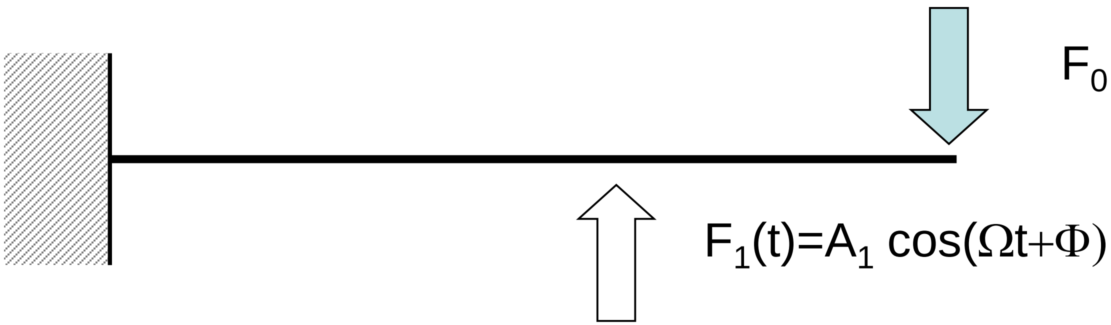
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

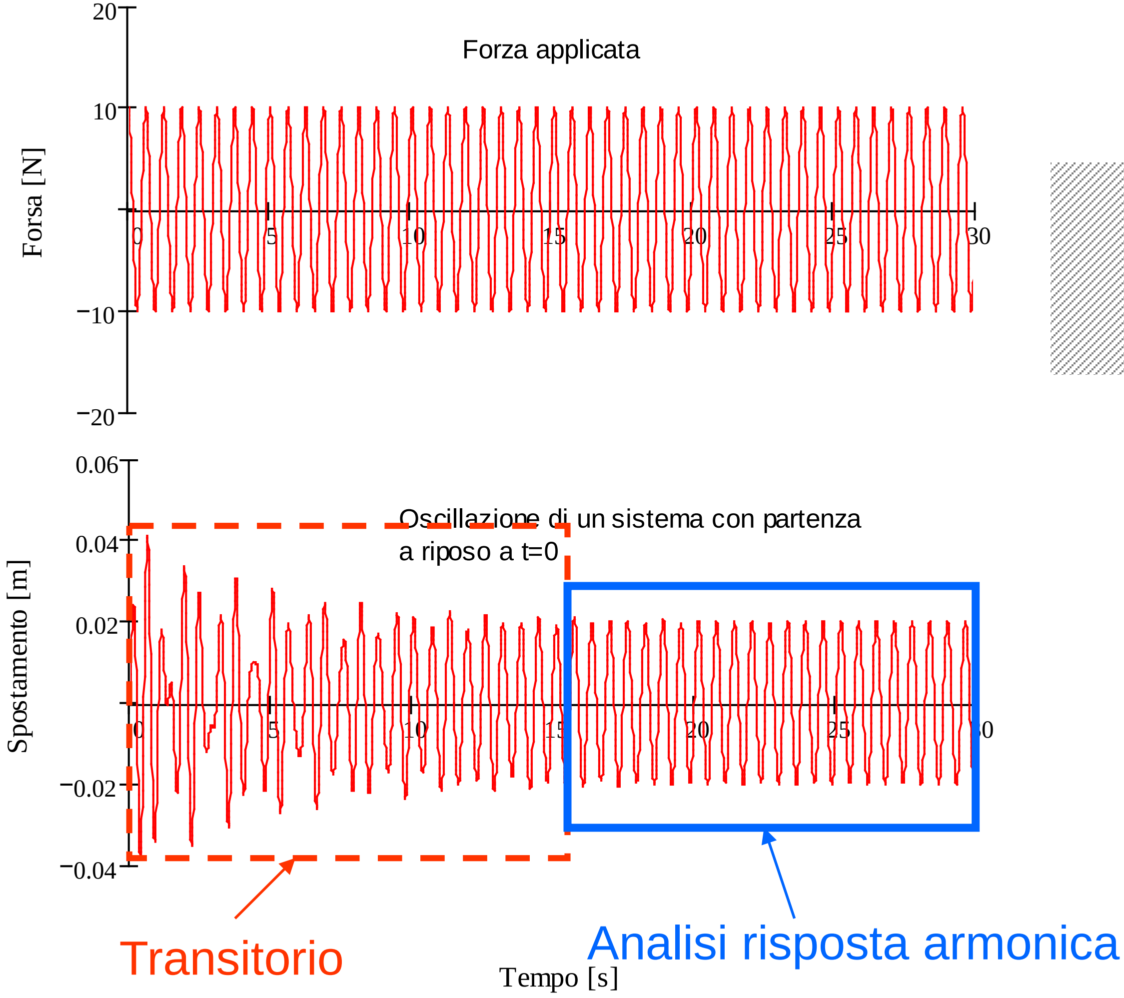
SCOPO: Valutare la risposta del sistema in presenza di una forzante esterna di tipo sinusoidale ed ampiezza costante nel tempo.

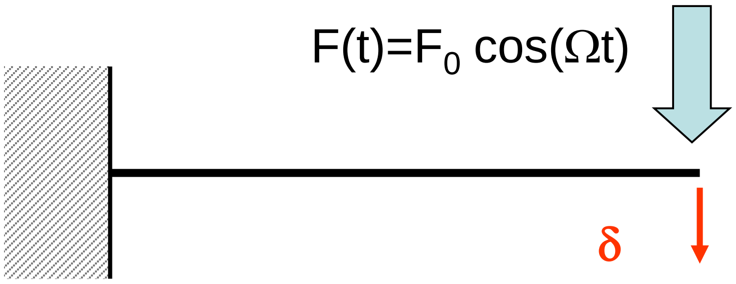


Su di una struttura, la “forzante” è in generale costituita da una o più forze esterne, aventi tutte la stessa pulsazione, ma ampiezza e fase distinte.

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

Se si applica la forzante a partire dall'istante t=0, con la struttura inizialmente a riposo, la risposta mostra un transitorio iniziale, che si esaurisce dopo un certo tempo, dopodiché la struttura oscilla con ampiezza costante.



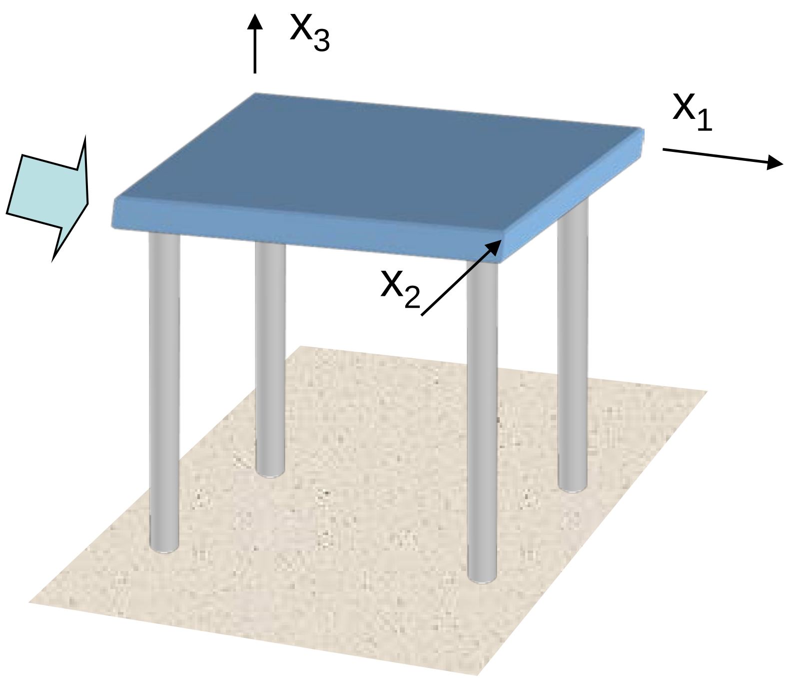


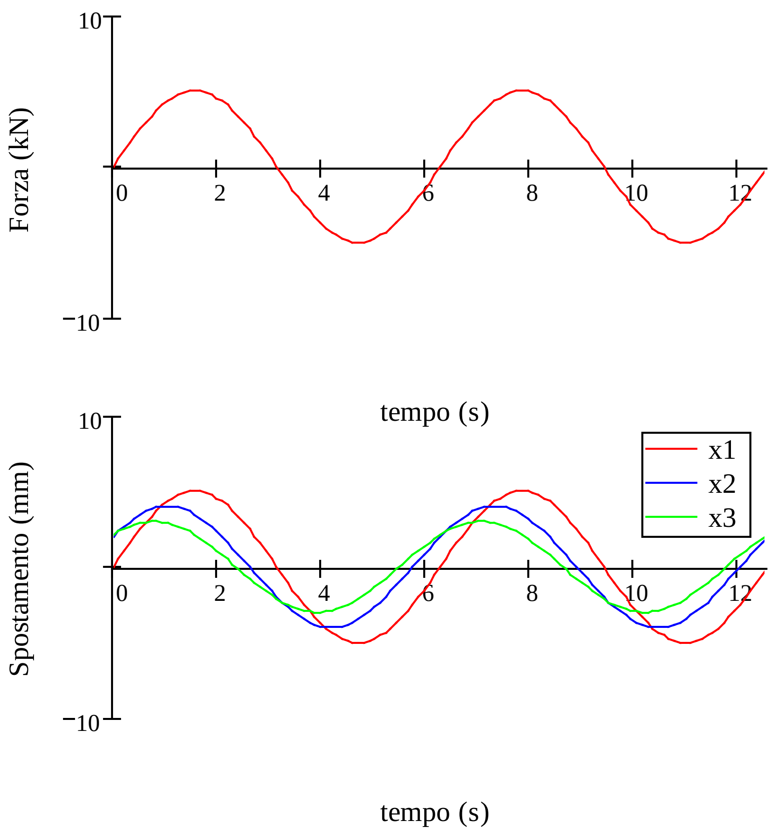
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

Ipotesi: comportamento lineare della struttura ([M], [C] e [K] costanti)

I vari g.d.l. della struttura vibrano con una legge del moto avente:

- andamento nel tempo di tipo sinusoidale
- pulsazione uguale a quella della forzante
- ampiezza e fase variabili da punto a punto





ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

$$[M]\{\ddot{U}\}+[C]\{\dot{U}\}+[K]\{U\}=\{F(t)\}$$

$$\{F(t)\}=\left\{\begin{matrix} \boxed{f_{1\max}}\cdot\cos(\Omega t\boxed{+\psi_1}) \\ \boxed{f_{2\max}}\cdot\cos(\Omega t\boxed{+\psi_2}) \\ - \\ - \\ \boxed{f_{j\max}}\cdot\cos(\Omega t\boxed{+\psi_j}) \\ - \\ - \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} f_{1\max}\cdot e^{i\psi_1}\cdot e^{i\Omega t} \\ f_{2\max}\cdot e^{i\psi_2}\cdot e^{i\Omega t} \\ - \\ - \\ f_{j\max}\cdot e^{i\psi_j}\cdot e^{i\Omega t} \\ - \\ - \end{matrix}\right\}=\{f_{\max}\cdot e^{i\psi}\}e^{i\Omega t}$$

$$\{F(t)\}=\{f_{\max}\cdot e^{i\psi}\}e^{i\Omega t}=\{f_{\max}(\cos(\psi)+i\cdot\sin(\psi))\}e^{i\Omega t}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

$$\boxed{\begin{aligned}\{U(t)\} \\ \{\dot{U}(t)\} \\ \{\ddot{U}(t)\}\end{aligned}}$$

$$\{U(t)\} = \{u_{\max} \cdot e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t} = \{u_{\max} (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))\} e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{U}(t)\} = i\Omega \{u_{\max} \cdot e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{U}(t)\} = -\Omega^2 \{u_{\max} \cdot e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t}$$

$$\boxed{\{F(t)\}} = \{f_{\max} \cdot e^{i\psi}\} e^{i\Omega t}$$

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$

$$-\Omega^2 [M] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} \cancel{e^{i\Omega t}} + i\Omega [C] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} \cancel{e^{i\Omega t}} + [K] \{u_{\max} e^{i\varphi}\} \cancel{e^{i\Omega t}} = \{f_{\max} e^{i\psi}\} \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\left(\left([K] - \Omega^2 [M]\right) + i\Omega [C]\right) \{u_{\max} e^{i\varphi}\} = \{f_{\max} e^{i\psi}\}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MD

<u>Principali tecniche di soluzione:</u>
- Metodo diretto
- Metodo di sovrapposizione modale

Soluzione: **metodo diretto (MD)**

$$\boxed{\left(\left([K]-\Omega^2[M]\right)+i\Omega[C]\right)}\left\{u_{\max}e^{i\varphi}\right\}=\left\{f_{\max}e^{i\psi}\right\}$$

$$[K_c]\left\{u_{\max}e^{i\varphi}\right\}=\left\{f_{\max}e^{i\psi}\right\}$$

$$\left\{u_{\max}e^{i\varphi}\right\}=[K_c]^{-1}\left\{f_{\max}e^{i\psi}\right\}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

Soluzione: **metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

Si pone:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t)$$

In presenza di «Classical Damping» (Es. smorzamento proporzionale) la matrice [C], come le matrici [M] e [K], viene diagonalizzata dalla matrice modale del sistema non smorzato, per cui il sistema:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$

si riduce ad «N» equazioni disaccoppiate, del tipo:

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \{\Phi\}_k^T \{F(t)\} = f_k$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = f_k$$

$$f_k = \left(f_{k,\max} e^{i\psi_k} \right) e^{i\Omega t} = f_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$q_k = Q_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$\dot{q}_k = i\Omega Q_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{q}_k = -\Omega^2 Q_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Q_{kc} \cancel{e^{i\Omega t}} + 2\xi_k \omega_k i\Omega Q_{kc} \cancel{e^{i\Omega t}} + \omega_k^2 Q_{kc} \cancel{e^{i\Omega t}} = f_{kc} \cancel{e^{i\Omega t}}$$

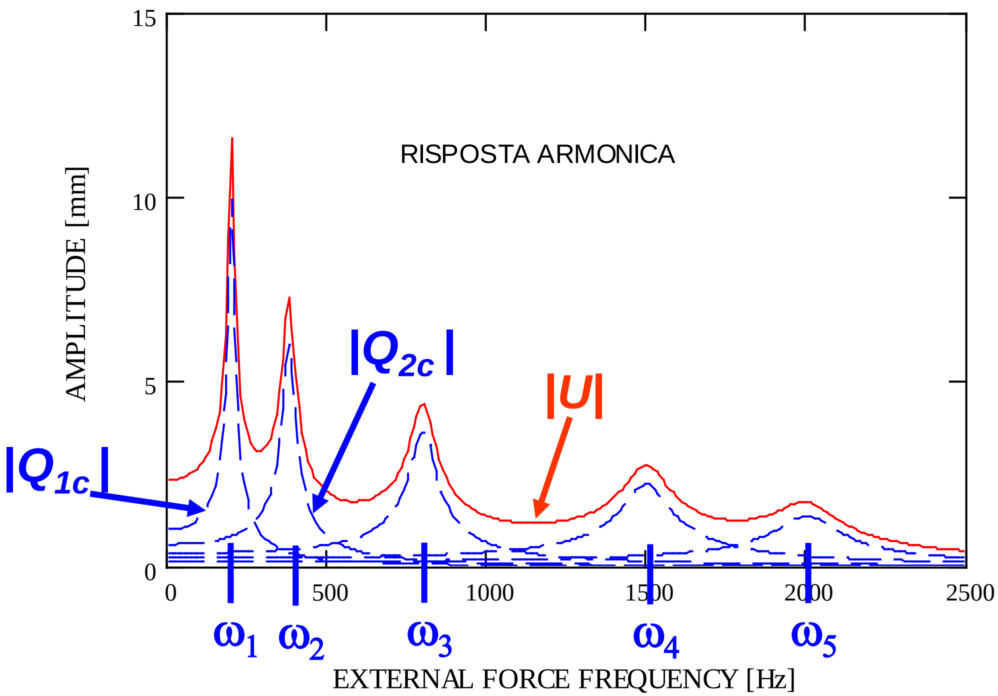
$$\left(\omega_k^2 - \Omega^2 + 2i\xi_k \omega_k \Omega \right) Q_{kc} = f_{kc}$$

$$\boxed{Q_{kc} = \frac{f_{kc}}{\left(\omega_k^2 - \Omega^2 \right) + 2i\xi_k \omega_k \Omega}}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$Q_{kc} = \frac{f_{kc}}{\left(\omega_k^2 - \Omega^2\right) + 2i\xi_k \omega_k \Omega} =$$

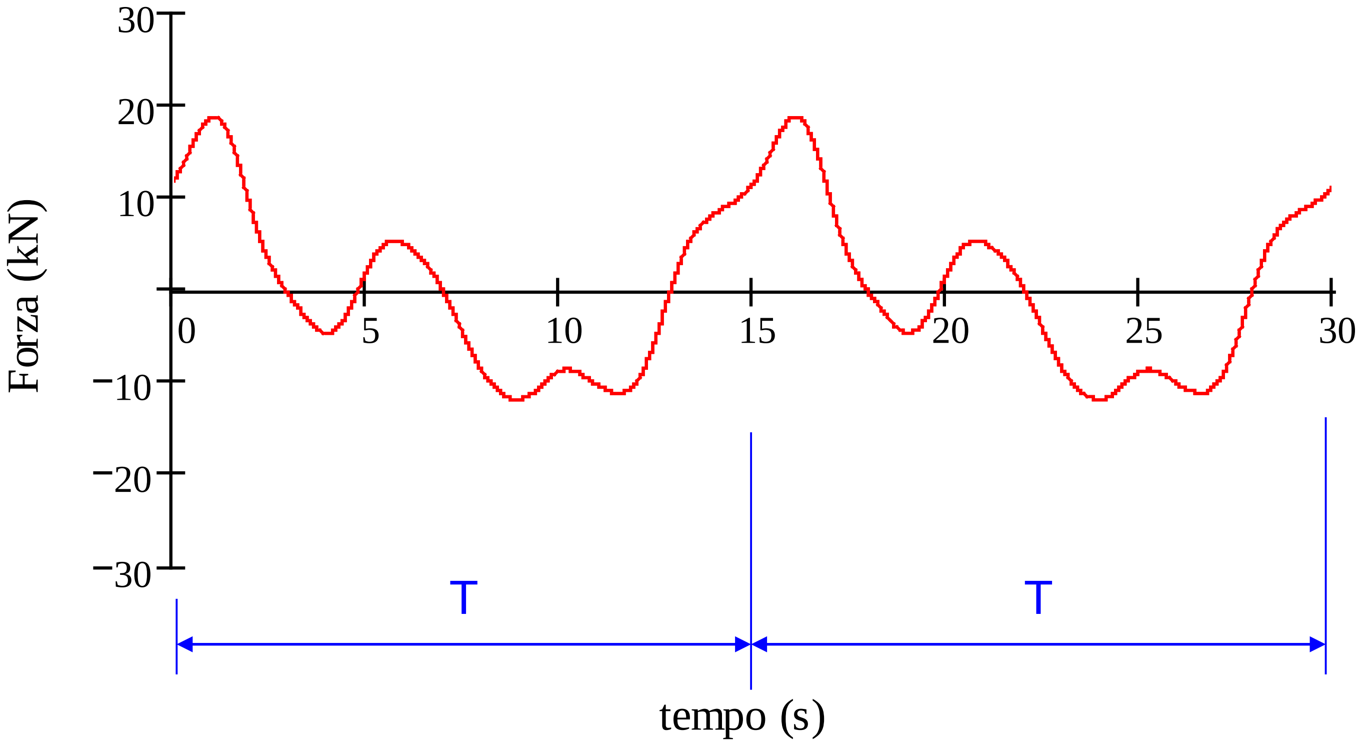
$$= \frac{\dfrac{f_{kc}}{\omega_k^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_k^2}\right)^2 + \left(2\xi_k \dfrac{\Omega}{\omega_k}\right)^2}}$$



$$\{U(t)\} = \sum_{k=1}^{n_{MP}} \{Y^{(k)}\} Q_{kc} e^{i\Omega t} = \left(\sum_{k=1}^{n_{MP}} \{Y^{(k)}\} Q_{kc} \right) e^{i\Omega t}$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

Forzanti: le forzanti esterne agenti sulla struttura hanno generalmente un andamento nel tempo di tipo periodico, ma non armonico.



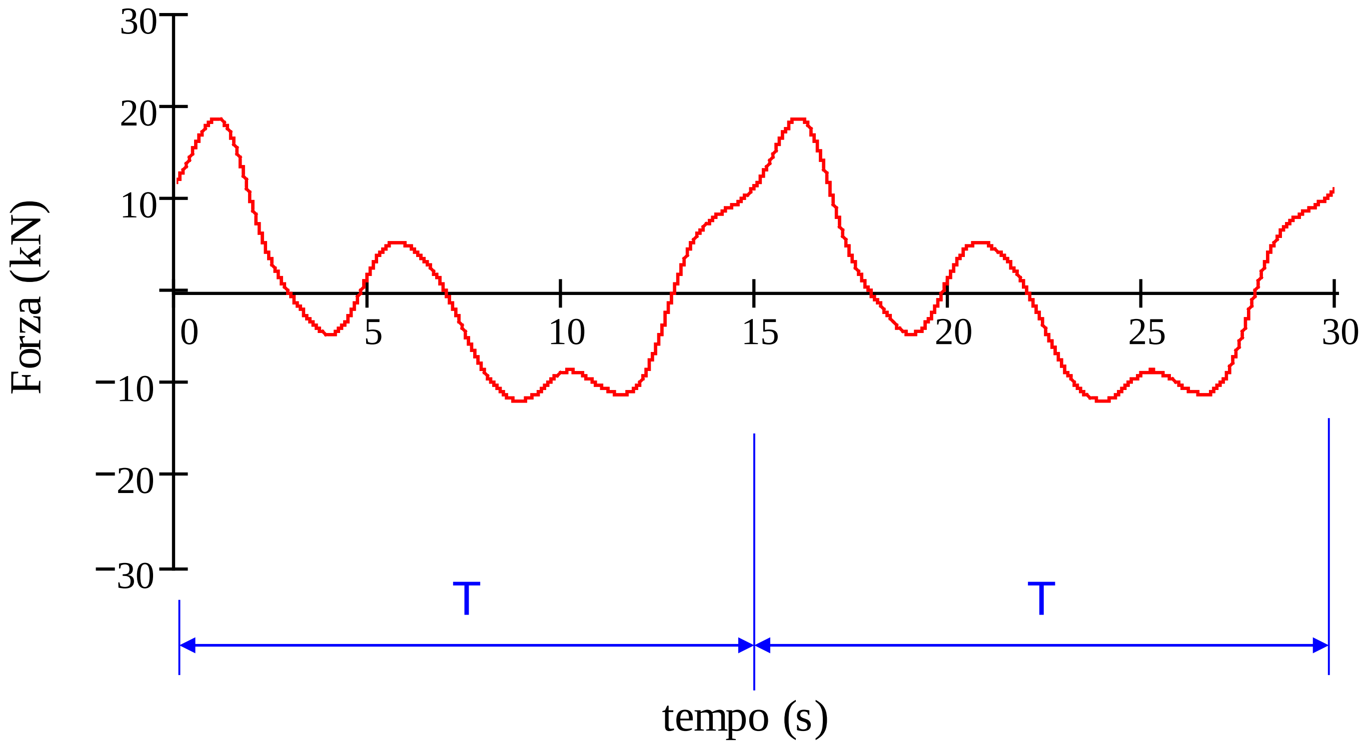
Per determinare il loro effetto sulla struttura è quindi necessario:

- scomporre la forzante in una somma di funzioni armoniche (serie di Fourier)
- ottenere la risposta complessiva tramite la sovrapposizione degli effetti

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

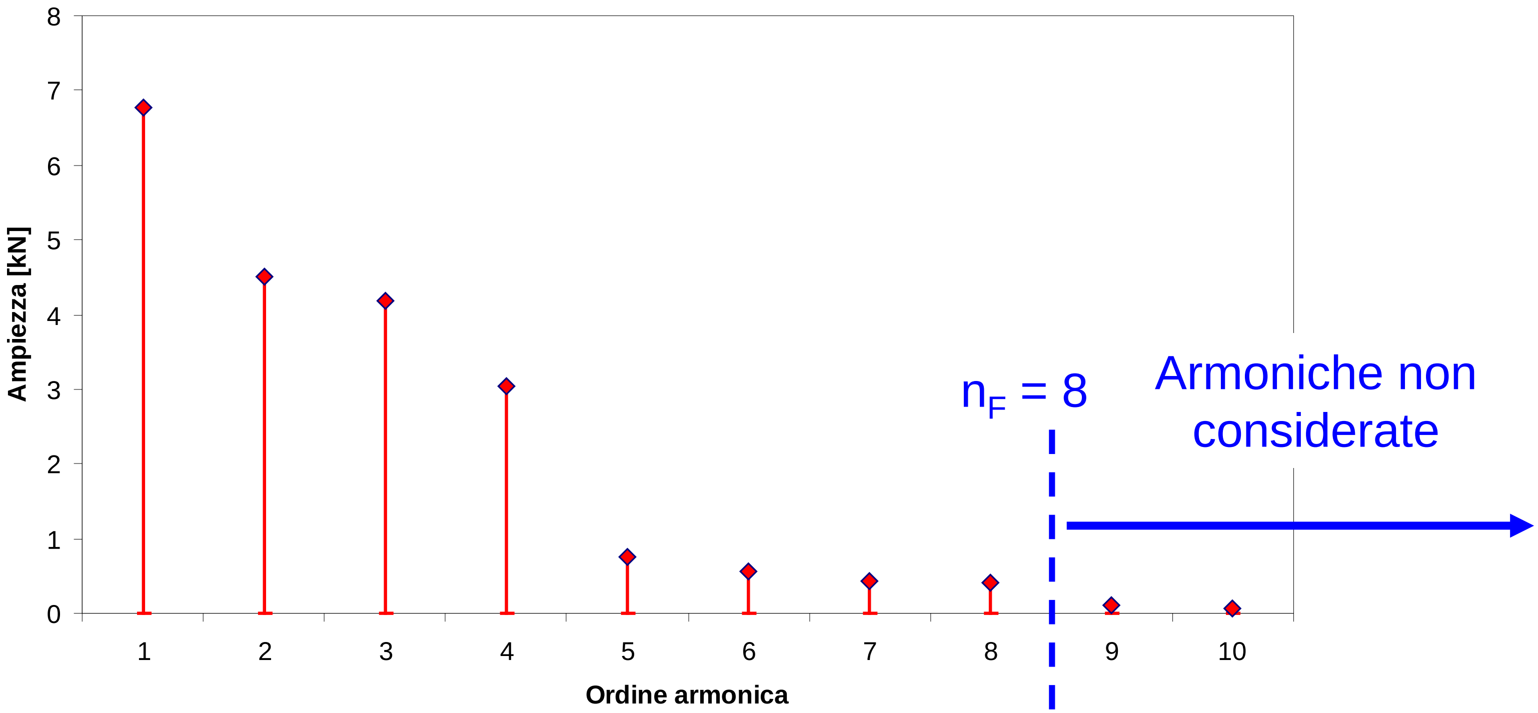
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right) \cong A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$



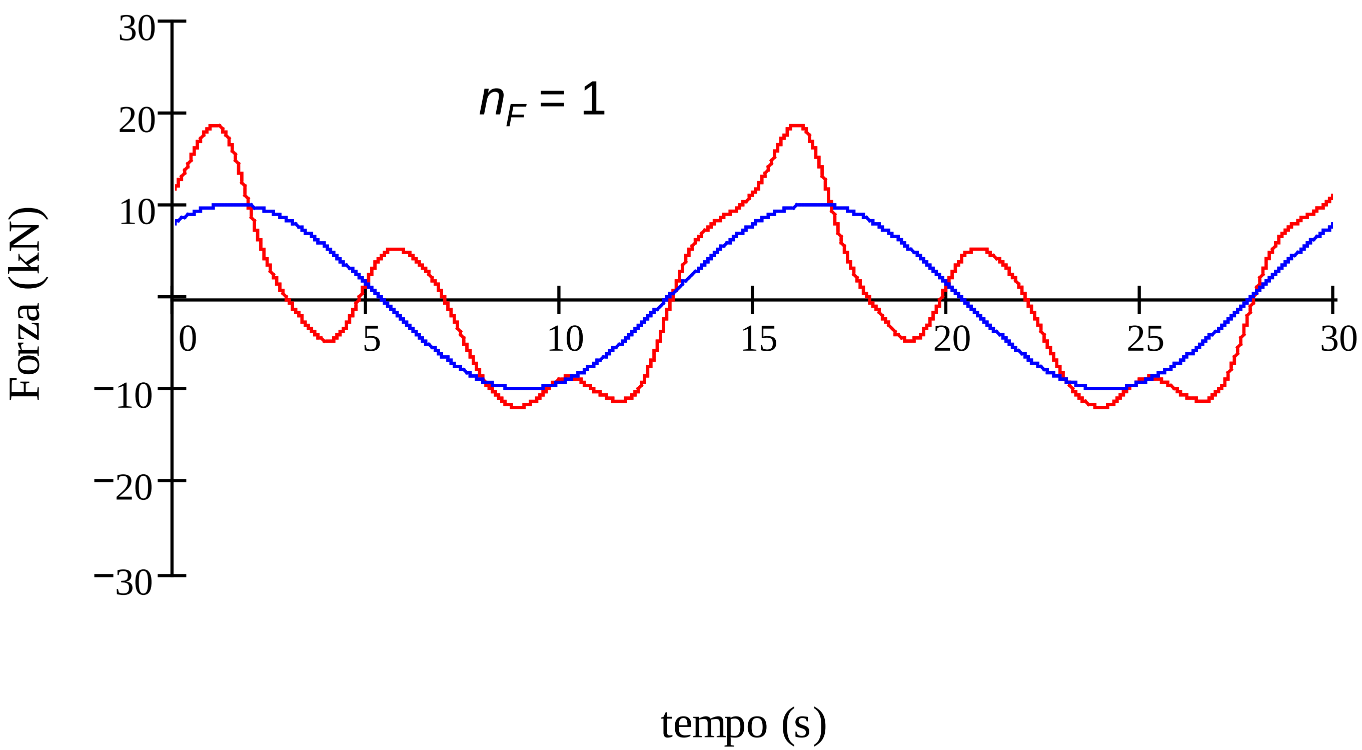
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

Andamento tipico delle ampiezze delle diverse armoniche eccitatrici con il relativo ordine *h*



<u>Oss:</u> al di sopra di un certo numero d'ordine l'ampiezza A_h diviene usualmente trascurabile.

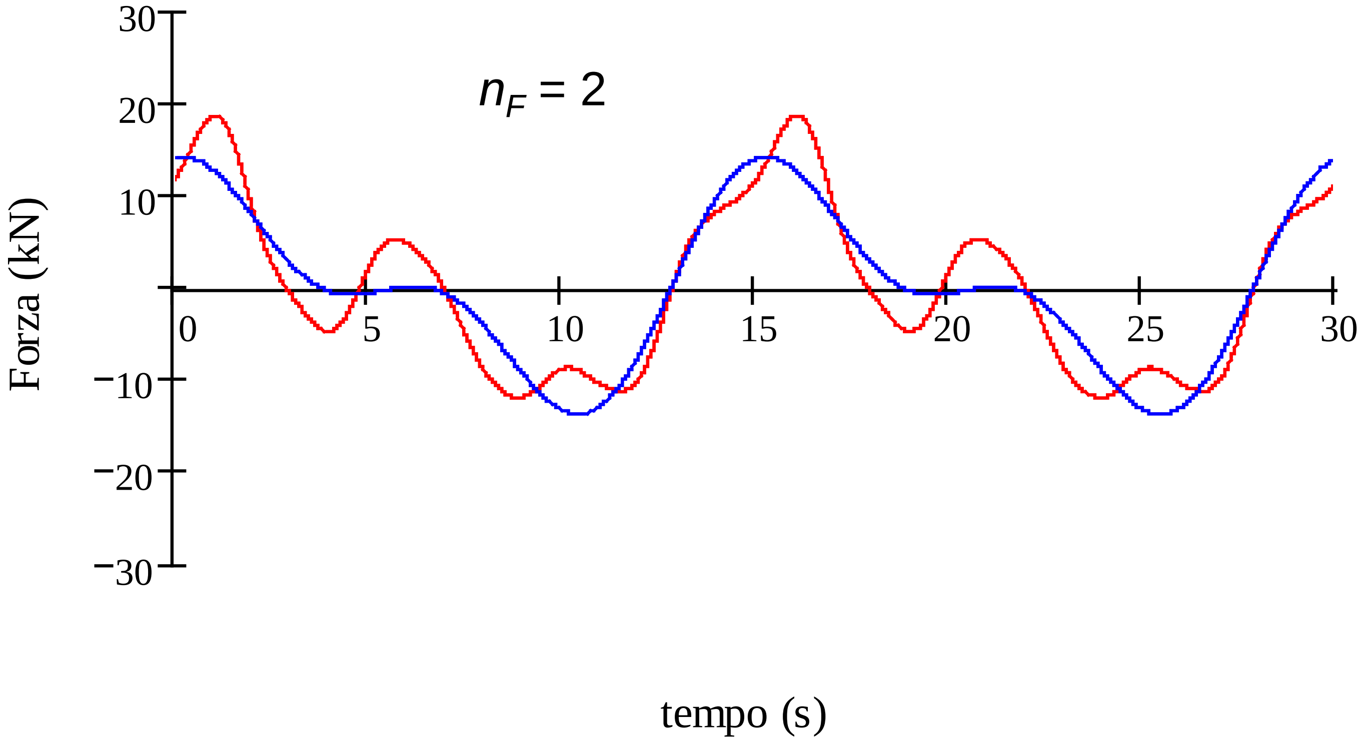
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F: confronto tra *F(t)* e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$

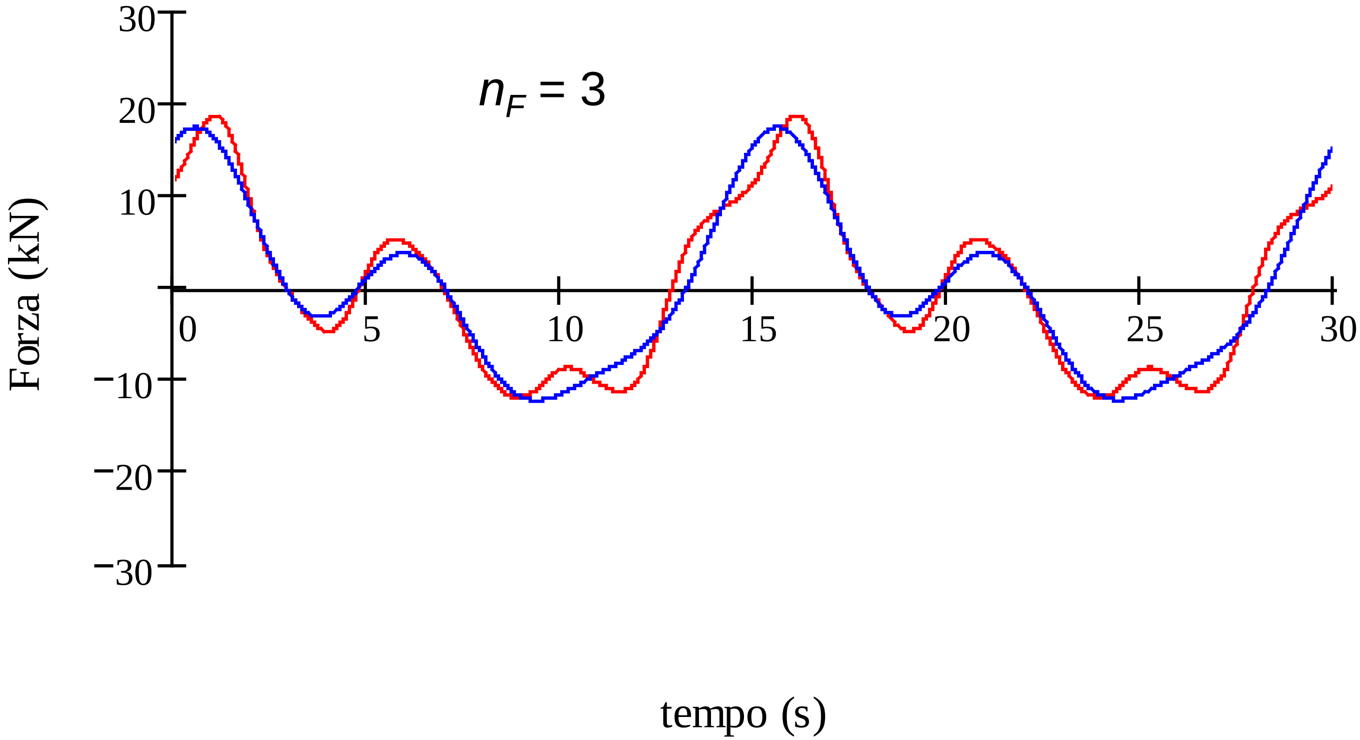
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F: confronto tra *F(t)* e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$

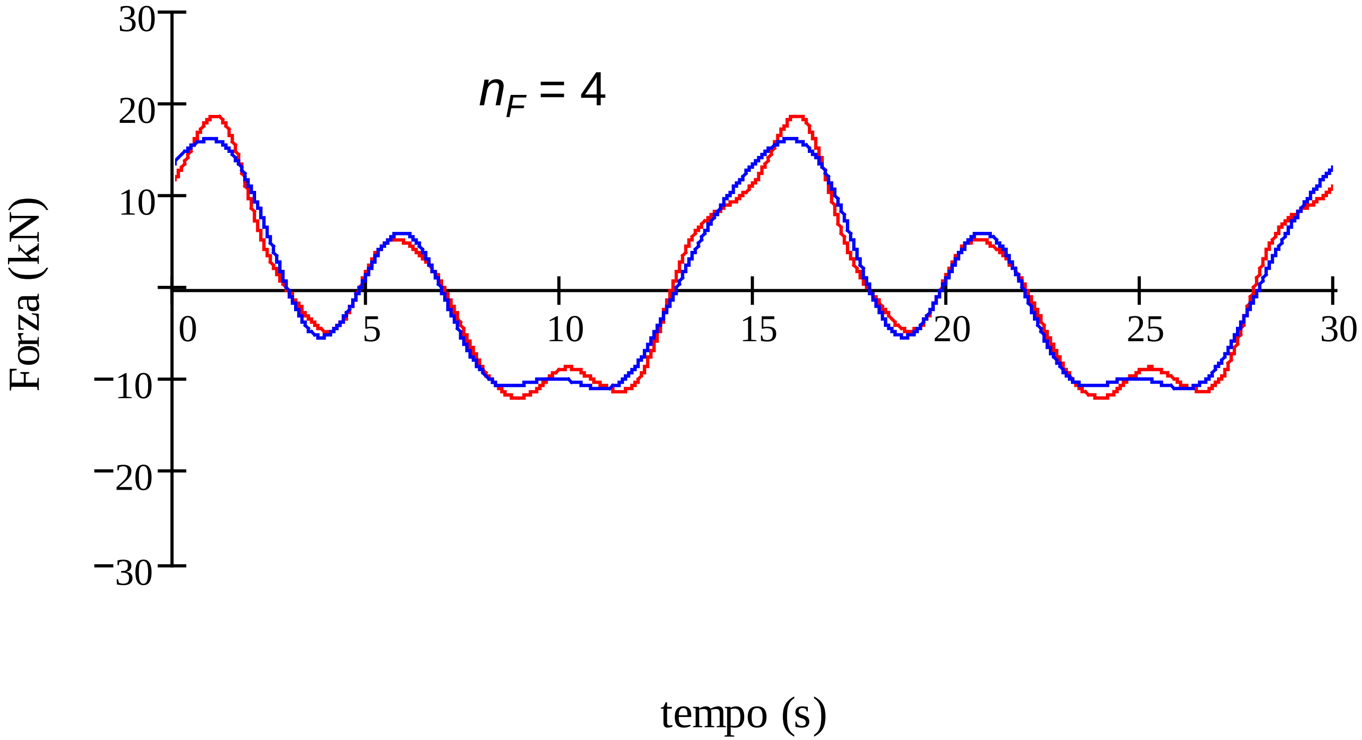
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F: confronto tra *F(t)* e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$

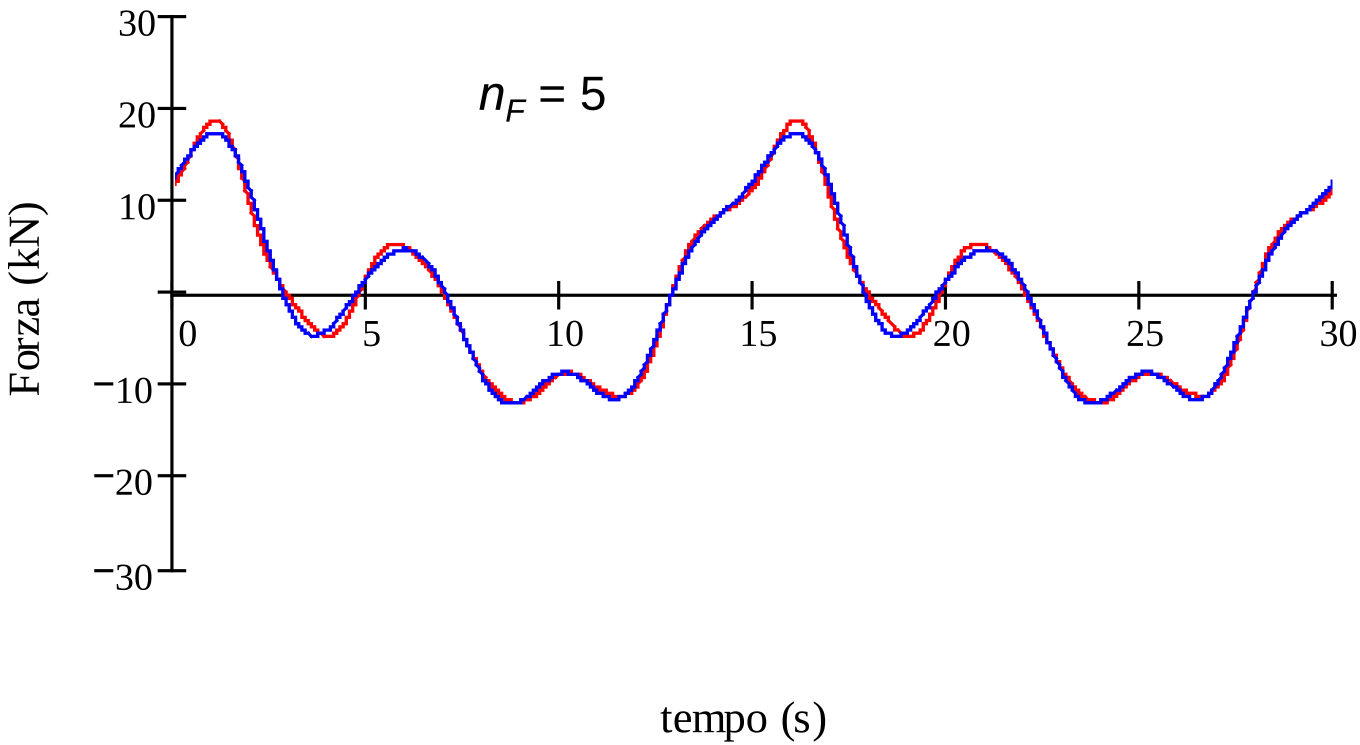
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F: confronto tra *F(t)* e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$

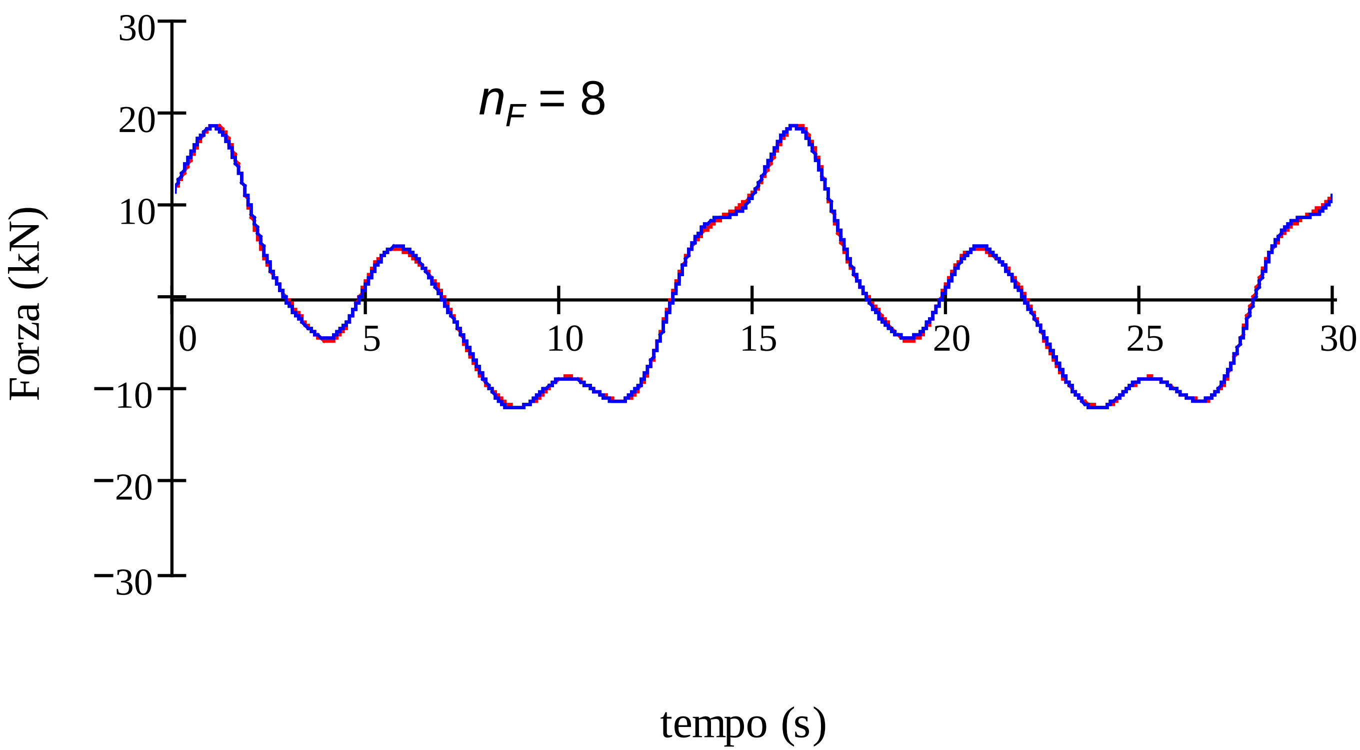
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F: confronto tra *F(t)* e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di n_F: confronto tra *F(t)* e

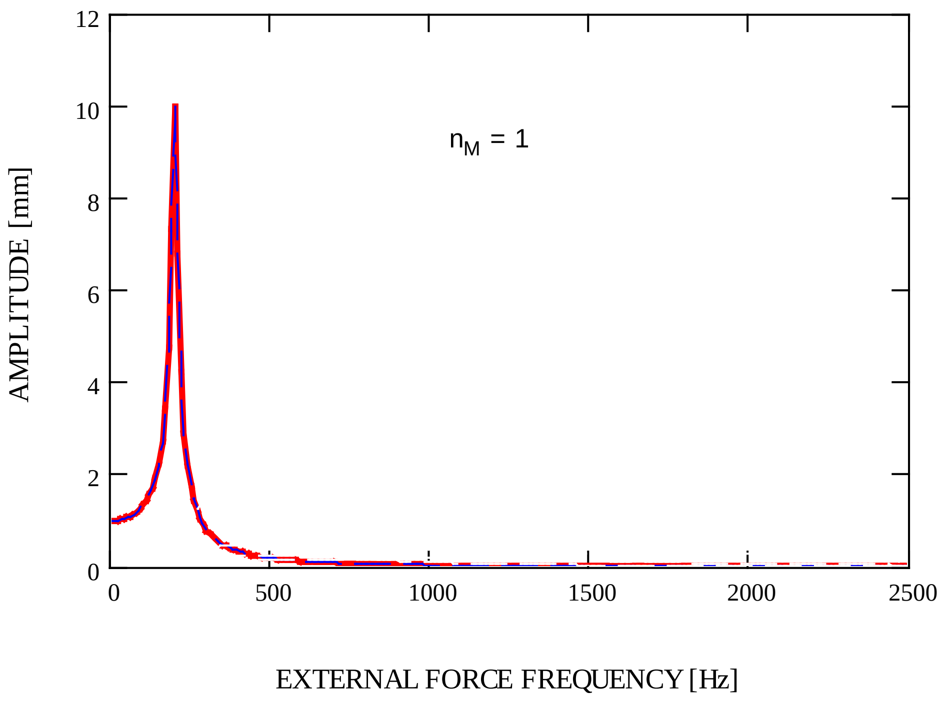
$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos\left(h\Omega_0 t + \lambda_h\right)$$

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \qquad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M: il sistema si comporta come un filtro passa basso, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

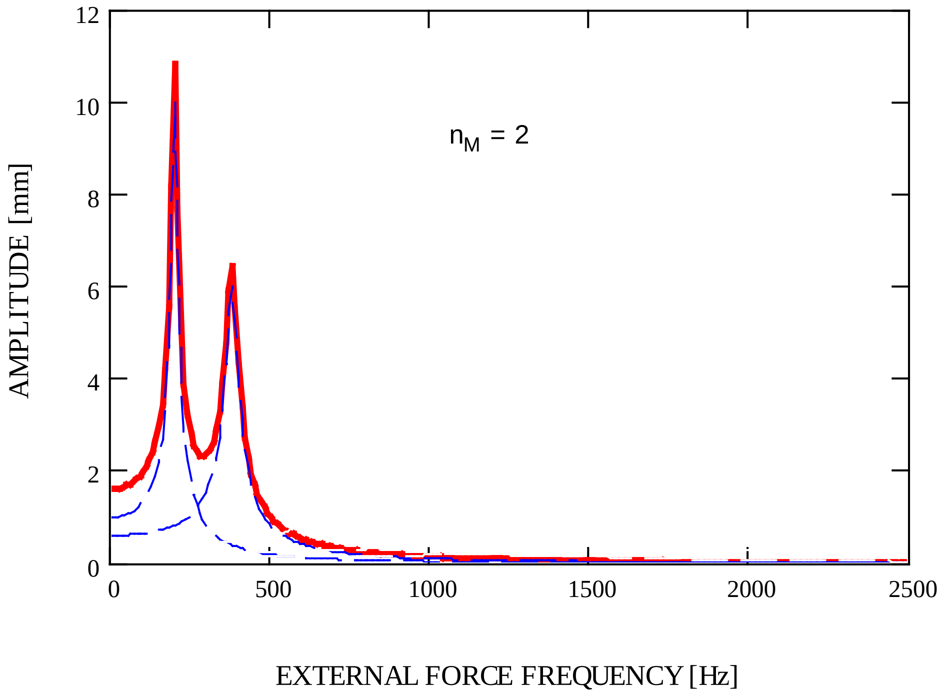


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \qquad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M: il sistema si comporta come un filtro passa basso, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

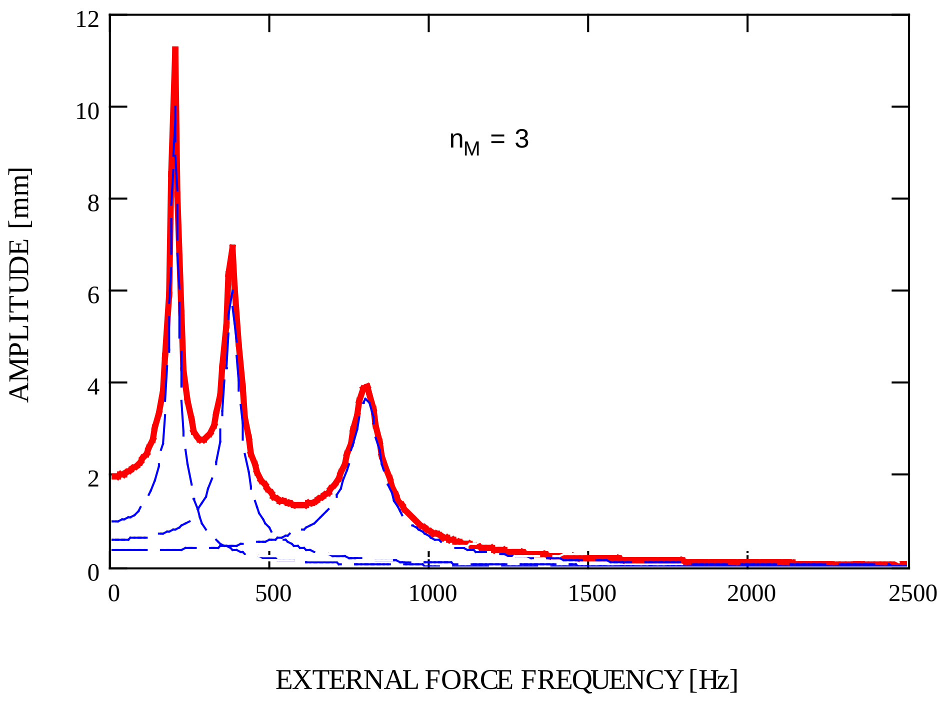


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \qquad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M: il sistema si comporta come un filtro passa basso, che "taglia" la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

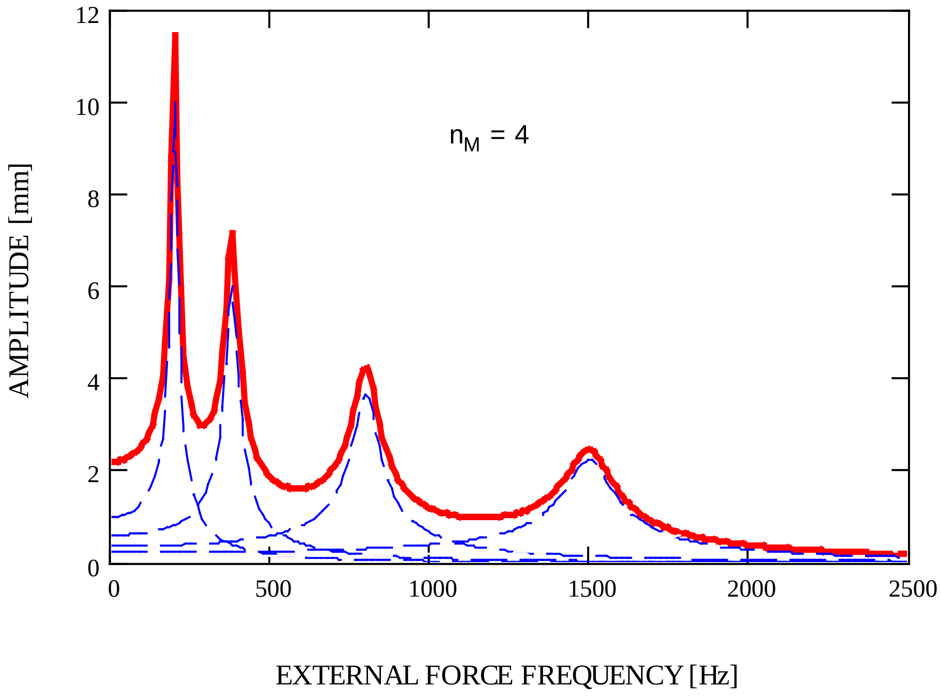


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \qquad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di n_M: il sistema si comporta come un filtro passa basso, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}

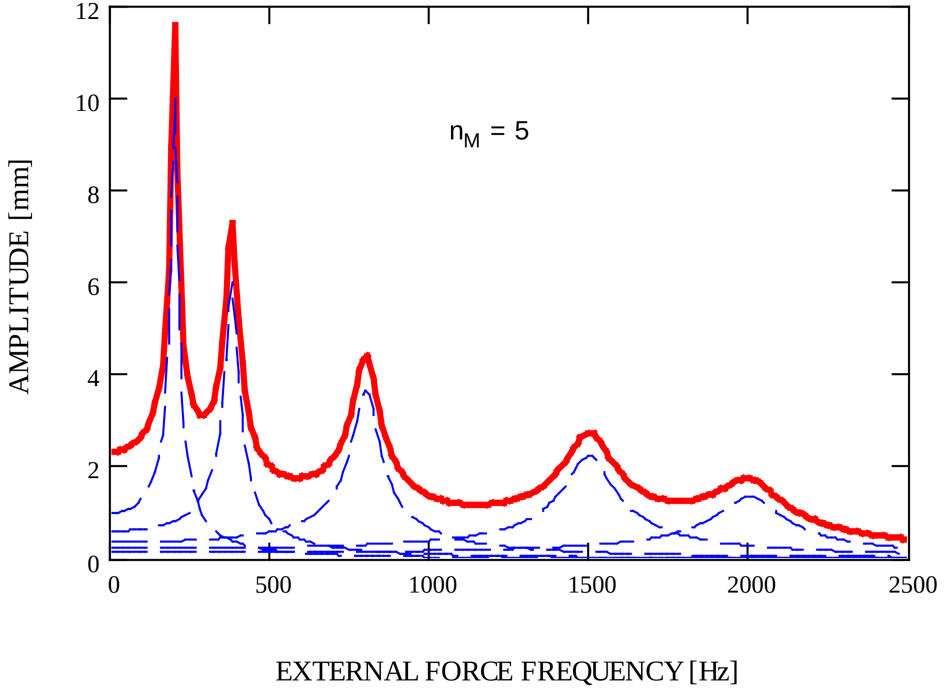


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{\Phi\}_j Y_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{\Phi\}_j Y_j(t) \qquad n_M < n_{MP}$$

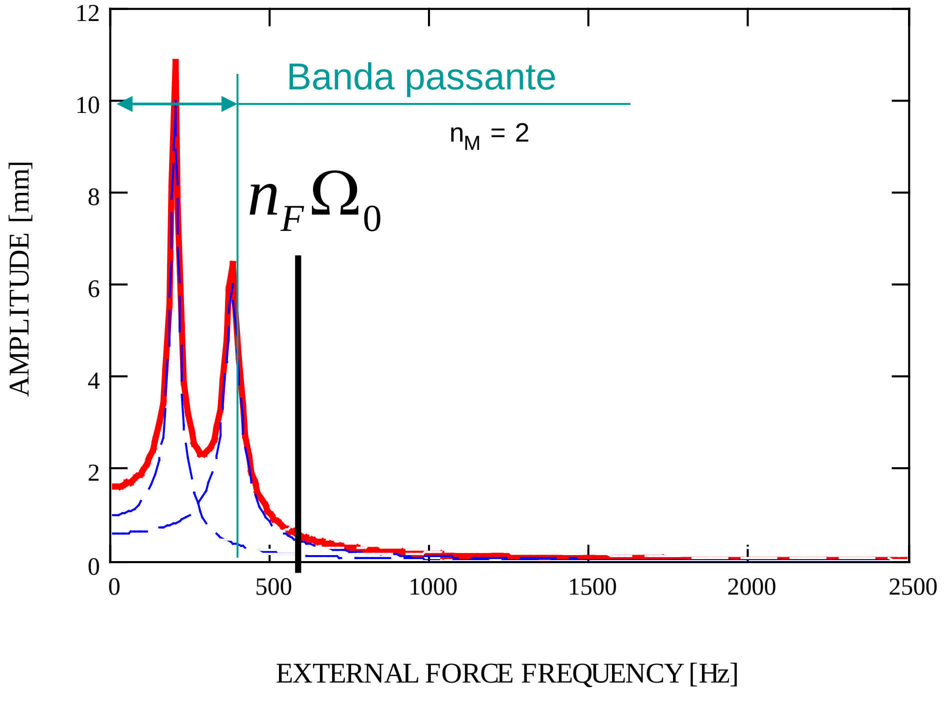
Effetto della scelta di n_M: il sistema si comporta come un filtro passa basso, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di ω_{n_M}



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

• la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello

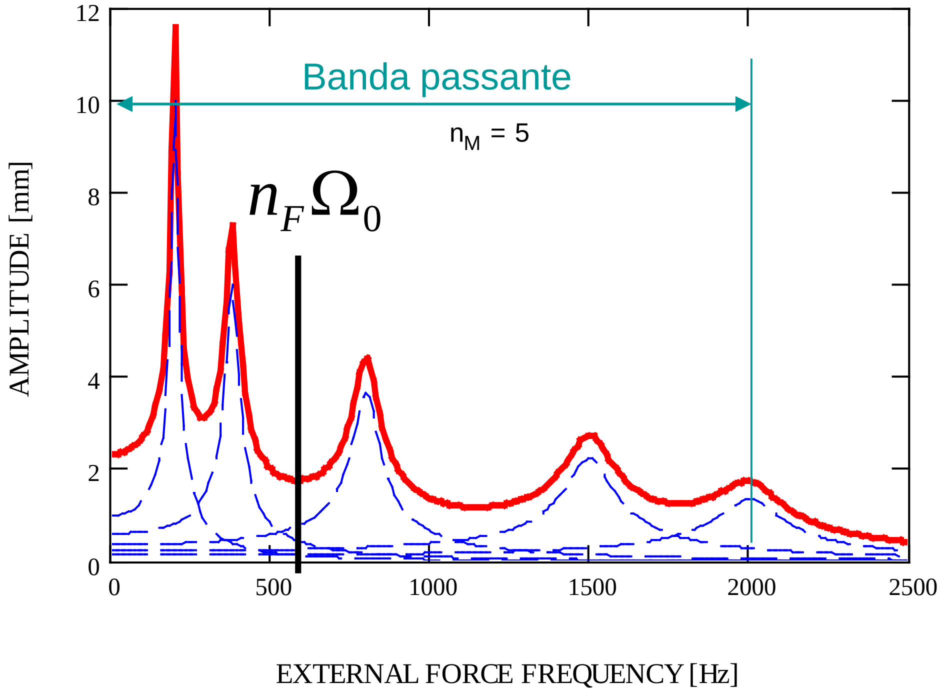


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

• la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella "banda passante" del modello

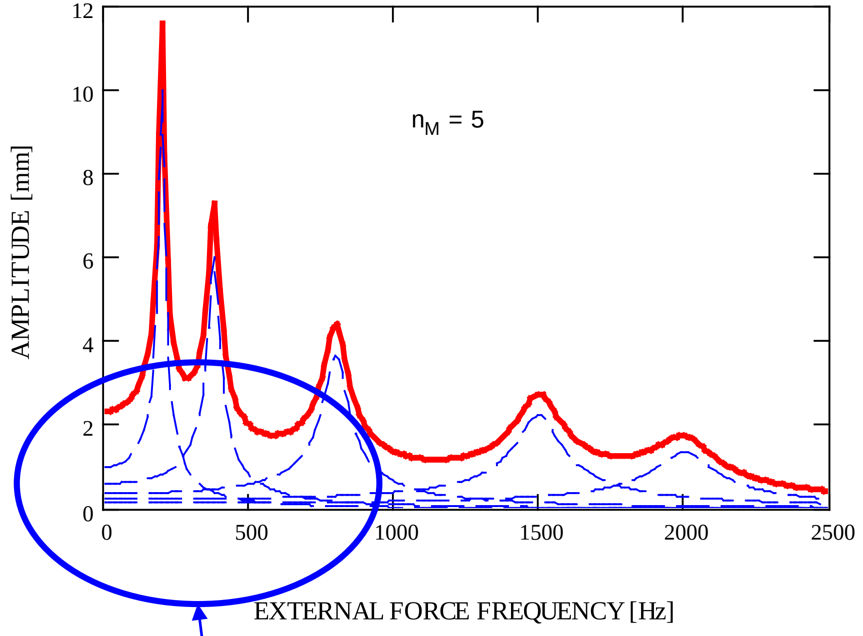
$$\omega_{n_M} > n_F \Omega_0$$

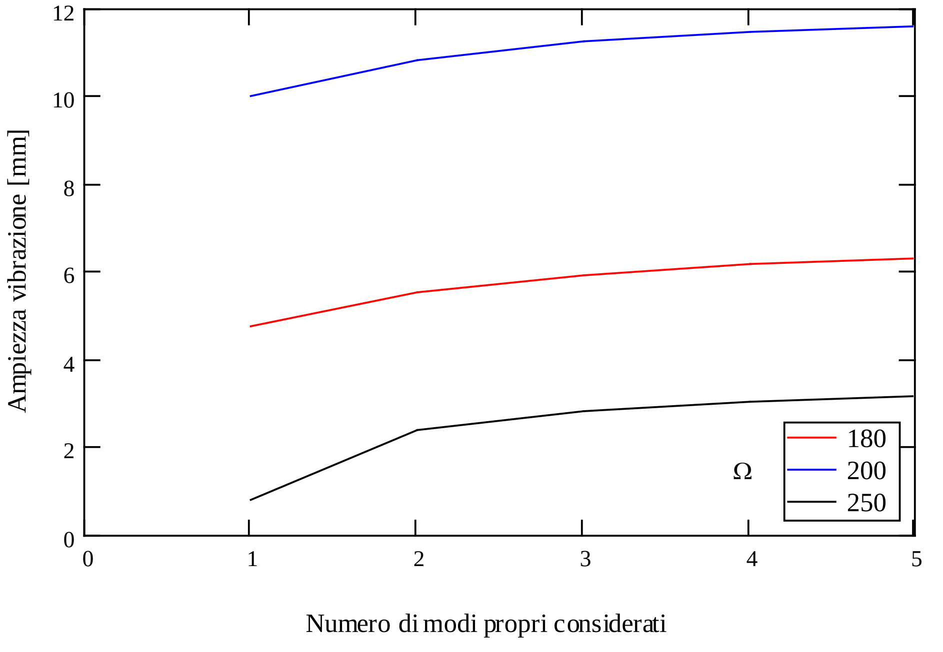


ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

• il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



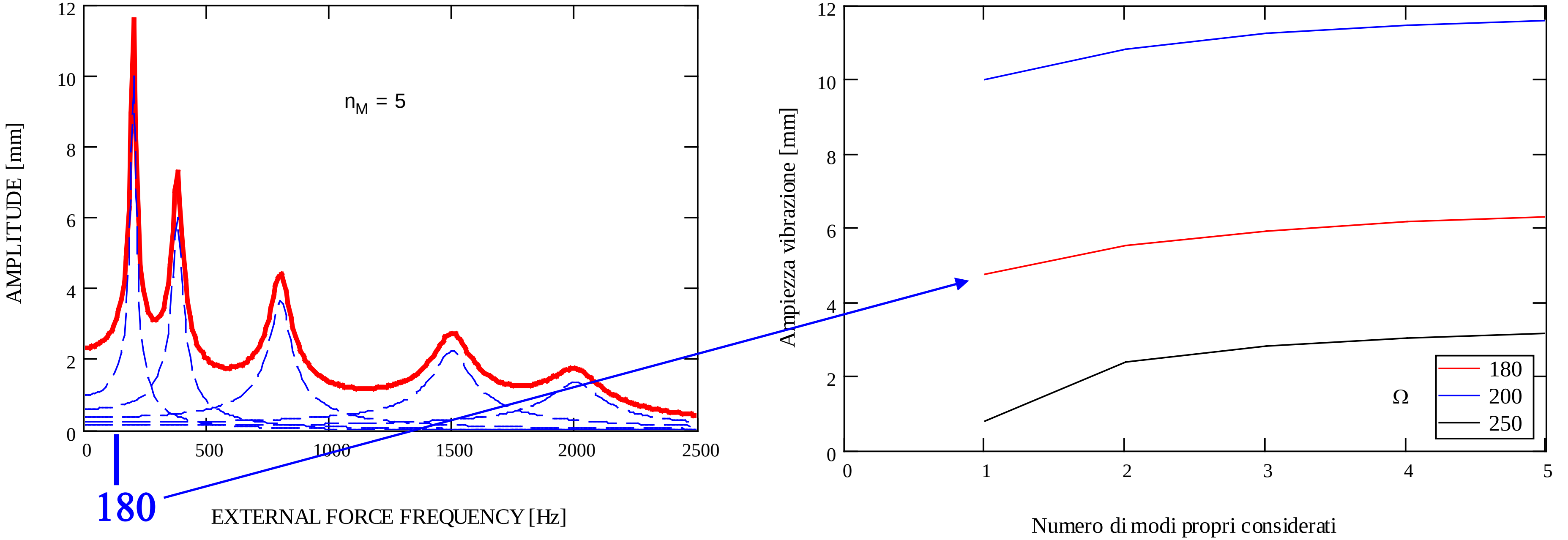


I modi propri di alta frequenza mantengono un contributo anche alle basse frequenze

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

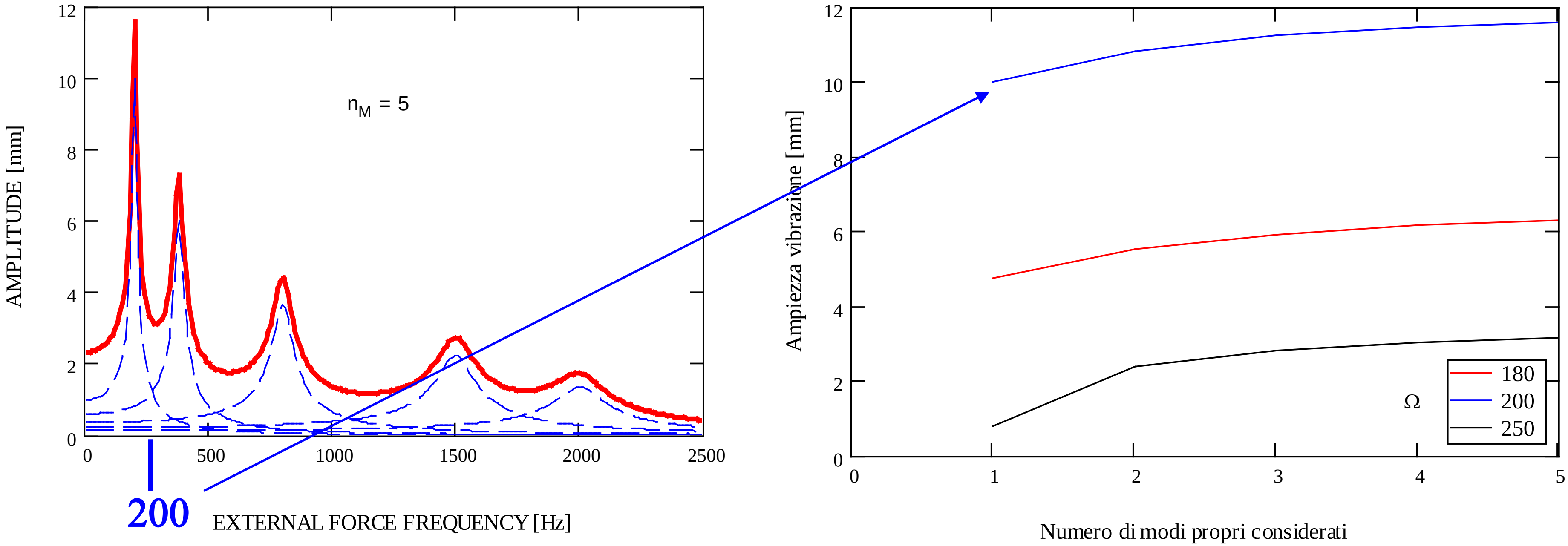
• il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

• il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza

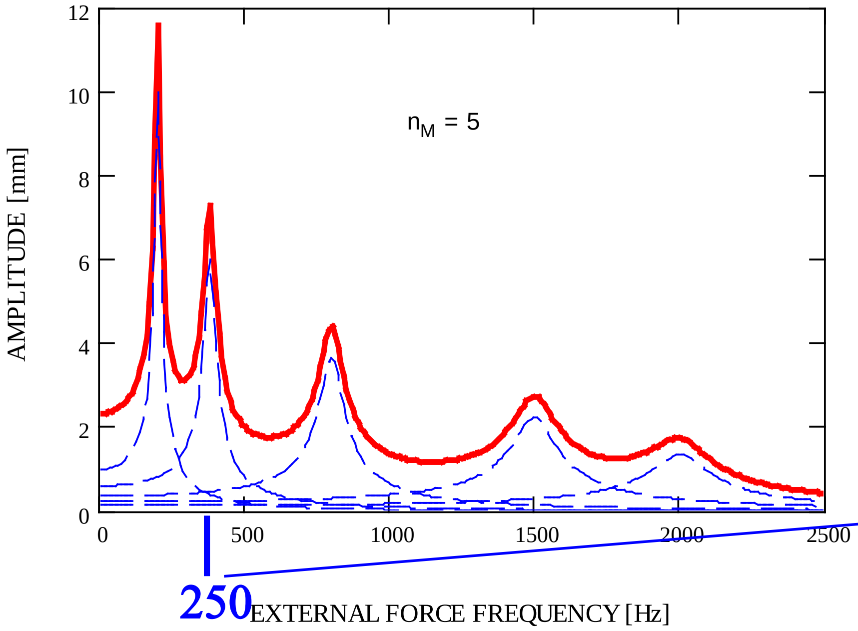


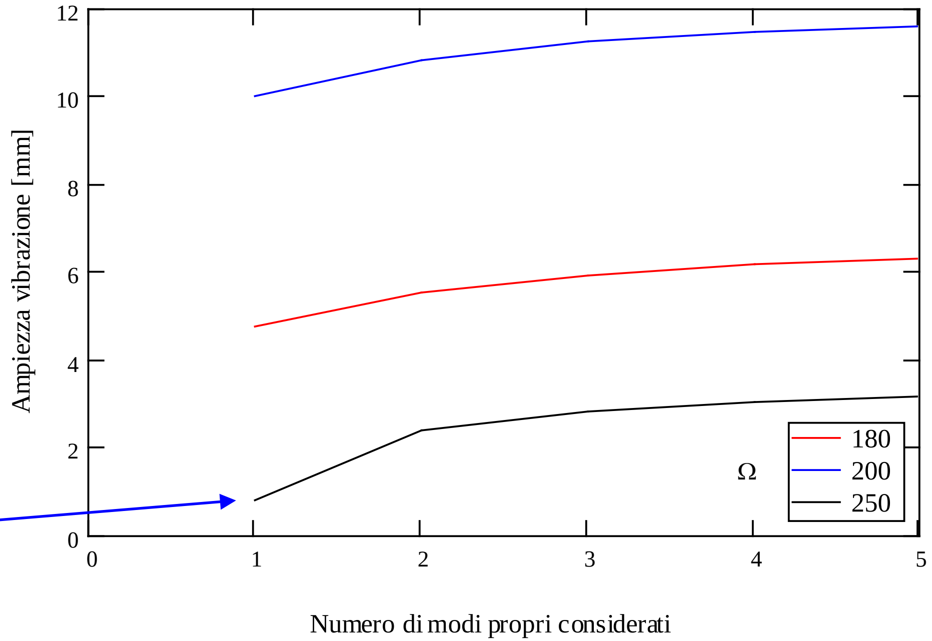
ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

• il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza

$$\boxed{\omega_{n_M} >> n_F \Omega_0} \qquad \omega_{n_M} > 1.5 \cdot n_F \Omega_0$$





ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – MSM + MD - APPLICAZIONI

Ulteriore requisito per MD e per MSM:

- il modello FEM deve essere costruito in maniera da rappresentare in maniera sufficientemente accurata tutti i modi che danno un contributo significativo alla risposta del sistema (tutti gli n_M modi propri nel caso del MSM)

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – <u>MSM</u> – SMORZAMENTO

$$\xi_k = \boxed{\frac{\alpha}{\omega_k}} + \boxed{\beta\omega_k} + \boxed{\xi} + \boxed{\xi_k}$$

$\boxed{\alpha\text{-damping}}$ (ALPHAD o MP,*ALPD*)

$\boxed{\beta\text{-damping}}$ (BETAD o MP,*BETD*)

$\boxed{\text{Constant damping ratio}}$ (DMPRAT o MP,*DMPR (non analisi ridotta)*)

$\boxed{\text{Modal damping ratio}}$ (MDAMP)

ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – <u>FULL</u> – SMORZAMENTO

$$[C] = \boxed{\alpha}[M] + \boxed{\beta}[K] + \frac{\boxed{\xi}}{\Omega}[K] + \sum_k \boxed{[C_k]}$$

α-damping (ALPHAD o MP,*ALPD*)

β-damping (BETAD o MP,*BETD*)

Constant damping ratio (DMPRAT o MP,*DMPR (non analisi ridotta)*)

Element damping matrix (Es.: LINK11, COMBIN14, MATRIX27,…)

COMANDI ANSYS/1
ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

/SOLU

ANTYPE, HARMIC — Definisce il tipo di analisi richiesta

HROPT, *FULL*, *.....* — Sceglie il tipo di analisi diretto completo

HARFRQ, *FREQB*, *FREQE*

Frequenza iniziale e finale per l'analisi

NSUBST, *NSBSTP*

N° di "step" in cui suddividere l'intervallo di frequenze da analizzare

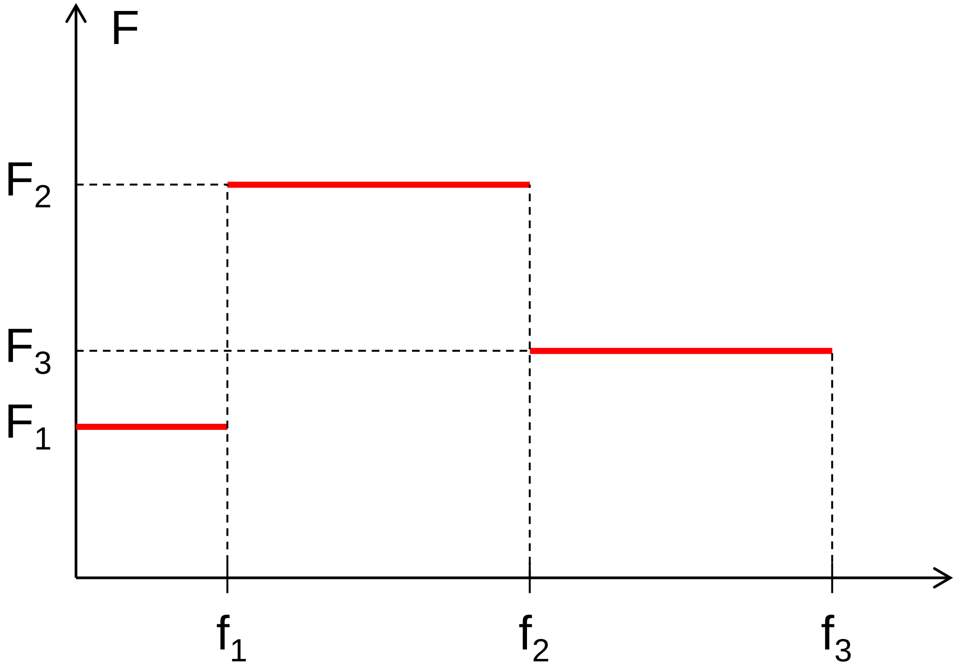
COMANDI ANSYS/1
ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

Possibile anche suddividere il campo di frequenza in intervalli contigui con variazione del carico imposto tra un intervallo e l'altro. Ogni intervallo viene trattato come un "Load Step" separato.

HARFRQ, *0*, f_1
NSUBST, *NSBSTP*
F, *N*, F_1
SOLVE

HARFRQ, f_1, f_2
NSUBST, *NSBSTP*
F, *N*, F_2
SOLVE

HARFRQ, f_2, f_3
NSUBST, *NSBSTP*
F, *N*, F_3
SOLVE



Nel POST26 i risultati sono comunque disponibili come un intervallo continuo di frequenza

COMANDI ANSYS/2
ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*

Reimky:
- ON Stampa i risultati come parti reale ed immaginaria
- OFF Stampa i risultati come ampiezza e fase

Clust:
- OFF "Step" di frequenza equispaziati
- ON "Step" di frequenza addensati attorno ai modi propri

Mcont:
- OFF Non stampa il contributo dei diversi modi
- ON Stampa il contributo dei diversi modi

F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*

VALUE, *VALUE2*: Parti reale ed immaginaria della forza

SOLVE

FINISH

COMANDI ANSYS/3
ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

/POST26

NSOL
ESOL Definizione grandezze da estrarre dal database
RFORCE
etc.

PRCPLX, *KEY*
PRVAR

0 – Stampa i risultati nella forma parte reale + parte immaginaria
1 – Stampa i risultati nella forma ampiezza + fase

PLCPLX, *KEY*
PLVAR

0 — Ampiezza
1 — Fase
2 — Parte reale
3 — Parte immaginaria

POST26/5

Comandi per la elaborazione delle grandezze definite

ABS	**IMAGIN**	**SMALL**
ADD	**INT1**	**SQRT**
ATAN	**LARGE**	**RPSD**
CLOG	**NLOG**	**CVAR**
CONJUG	**PROD**	**RESP**
DERIV	**QUOT**	
EXP	**REALVAR**	

POST26/6

PLVAR, *NVAR1*, *NVAR2*, *NVAR3*, *NVAR4*, *NVAR5*, *NVAR6*, *NVAR7*…
Consente di rappresentare fino a 10 variabili in funzione del tempo o della variabile definita nel comando XVAR

XVAR, *N*
Definisce la variabile da utilizzare per l'asse X; per default si usa la variabile 1 (tempo)

/AXLAB, *Axis*, *Lab*
Consente di specicare la "label" dei due assi

/XRANGE, *XMIN*, *XMAX*
/YRANGE, *XMIN*, *XMAX*
Definiscono I valori massimi e minimi per i due assi

/GROPT, *Lab*, *KEY*
Consente varie opzioni grafiche (es. Numero di divisioni, assi logaritmici, etc)

COMANDI ANSYS/4
ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO RIDOTTO

/SOLU
ANTYPE, HARMIC Definisce il tipo di analisi richiesta

HROPT, *REDUC*, *…..* Sceglie il tipo di analisi diretto ridotto

HARFRQ, *FREQB*, *FREQE*
NSUBST, *NSBSTP*
HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*
F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*
SOLVE
FINISH

COMANDI ANSYS/5
ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO RIDOTTO

/SOLU
EXPASS, *ON* Passo di espansione

NUMEXP, *NUM*, *BEGRNG*, *ENDRNG*, …

Numero di soluzioni da espandere (se ALL espande tutti gli “step” disponibili)

“Range” di frequenza sul quale effettuare l’espansione delle soluzioni

EXPSOL, *LSTEP*, *SBSTEP*, *TIMFRQ*, *Elcalc*

SOLVE
FINISH

COMANDI ANSYS/6
ANALISI ARMONICA – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

/SOLU
ANTYPE, MODAL   Analisi modale preliminare
MODOPT, *Method, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey*

SOLVE
FINISH

/SOLU   Analisi armonica con MSM

HROPT, *MSUP*, *MAXMODE*, *MINMODE*

N° d’ordine finale (default e max.: NMODE) ed iniziale (default: 1) dei modi da impiegare

HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*
F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*

SOLVE
FINISH

COMANDI ANSYS/7
ANALISI ARMONICA – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE RIDOTTO

/SOLU
ANTYPE, MODAL — Analisi modale preliminare ridotta
MODOPT, *REDUC, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey*
\----------
SOLVE
FINISH

/SOLU — Analisi armonica con MSM
HROPT, *MSUP*, *MAXMODE*, *MINMODE*
HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*
F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*
SOLVE
FINISH

/SOLU — Passo di espansione
EXPASS, *ON*
NUMEXP, *NUM*, *BEGRNG*, *ENDRNG*
SOLVE
FINISH