SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO PROPORZIONALE - AUTOVETTORI

Combinando

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0 \qquad [C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda\alpha[M]+\lambda\beta[K]+[K]\right)\{Z\}=0$$

Raccogliendo a fattor comune

$$\left([M]\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)+[K](1+\lambda\beta)\right)\{Z\}=0$$

Moltiplicando per $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1}[K]\{Z\}=-\frac{\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)}{(1+\lambda\beta)}\{Z\}$$

Il problema è identico a quello del sistema non smorzato

$$[M]^{-1}[K]\{Z_j\}=\omega_j^2\{Z_j\}$$

Per cui ha gli stessi autovalori ed autovettori:

$$-\frac{\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)}{(1+\lambda\beta)}=\omega_j^2$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO PROPORZIONALE - AUTOVETTORI

$$-\frac{\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)}{\left(1+\lambda\beta\right)}=\omega_j^2$$

$$-\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)=\omega_j^2\left(1+\lambda\beta\right)$$

$$\lambda^2+\lambda\alpha+\omega_j^2\left(1+\lambda\beta\right)=0$$

$$\lambda^2+\lambda\left(\alpha+\beta\omega_j^2\right)+\omega_j^2=0$$

$$\lambda=\frac{-\left(\alpha+\beta\omega_j^2\right)\pm\sqrt{\left(\alpha+\beta\omega_j^2\right)^2-4\omega_j^2}}{2}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALE

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$[C_d] = [Y]^T [C][Y]$$

Sono trascurabili, si può assumere per essa una forma diagonale, nella quale lo smorzamento di ogni nodo viene generalmente ottenuto direttamente per via sperimentale

$$[C_d] \approx \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n \end{bmatrix} \qquad n \leq N$$

Spesso si possono determinare solo i primi n modi

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
REQUISITI SULLO SMORZAMENTO PER DIAGONALIZZAZIONE

Se lo smorzamento è piccolo, si può ritenere che gli autovalori e gli autovettori differiscano poco da quelli del sistema non smorzato:

$$\lambda_i \approx i\omega_i + \Delta\lambda_i$$

$$\{Z_i\} \approx \{Y_i\} + \{\Delta Z_i\}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\left\{\left(-\omega_i^2 + 2i\omega_i\Delta\lambda_i + \Delta\lambda_i^2\right)[M] + \left(i\omega_i + \Delta\lambda_i\right)[C] + [K]\right\}\left(\{Y_i\} + \{\Delta Z_i\}\right) = 0$$

$$\cancel{-\omega_i^2[M]\{Y_i\}} - \omega_i^2[M]\{\Delta Z_i\} + 2i\omega_i\Delta\lambda_i[M]\{Y_i\} + 2i\omega_i\Delta\lambda_i[M]\{\Delta Z_i\} +$$

$$+\cancel{\Delta\lambda_i^2[M]\{Y_i\}} + \cancel{\Delta\lambda_i^2[M]\{\Delta Z_i\}} + i\omega_i[C]\{Y_i\} + \cancel{i\omega_i[C]\{\Delta Z_i\}} + \cancel{\Delta\lambda_i[C]\{Y_i\}} +$$

$$\cancel{+\Delta\lambda_i[C]\{\Delta Z_i\}} + \cancel{[K]\{Y_i\}} + [K]\{\Delta Z_i\} = 0$$

Trascurando i termini di secondo ordine i prodotti C$\Delta\lambda$ e CΔZ

e tenendo conto che: $\left([K] - \omega_i^2[M]\right)\{Y_i\} = 0$

si ottiene:

$$\left([K] - \omega_i^2[M]\right)\{\Delta Z_i\} + i\omega_i\left(2\Delta\lambda_i[M] + [C]\right)\{Y_i\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Pre-moltiplicando per la trasposta della forma modale:

$$\{Y_i\}^T\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{\Delta Z_i\}+i\omega_i\{Y_i\}^T\left(2\Delta\lambda_i[M]+[C]\right)\{Y_i\}=0$$

$$\{Y_i\}^T\left(2\Delta\lambda_i[M]+[C]\right)\{Y_i\}=0$$

Da cui si ottiene:

$$\Delta\lambda_i=-\frac{\{Y_i\}^T[C]\{Y_i\}}{2\{Y_i\}^T[M]\{Y_i\}}=-\frac{d_{ii}}{2}$$

$$\lambda_i=-\frac{d_{ii}}{2}+i\omega_i$$

Termine reale negativo, che produce una riduzione esponenziale nel tempo dell’ampiezza delle oscillazioni

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Espandendo ΔZ in termini delle forme modali del sistema non smorzato:

$$\Delta Z_i = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{n} \alpha_s \{Y_s\}$$

Sostituendo e pre-moltiplicando per la trasposta della forma modale “j”:

$$\{Y_j\}^T \left([K]-\omega_i^2[M]\right)\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \{Y_s\} + i\omega_i \{Y_j\}^T \left(2\Delta\lambda_i [M] + [C]\right)\{Y_i\} = 0$$

Tenendo conto della ortogonalità e del fatto che:

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_i\} = 0$$

Si ottiene:

$$\{Y_j\}^T \left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_j\}\alpha_j + i\omega_i \{Y_j\}^T [C]\{Y_i\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\{Y_j\}^T\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_j\}\alpha_j + i\omega_i\{Y_j\}^T[C]\{Y_i\}=0$$

Ricordando che::

$$\{Y_r\}^T[K]\{Y_r\}=\omega_r^2$$

$$\{Y_r\}^T[M]\{Y_r\}=1$$

Si ottiene

$$\left(\omega_j^2-\omega_i^2\right)\alpha_j + i\omega_i d_{ji}=0$$

Da cui:

$$\{\Delta Z_i\}\approx\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{i\omega_i c_{ji,d}}{\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)}\{Y_j\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\{\Delta Z_i\} \approx \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{i\omega_i c_{ji,d}}{\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)}\{Y_j\}$$

Dividendo per il quadrato di ω_i ed osservando che:

$$\{Y_i\}^T[M]\{Y_i\} = m_i = 1$$

$$\{Y_i\}^T[K]\{Y_i\} = k_i = \omega_i^2$$

$$c_{cr,i} = 2\sqrt{k_i m_i} = 2\omega_i$$

Si ricava:

$$\{\Delta Z_i\} \approx \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{i2c_{ji,d}}{c_{cr,i}\left(1-\dfrac{\omega_j^2}{\omega_i^2}\right)}\{Y_j\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\{\Delta Z_i\} \approx \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{i2c_{ji,d}}{c_{cr,i}\left(1-\dfrac{\omega_j^2}{\omega_i^2}\right)}\{Y_j\}$$

Ipotizzando:

- errore complessivo di circa il 10% sulla forma modale
- rapporti di frequenza pari a 2, 3, 4, 5…
- valori dei termini di smorzamento fuori diagonale tutti uguali

Si ottiene:

$$0.1 \geq 2\frac{c_{ji,d}}{c_{cr,i}}\left(\frac{1}{(1-2^2)}+\frac{1}{(1-3^2)}+\frac{1}{(1-4^2)}+\ldots\right)$$

Da cui:

$$\frac{c_{ji,d}}{c_{cr,i}} \leq\approx 0.03$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
METODO DELLO SPAZIO DEGLI STATI

Qualora la matrice di smorzamento non sia diagonalizzabile,è necessario procedere alla soluzione diretta del problema agli autovalori in campo complesso. Nel seguito vedremo le principali caratteristiche della tecnica di soluzione detta di **Analisi nello Spazio degli Stati (State Space Analysis")**

Vettore della variabili di stato (2N componenti):

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}$$

Si aggiungono alle N equazioni di equilibrio, N ulteriori equazioni sempre verificate:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$
$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
METODO DELLO SPAZIO DEGLI STATI

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

$$[M]\{\dot{x}\}-[M]\{\dot{x}\}=0$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}=0$$

Posto:

$$[A]=\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$[A]\{\dot{u}\}+[B]\{u\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Assumendo una soluzione del tipo:

$$\{x\} = \{X\}e^{st}$$

$$\{\dot{x}\} = s\{X\}e^{st}$$

Si ottiene:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{X\}e^{st} \\ s\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ s\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{U\}e^{st}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{X\}e^{st} \\ s^2\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ s^2\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{U\}e^{st}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Sostituendo:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{X\}e^{st} \\ s\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ s\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{U\}e^{st}$$

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{X\}e^{st} \\ s^2\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ s^2\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{U\}e^{st}$$

Si ottiene:

$$s[A]\{U\}e^{st} + [\mathrm{B}]\{U\}e^{st} = 0$$

Ovvero:

$$(s[A] + [\mathrm{B}])\{U\} = 0$$

Problema agli autovalori in forma generalizzata

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Problema agli autovalori in forma generalizzata

$$\left(s[A]+[\mathrm{B}]\right)\{U\}=0$$

N coppie autovalori complessi coniugati + N coppie autovettori complessi coniugati

$$s_i\,,\quad \{Z_i\} \qquad\qquad \bar{s}_i\,,\quad \{\bar{Z}_i\}$$

Autovalore + autovettore

Coniugati

Autovettori nello spazio della variabili di stato:

$$\{W_i\}=\begin{Bmatrix}\{Z_i\}\\ s_i\{Z_i\}\end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{W}_i\}=\begin{Bmatrix}\{\bar{Z}_i\}\\ \bar{s}_i\{\bar{Z}_i\}\end{Bmatrix}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Autovettori nello spazio della variabili di stato:

$$\{W_i\} = \begin{Bmatrix} \{Z_i\} \\ s_i \{Z_i\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{W}_i\} = \begin{Bmatrix} \{\overline{Z}_i\} \\ \overline{s}_i \{\overline{Z}_i\} \end{Bmatrix}$$

Matrice modale complessa 2Nx2N

$$[W] = [\{W_1\} \quad \{W_2\} \quad - \quad -]$$

Vettore variabili di stato come combinazione lineare autovettori complessi

$$\{u(t)\} = [W]\{q(t)\}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = [W]\{\dot{q}(t)\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Sostituendo nel sistema originale:

$$\{u(t)\} = [W]\{q(t)\}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = [W]\{\dot{q}(t)\}$$

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$$

Si ottiene:

$$[A][W]\{\dot{q}\} + [\mathrm{B}][W]\{q\} = 0$$

Moltiplicando per la trasposta della matrice modale complessa

$$[W]^T [A][W]\{\dot{q}\} + [W]^T [\mathrm{B}][W]\{q\} = 0$$

Tenendo conto della ortogonalità, che vale anche per queste forme modali:

$$diag[a]\{\dot{q}\} + diag[b]\{q\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

$$diag[a]\{\dot{q}\} + diag[b]\{q\} = 0$$

Sistema di 2N equazioni disaccoppiate del tipo:

$$a_r \dot{q}_r + b_r q = 0$$

Soluzione di ciascuna di esse

$$q_r(t) = Q_r \, e^{s_r t}$$

Soluzione complessiva

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{W_r\} Q_r e^{s_r t}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
EQUAZIONI DISACCOPPIABILI

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\}=[Y]\{q_i\}$$

pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, qualora la matrice C sia diagonalizzabile, si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \xi_1\omega_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \xi_2\omega_2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n\omega_n \end{bmatrix}\{\dot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}\{q_i\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i q_i+\omega_i^2 q_i=\{Y_i\}^T\{F(t)\}=f_i$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
EQUAZIONI DISACCOPPIABILI

Nel caso la forzante esterna abbia andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j q_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$\boxed{Q_j = \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right) + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j}}$$