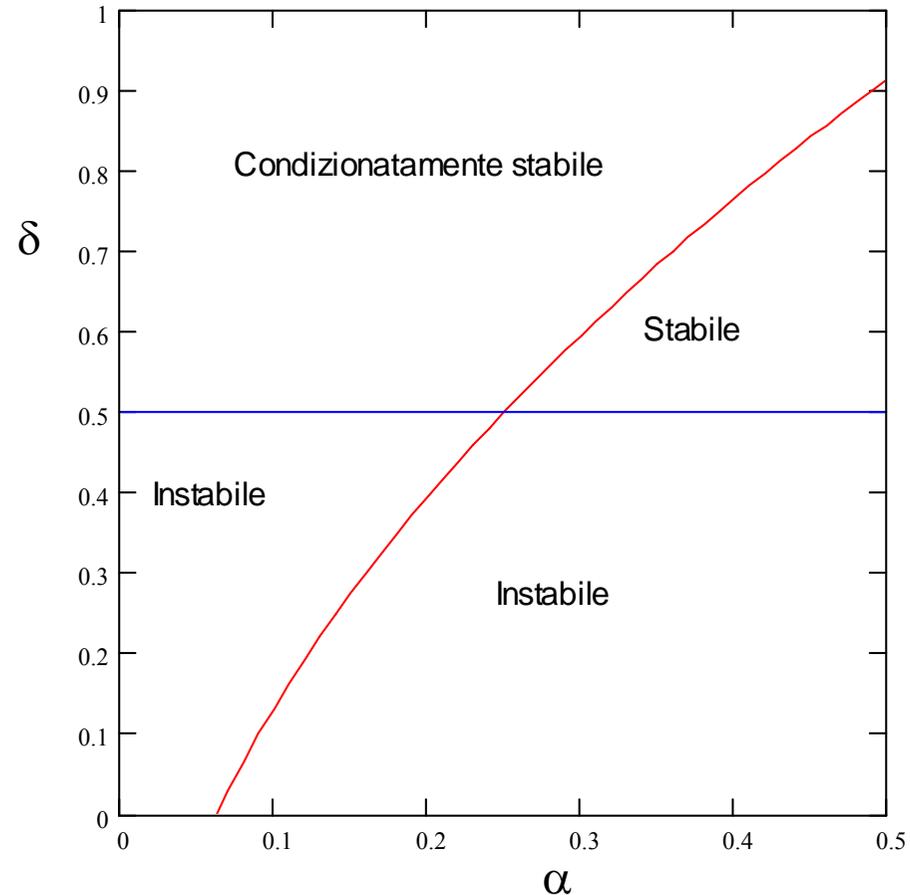
$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

All'interno del campo di stabilità
l'algoritmo risulta
incondizionatamente stabile,
vale a dire stabile
indipendentemente dal passo
temporale prescelto.

Esiste anche una regione in cui
l'algoritmo risulta
condizionatamente stabile, con
passo limite:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\Omega \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2 - 4\alpha}}$$



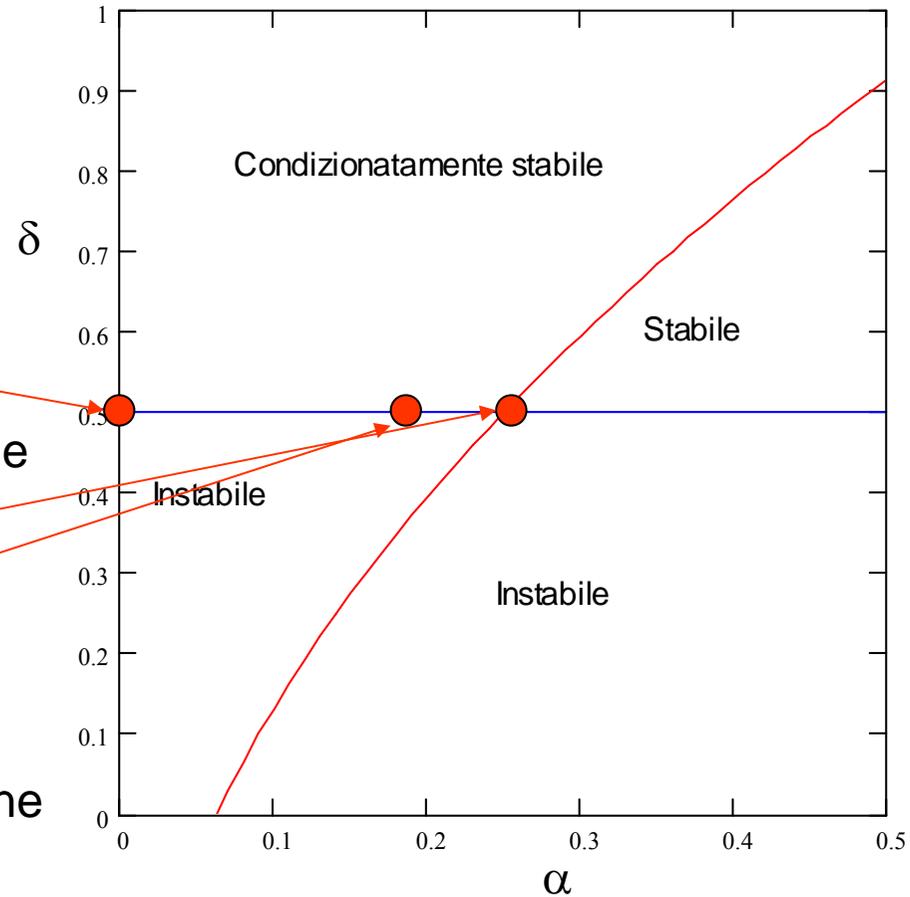
ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Al variare di α e δ si ottengono altri algoritmi classici di soluzione:

$\alpha = 0$
 $\delta = \frac{1}{2}$ Metodo delle differenze centrali

$\alpha = \frac{1}{4}$
 $\delta = \frac{1}{2}$ Metodo dell'accelerazione media

$\alpha = \frac{1}{6}$
 $\delta = \frac{1}{2}$ Metodo dell'accelerazione lineare



ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

In ANSYS i due parametri α e δ sono generalmente espressi in funzione di un terzo parametro γ (TINTP):

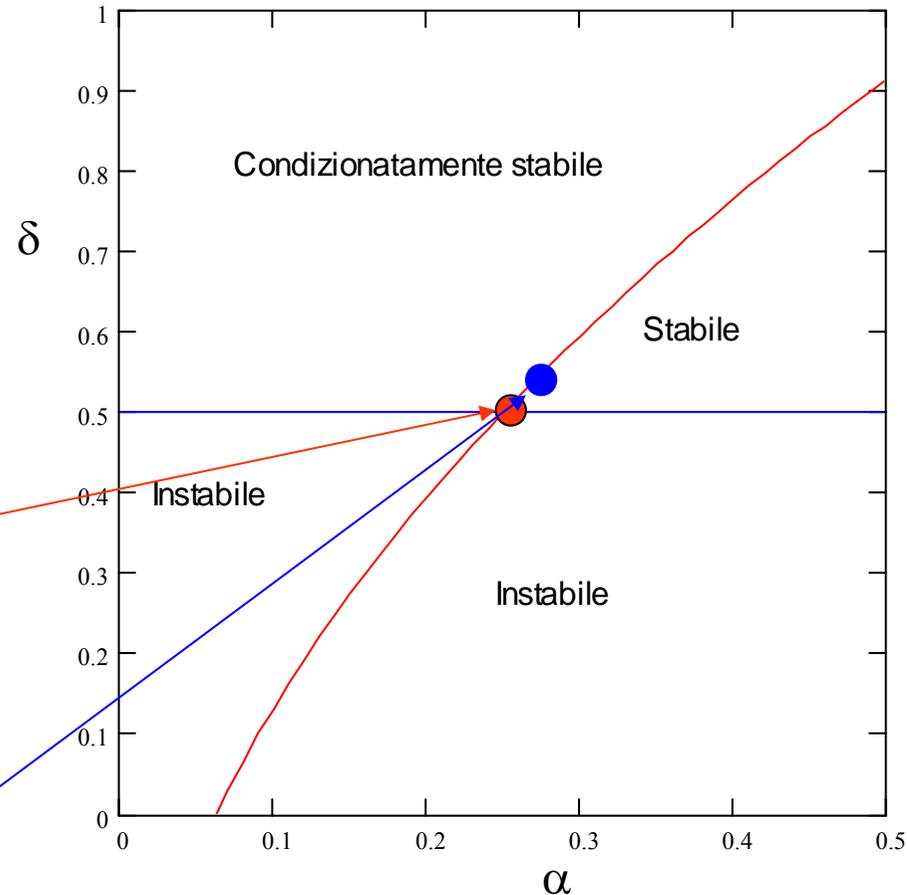
$$\alpha = \frac{1}{4}(1 + \gamma)^2$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \delta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

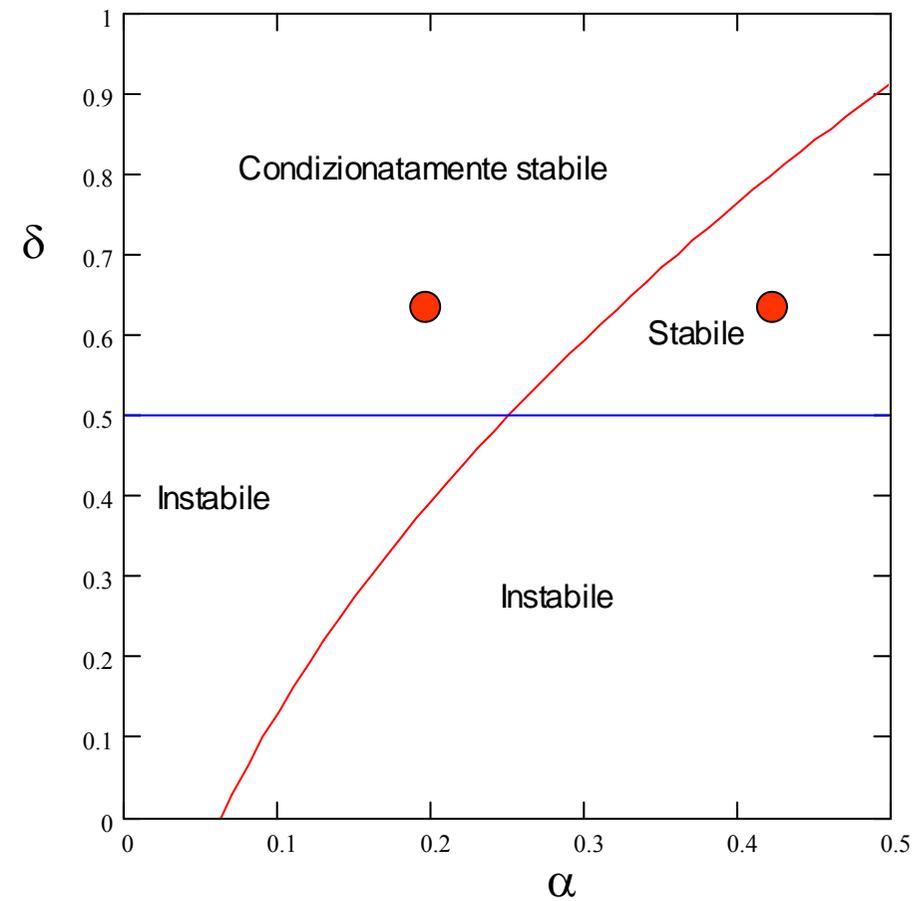
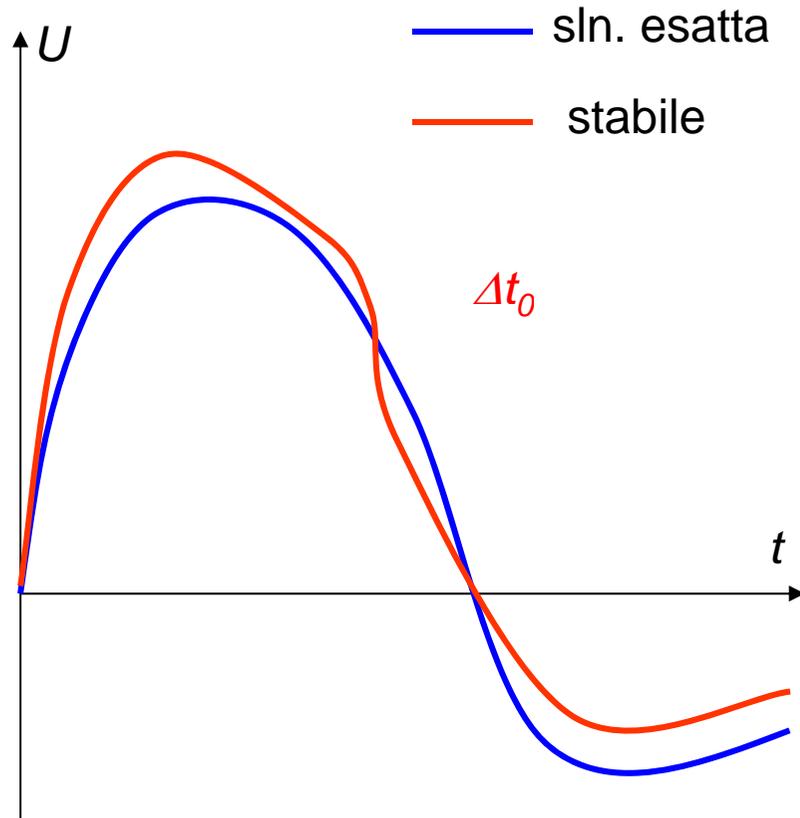
Per default

$$\gamma = 0.005 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.2525 \\ \delta = 0.505 \end{cases}$$



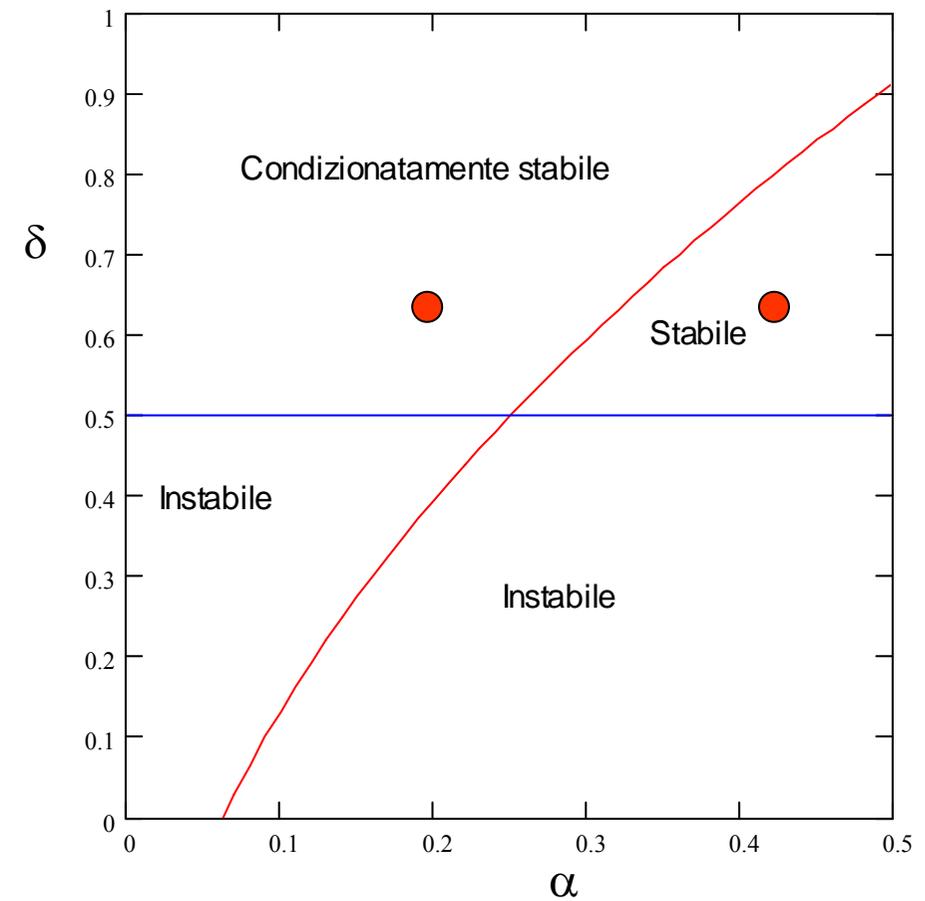
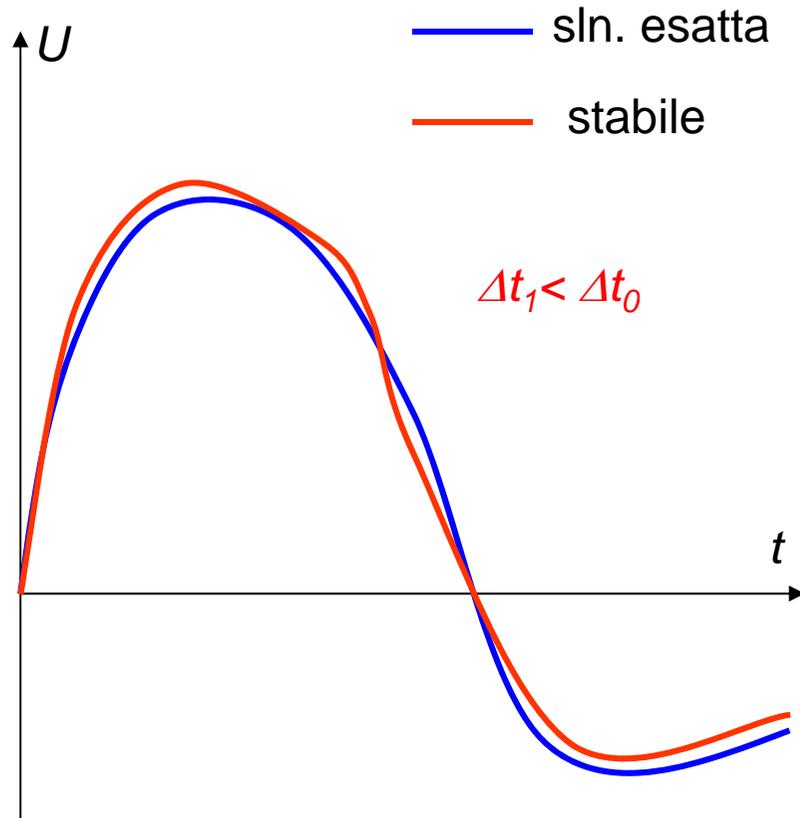
ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di Δt .



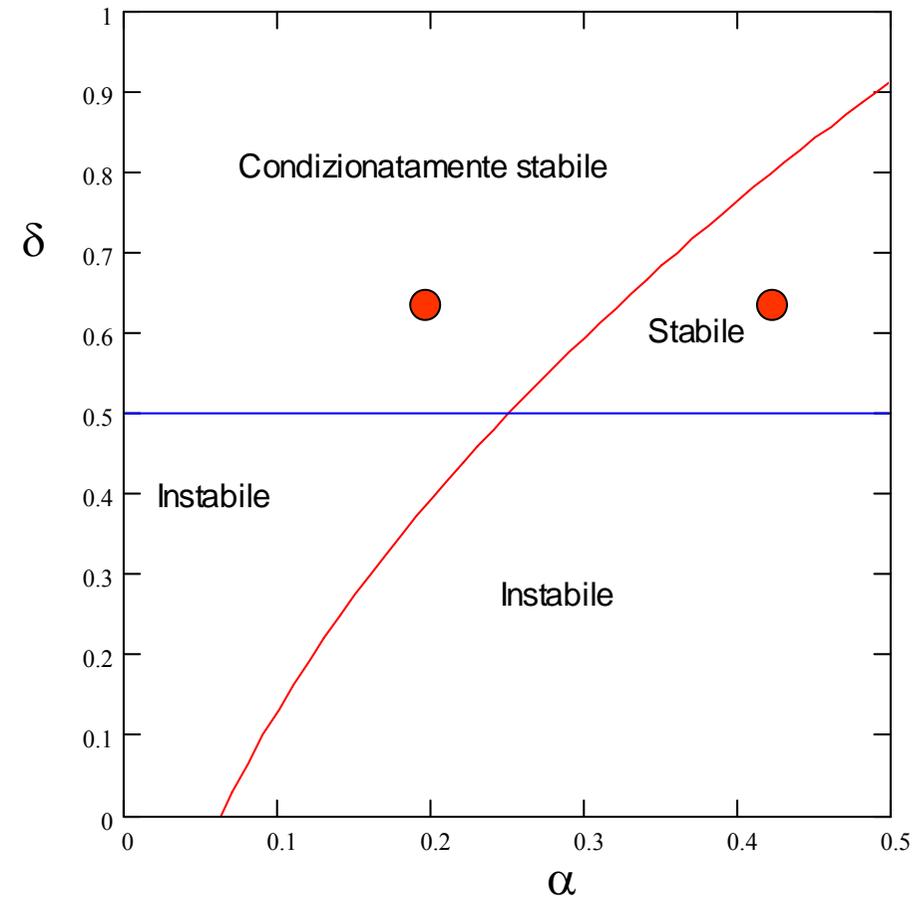
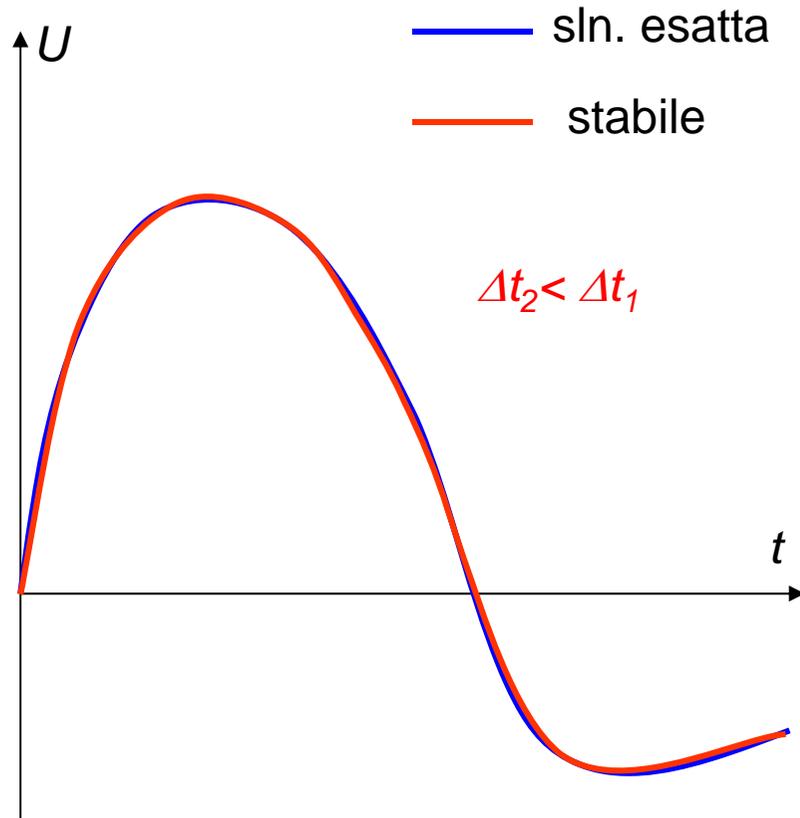
ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di Δt .

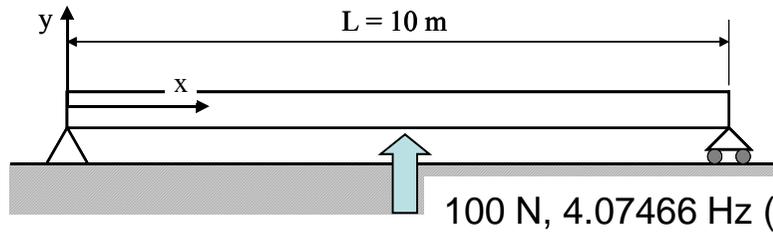


ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di Δt .

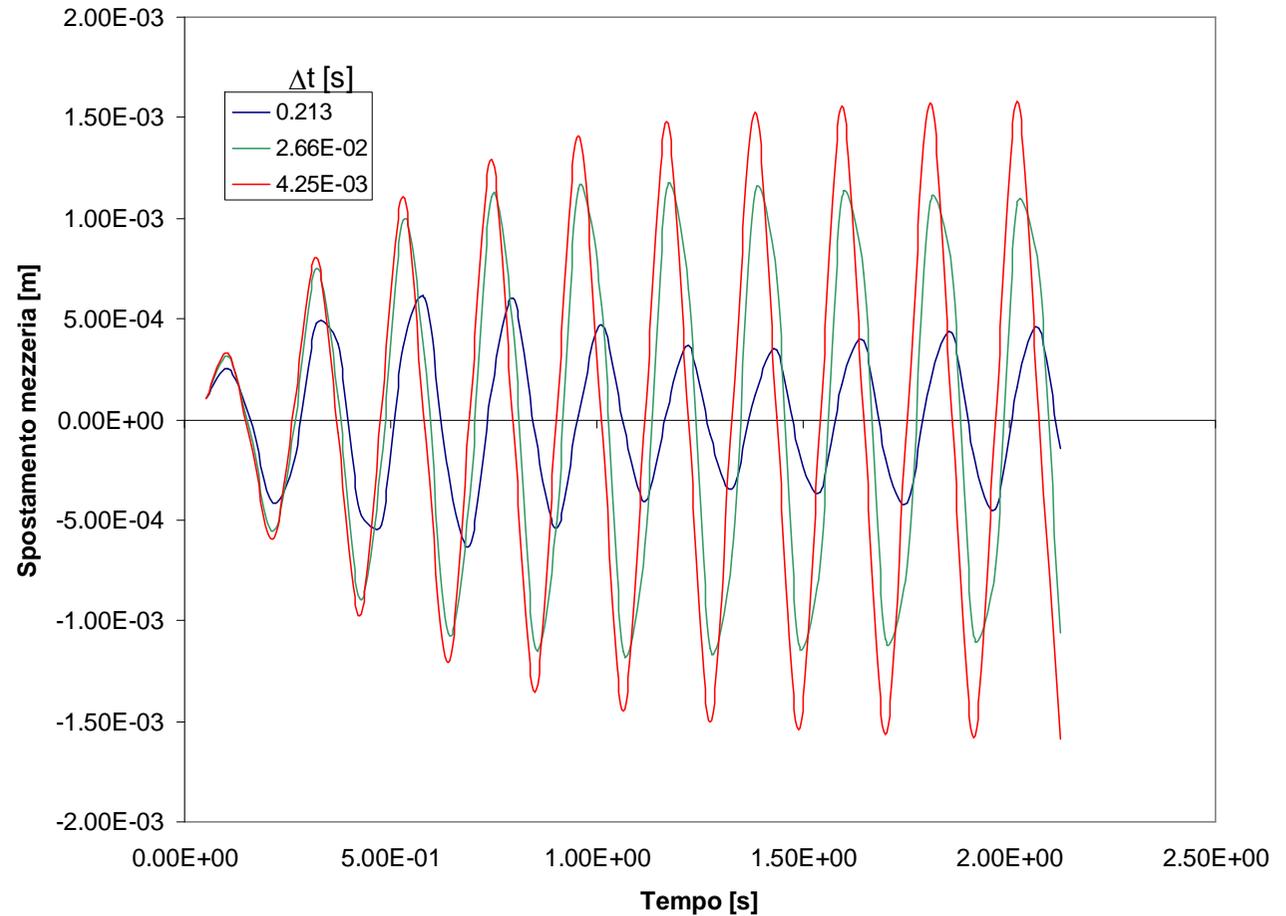
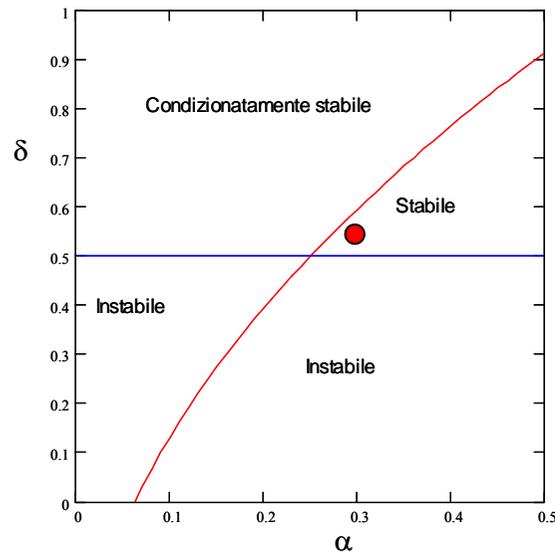


ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID



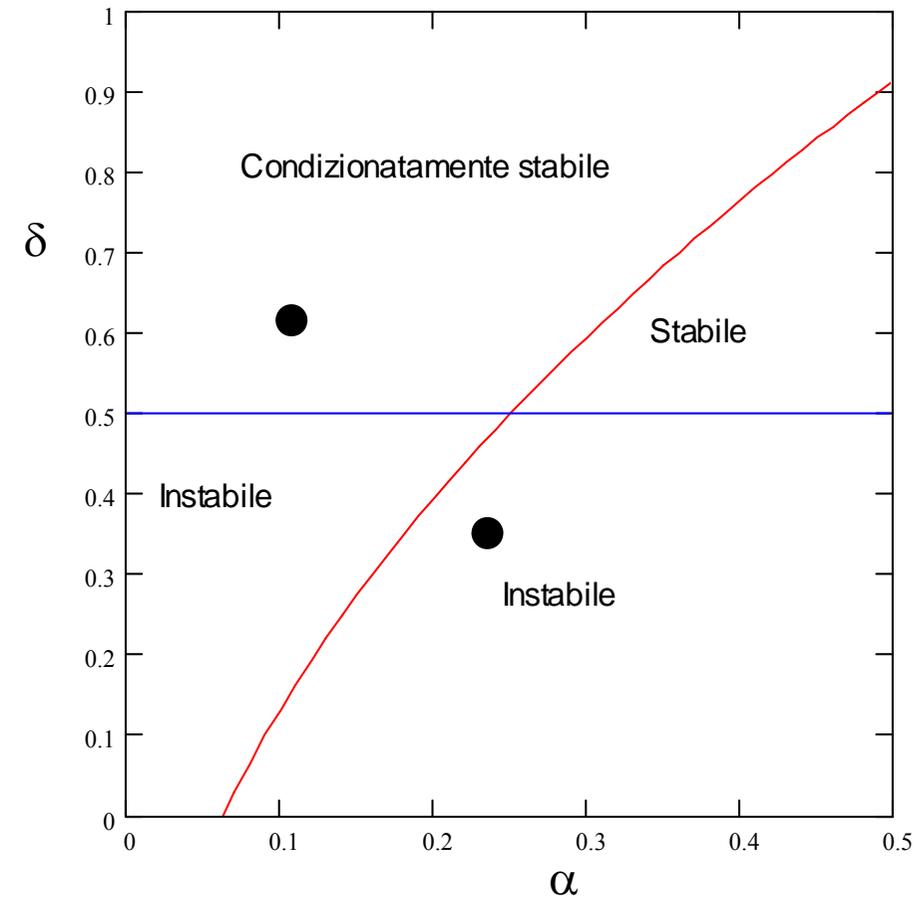
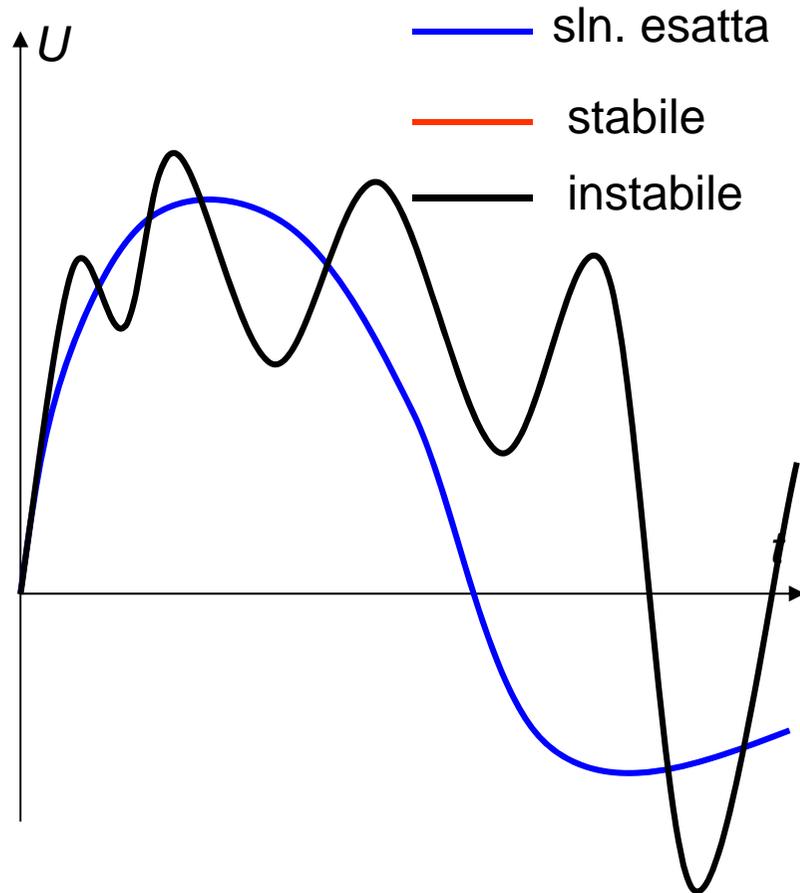
Effetto del passo di integrazione in condizioni di stabilità incondizionata

$$\alpha = 0.2525$$
$$\delta = 0.5050$$

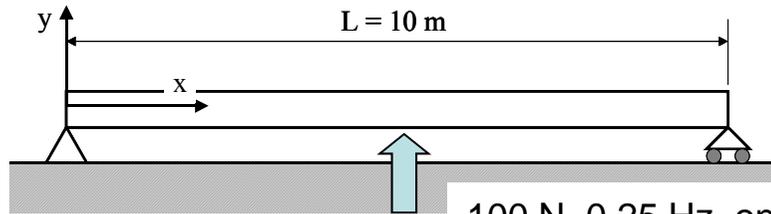


ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Al di fuori del campo di stabilità, la soluzione mostra una rapida divergenza (in genere con forti oscillazioni) da quella esatta, senza convergere su quest'ultima al tendere a zero di Δt .



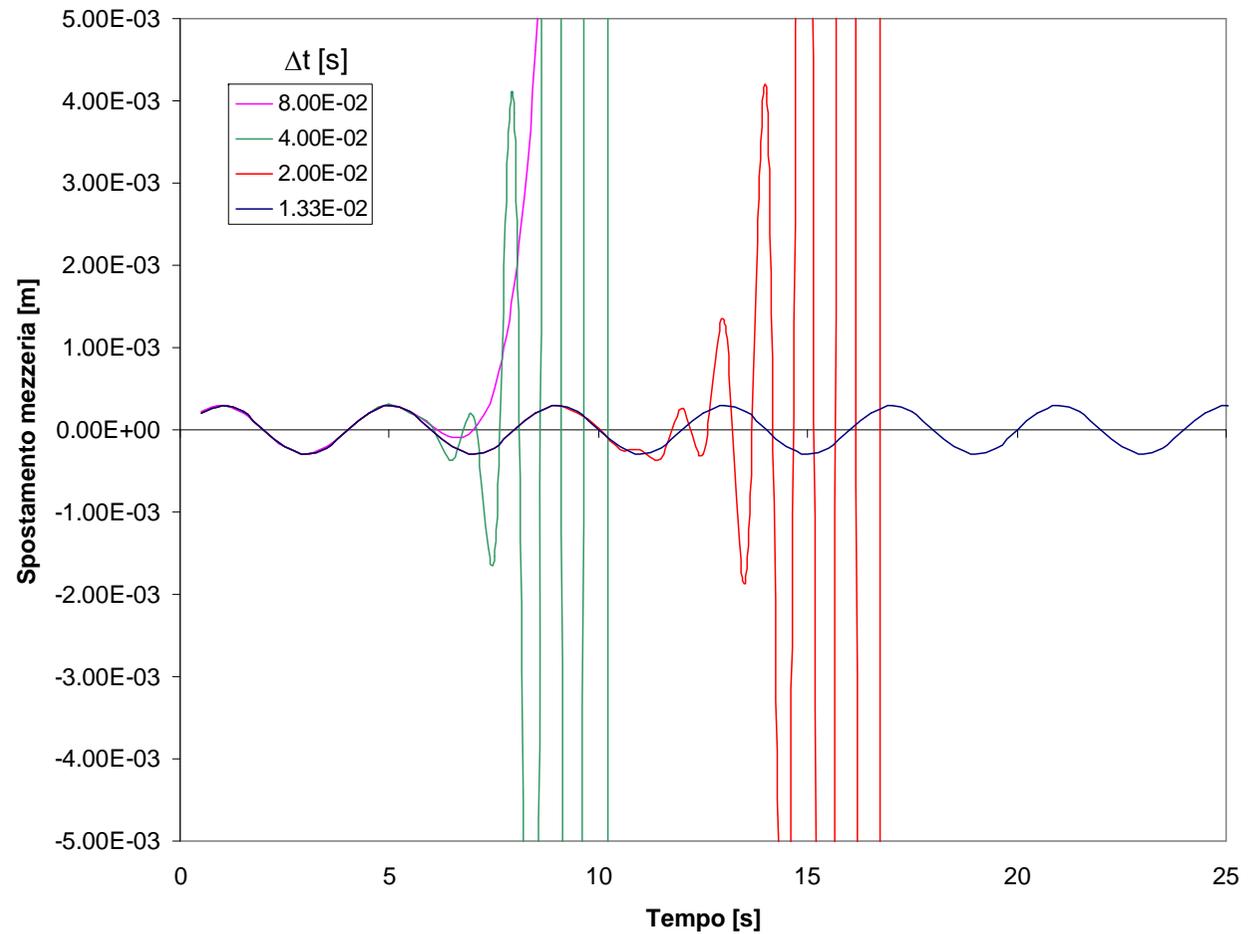
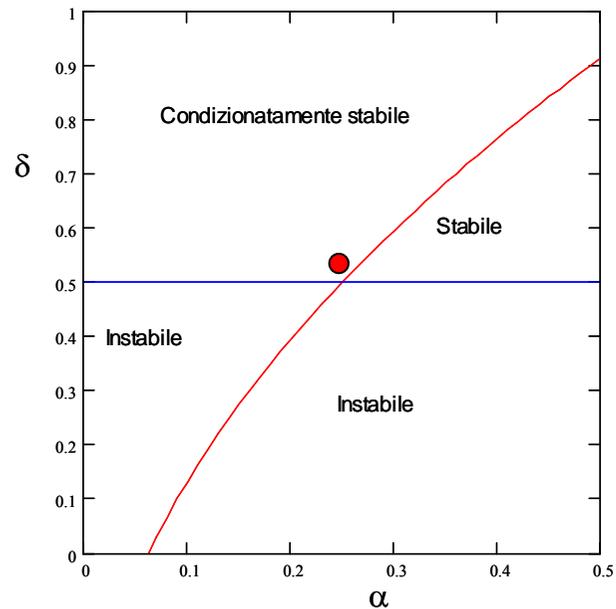
ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID



Effetto del passo di integrazione in condizioni di stabilità condizionata

100 N, 0.25 Hz, onda triangolare

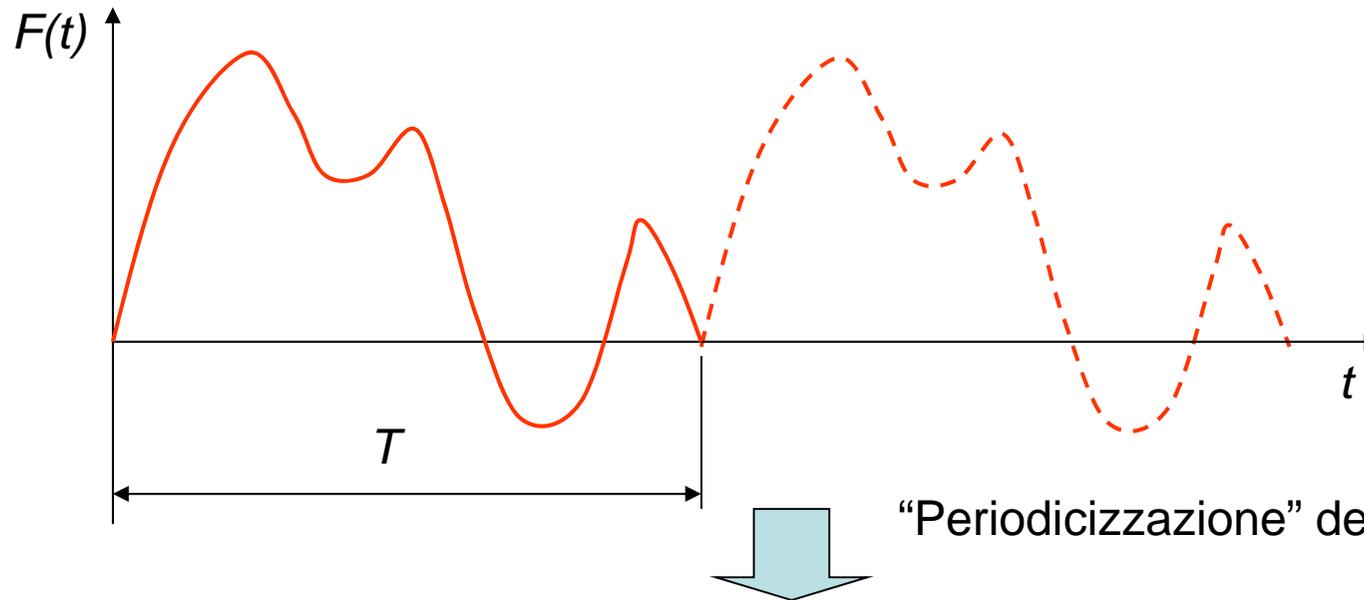
$$\alpha = 0.25$$
$$\delta = 0.51$$



ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Scelta del passo di integrazione temporale.

Procedura per valori **indicativi** frequenze in gioco



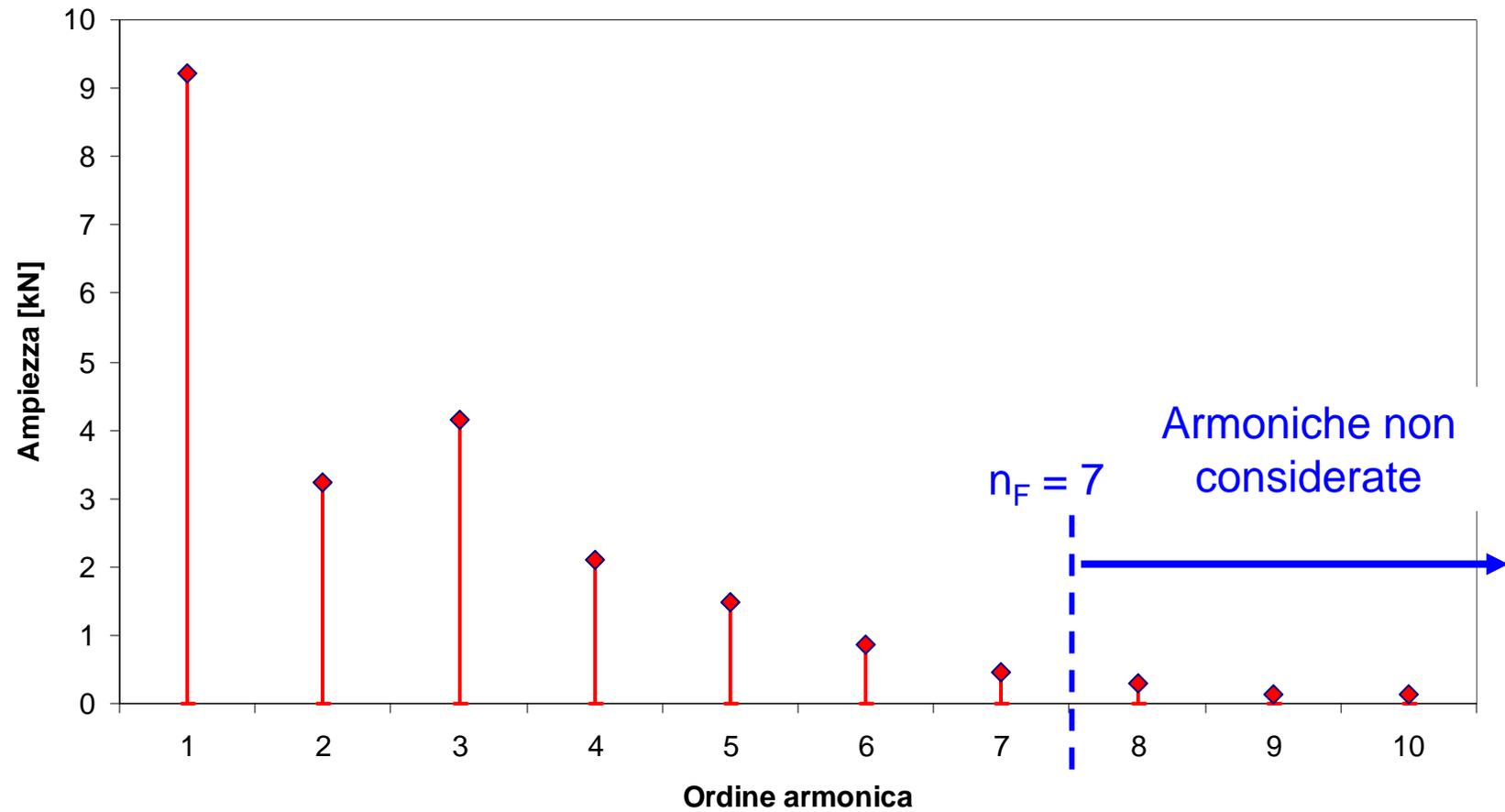
"Periodicizzazione" della storia di carico

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Andamento tipico delle ampiezze



ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di sovrapposizione modale:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \quad \omega_{n_M} \gg n_F \Omega_0$$

Tutti i metodi di soluzione:

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{n_P n_F \Omega_0} \quad n_P > 20 \div 30$$

In ogni caso, a partire da questa prima stima, è generalmente necessario uno studio di convergenza su n_P e Δt .

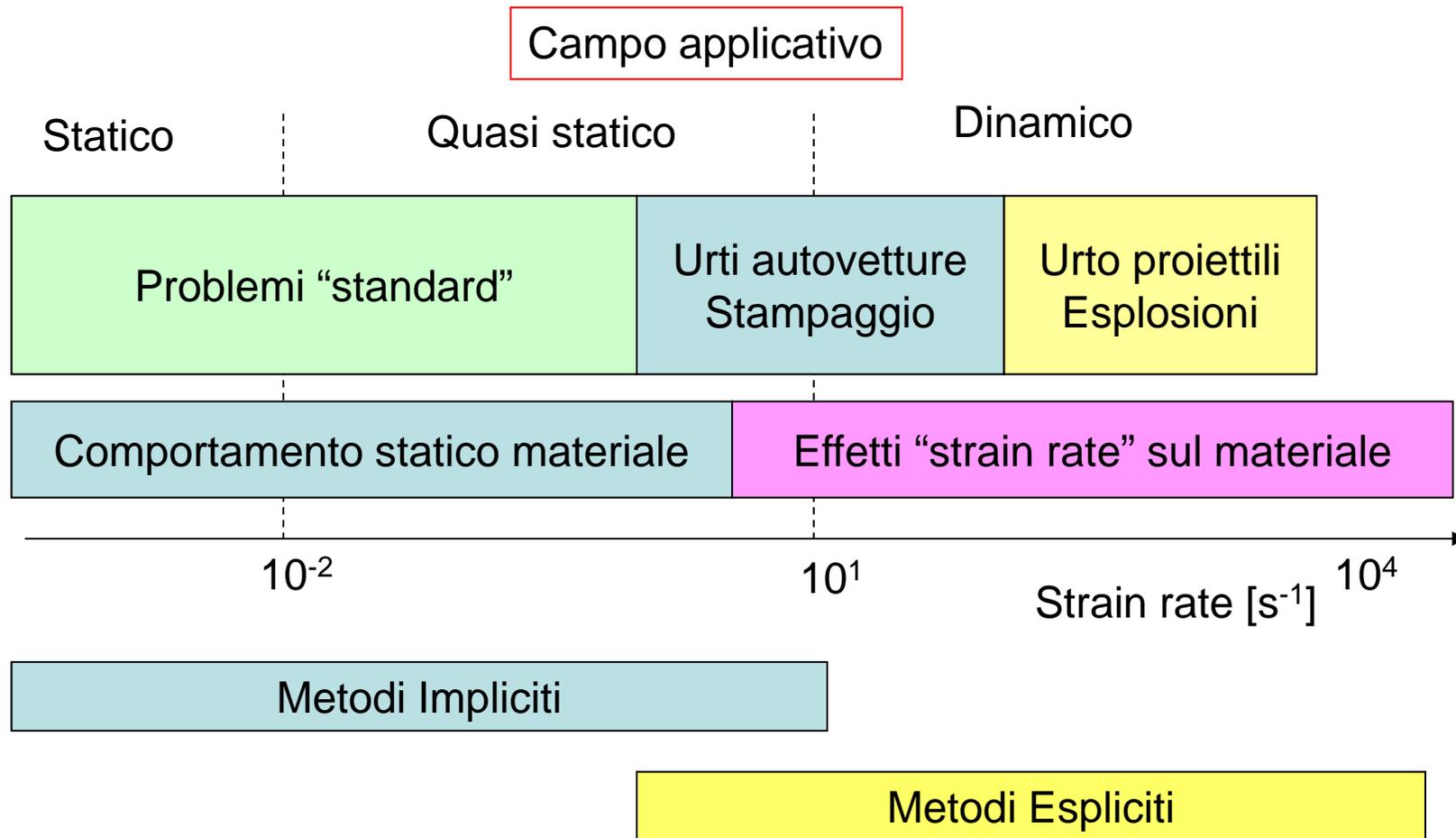
Situazioni che possono richiedere valori particolarmente ridotti di Δt :

- fenomeni di contatto
- propagazione di onde elastiche (dimensioni elementi $< 1/20$ lungh. d'onda)
- non linearità geometriche, "stress stiffening"

INTEGRAZIONE RISPETTO AL TEMPO/2

Tipo di problema	Algoritmi espliciti	Algoritmi impliciti
Generale	Nessuna inversione di matrici; basso tempo di calcolo per step	Inversione di matrici ad ogni step; elevato tempo di calcolo per step
Campo lineare	Stabilità condizionata; necessari passi temporali molto piccoli	Possibile stabilità incondizionata; grandi passi temporali
Campo non lineare	Soluzione diretta ad ogni passo	Soluzione tramite tecniche iterative
	Necessari passi temporali molto piccoli per la stabilità	Necessari piccoli passi temporali per la convergenza
	Verifiche di convergenza non richieste	Convergenza non sempre assicurata per forti non linearità

INTEGRAZIONE RISPETTO AL TEMPO/3



Possibili anche approcci misti Impliciti+Espliciti