

# Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini e Leonardo Bertini

Lezione 4:

Variabili aleatorie continue

## Definizione di variabile aleatorie continua

Se il risultato di un esperimento casuale (evento) è associato una quantità numerica ma non numerabile (tipicamente reale), la V.A. è detta continua.

Esempi:

Il tempo intercorrente tra due chiamate telefoniche in un centralino

La forza massima applicabile a un provino di trazione

Il tempo di vita di un componente

L'intensità sonora di un disturbo

Nota: in genere, ha queste caratteristiche tutto quanto è misurato con strumenti analogici

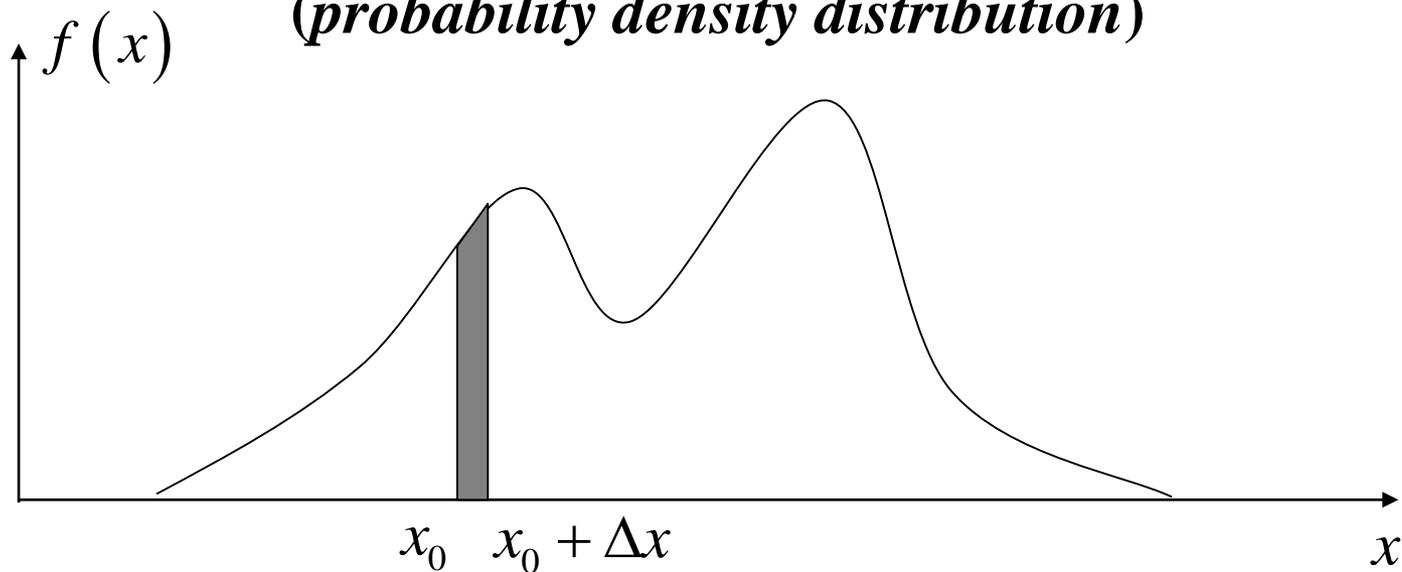
# Densità di probabilità

Nel caso discreto la distribuzione di probabilità è stata associata al singolo valore della V.A., come la massa in un sistema discreto di punti materiali

Per la V.A. continua si ha lo stesso problema di definizione della massa nei corpi continui: deve essere introdotta la nozione di **densità**

**Esempio 4.1.** Nell'ora di punta di un centralino le telefonate giungono in modo random senza condizioni preferenziali, determinare la probabilità che una telefonata giunga nell'istante centrale dell'intervallo

## Definizione di densità di probabilità (*probability density distribution*)



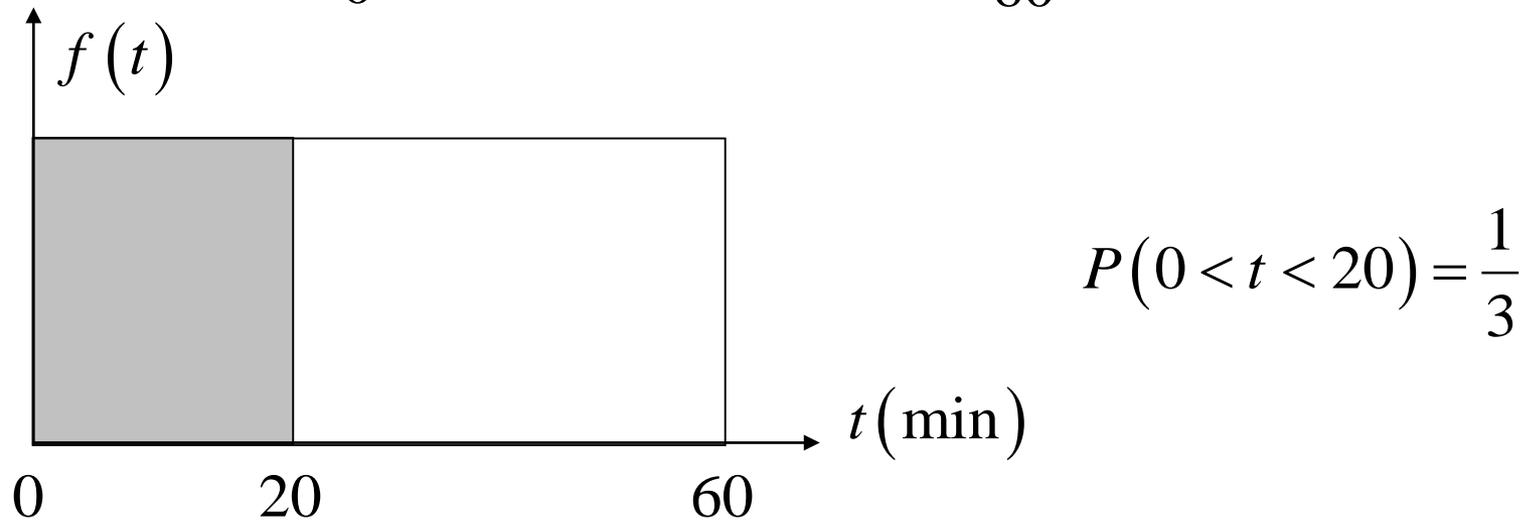
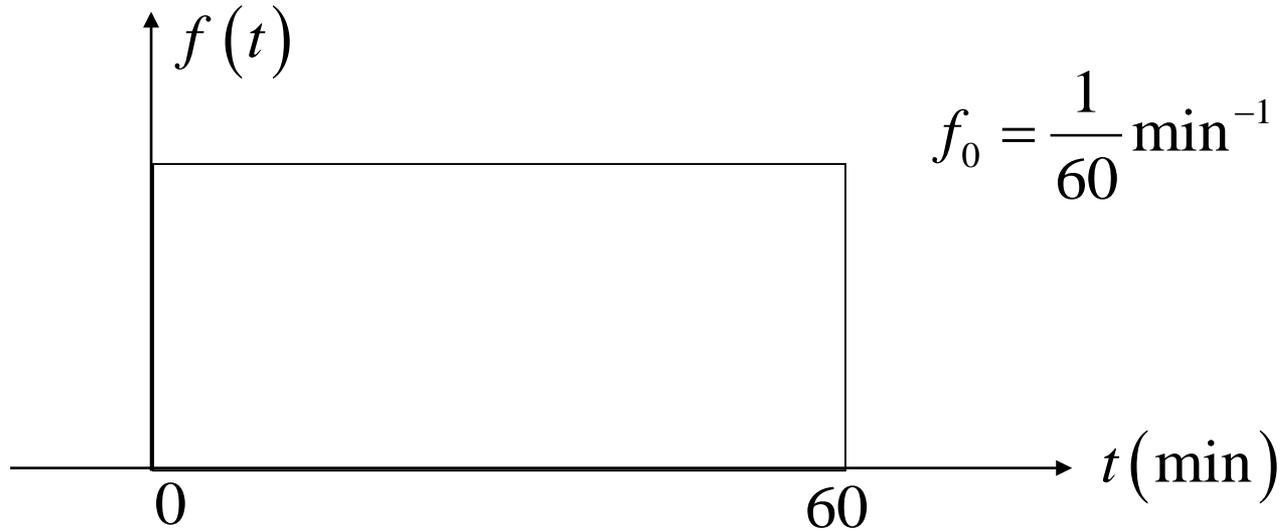
$$P(x_0 < x < x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(x_0) = \left. \frac{dP}{dx} \right|_{x=x_0}$$

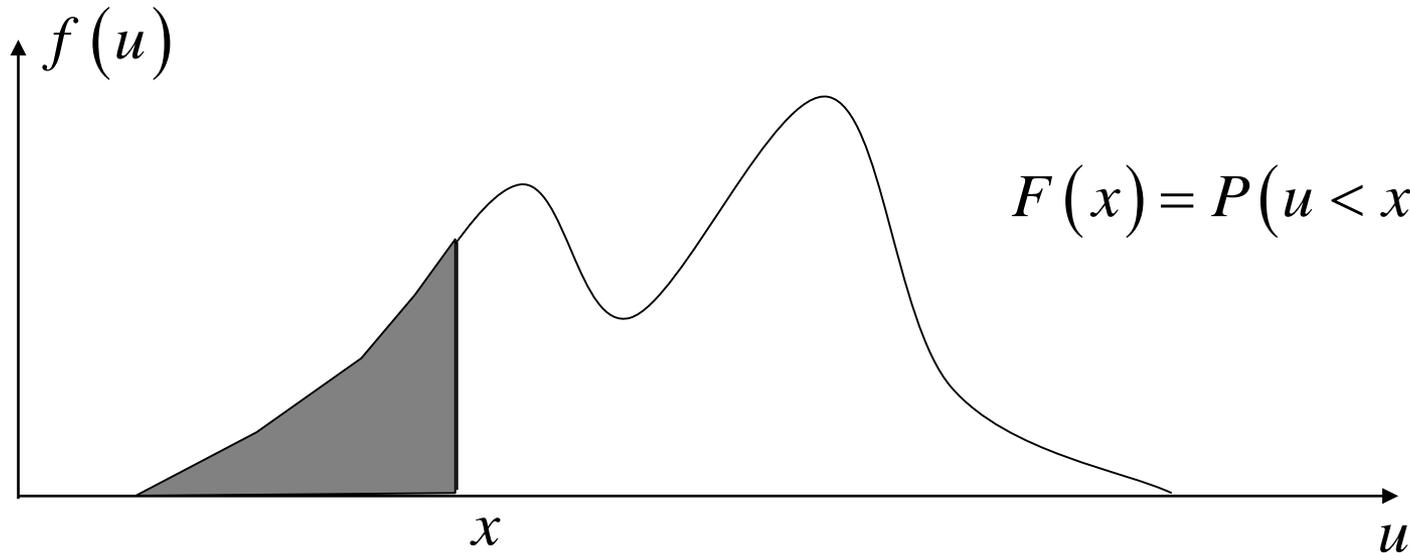
Dimensionalmente la densità di probabilità **non** è una probabilità ma una probabilità per unità di  $x$ . Per esempio, se  $x$  è un tempo (secondi)  $f(x)$  è tempo alla  $-1$  (probabilità al secondo)

**Esempio 4.2.** Una telefonata può giungere in qualsiasi momento della prossima ora, determinare la probabilità che si verifichi

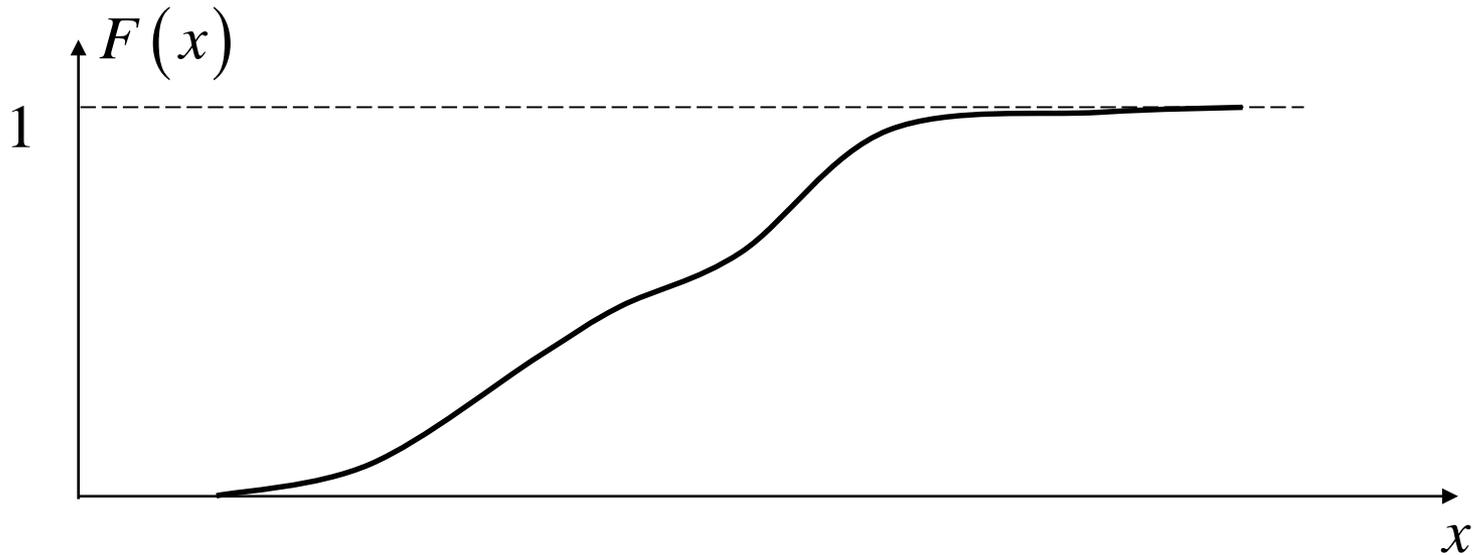
- 1) nei primi 20 minuti
- 2) nei minuti dispari



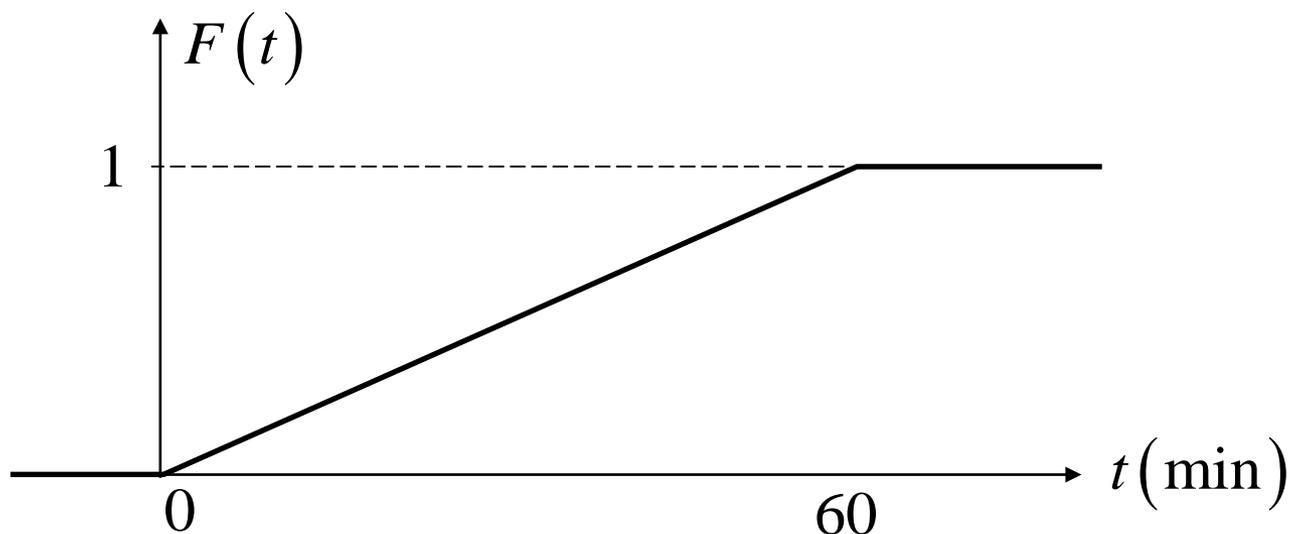
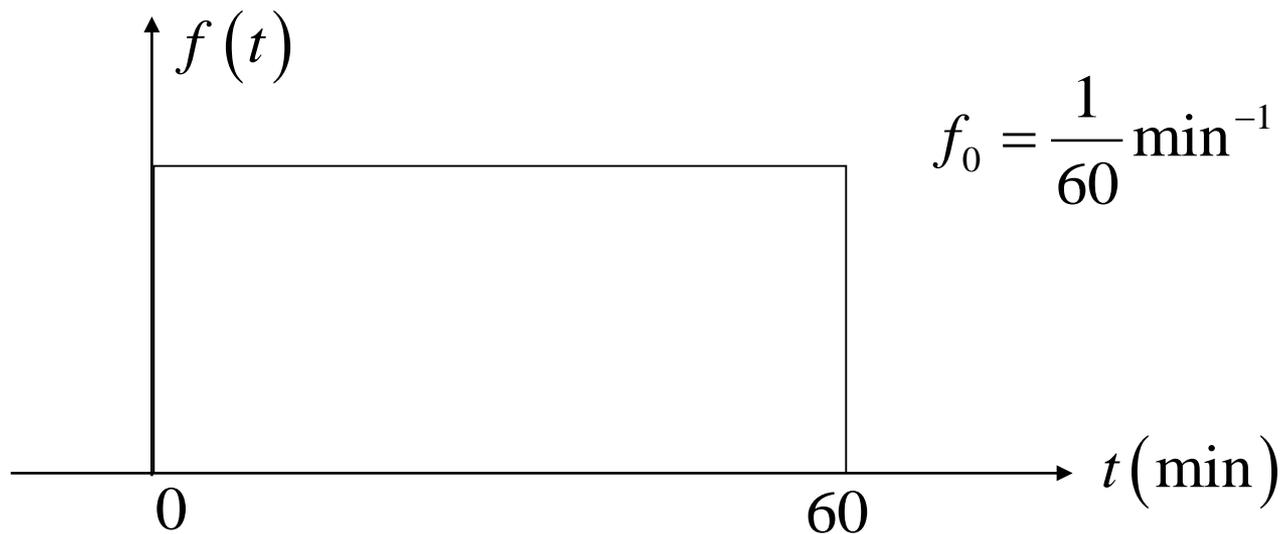
# Distribuzione di probabilità cumulata



$$F(x) = P(u < x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



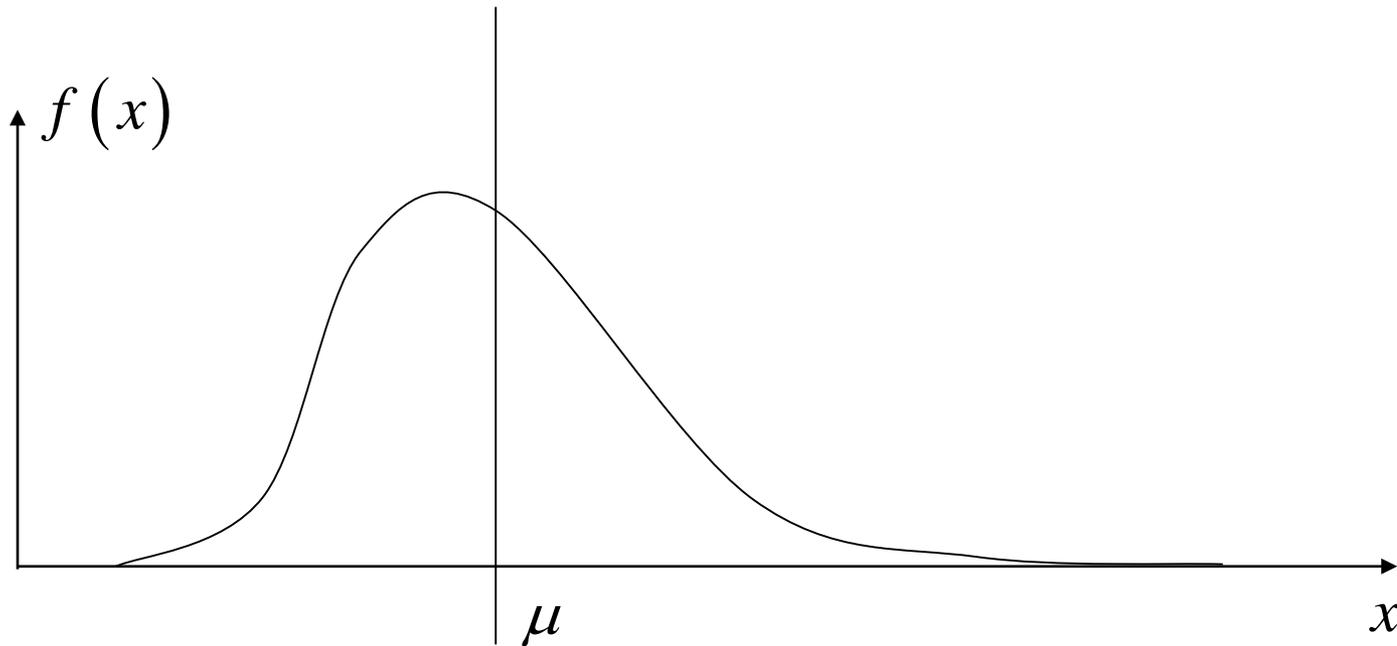
**Esercizio 4.1.** Tracciare e quotare la cumulata della distribuzione uniforme dell'esempio 4.2.



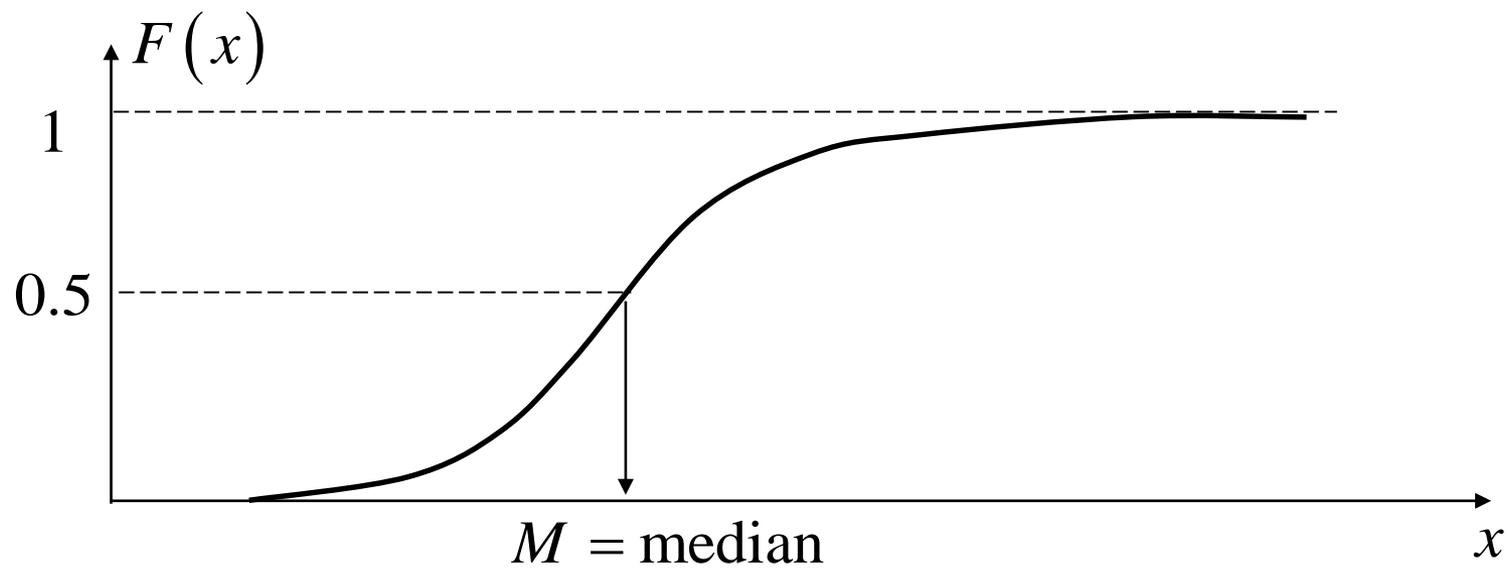
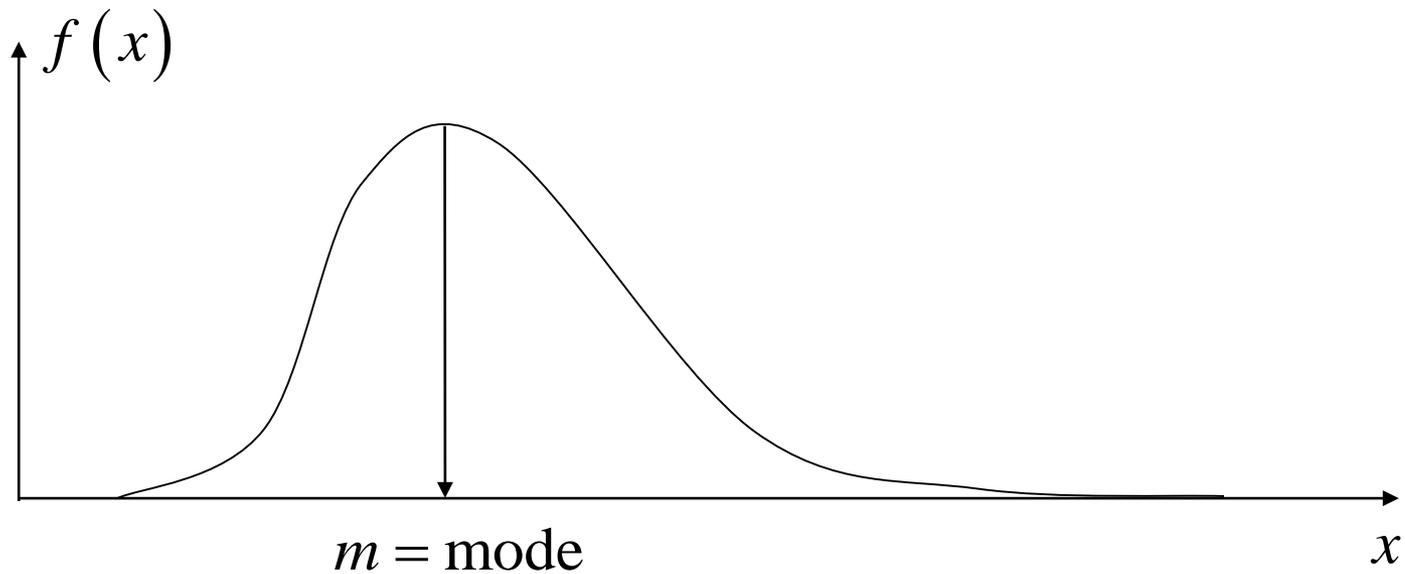
## Definizioni

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

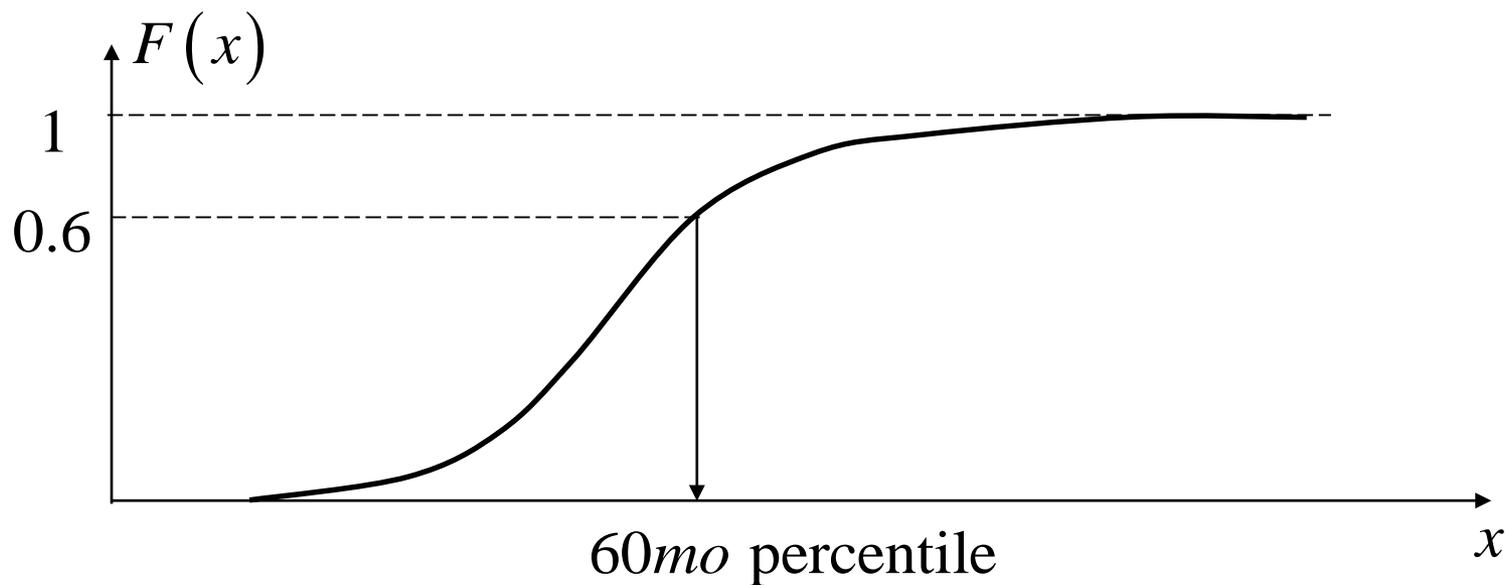
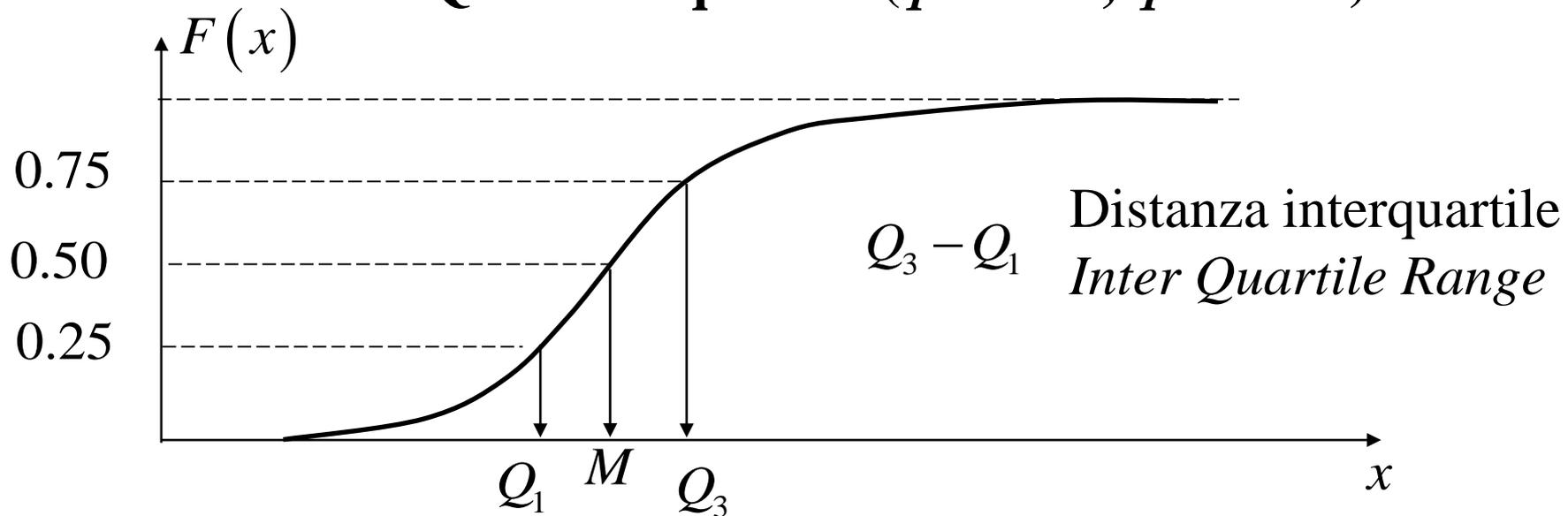
$$\sigma^2 = \text{VAR}(X - \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$



# Moda e mediana (*mode, median*)



# Quartili e quantili (*quartiles, quantiles*)



## Altre proprietà di forma

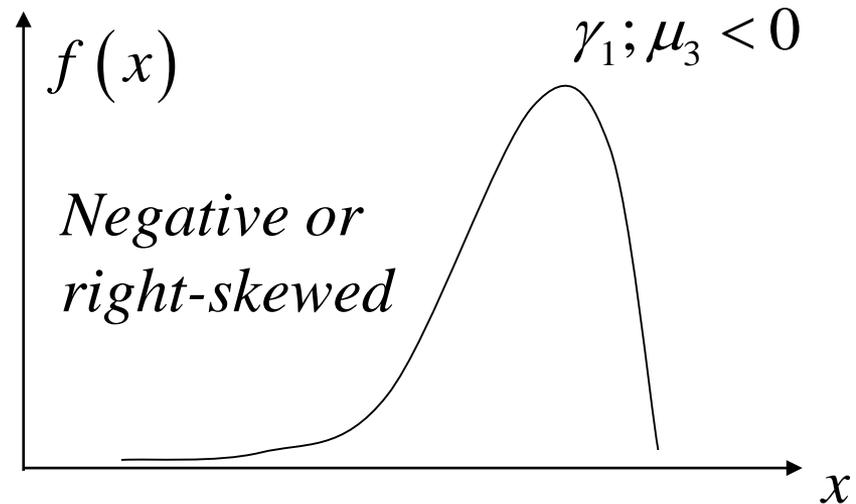
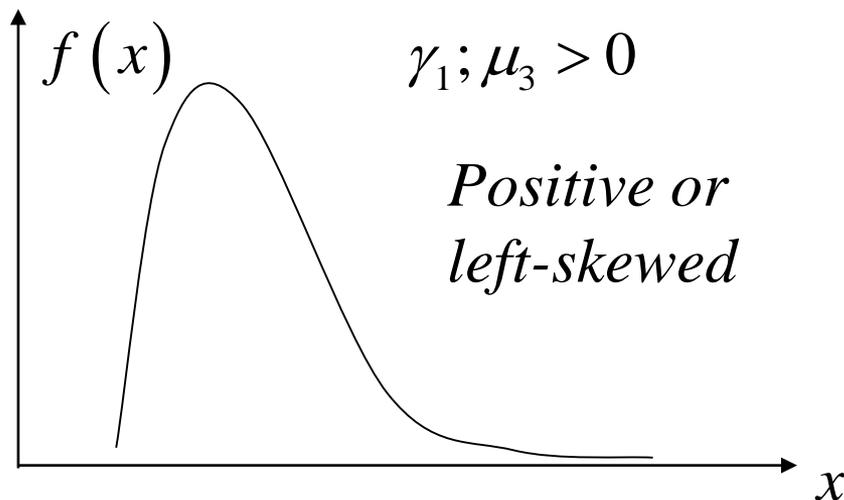
Momento centrale di ordine  $k$  (*central moment of  $k$ th order*)

$$\mu_1 = \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mu_k = E(X - E(X))^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx \quad \text{per } k > 1$$

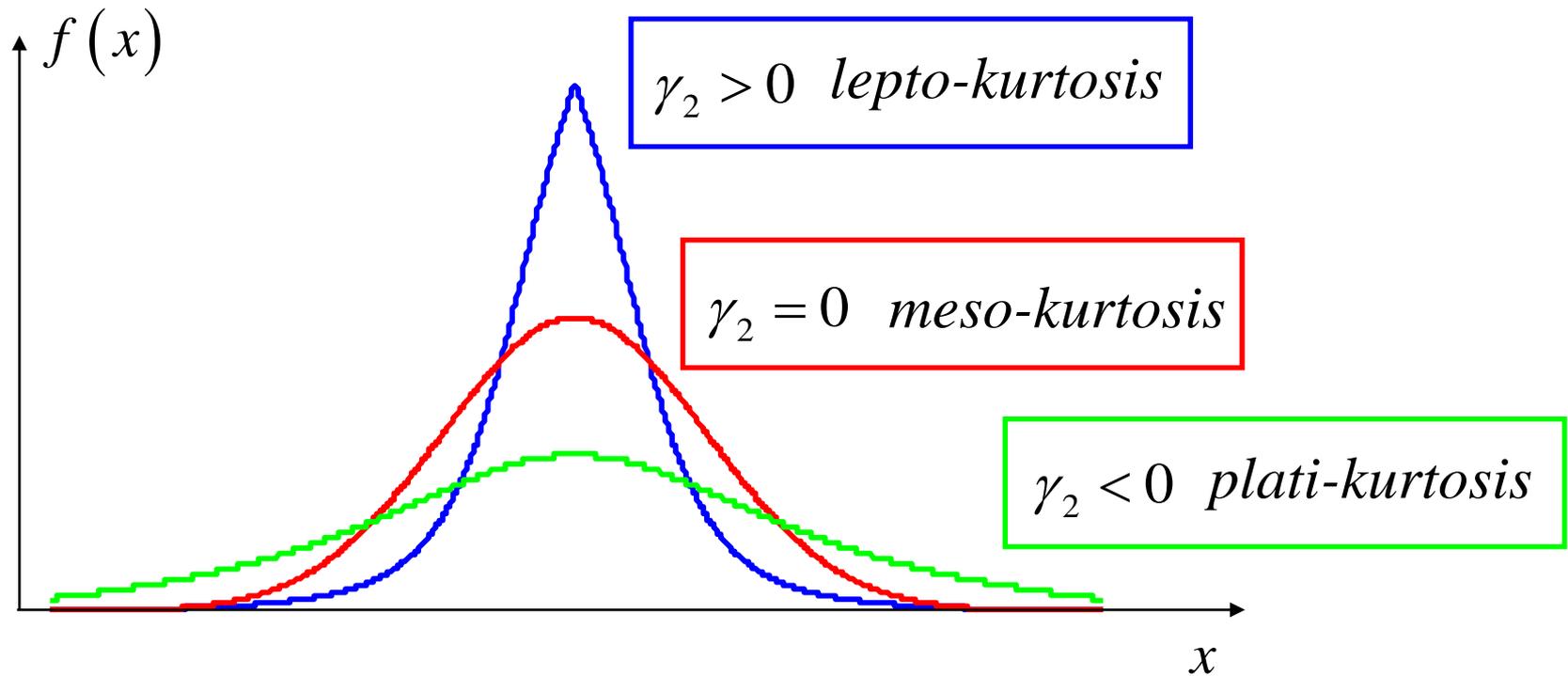
$$\mu_2 = \sigma^2$$

Skewness:  $\gamma_1 = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$



## Altre proprietà di forma

*Kurtosis:* 
$$\gamma_2 = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$



# Significati dei principali momenti

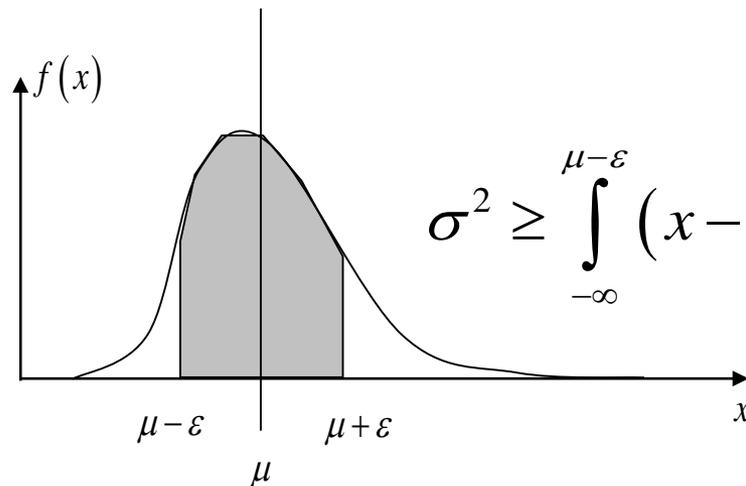
## Disuguaglianza di Tchebycheff

Sia  $X$  una V.A. con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|x - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Nota: relazione generale vale per ogni VA (continua o discreta)

Dimostrazione (per V.A. continua):



$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu + \varepsilon}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Per  $x \in \{-\infty, \mu - \varepsilon\}$  o  $\{\mu + \varepsilon, \infty\}$  si ha necessariamente:

$$|\varepsilon| \leq |x - \mu|$$

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu + \varepsilon}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \geq$$

$$\int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} \varepsilon^2 f(x) dx + \int_{\mu + \varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 f(x) dx = \varepsilon^2 \cdot \left( \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} f(x) dx + \int_{\mu + \varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right) =$$

$$= \varepsilon^2 \cdot P(|x - \mu| \geq \varepsilon)$$

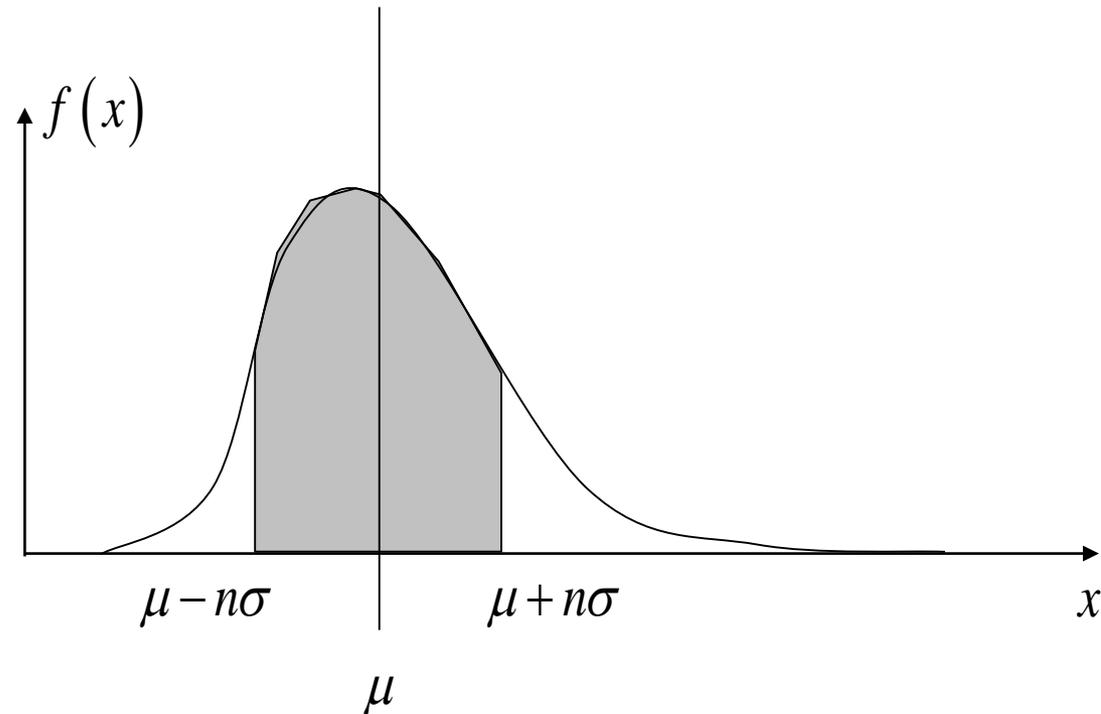
### **Esempio 4.3.**

Della V.A.  $x$  continua sappiamo solo che ha media 5 e deviazione standard 1, cosa si può dire sulla probabilità di estrarre un dato compreso tra 3 e 7?

$$\varepsilon = 2\sigma \quad P(|x - 5| \geq 2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$$

$$P(|x - 5| < 2) \geq 1 - 0.25 = 0.75$$

Per una VA qualunque quindi, la probabilità di stare in un intervallo centrale di semiampiezza  $n\sigma$  vale (sottostima):

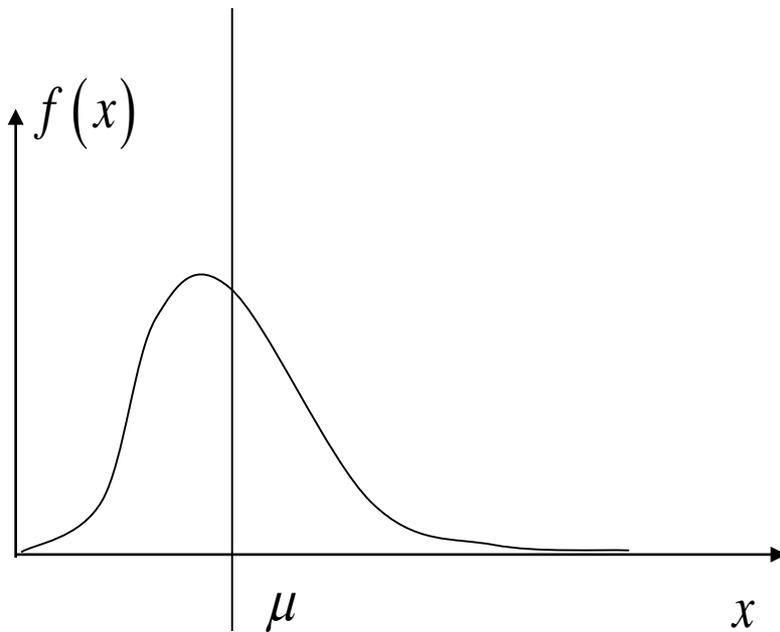


$$P\left(\frac{|x - \mu|}{\sigma} < n\right) > 1 - \frac{1}{n^2}$$

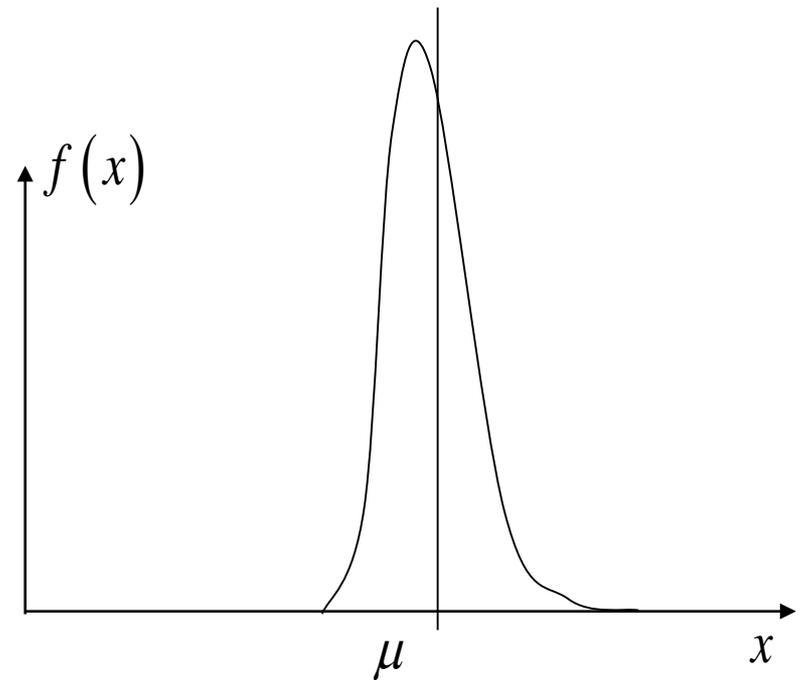
# Significati dei principali momenti: coefficiente di variazione

Deviazione standard relativa (*Relative standard deviation RSD*)

$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$$



*CV elevato*



*CV basso*

## Distribuzioni notevoli: normale o gaussiana (*normal, gaussian*)

Può essere ottenuta come caso limite della bernoulliana

### Esempio 4.4

Determinare la probabilità che, in cento lanci di monete, testa compaia almeno 45 volte ma non più di 60.

$$P = \sum_{k=45}^{60} B(k, 100, 0.5) = 0.8468$$

Il calcolo richiede la valutazione di fattoriali significativi.

Notiamo però che:

$n$  è grande ( $100 \gg 1$ )

$$\frac{|k - \mu|}{\sigma} \text{ è dell'ordine dell'unità } (\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5)$$

Dobbiamo valutare probabilità bernoulliane per **valori centrali** della distribuzione con  $n$  **elevato**

Sfruttiamo proprietà asintotiche per evitare il calcolo di fattoriali:

Teorema di DeMoivre-Laplace (basato sulla formula di Stirling)

$$\text{se } npq \gg 1 \text{ e } \frac{|k - np|}{\sqrt{npq}} \cong 1$$

$$B(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Usando questa formula nel caso precedente si ottiene:

$$npq = 25 \text{ e } \frac{|k - np|_{\max}}{\sqrt{npq}} = 2 \cong 1$$

$$P = \sum_{k=45}^{60} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} = 0.8470$$

Errore relativo dello 0.03%

# Estensione al continuo: distribuzione di densità normale o gaussiana

Tenendo conto che per la bernoullina:  $\mu = np$  e  $\sigma^2 = npq$   
come tentativo definiamo:

$$f(x) = N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

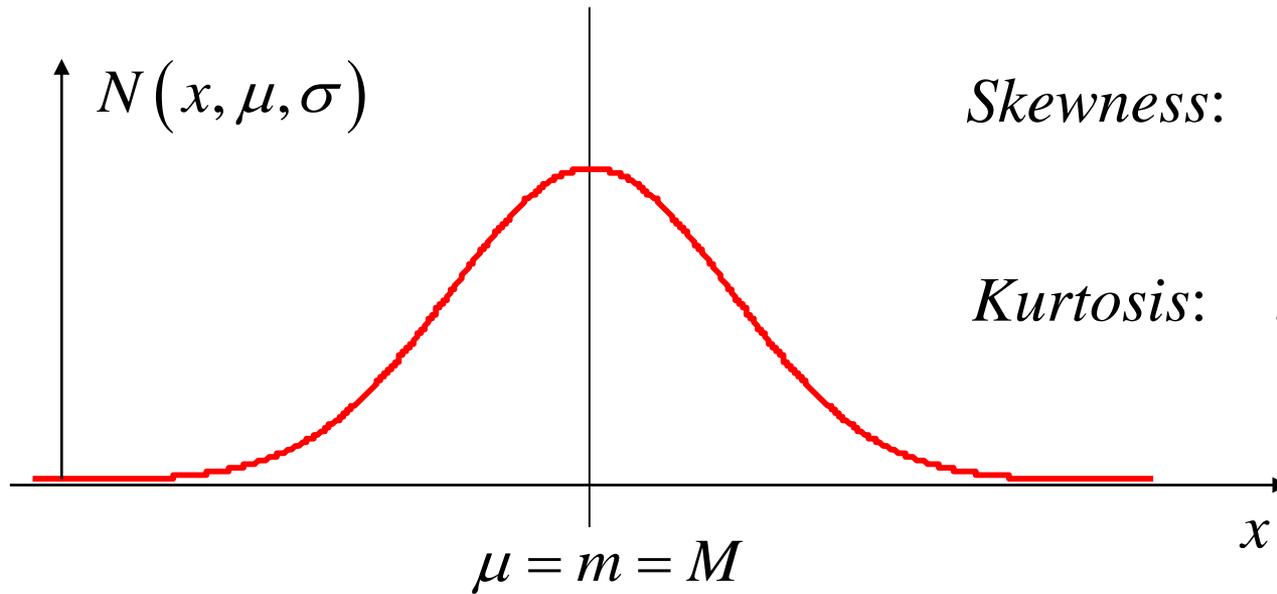
Da cui si ricava immediatamente che:

$$\forall x, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad N(x, \mu, \sigma) > 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} N(x, \mu, \sigma) \cdot dx = 1$$

e si verifica che, effettivamente, anche per la V.A. gaussiana continua  $x$  appena definita con distribuzione  $N(x, \mu, \sigma)$  valgono le relazioni:

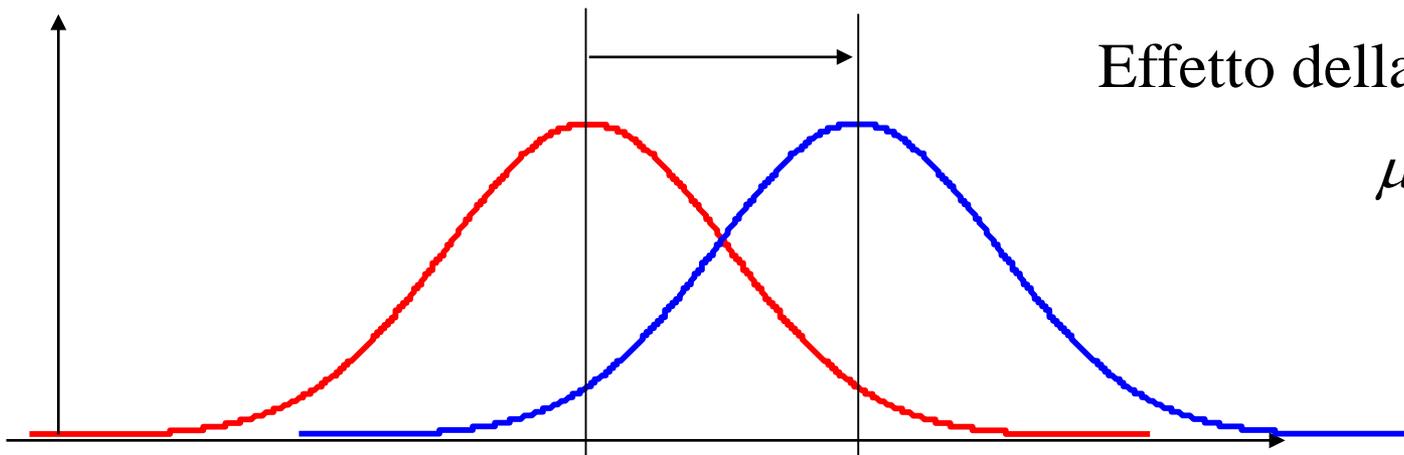
$$E(X) = \mu; \quad E(X - \mu)^2 = \sigma^2$$

# Proprietà della Gaussiana



*Skewness:*  $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

*Kurtosis:*  $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$

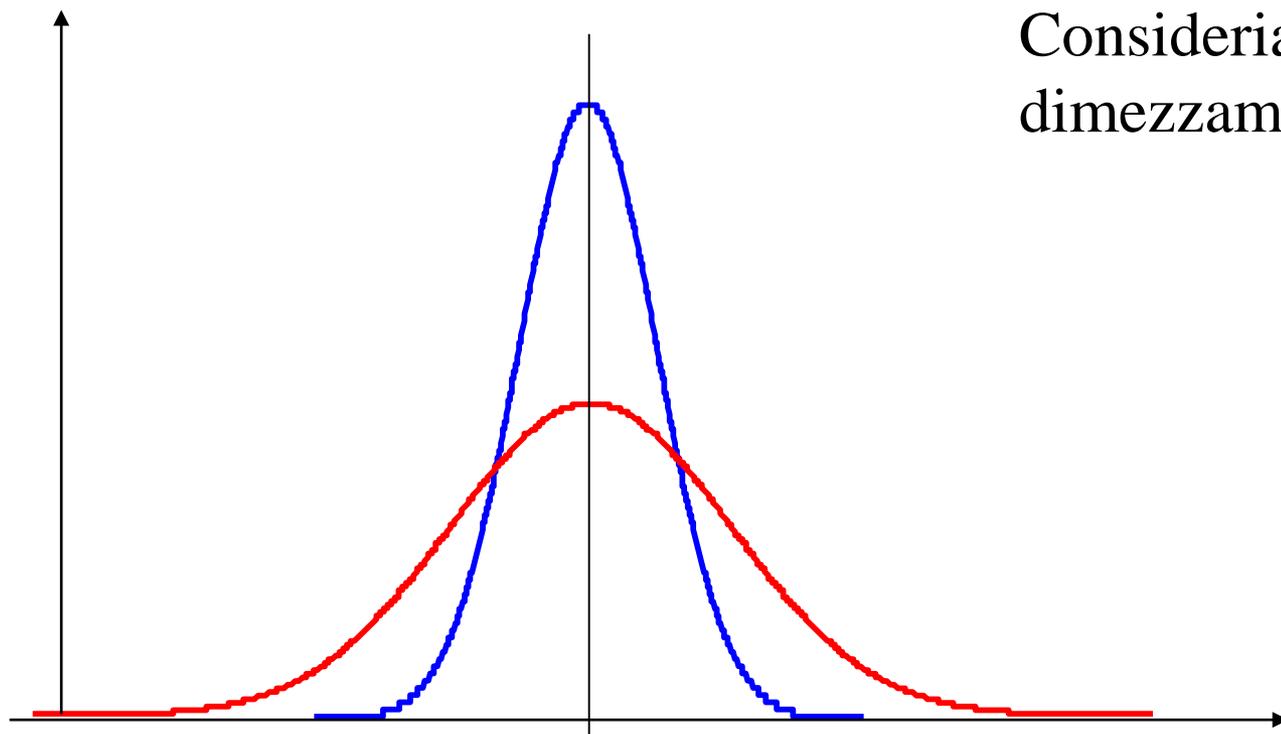


Effetto della modifica di

$\mu$

# Proprietà della Gaussiana

Effetto della modifica di  $\sigma$

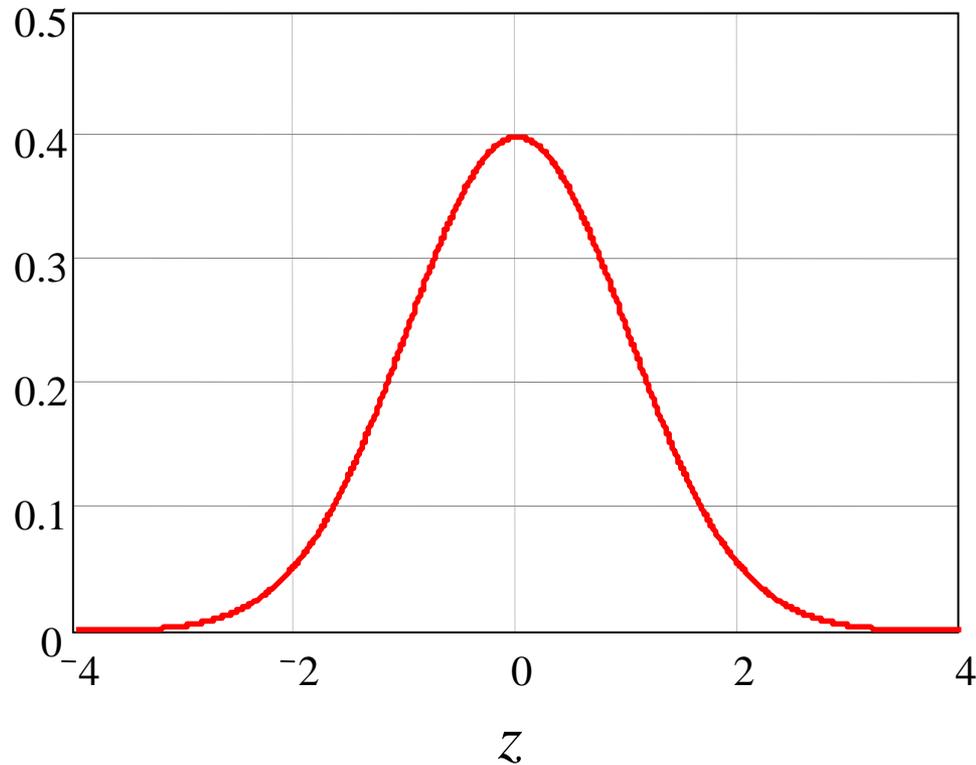


Consideriamo un dimezzamento

# Proprietà della Gaussiana

Le gaussiane sono quindi tutte uguali a meno di una traslazione e di una dilatazione-contrazione combinata in  $x-y$

$$N(z, 0, 1)$$



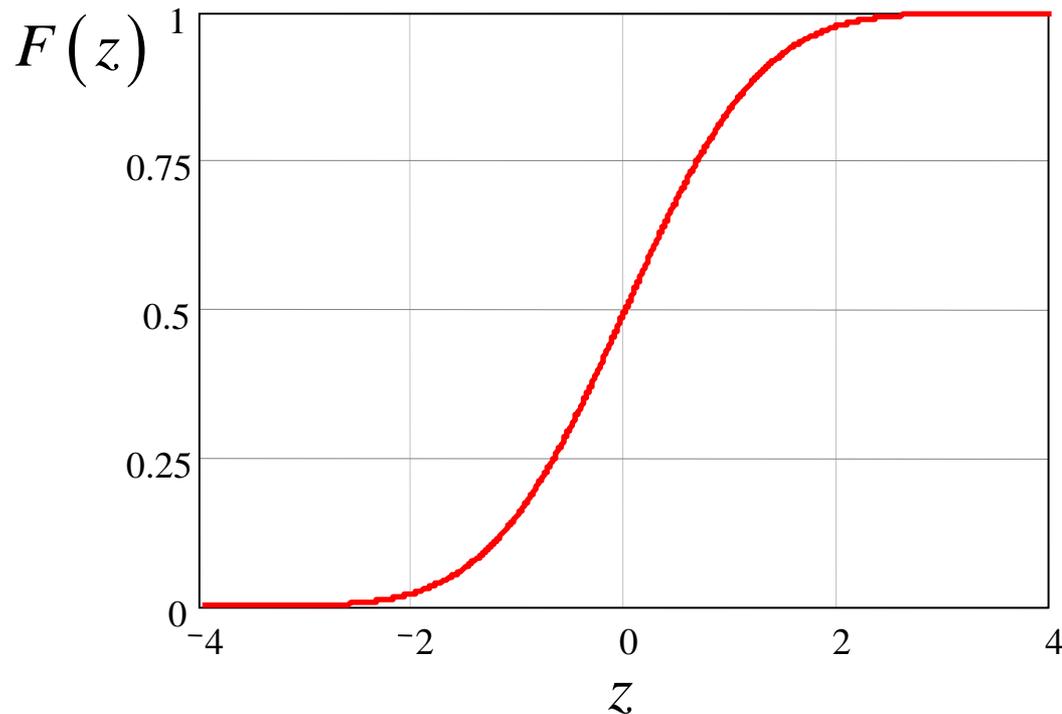
Curva normale standard:

$$x^* = z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

# Proprietà della Gaussiana

La gaussiana cumulata (standard) è data da:

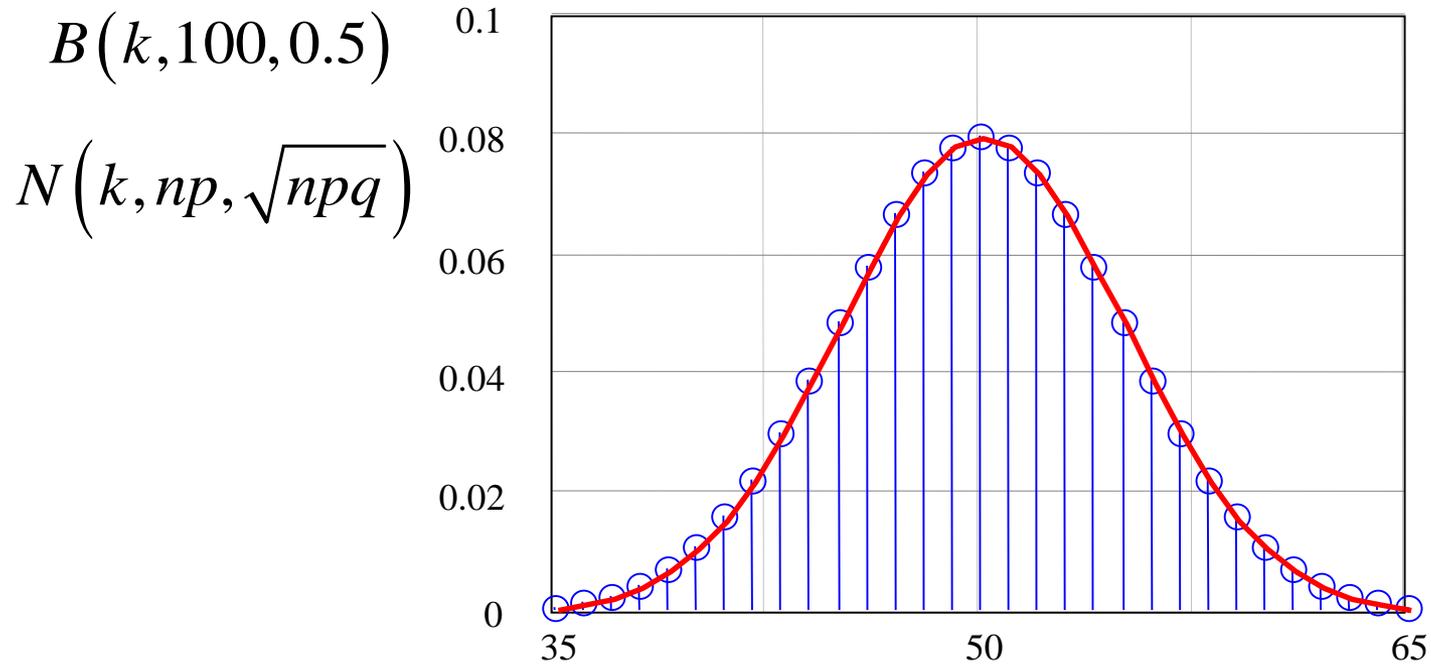
$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



$n$	$F(n) - F(-n)$
1	0.683
2	0.955
3	0.997

# Gaussiana vs Bernoulliana 1/2

$$n = 100; p = 0.5$$

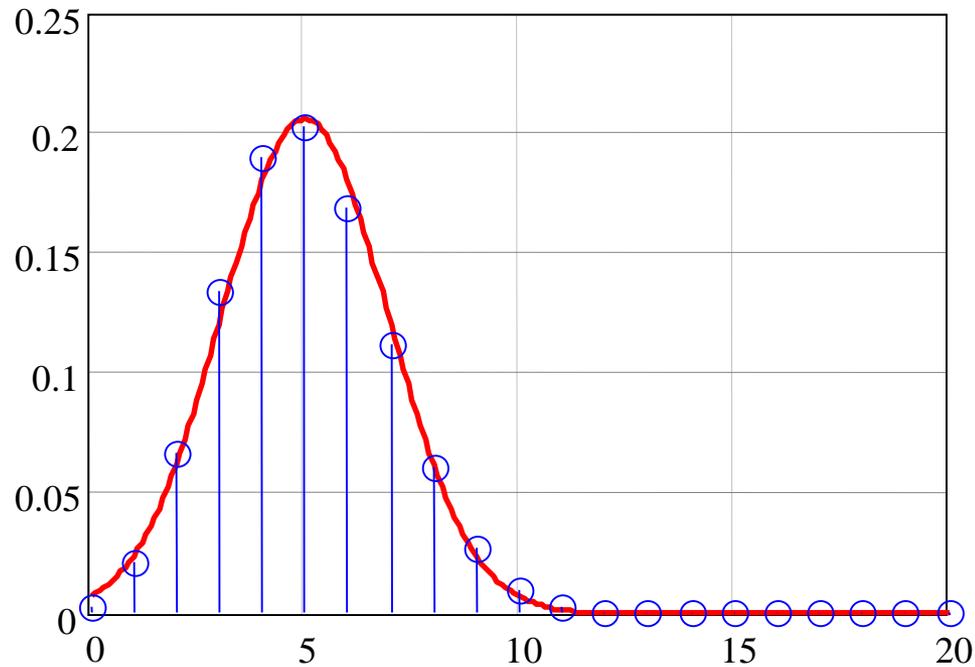


# Gaussiana vs Bernoulliana 2/2

$$n = 20; p = 0.25$$

$$B(k, 100, 0.5)$$

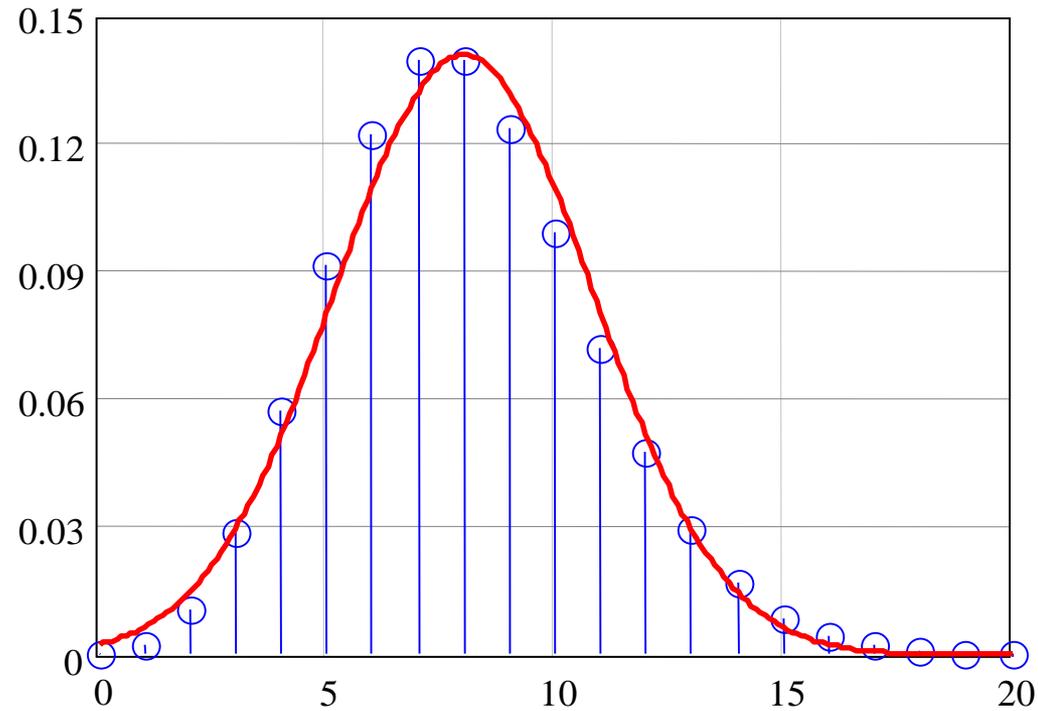
$$N(k, np, \sqrt{npq})$$



# Gaussiana vs Poissoniana 1/2

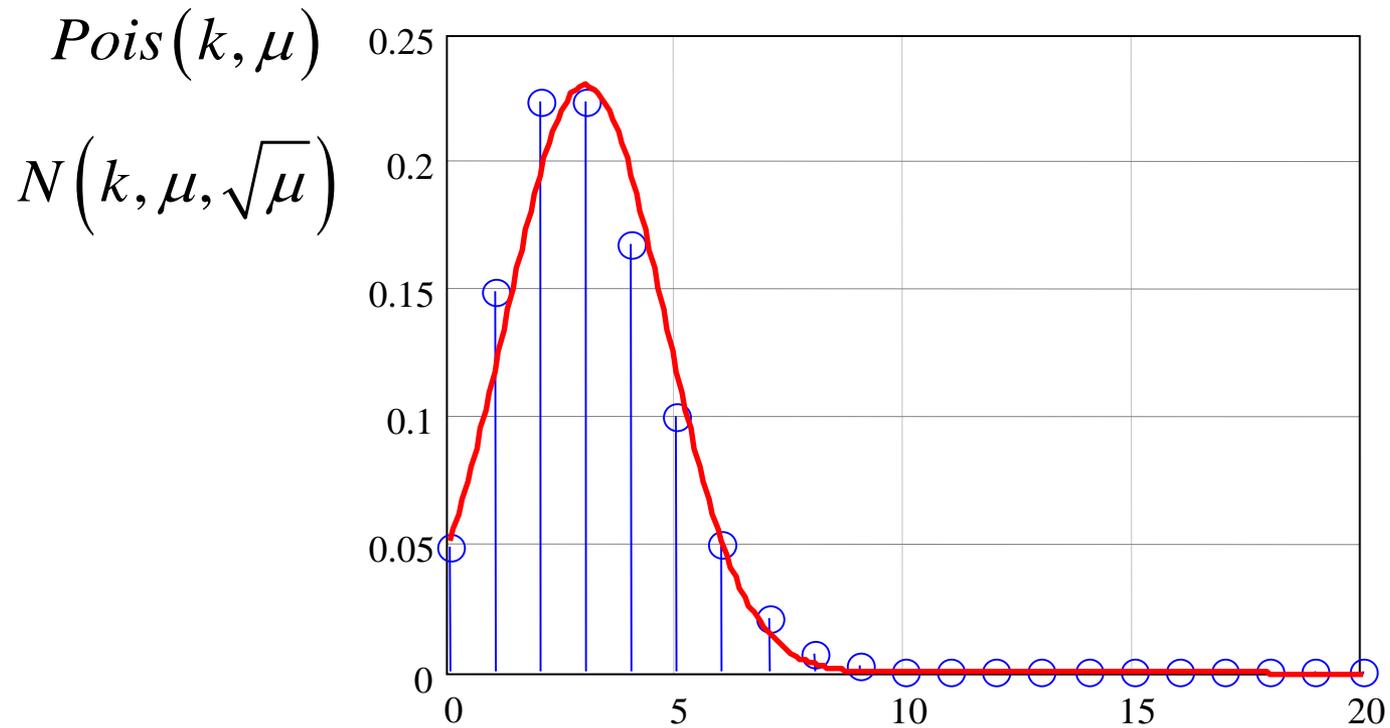
$$\mu = 8$$

$$Pois(k, \mu)$$
$$N(k, \mu, \sqrt{\mu})$$



# Gaussiana vs Poissoniana 2/2

$$\mu = 3$$



## Esempio 4.5

La tensione di snervamento di un acciaio è distribuita gaussianamente con parametri:  $\mu = 250 \text{ MPa}$ ;  $\sigma = 20 \text{ MPa}$

- 1) Determinare la tensione massima applicabile perché la probabilità di snervamento sia inferiore a 1%
- 2) Valutare la percentuale di provini che snervano se si applica una tensione di 275MPa

$$F(z) = 0.01$$

$$z_1 = F^{-1}(0.01) = -2.326$$

$$\frac{x_1 - \mu}{\sigma} = -2.326 \Rightarrow x_1 = 204 \text{ MPa}$$

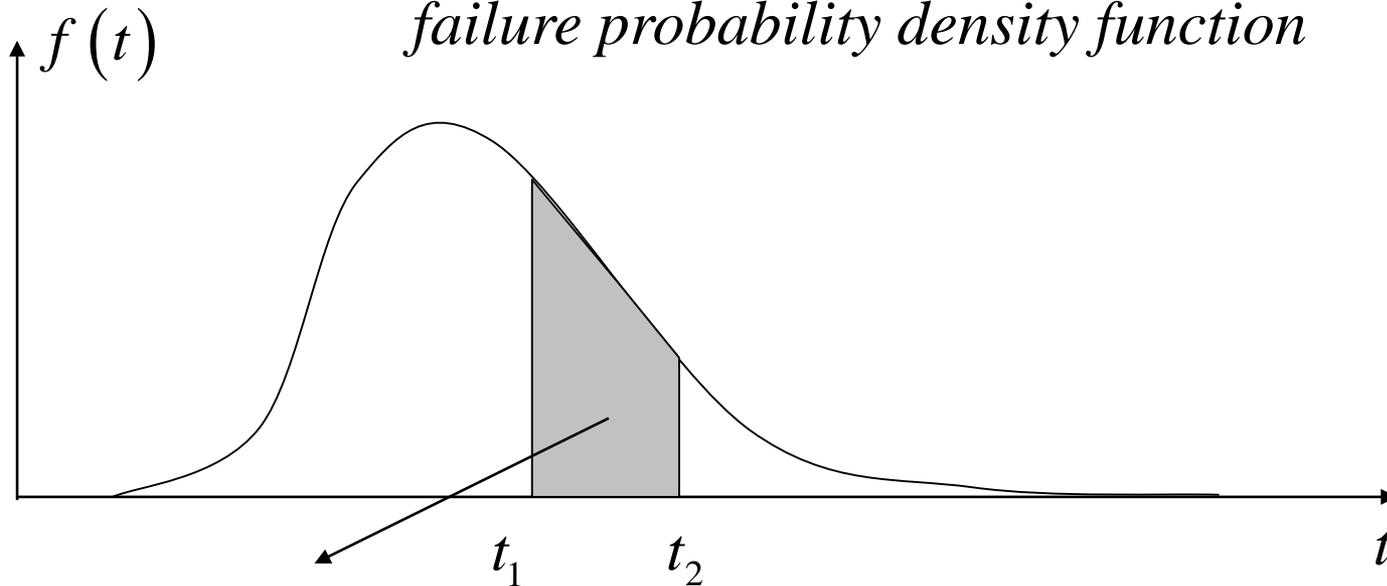
$$z_2 = \frac{275 - 250}{20} = 1.25$$

$$F(z_2) = 0.894$$

# Definizioni affidabilistiche variabile aleatoria continua: tempo di guasto

Affidabilità (*reliability*)

Densità di probabilità di guasto  
*failure probability density function*

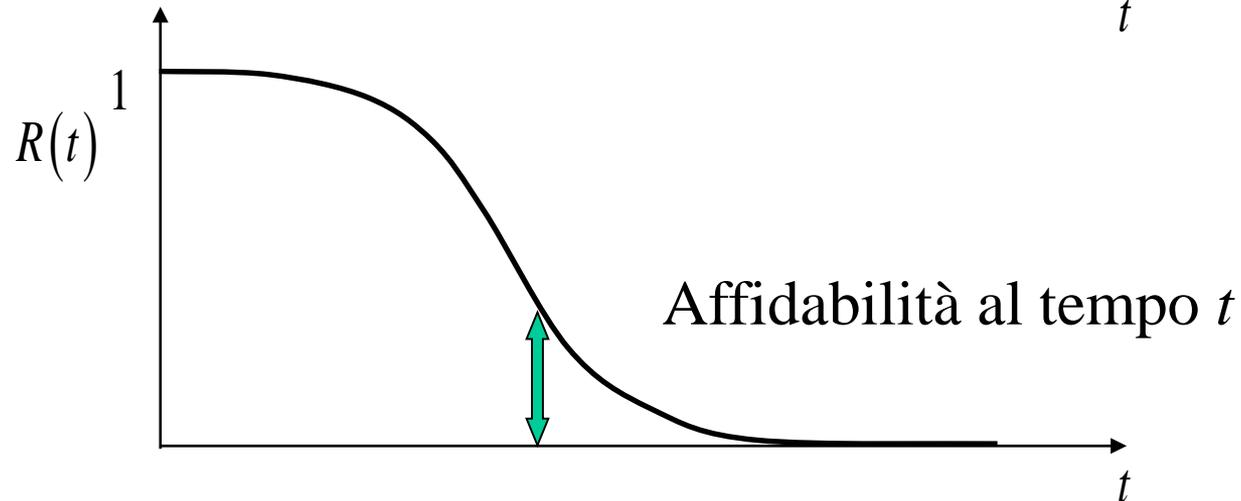
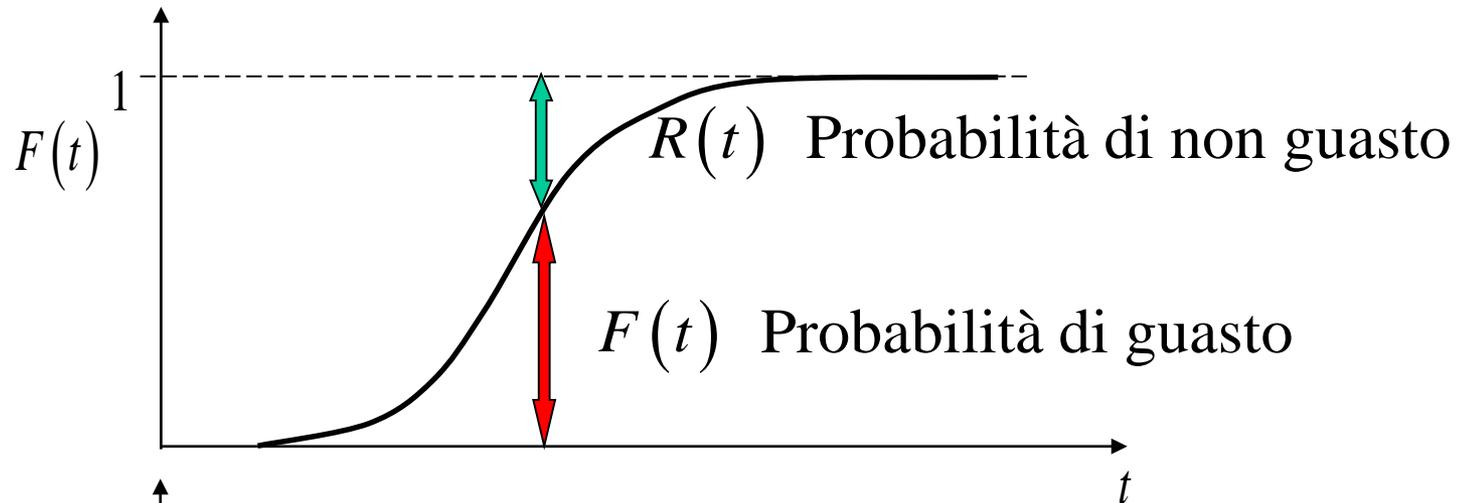


$$P(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Tempo di vita o di funzionamento  
*operative life*

**Reliability:** the probability that a device will perform its intended function during a specified period of time under stated conditions

$$R(t) = P(t_g > t) = \int_t^{\infty} f(t_g) dt_g = 1 - F(t)$$



## Tasso di guasto (*hazard rate*)

Consideriamo una popolazione di  $N_0$  elementi che al tempo  $t_1$  sono  $N_1$ , al tempo  $t_2$ , dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , si sono ridotti a  $N_2$ , si definisce **tasso di guasto medio** nell'intervallo  $t_1 - t_2$  il valore:

$$\bar{h}(t_1, t_1 + \Delta t) = \frac{N_1 - N_2}{\Delta t} = \frac{1}{N_1} \frac{-\Delta N}{\Delta t}$$

riduzione relativa media di componenti nell'unità di tempo.

Passando al limite:

$$h(t_1) = \lambda(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{N_1} \frac{-\Delta N}{\Delta t}$$

Ma, al limite:

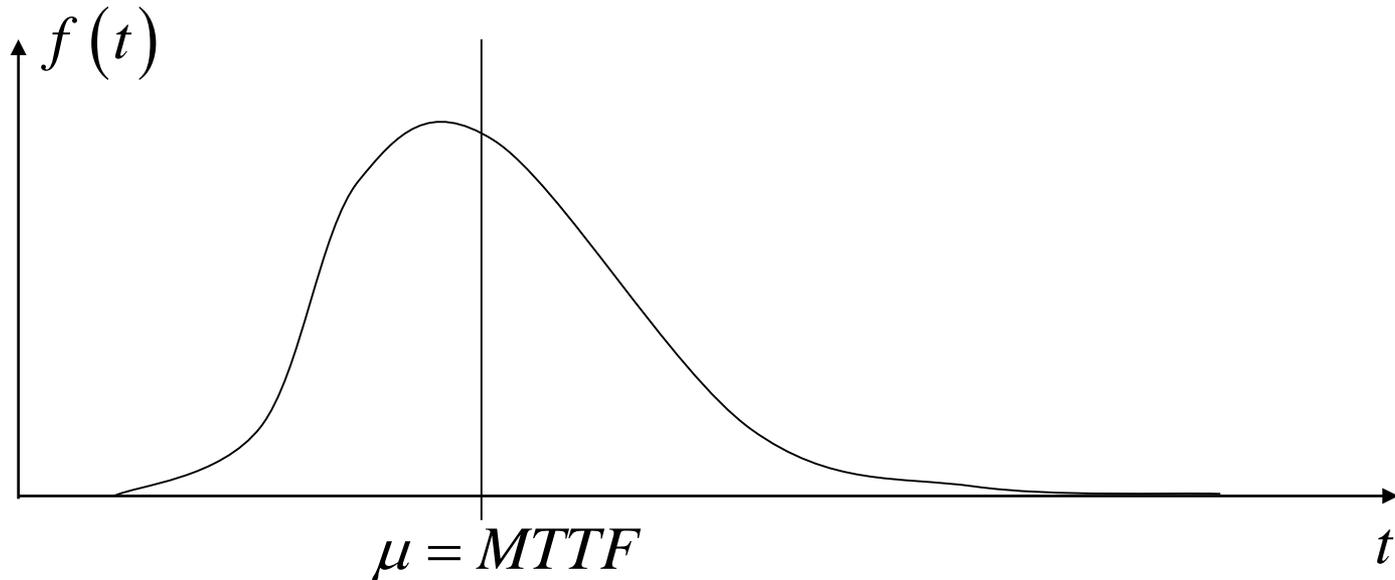
$$-\Delta N = N_0 \cdot f(t_1) \cdot \Delta t$$

$$N_1 = N_0 \cdot R(t_1)$$

$$h(t) = \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

# Definizioni affidabilistiche

## *MTTF mean time to failure*



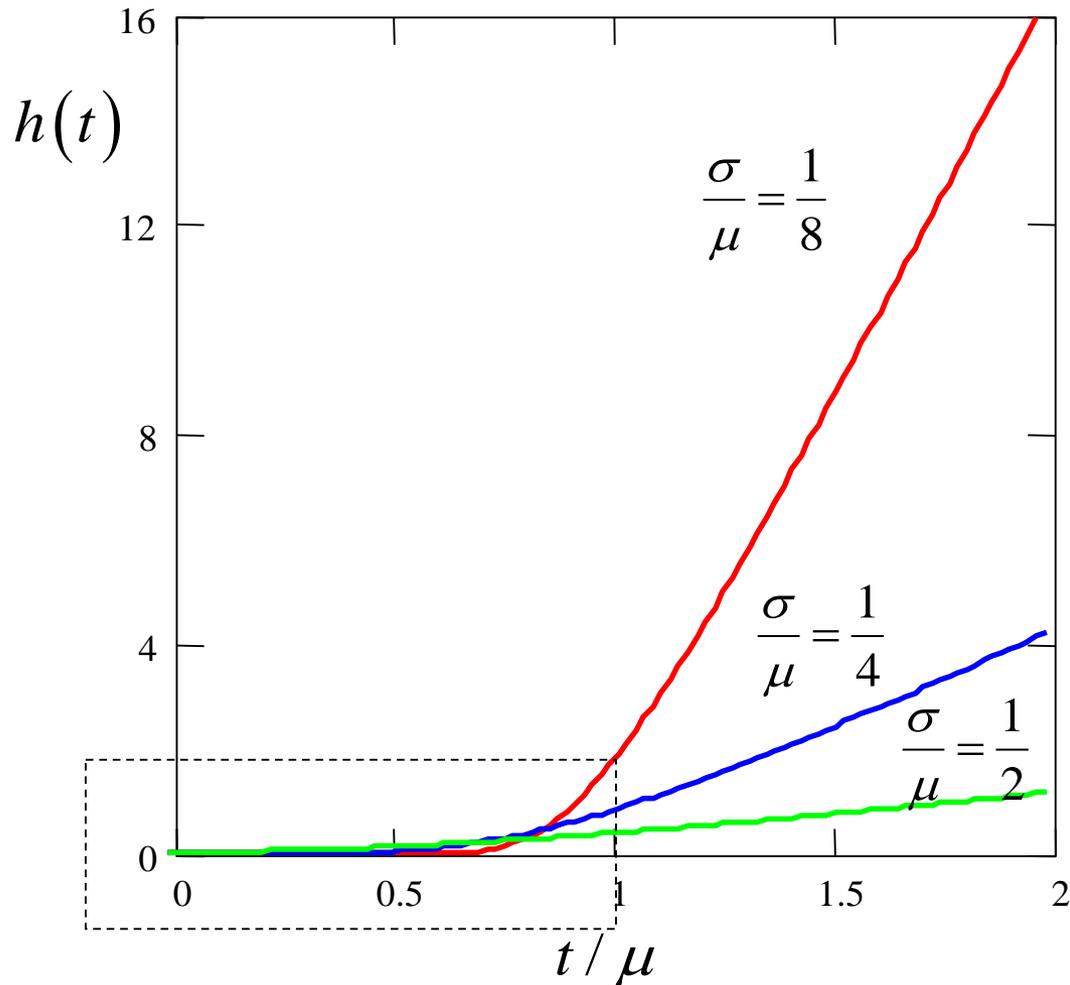
**Esercizio 4.2.** Un componente ha una distribuzione di tempo di guasto gaussiana con  $MTTF=30h$  e deviazione standard  $5h$ . Considerando di averne posti in esercizio contemporaneamente  $2500$ , determinare:

- 1) dopo quanto tempo ( $t_1$ ) l'affidabilità si riduce al 70% (ris.  $27.4h$ )
- 2) Il tasso di guasto al tempo  $t_1$  (ris.  $0.099h^{-1}$ )
- 3) Quanti elementi si presume si rompano nei 5 minuti che seguono  $t_1$  (ris.  $14.5$ )

	A	B	C	D	E	F	G
1	media	sd	Prob. Gua	aff	N° elem		
2	30	5	0.3	0.7	2500		
3	t1=ore per affidab al 70%						
4	27.378		funzione INV.NORM(C2;A2;B2)				
5							
6	Tasso di guasto al tempo t1						
7	0.099341		FUNZIONE DISTRIB.NORM(A4;A2;B2;FALSO)/D2				
8							
9	Elementi che si rompono nei 5 minuti che seguono t1						
10	14.48719		funzione A7*5/60*E2*D2				

# Tasso di guasto per la gaussiana

$$h(t) = \lambda(t) = \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^\infty e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du}$$



# Tasso di guasto per la gaussiana

Andamento prima del MTTF

