

# Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini e Leonardo Bertini

Lezione 3:

Variabili aleatorie discrete notevoli

## Esperimenti binari ripetuti o esperimenti bernoulliani (Bernoulli trials):

Viene ripetuto un certo numero di volte ( $n$ ) un esperimento che ammette solo **due esiti** (che possiamo indicare arbitrariamente come ‘positivo’ e ‘negativo’, oppure ‘successo’ e ‘insuccesso’).

Gli esperimenti sono indipendenti, la probabilità che si verifichi l’esito positivo sia  $p$ , mentre la probabilità dell’esito negativo sia  $q$  ( $=1-p$ ) e tali **probabilità rimangono fisse nelle ripetizioni**.

Consideriamo il numero di volte ( $k$ ) in cui si verifica l’esito positivo.

Più propriamente: esaminiamo la VA numero di successi e la sua distribuzione

## Esempi di esperimenti bernoulliani:

Lanciamo 30 volte una moneta simmetrica con esito positivo testa:

$$n = 30, p = 0.5$$

Lanciamo 120 volte un dado non pesato con esito positivo: cinque

$$n = 120, p = \frac{1}{6}$$

50 estrazioni a caso da un'urna contenente 20 palline bianche, 15 nere e 10 rosse **con reimbussolamento**. L'esito positivo è una pallina non bianca

$$n = 50, p = \frac{25}{45}$$

Una estrazione di 3 palline da un'urna contenente 200 palline bianche 150 nere e 100 rosse. L'esito positivo è pallina rossa

(processo “quasi” bernoulliano, dato che, se le palline non vengono reinserite dopo ogni estrazione, la probabilità cambia, ma leggermente perché  $n$  è piccolo rispetto al totale)

$$n = 3, p = \frac{100}{450}$$

## Variabile aleatoria bernoulliana

Consideriamo la variabile aleatoria data dal numero di successi:

$$k$$

Il numero di successi in un esperimento bernoulliano è un intero:

$$0 \leq k \leq n$$

Può essere considerata quindi una VA discreta, valutiamone la distribuzione. Indicheremo tale quantità anche come:

$$P_k = B(k, n, p)$$

## Variabile aleatoria bernoulliana

Consideriamo 5 lanci di un dado con esito positivo l'uscita di 'uno', quindi, fissando, ad esempio,  $k=3$ :

$$n = 5, p = \frac{1}{6}, k = 3 \qquad P_3 = B\left(3, 5, \frac{1}{6}\right)$$

espresso in parole: qual è la probabilità di ottenere (esattamente) 3 volte 'uno' nel lancio di 5 dadi (o in 5 lanci di un dado)?

Consideriamo un generico lancio di 5 dadi, la condizione richiesta ( $k=3$ ) si ottiene per esempio con la seguente sequenza:

(1), (1), (3), (5), (1)

per l'indipendenza dei lanci, è facile calcolare la probabilità che tale sequenza si verifichi:

$$\begin{aligned} P\{(1), (1), (3), (5), (1)\} &= P\{(1), (1), (\bar{1}), (\bar{1}), (1)\} = \\ &= p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p = p^3 q^2 = 3.215 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

È sufficiente considerare **tutte** le sequenze valide **diverse** che abbiano 3 esiti favorevoli (e 2 non favorevoli), nel seguito sono elencate con il calcolo della loro probabilità che è sempre:  $p^3q^2$

(1), (1), (1), ( $\bar{1}$ ), ( $\bar{1}$ )     $p, p, p, q, q$

$p, p, q, p, q$

$p, p, q, q, p$

$p, q, p, q, p$

$p, q, q, p, p$

$q, p, q, p, p$

$q, q, p, p, p$

$q, p, p, q, p$

$q, p, p, p, q$

$p, q, p, p, q$

Sono 10, quante le combinazioni di 3 oggetti presi da 5 (oppure 2 da 5)

$$10 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2}$$

Quindi:

$$B\left(3, 5, \frac{1}{6}\right) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.03215$$

## Formula generale di Bernoulli

$$B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Si vede che si tratta del  $k$ -esimo termine dello sviluppo del binomio:

$$(p + q)^n$$

Per questo la distribuzione di Bernoulli è anche chiamata **Binomiale**

### Esempio 3.1

Valutare la probabilità che non si abbia alcun 5 nel lancio di 7 dadi.

Metodo assiomatico:

Considerando caso favorevole ‘esce 5’ si ha:

$$k = 0, n = 7, p = \frac{1}{6} \Rightarrow B\left(0, 7, \frac{1}{6}\right) = \binom{7}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.279$$

Ma anche, considerato caso favorevole ‘esce un numero diverso da 5’ si ha:

$$k = 7, n = 7, p = 5/6 \Rightarrow B\left(7, 7, \frac{5}{6}\right) = 0.279$$

Metodo intuitivo: perché non esca mai 5:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.279$$



## Esempio 3.2

Valutare la probabilità che si abbia **almeno** un 5 nel lancio di 4 dadi.

Metodo assiomatico:

caso favorevole ‘esce 5’ per cui le sequenze da considerare sono quelle con  $k=1, 2, 3$  o  $4$  :

$$P = \sum_{k=1}^4 B\left(k, 4, \frac{1}{6}\right) = 0.518$$

Metodo intuitivo:

l’evento è complementare a quello in cui escono tutti numeri diversi da 5 (complemento di ‘tutti sfavorevoli’):

$$P = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518$$

## Proprietà della distribuzione bernoulliana

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k, n, p) = np$$

Nella ripetizione di  $n$  esperimenti in ognuno dei quali l'esito favorevole è espresso da  $p$ , il numero atteso di successi è  $np$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mu)^2 \cdot B(k, n, p) = npq$$

In esperimenti bernoulliani, a parità di  $n$  la dispersione massima si ha quando  $p=q$  (anche questo è ragionevole)

$$k_{max} = \lceil (n+1)p \rceil$$

Se  $(n+1)p$  è intero anche  $np$  è  $k_{max}$

## Proprietà della distribuzione bernoulliana

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k, n, p) = np$$

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k, n, p) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{n(n-1)!}{(n-1-(k-1))!k(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = np$$

Somma delle  
probabilità di una  
distribuzione  
binomiale

Nella ripetizione di  $n$  esperimenti in ognuno dei quali l'esito favorevole è espresso da  $p$ , il numero atteso di successi è  $np$

# Proprietà della distribuzione di Bernoulli

$$\frac{B(k+1, n, p)}{B(k, n, p)} = \frac{\frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} p^{k+1} q^{n-(k+1)}}{\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}} =$$

$$= \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$$

$$\frac{(n-k)p}{(k+1)q} > 1 \rightarrow (n-k)p > (k+1)q$$

$$np - kp > kq + q$$

$$np - q > k(p+q) = k$$

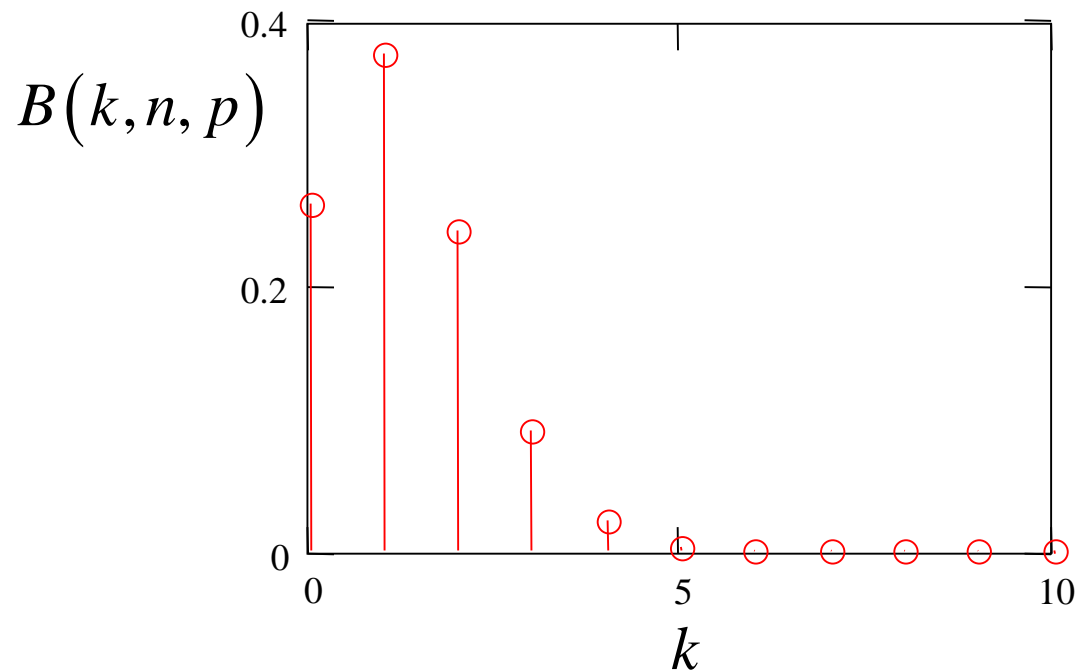
$$k \begin{cases} < np - q \Rightarrow B(k+1, n, p) > B(k, n, p) & (\text{crescente}) \\ = np - q \Rightarrow B(k+1, n, p) = B(k, n, p) & (\text{massimo}) \\ > np - q \Rightarrow B(k+1, n, p) < B(k, n, p) & (\text{decescente}) \end{cases}$$

## Esempi: distribuzioni bernoulliane 1/2

$$n = 10; p = \frac{1}{8}$$

$$\mu = 1.25; \quad \sigma = 1.046$$

$$np - q = 10 \frac{1}{8} - \frac{7}{8} = 0.375$$

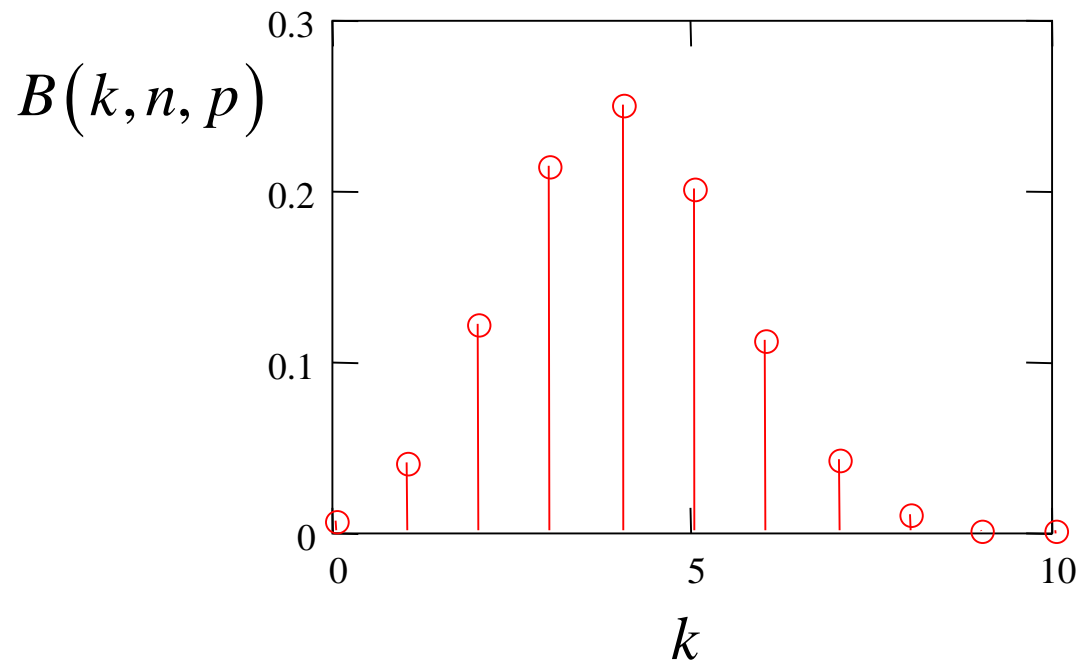


## Esempi: distribuzioni bernoulliane 2/2

$$n = 10; p = 0.4$$

$$\mu = 4; \sigma = 1.549$$

$$np - q = 10 \cdot 0.4 - 0.6 = 3.2$$



### Esempio 3.3

In un articolo di  $N_p=12$  pagine ci sono (distribuiti a caso)  $N_e=5$  errori di stampa. Determinare la distribuzione di probabilità del numero di errori contenuti in una pagina.

Possiamo usare la bernoulliana identificando i vari termini:

$$n = ?$$

la variabile aleatoria è il numero di errori in una pagina, in questo caso non possono essere più di 5:

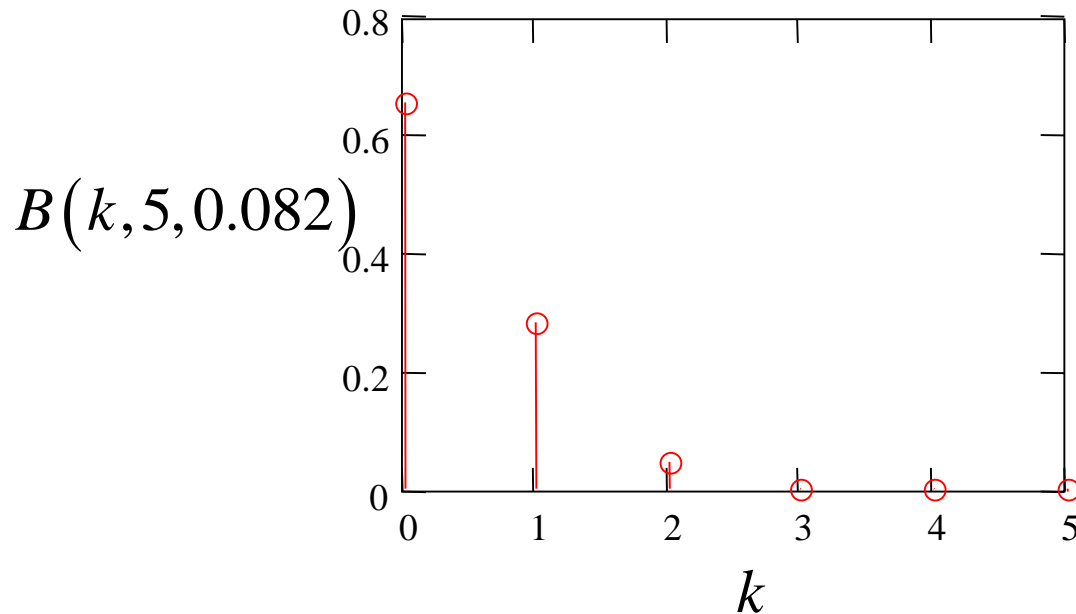
$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad n = N_e = 5$$

Il valore medio di errori per pagina è:

$$\mu = \frac{N_e}{N_p} = \frac{5}{12} = 0.42$$

Per cui essendo:  $\mu = np \Rightarrow p = \frac{0.4}{5} = 0.083$   $\left( p = \frac{1}{N_p} \right)$

che è la probabilità di mettere un singolo errore in una pagina



Il valore più probabile è (moda) :  $k_{max}=0$

La distribuzione è decrescente

$$np - q = 5 \frac{1}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{1}{2}$$

Le probabilità per  $k = 4$  o  $5$  sono bassissime:

$$2.21 \cdot 10^{-4}; \quad 4.02 \cdot 10^{-6} \quad \text{respect.}$$

Come si trova la probabilità di trovare più di 2 errori per pagina?

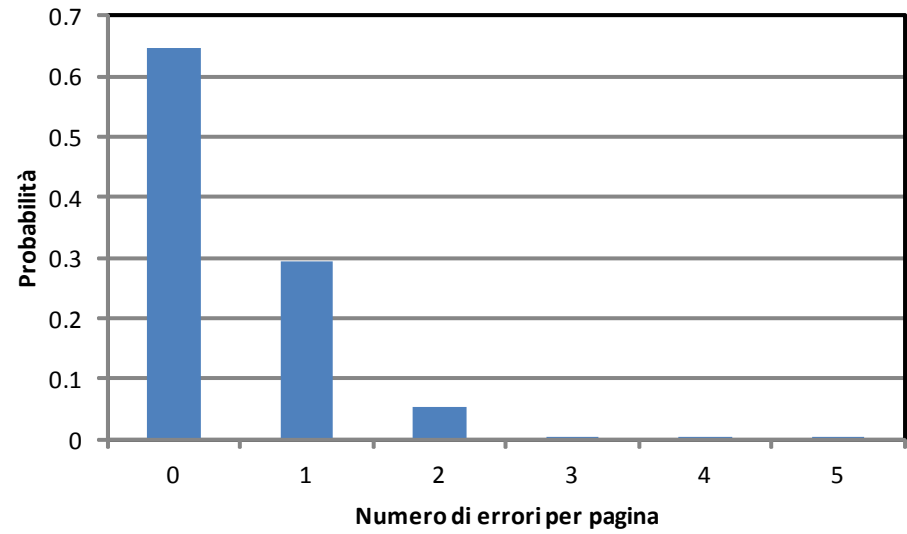
Provare con la funzione DISTRIB.BINOM di Excel



n	p
5	0.083333

k	B(k,n,p)
0	0.647228
1	0.294194
2	0.05349
3	0.004863
4	0.000221
5	4.02E-06
Somma	1

"=DISTRIB.BINOM(A5;A\$2;B\$2;FALSO)"



### Esempio 3.3a

In un articolo di  $N_p=12$  pagine ci sono (distribuiti a caso)  $N_e=5$  errori di stampa. Determinare la distribuzione di probabilità del numero di pagine con errori.

In questo caso la variabile aleatoria è il numero di pagine contenenti errori, per cui :

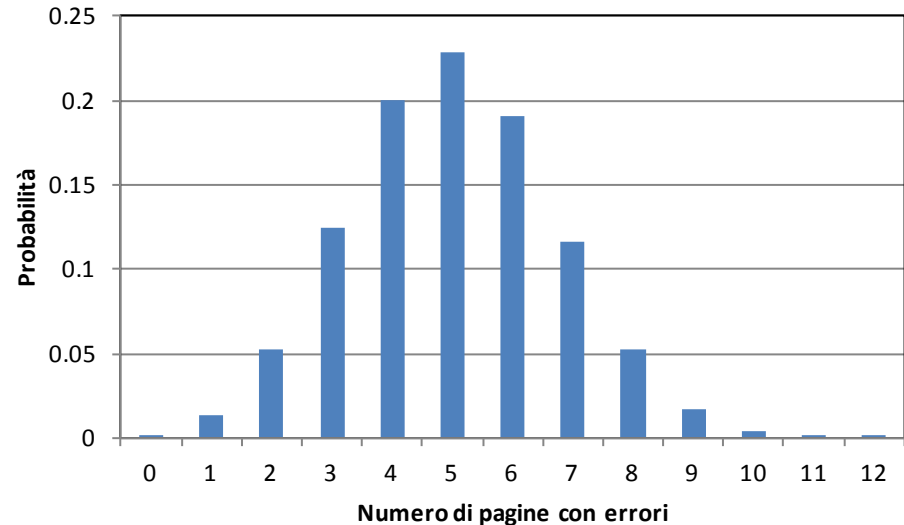
$$n=12$$

$$k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

La probabilità che una pagina contenga un errore è:

$$p = \frac{N_e}{N_p} = \frac{5}{12} = 0.42$$

Il valore più probabile è 5 (1 errore per pagina). Si noti che la distribuzione potrebbe prevedere più di 5 errori.



Si può calcolare facilmente il numero più probabile di pagine senza errori con le due distribuzioni:

Nel secondo caso, sarà semplicemente  $12-5=7$ .

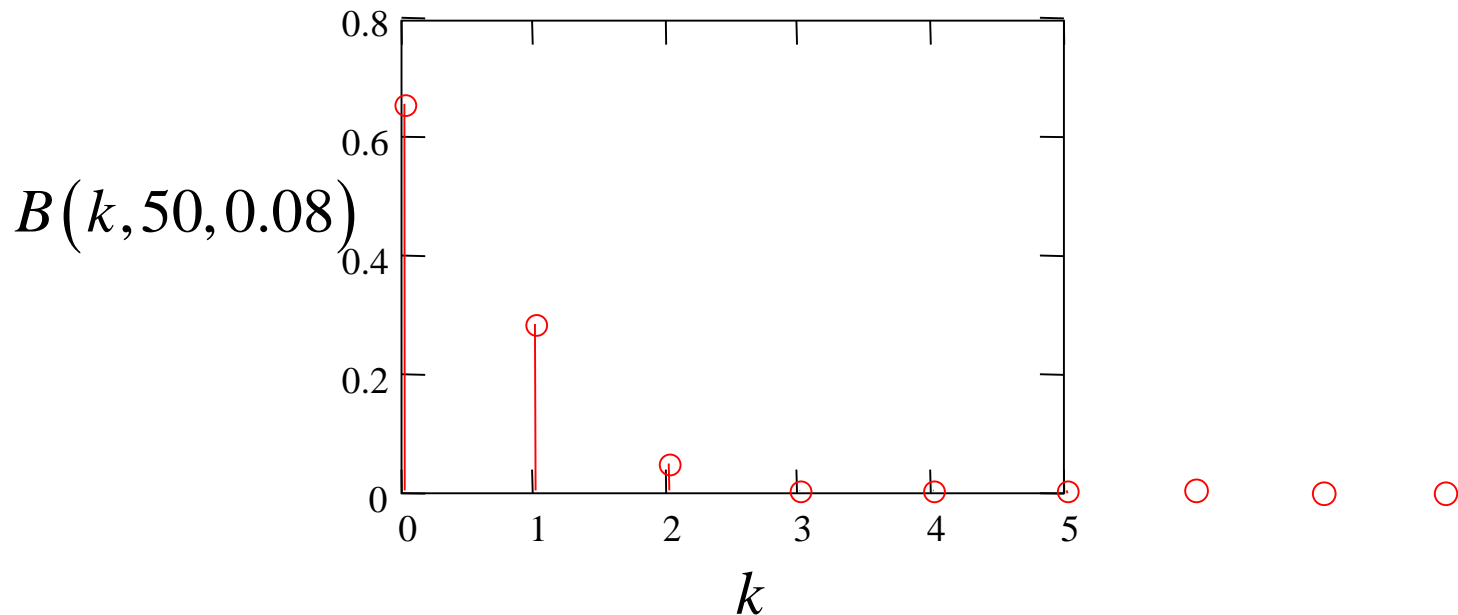
Nel primo caso sarà la probabilità di avere zero errori per pagina (0.64) per il numero di pagine (12):

$$\text{Numero pagine senza errori} = 0.64 \cdot 12 = 7.68$$

### Esempio 3.4

In un libro di 120 pagine ci sono (distribuiti a caso) 50 errori di stampa. Determinare la distribuzione di errori per pagina.

$$n = 50; \quad p = \frac{1}{120} = 0.0082 \quad \text{ma:} \quad \mu = np = 0.42$$



$$P\{k > 3\} = 8.2 \cdot 10^{-4}$$

### Esempio 3.5

In un'enciclopedia di 12000 pagine ci sono (distribuiti a caso) 5000 errori di stampa. Determinare la distribuzione di errori per pagina.

È quindi il caso tipico in cui  $n$  ( $=5000$ ) tende a diventare grande (virtualmente infinito) con  $p$  ( $=1/12000$ ) che diventa basso ma il prodotto:

$$np = 0.42$$

si mantiene finito.

Si ottiene in questo caso una distribuzione limite della bernoulliana detta: **distribuzione di Poisson**

### Esempio 3.6

Una scheda elettronica contiene 1000 componenti, la probabilità che, in un certo periodo di tempo, ognuno dei componenti si guasti è 0.001, determinare la probabilità che, nello stesso periodo di tempo, la scheda funzioni regolarmente (questo avviene se tutti i suoi componenti sono funzionanti)

$$n = 10^3, \quad p = 10^{-3} \qquad np = 1$$

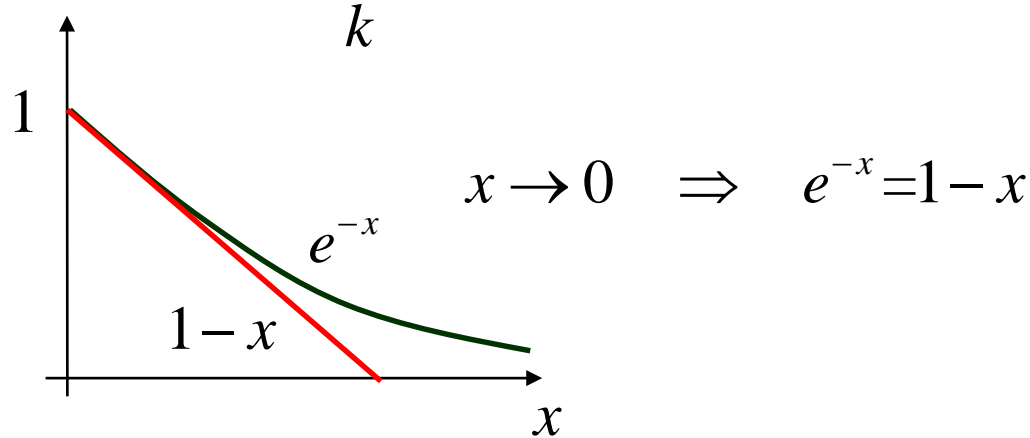
$$P\{k = 0\} = q^n = 0.999^{1000}$$

# Distribuzione di Poisson

$$n \rightarrow \infty; \quad p \rightarrow 0; \quad np \rightarrow a$$

$$k \ll n$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \cong \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k$$



$$p \ll 1$$

$$q = 1 - p \cong e^{-p} \quad q^{n-k} \cong q^n = (1-p)^n \cong e^{-pn} = e^{-a}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} \rightarrow \frac{n^k}{k!} p^k e^{-a} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-a} = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$$

### Soluzione esempio 3.6

Una scheda elettronica contiene 1000 componenti, la probabilità che in un certo periodo ognuno di questi si guasti è 0.001, determinare la probabilità che, nello stesso periodo di tempo, la scheda funzioni regolarmente (tutti i suoi componenti sono funzionanti)

Si può calcolare la probabilità che nessun componente si guasti

$$P(k = 0) = q^n = 0.999^{1000} = 0.368$$

Oppure si può usare la distribuzione di Poisson:

$$n = 1000 \gg 1$$

$$p = 0.001 \ll 1$$

$$P(k = 0) = \frac{a^k e^{-a}}{k!} = \frac{a^0 \cdot e^{-a}}{0!} = e^{-np} = 0.368$$



# Proprietà della distribuzione di Poisson

$$P_k = \frac{1}{k!} a^k e^{-a} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{k!} a^k e^{-a} = a$$

Come prevedibile (essendo caso limite della binomiale)

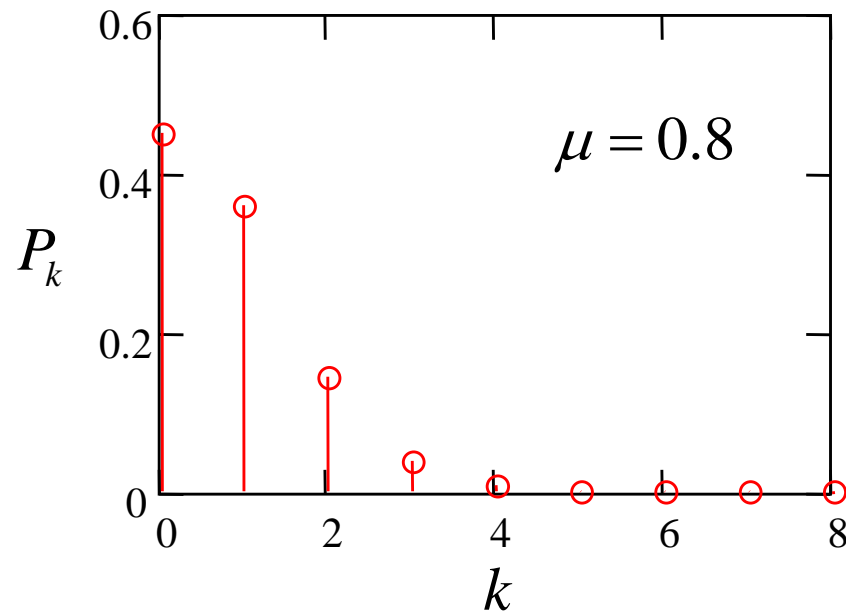
$$\sigma^2 = a = \mu \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$

Distribuzione monoparametrica

## Esempi di distribuzione di Poisson 1/3

$$P_k = \frac{1}{k!} \mu^k e^{-\mu}$$

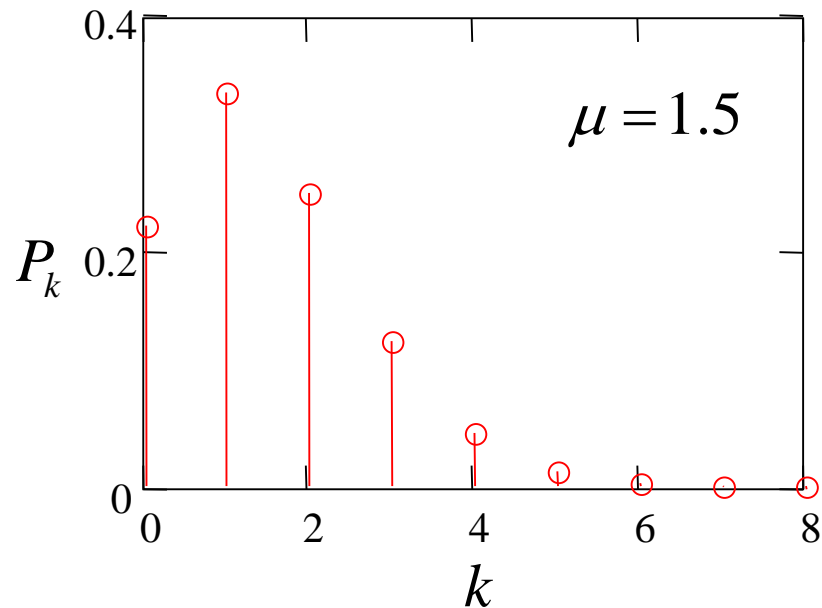
Media inferiore a 1



## Esempi di distribuzione di Poisson 2/3

$$P_k = \frac{1}{k!} \mu^k e^{-\mu}$$

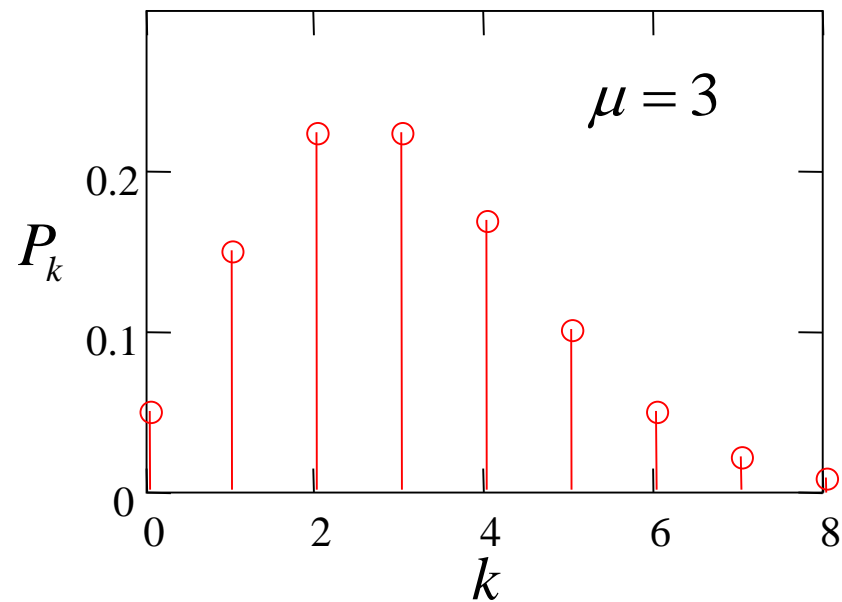
Media attorno all'unità



## Esempi di distribuzione di Poisson 3/3

$$P_k = \frac{1}{k!} \mu^k e^{-\mu}$$

Media ben maggiore di 1



### Esempio 3.7

In una dispensa di  $N_p=700$  pagine vi sono mediamente 2 errori per pagina, stimare quante pagine sono:

- 1) senza errori
- 2) con 2 errori
- 3) con più di 4 errori

$$\mu = 2$$

$$P_k = \frac{1}{k!} 2^k e^{-2}$$

$$1) \quad N_{e=0} = N_p \cdot P_0 = 95$$

$$2) \quad N_{e=2} = N_p \cdot P_2 = 189$$

$$3) \quad N_{e>4} = N_p \cdot \left( 1 - \sum_{k=0}^4 P_k \right) = 37$$

### Esempio 3.8

In un reparto di produzione si verificano in media 1.4 non conformità all'ora, stimare:

- 1) la probabilità che in un'ora siano prodotti tutti elementi conformi
- 2) la probabilità che in un'ora vi siano più di 5 scarti.
- 3) Se si verifica la condizione 2 cosa possiamo concludere?
- 4) La probabilità che in due ore si producano più di 10 scarti

$$1) \quad P_0 = 0.247$$

$$2) \quad P_{k>5} = 3.20 \cdot 10^{-3}$$