Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini e Leonardo Bertini

Lezione 1:

Probabilità: fondamenti

Progettazione probabilistica:

Considerazione delle incertezze

- nelle proprietà dei materiali
- nelle caratteristiche geometriche
- nelle condizioni di carico
- nei modelli predittivi

Definizioni più razionali dei margini di sicurezza

Affidabilità strutturale:

Analisi statistico-probabilistica dei fenomeni di guasto
Affidabilità di sistemi
Disponibilità e manutenibilità

Basi di teoria della probabilità: richiami di combinatoria

Principio del calcolo combinatorio

una procedura composta, realizzata da un insieme ordinato di m procedure ognuna delle quali può essere realizzata in n_1, n_2, n_3, … n_m modi diversi, ha il seguente numero di realizzazioni:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_m = \prod_{k=1}^{m} n_k$$

Esempio 1.1

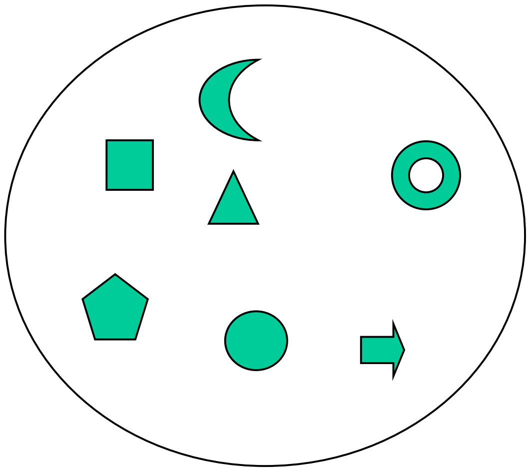
Quante targhe europee distinte si possono realizzare?

A A 0 0 0 A A

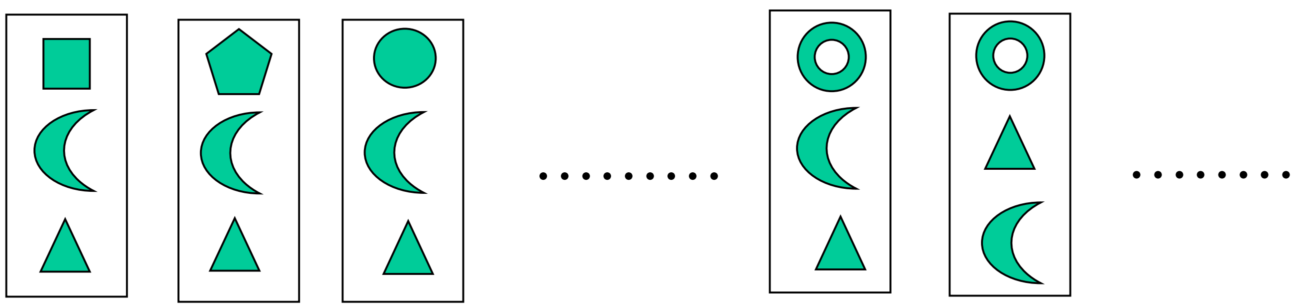
26 26 10 10 10 26 26

$$26^4 \cdot 10^3 \cong 457 \cdot 10^6$$

Disposizioni e permutazioni



Dato un insieme di 7 oggetti distinti:
Quanti insiemi ordinati distinti di 3 oggetti si possono fare?



Le terne differiscono per il contenuto ma anche per l'ordine

Definizione: **disposizioni** di 7 oggetti presi 3 a 3 $D(7,3)$

In generale: disposizioni di n oggetti presi k a k $D(n,k)$

Si può pensare a una realizzazione tramite procedura di estrazione senza reinbussolamento (come nel gioco del lotto):

1) Estraggo il primo: $n_1 = 7$
2) Estraggo il secondo: $n_2 = 6$
3) Estraggo il terzo: $n_3 = 5$

$$D(7,3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Generalizzando:

$$D(n,k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fattori}} \qquad \boxed{D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Esercizio 1.1

Quante parole di 4 lettere si possono scrivere usando vocali distinte?

Caso particolare: $k = n$

In quanti modi distinti si possono elencare *n* oggetti diversi?

$$D(n,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

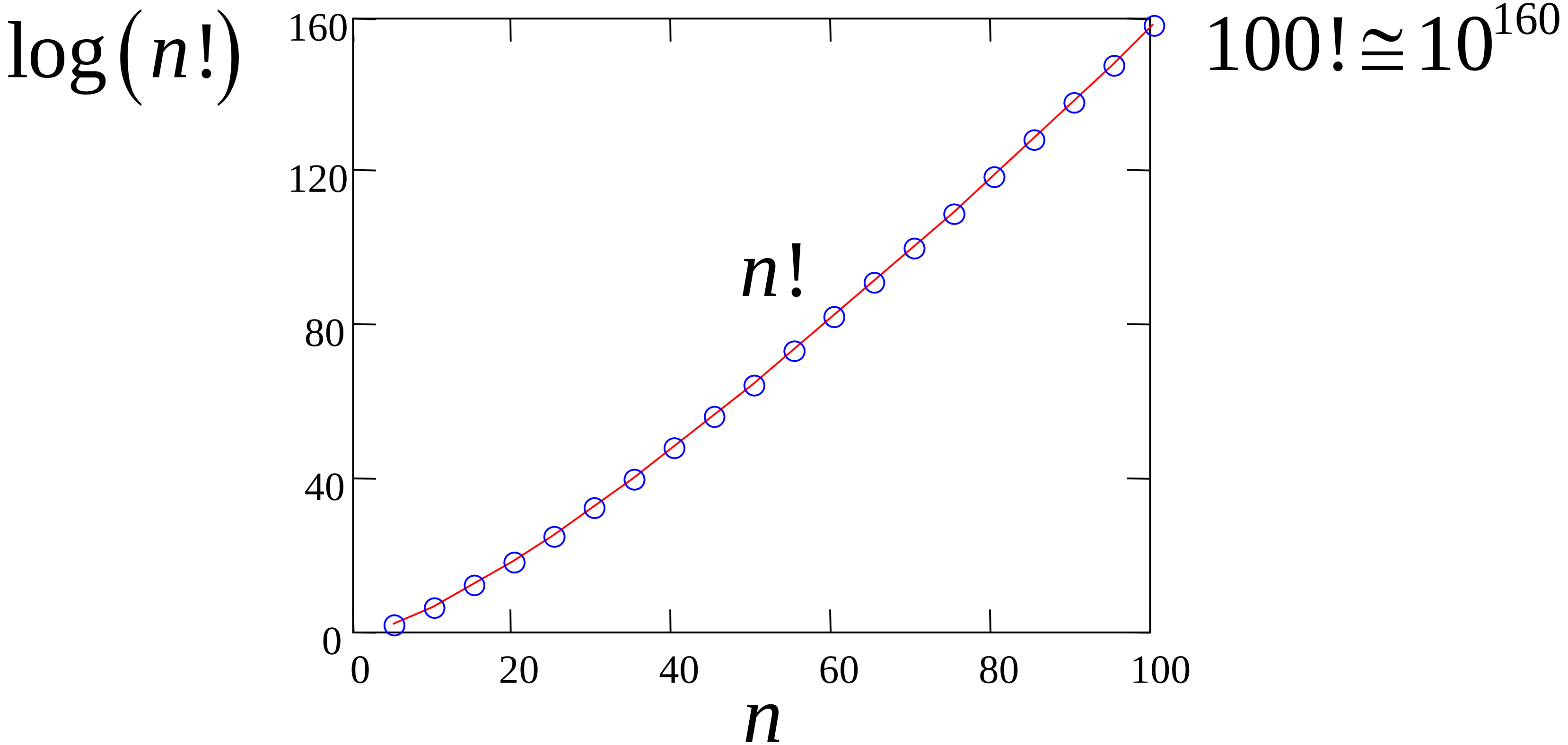
Permutazioni di *n* oggetti distinti

$$D(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione comoda:

$$0! = 1$$

Andamento del fattoriale:

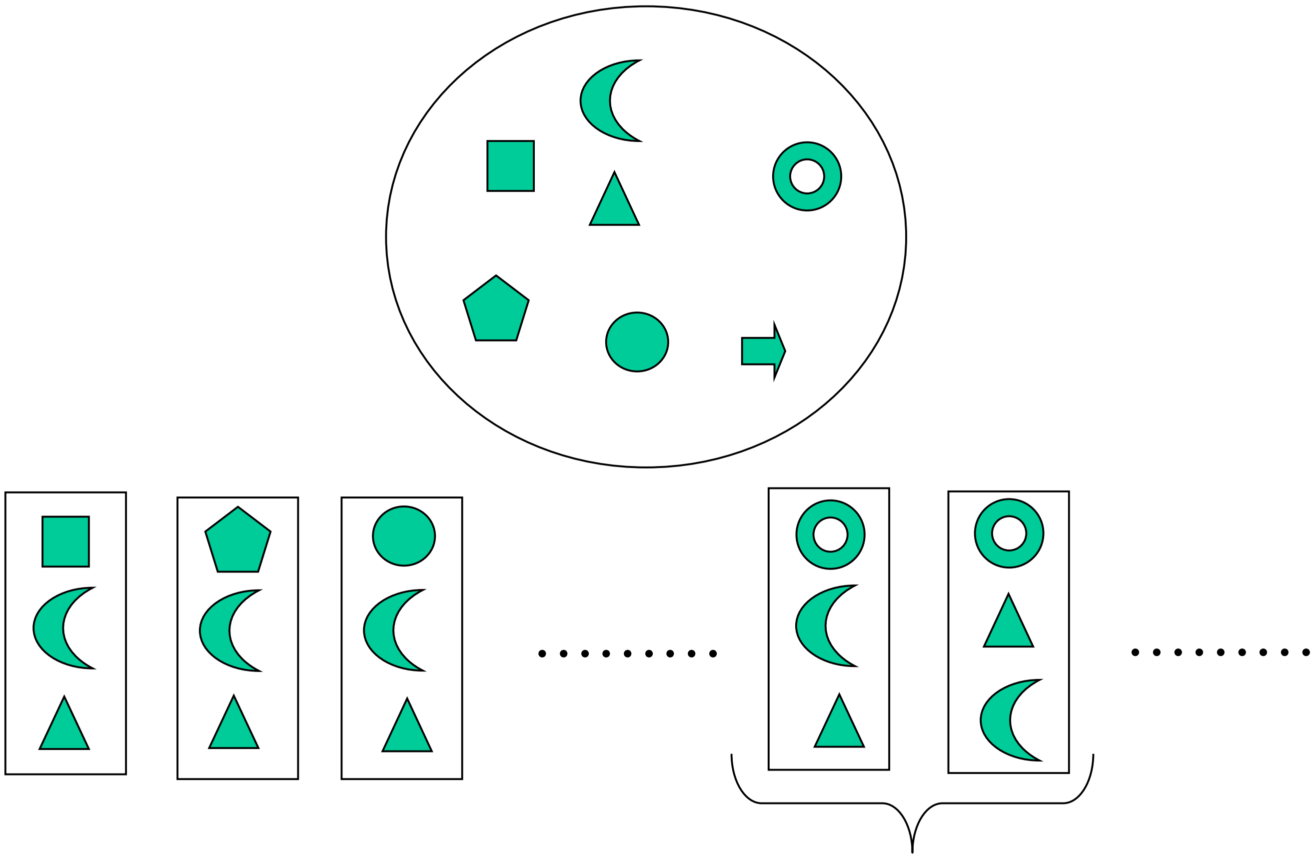


Formula asintotica di Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$$

Combinazioni

Conteggio di gruppi presi k a k da n ma effettivamente distinti



stessa combinazione

Per una combinazione di *k* oggetti posso fare *k*! permutazioni, le combinazioni di *k* oggetti presi da *n* distinti sono:

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{D(n,k)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Esempio 1.2

Quante terne di carte di bastoni possono essere fatte?

$$n=10;\ k=3$$

$$C(10,3)=\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=120$$

Proprietà delle combinazioni:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1$$

Coefficienti binomiali

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots.. + n \cdot ab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esempio 1.3
Quanti sono i sottoinsiemi distinti di un insieme con *n* oggetti?

Prima strategia
Consideriamo un elemento generico e un sottoinsieme, ci sono 2 possibilità: o l'elemento appartiene al sottoinsieme o non vi appartiene, per cui le possibilità complessive:

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{n \text{ oggetti}} = 2^n$$

Seconda strategia
Consideriamo il numero di sottoinsiemi composti da 0 elementi, da 1 elemento, da 2 … da *n* elementi e facciamo la somma:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+......+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^{k}=(1+1)^n$$

Probabilità

Consideriamo un **esperimento** che possa essere ripetuto in **condizioni nominalmente uguali**, esempi: l’estrazione da un’urna ben mescolata di biglie ‘uguali’, l’estrazione di una carta da un mazzo ben mischiato, il lancio di una moneta o di un dado ….. (insomma tutto parte dai giochi di sorte)

Se l’esperimento è ripetuto n volte e l’evento A si verifica r volte allora diremo che, con un *elevato livello di certezza*, la probabilità del verificarsi dell’evento A: $P(A)$ o P_A è data da

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

quando n è *sufficientemente elevato.*

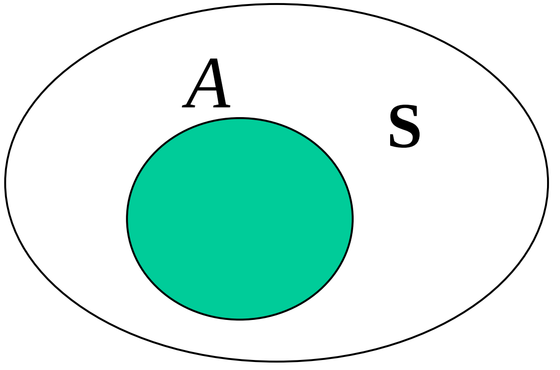
Probabilità

Definizione statistica:
Limite della frequenza relativa

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r}{n}$$

Definizione classica:
Casi favorevoli su casi possibili (spazi equiprobabili)

Definizione assiomatica o geometrica:
Teoria della misura applicata a sottoinsiemi (eventi) dell'insieme dei possibili esiti dell'esperimento (spazio campionario) con determinate regole (assiomi)



Discussione sulla definizione statistica:

Ho lanciato una moneta 100 volte e ho ottenuto 55 teste e 45 croci: su cosa punto per il prossimo lancio?

A) Punto su testa
B) Punto di croce
C) È lo stesso, non mi preoccupo

I numeri ‘ritardatari’….

Definizione classica

Qual è la probabilità che esca un numero primo nel lancio di un dado equo (*a toss of a fair dice*)

Esperimento: lancio un dado e registro il valore dalla faccia superiore

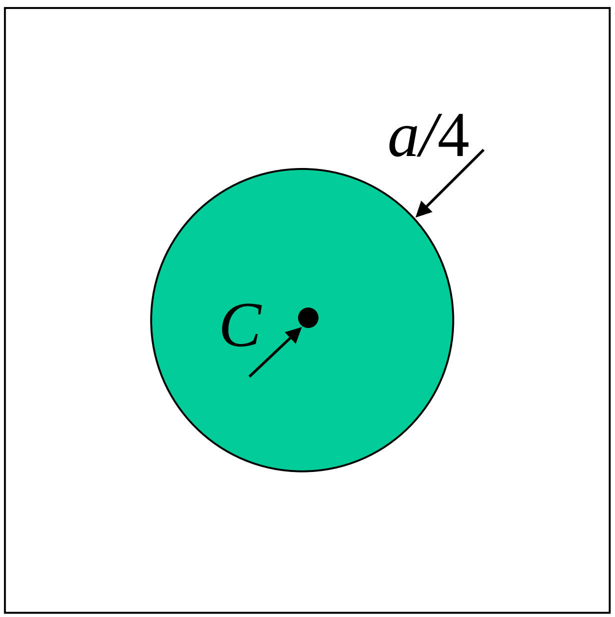
Evento E: il numero uscito è primo

N = numero di esiti (equiprobabili) possibili #{1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6
N_E = numero di esiti favorevoli #{ 2, 3, 5 } = 3

$$P(E) = \frac{N_E}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Definizione geometrica

Preso a caso un punto in un quadrato di lato *a* (*randomly selected point*) determinare la probabilità che disti dal centro meno di *a*/4

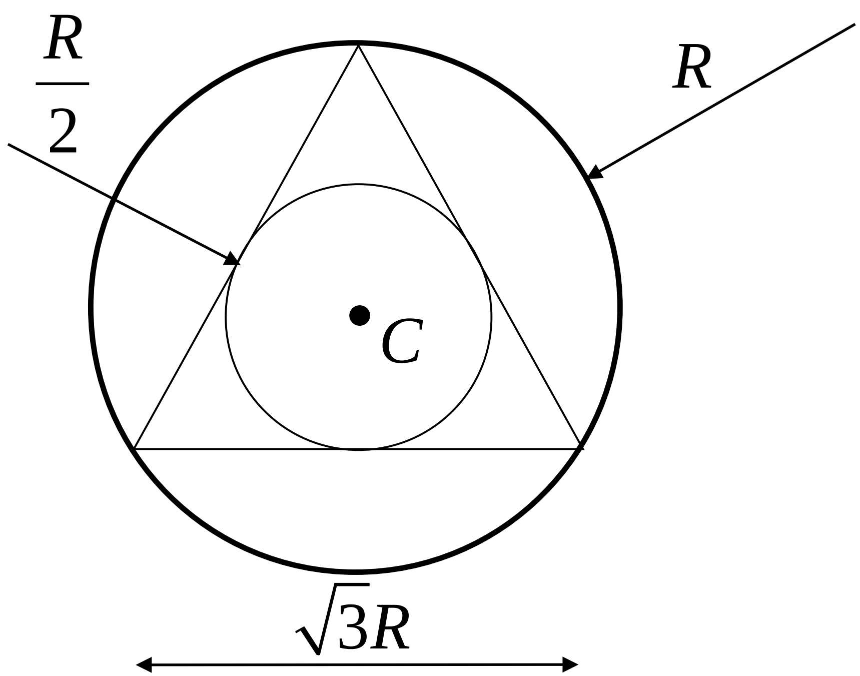


$$P(E) = \frac{\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{16} = 0.196$$

NB: il numero di esiti non è finito!

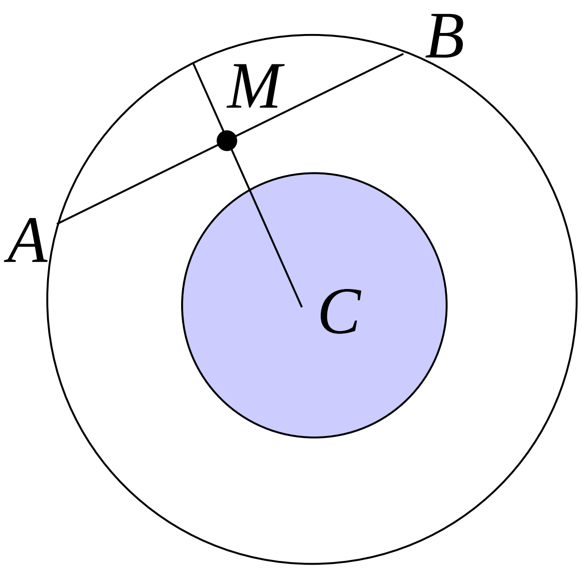
Discussione sulla definizione classica

Data la circonferenza di raggio *R*, determinare la probabilità che la lunghezza *l* di una corda *AB* presa a caso sia maggiore di $\sqrt{3}R$ (il lato del triangolo equilatero inscritto).



Scegliere una corda a caso?

Prima strategia: prendo a caso il centro *M* della corda tra i punti del cerchio esterno



Casi possibili il punto *M* è dentro il cerchio esterno

Casi favorevoli il punto *M* è nel cerchio interno

$$P(E) = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

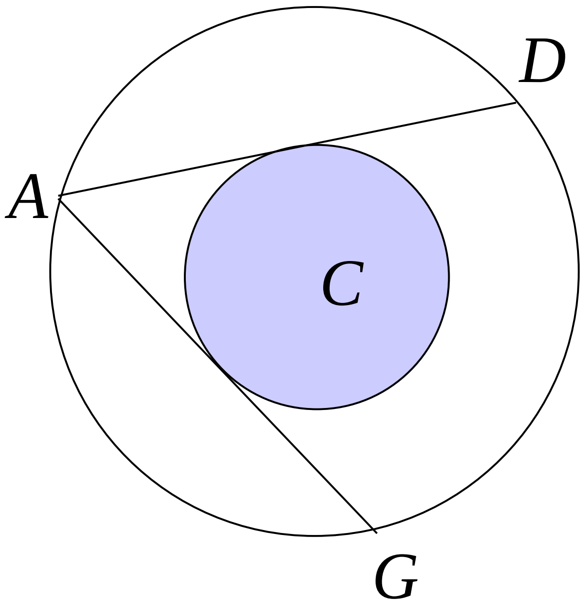
Scegliere una corda a caso?

Seconda strategia: prendo a caso l'estremo *A* della corda e poi l'estremo *B*, entrambi sulla circonferenza

La prima scelta non condiziona: conta la posizione relativa!

Casi possibili: il punto *B* è sulla circonferenza

Casi favorevoli: il punto *B* è nell'arco *DG*

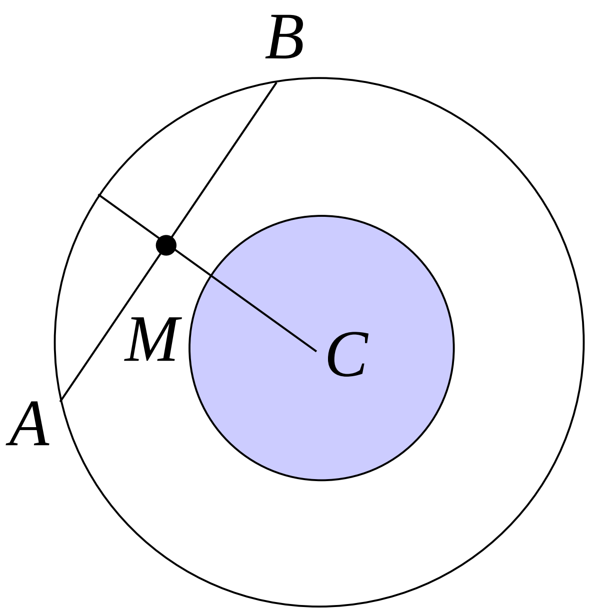


$$P(E) = \frac{\frac{2\pi R}{3}}{2\pi R} = \frac{1}{3}$$

Scegliere una corda a caso?

Terza strategia: prendo a caso il centro della corda M su un qualunque raggio del cerchio

La posizione angolare non condiziona



Casi possibili: il punto M è nel raggio

Casi favorevoli: il punto M è raggio interno

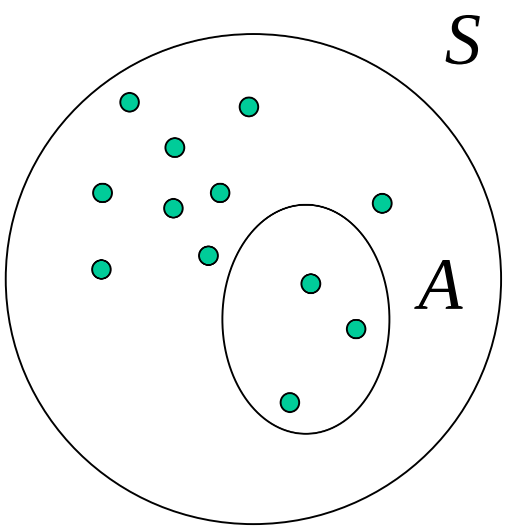
$$P(E) = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$$

Paradosso di Bertrand

Cosa significa prendere a caso una corda?

Probabilità definizioni

Spazio campionario, esito, evento (*probability space*, *outcome*, *event*)



Esempio: esperimento di estrazione di un numero da un'urna che ne contiene 12

Lo **spazio campionario** è:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

L'**esito** è un numero intero non maggiore di 12

Evento *A*: estrazione di un quadrato

$$A = \{1, 4, 9\}$$

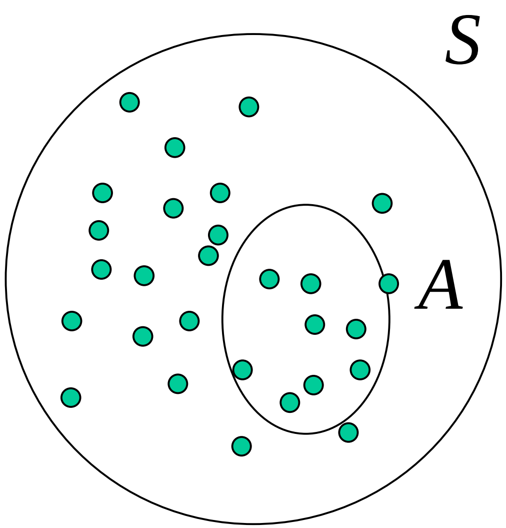
Evento *B*: estrazione di un primo

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

Spazio campionario finito

Probabilità definizioni: Spazio campionario non finito

Esempio: esperimento di lancio di una moneta fino a che non si presenta testa



Lo **spazio campionario** è:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\}$$

L'**esito** è un singolo numero naturale

Evento *A*: l'esperimento si arresta dopo 4 lanci

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Evento *B*: l'esperimento si arresta per un numero di lanci multiplo di 7

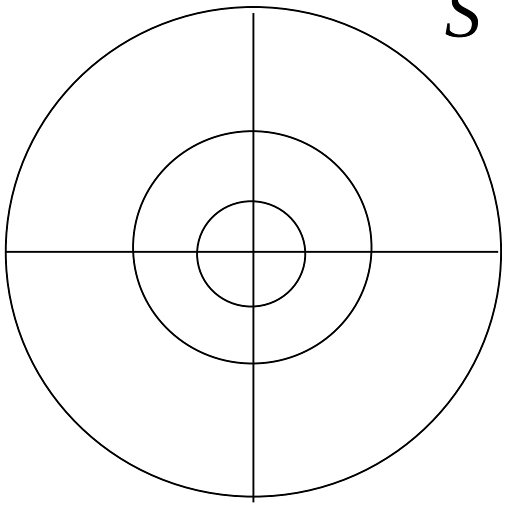
$$B = \{7, 14, 21, \ldots\ldots\}$$

Spazio campionario è **infinito** ma **numerabile**

Probabilità definizioni Spazio campionario non finito

Esempio: esperimento di lancio di una freccetta su un bersaglio con misura della distanza dal centro

S



$$S = \left\{ r \in \Re,\ \ 0 \le r \le R \right\}$$

L'esito è un numero reale in un intervallo

Evento *A*: la freccia si ferma nella metà superiore

Evento *B*: la freccia si ferma nel quarto in alto a destra

Evento *C*: la freccia si ferma nel centro

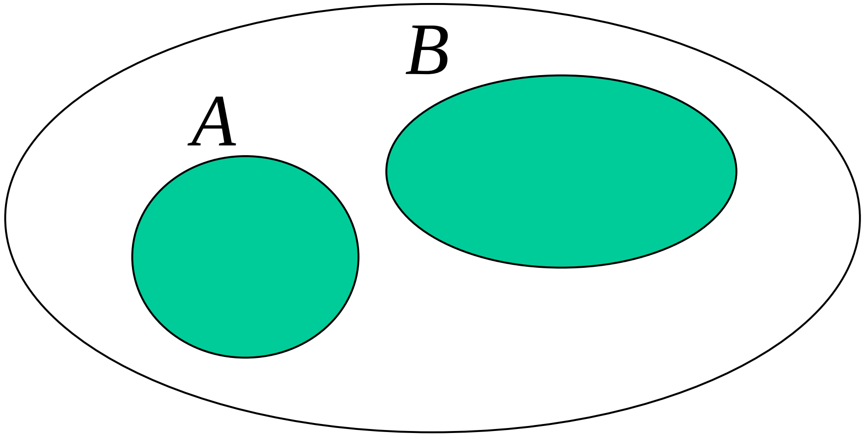
Spazio campionario **infinito non numerabile**

Probabilità assiomi

$\forall A: \quad 0 \le P(A) \le 1$ Normalizzazione

$P(S) = 1$ Evento certo: l'esperimento si compie

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



A e *B* eventi **incompatibili** (*mutually exclusive*): nessun esito in comune, se si compie l'uno non si compie l'altro

Probabilità teoremi

$$\boxed{P(\varnothing)=0}$$

L'evento impossibile (che non si verifica) ha probabilità 0

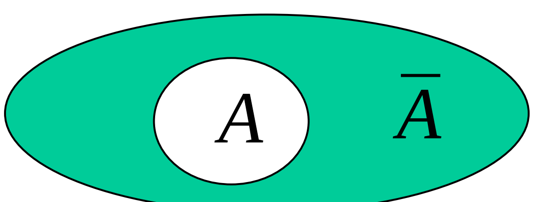
$S=S\cup\varnothing$ e $S\cap\varnothing=\varnothing$ S e $\varnothing$ sono incompatibili

$$P(S)=P(S)+P(\varnothing)$$

$$1=1+P(\varnothing)$$

$$\boxed{P(\bar{A})=1-P(A)}$$

Probabilità evento complementare o non *A*

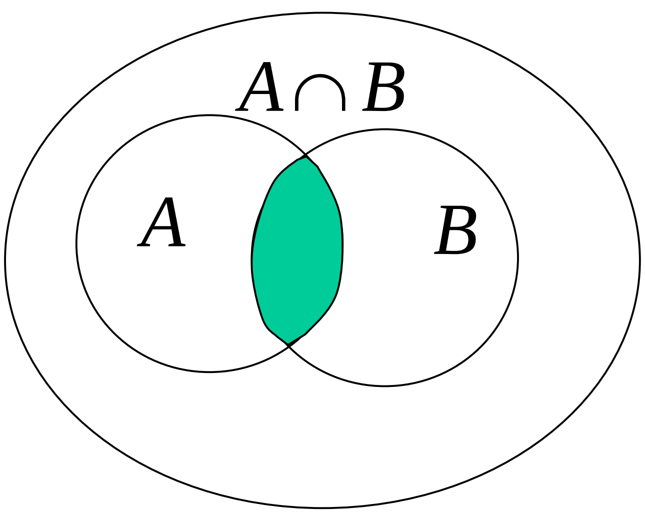


Probabilità teoremi

$$\boxed{B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)}$$

Probabilità di un evento compreso

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



Probabilità dell'unione: o A o B (*vel or* e non *out Xor*)

Probabilità semplice: spazi campionari finiti

Lancio tre monete e rilevo il numero di teste

$$S = \left\{0, 1, 2, 3\right\}$$

S_1

TTT
HTT
HHT
HHH
THT
THH
TTH
HTH

$$P\left(\left\{0\right\}\right) = \frac{1}{8}$$

$$P\left(\left\{1\right\}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P\left(\left\{2\right\}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P\left(\left\{3\right\}\right) = \frac{1}{8}$$

La probabilità di ogni elemento di S può essere calcolata considerando l’elemento stesso come una combinazione degli esiti dello spazio campionario che raccoglie tutti gli esiti possibili (equiprobabili).

Probabilità semplice: spazi campionari finiti

Lancio tre monete e rilevo il numero di teste

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(\{0\}) = \frac{1}{8}; P(\{1\}) = \frac{3}{8}; P(\{2\}) = \frac{3}{8}; P(\{3\}) = \frac{1}{8}$$

Evento *A*: si ha almeno una testa (*head*)

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Eventi mutuamente esclusivi

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{7}{8}$$

Evento *B*: si hanno tutte teste o tutte croci (*tails*)

$$B = \{0, 3\}$$

$$P(B) = P(\{0\}) + P(\{3\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Probabilità semplice: spazi campionari finiti equiprobabili

$$P(A) = \frac{\text{numero di eventi di } A}{\text{numero di eventi di } S}$$

Esercizio 1.2

Esperimento di estrazione ‘casuale’ di una carta da un mazzo di 52.

A = la carta è di picche

B = la carta è una figura.

Determinare: $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B), P(A \cap \overline{B})$

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cup B) = \text{la carta è di picche o è una figura } = \frac{13+12-3}{52} = \frac{11}{26}$$

$$P(A \cap B) = \text{la carta è una figura di picche } = \frac{3}{52}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = \text{la carta è picche ma non una figura } = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$$

Esercizio 1.3

Si estraggono a caso due elementi (prendendoli insieme) da un gruppo di 12 di cui 4 sono difettosi.

A = entrambi gli elementi sono difettosi

B = entrambi sono non difettosi

Determinare: $P(A), P(B)$ e la probabilità che almeno uno degli elementi sia difettoso (evento C)

casi possibili: $\binom{12}{2} = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{66} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}; \quad P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{66} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

$$C = \overline{B} \Rightarrow P(C) = \frac{19}{33}$$

Esercizio 1.4

Determinare la probabilità che in un gruppo di *n* individui i compleanni si festeggino in giorni distinti.

Hp: spazio equiprobabile, anni non bisestili.

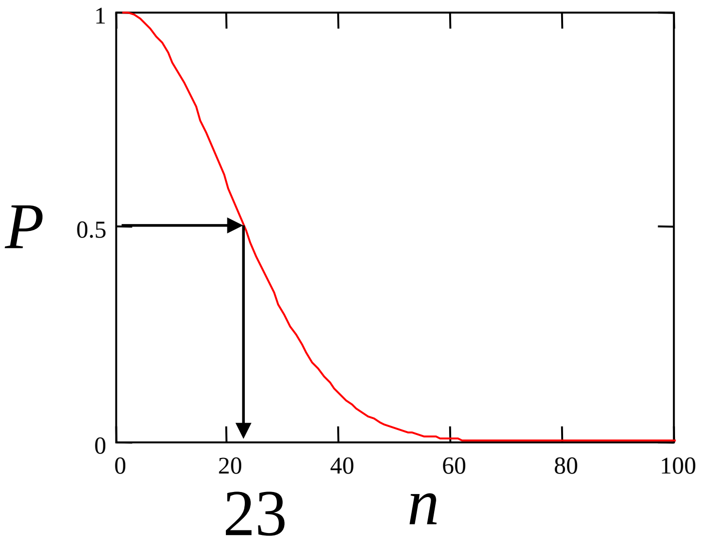
numero di modi in cui si possono presentare i compleanni:

esiti possibili: $365 \cdot 365 \cdot ...... = 365^n$

perchè l'evento si verifichi, il primo può scegliere 365, il secondo 364...

esiti favorevoli: $365 \cdot 364 \cdot ...... \cdot (365 - n + 1) = \dfrac{365!}{(365-n)!}$

$$P = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$$

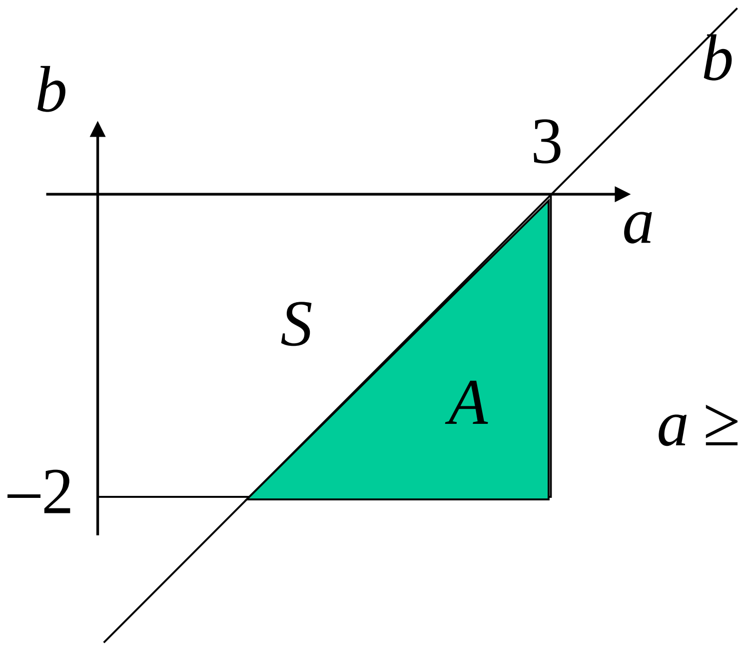


Esercizio 1.5

Preso un punto *b* a caso, su di una retta fissata, nel segmento $-2 \le b \le 0$ e *a* nel segmento $0 \le a \le 3$ determinare la probabilità che la distanza tra *a* e *b* sia maggiore di 3.

$$d = a - b$$

$$d = 3 \Rightarrow a - b = 3 \Rightarrow b = a - 3$$



$$b = a - 3$$

$$a \ge b - 3$$

$$P(A) = \frac{\text{area } A}{\text{area } S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1.6

In un concorso ippico corrono 8 cavalli, la vittoria di *A* è data 1 a 4 quella di *B* 2 a 7, trascurando il guadagno dell'agenzia di scommesse, determinare la probabilità che vinca:

- il cavallo *A*
- un cavallo che non sia *A* o *B*

La vittoria di *A* è data 1 a 4 significa che

$$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{P_A}{1-P_A} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_A = \frac{1}{5}$$

$$P_B = \frac{2}{9} = 0.222$$

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 1 - P_A - P_B = 0.578$$