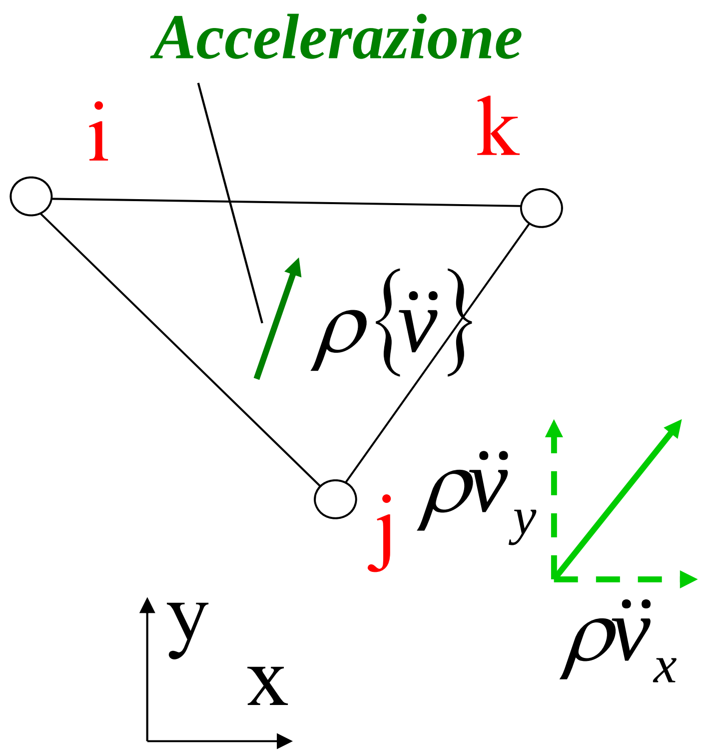
ANALISI DINAMICA CON IL MEF

Principali tipi di analisi

- analisi modale
- analisi della risposta armonica
- analisi di transitorio dinamico

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/1



Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento

$$dL_i = -\{\delta v\}^T \rho \{\ddot{v}\} dV$$

$$L_i = -\int_V \{\delta v\}^T \rho \{\ddot{v}\} dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho [N] \{\ddot{U}^e\} dV =$$

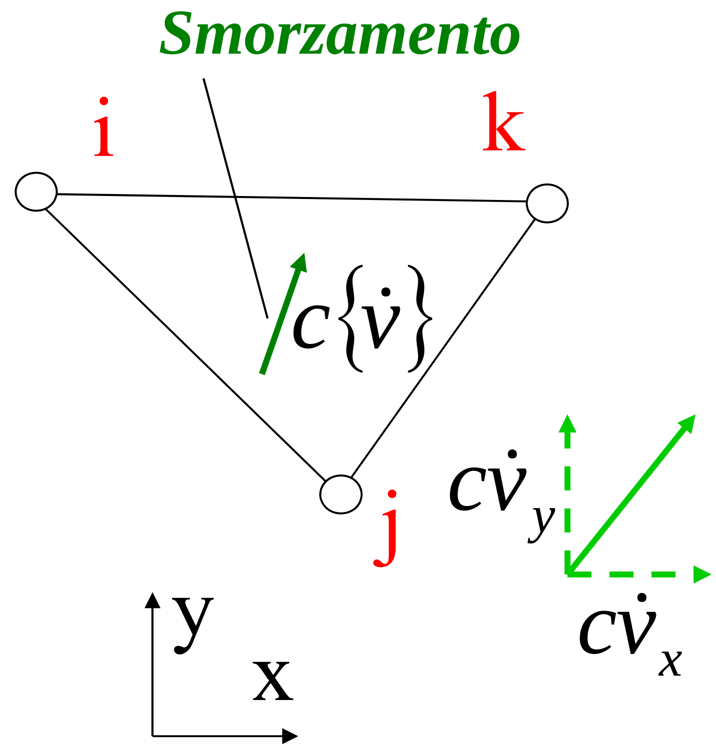
$$= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\ddot{U}^e\}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/2

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



$$dL_s = -\{\delta v\}^T c\{\dot{v}\}dV$$

$$L_s = -\int_V \{\delta v\}^T \rho\{\dot{v}\}dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho [N]\{\dot{U}^e\}dV =$$

$$= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\dot{U}^e\}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/3

$$\cancel{\left\{\delta U^e\right\}^T}\left(\left\{P^e\right\}-\int_V [N]^T c[N]dV\left\{\dot{U}^e\right\}-\int_V [N]^T \rho[N]dV\left\{\ddot{U}^e\right\}\right)=$$

$$=\cancel{\left\{\delta U^e\right\}^T}\int_V [B]^T[D][B]dV\left\{U^e\right\}$$

$$\boxed{\left[M^e\right]}\left\{\ddot{U}^e\right\}+\boxed{\left[C^e\right]}\left\{\dot{U}^e\right\}+\left[K^e\right]\left\{U^e\right\}=\left\{P^e\right\}$$

$$\boxed{\int_V [N]^T \rho[N]dV} \qquad \boxed{\int_V [N]^T c[N]dV}$$

$$[M]\left\{\ddot{U}\right\}+[C]\left\{\dot{U}\right\}+[K]\left\{U\right\}=\left\{F\right\}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/4

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{U}\}+[C]\{\dot{U}\}+[K]\{U\}=\{F(t)\}$$

Accelerazioni nodali

Spostamenti nodali

Velocità nodali

Matrice di massa

Matrice di rigidezza

Matrice di smorzamento

Forze esterne

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/1

Matrice di massa “consistent”: $\left[M^e\right] = \int [N]^T \rho [N] dV$

- simmetrica
- sostanzialmente piena

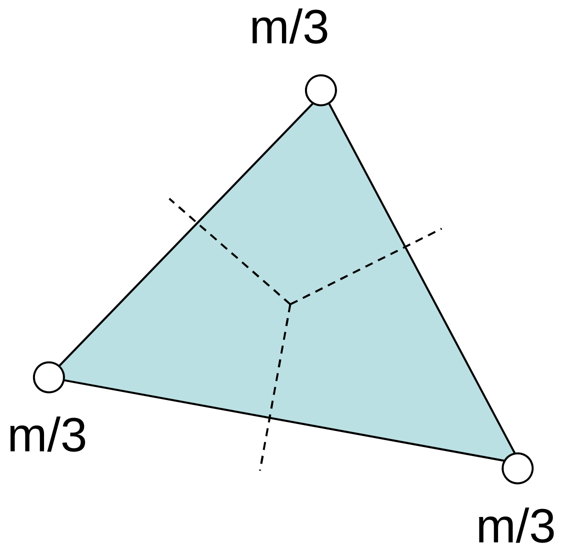
Elemento triangolare piano

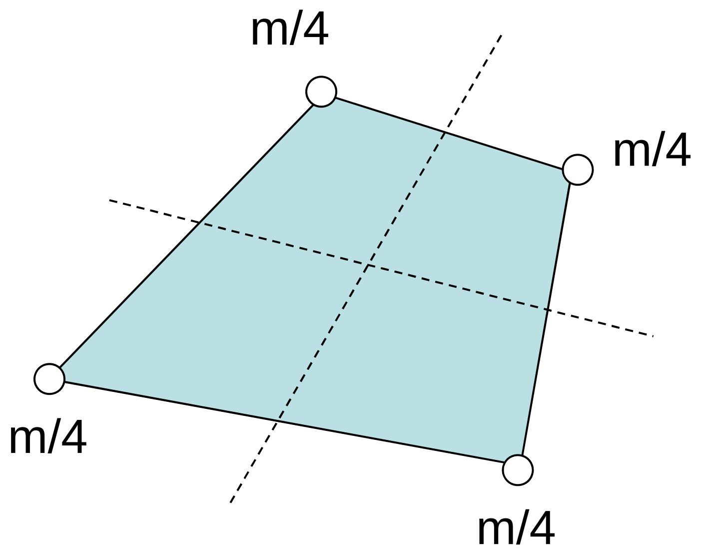
$$\int [N]^T \rho [N] dV = \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix} dV =$$

$$= \rho \begin{bmatrix} \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11}N_{13} dV & 0 & \int N_{11}N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11}N_{13} dV & 0 & \int N_{11}N_{15} dV \\ \int N_{11}N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13}N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13}N_{15} dV \\ \int N_{11}N_{15} dV & 0 & \int N_{13}N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}N_{15} dV & 0 & \int N_{13}N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV \end{bmatrix}$$

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/2

Matrice di massa "lumped": la massa viene concentrata nei nodi in qualche modo fisicamente accettabile (di solito ovvio per gli elementi con nodi nei vertici, meno ovvio per quelli con nodi intermedi), in modo che risulti: $\sum_j M_j = \int \rho dV$

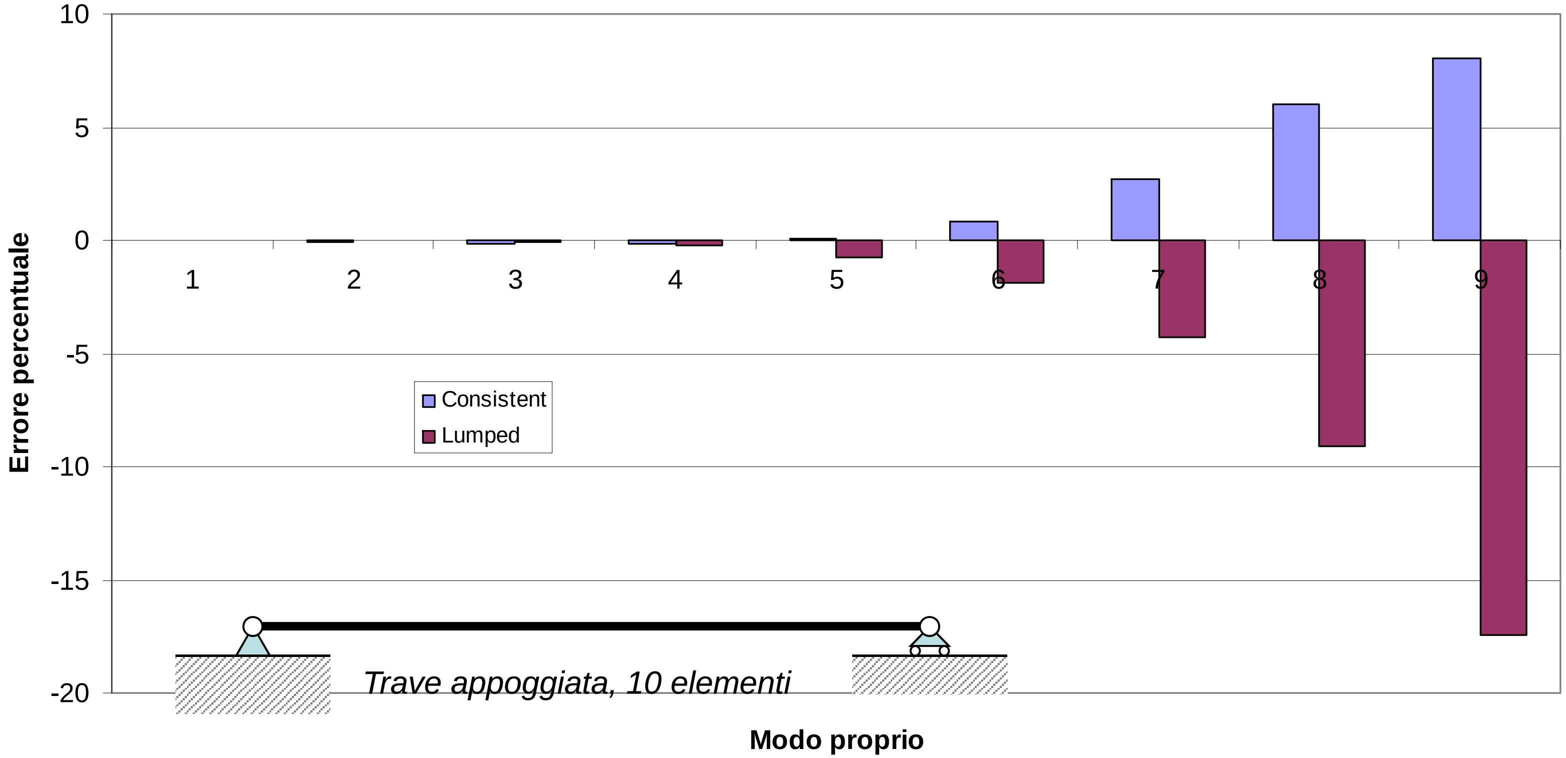




• la struttura della matrice di massa è diagonale

$$[M] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/3



• La formulazione “consistente” produce errori minori in valore assoluto
• Le matrici “consistente” e “lumped” tendono a produrre rispettivamente una sovrastima ed una sottostima delle pulsazioni proprie
• La struttura diagonale può risultare molto vantaggiosa in alcune soluzioni iterative (es. analisi di transitorio) in quanto non richiede inversione

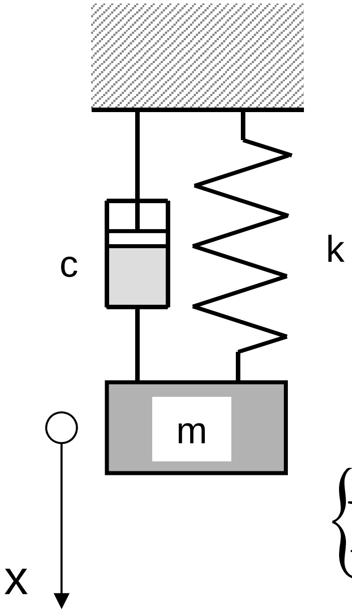
ANALISI MODALE/1

Si propone di determinare le pulsazioni proprie di una struttura e le relative forme modali.

Analizza le oscillazioni libere della struttura, in assenza dei carichi esterni

Effetto dello smorzamento solitamente molto piccolo

$$[M]\{\ddot{U}\}+\cancel{[C]\{\dot{U}\}}+[K]\{U\}=\cancel{\{F(t)\}}$$



$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\}=0$$

$$\omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3 \ldots \le \omega_i \le \ldots \le \omega_n$$

$$\{Y^{(1)}\}\ \{Y^{(2)}\}\ \{Y^{(3)}\}\ldots\ \{Y^{(i)}\}\ \ldots\ \{Y^{(n)}\}$$ Forme modali

ANALISI MODALE/7

Struttura reale
(continuo)

∞ pulsazioni proprie

Modello ad EF
(discretizzato)

n gradi di libertà

n pulsazioni proprie

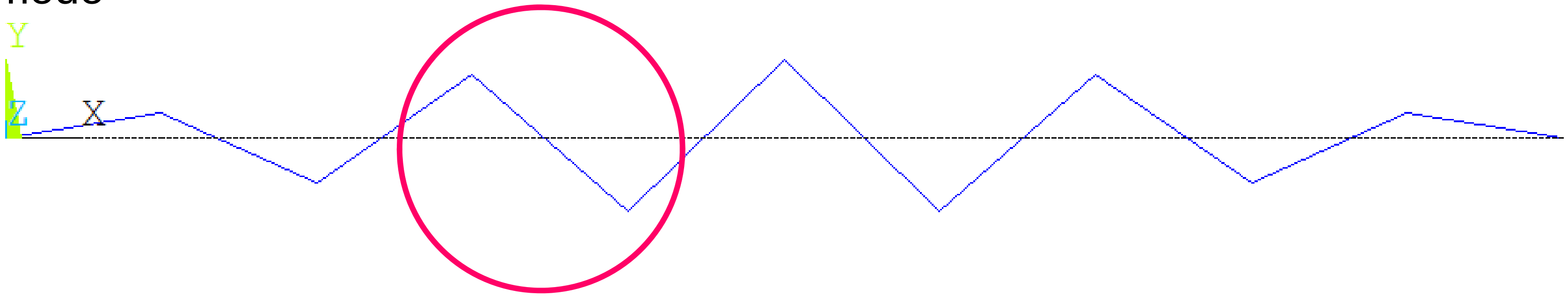
Relazione ?

ANALISI MODALE/8

Tipico andamento spaziale delle Forme modali

Trave appoggiata, 10 elementi

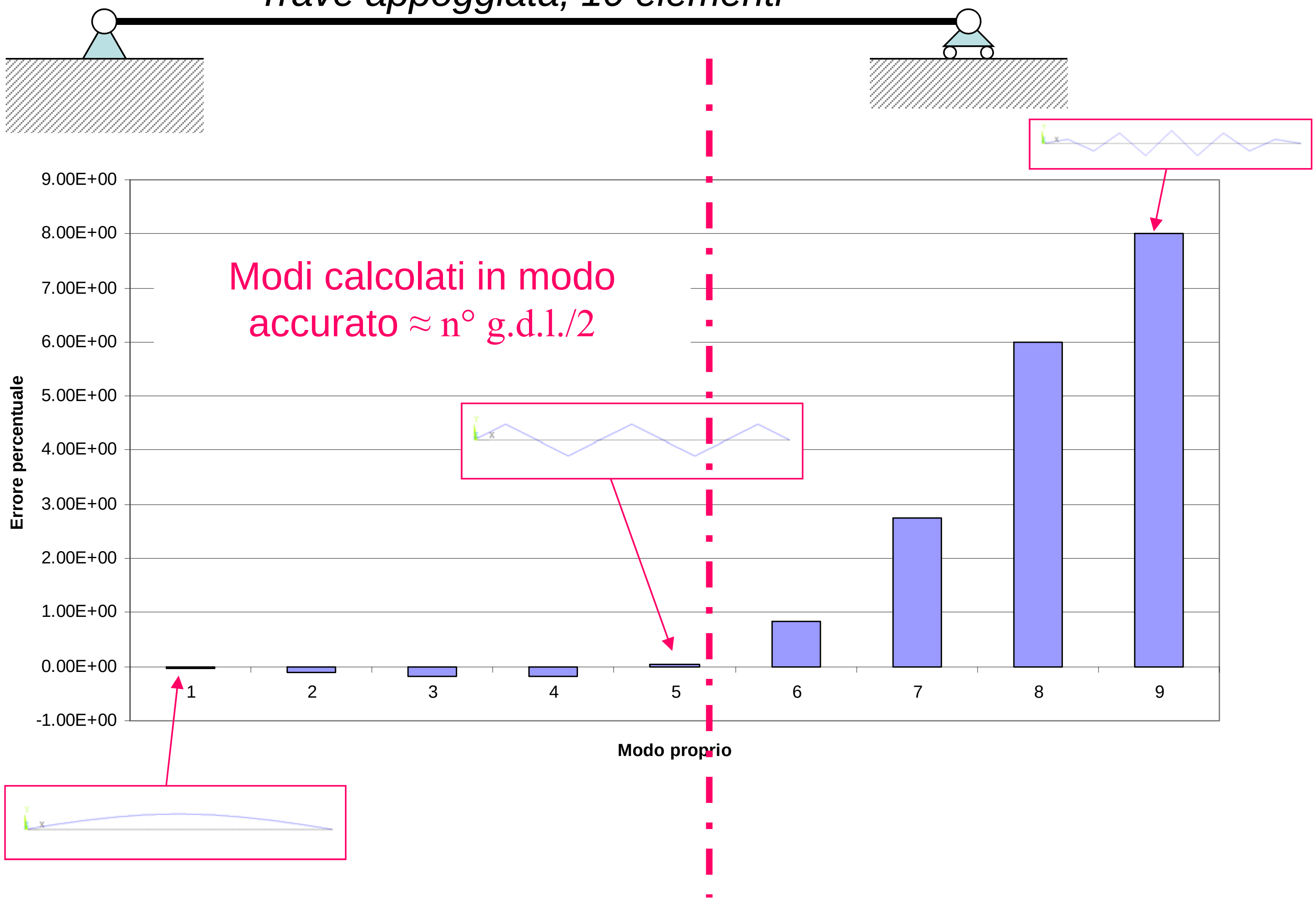
9° modo



1 solo elemento: rappresentazione poco accurata del campo di velocità ed accelerazione

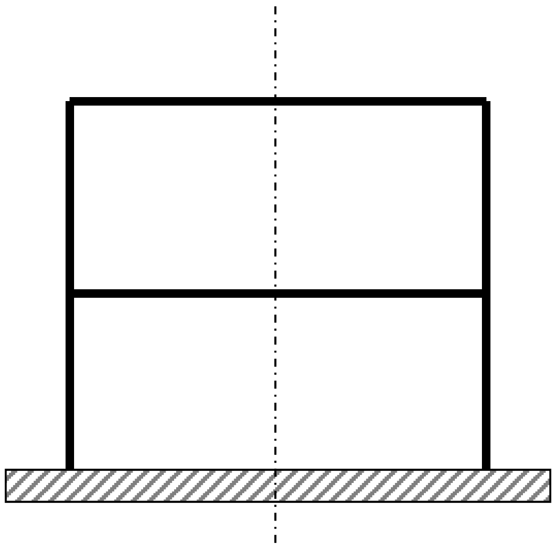
ANALISI MODALE/9

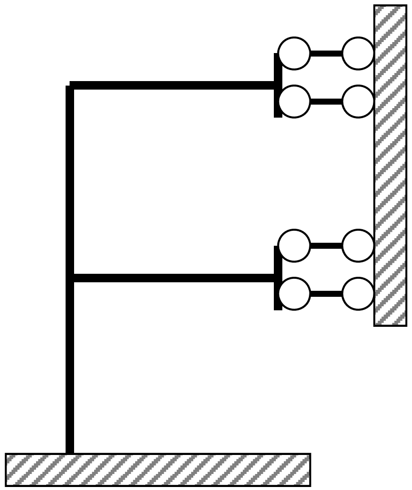
Trave appoggiata, 10 elementi

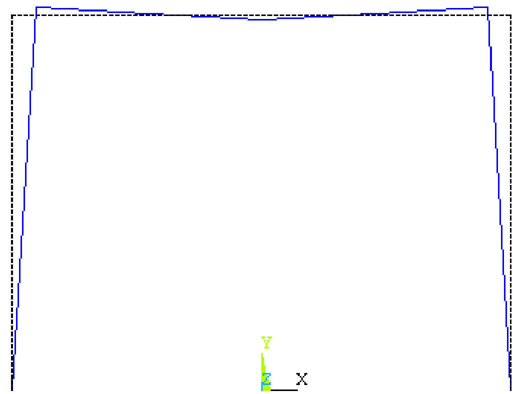


SIMMETRIA STRUTTURALE/1

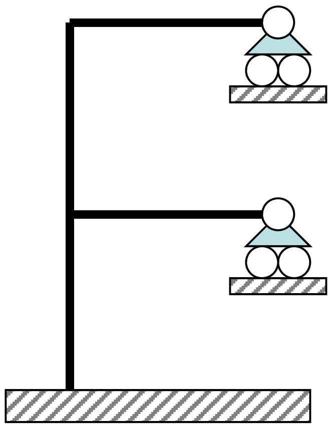
Se si usano considerazioni di simmetria per ridurre le dimensioni di un modello,si otterranno solo i modi propri le cui forme modali rispettano la stessa simmetria.

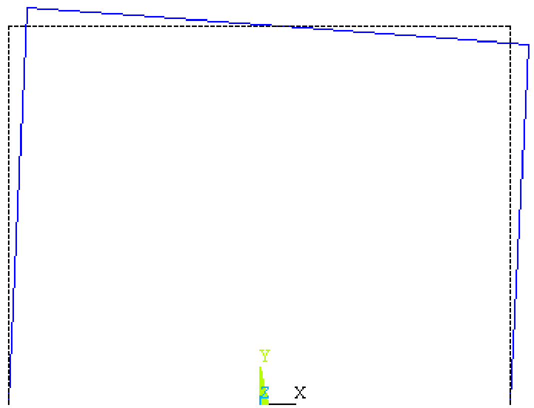






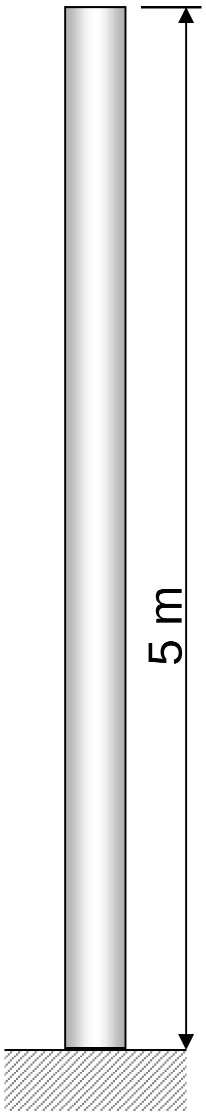
In una struttura simmetrica le forme modali sono simmetriche o anti-simmetriche.
Esse possono quindi essere ottenute tutte, combinando un'analisi con vincoli di simmetria con una con vincoli di antisimmetria





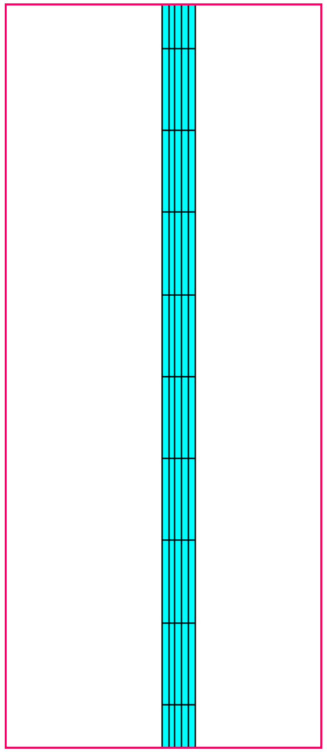
SIMMETRIA STRUTTURALE/2

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica

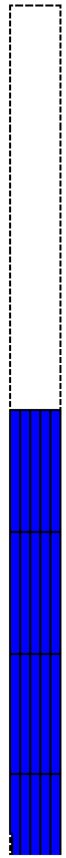


Modello con elementi piani assialsimmetrici

$\phi = 0.5$ m
s=0.01 m

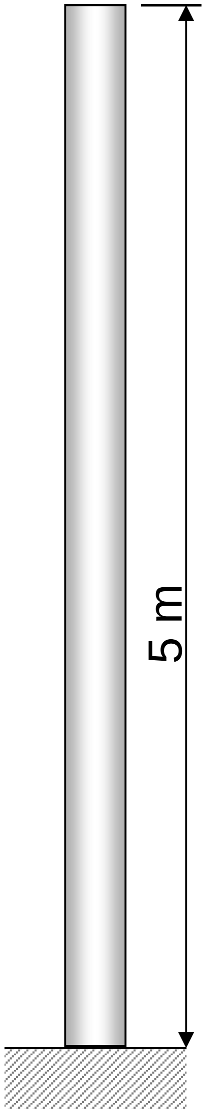


1° modo proprio
Deformata assiale
f = 260 Hz



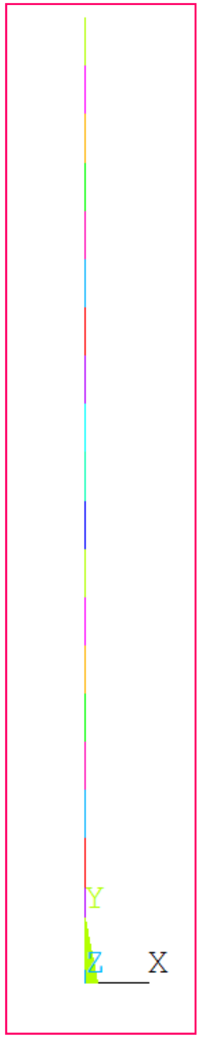
SIMMETRIA STRUTTURALE/3

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica

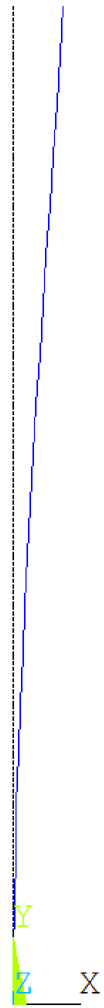


Modello con elementi trave

ϕ=0.5 m
s=0.01 m



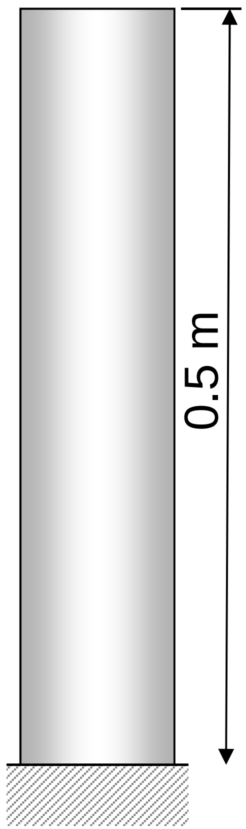
1° modo proprio
Deformata flessionale
f = 20 Hz



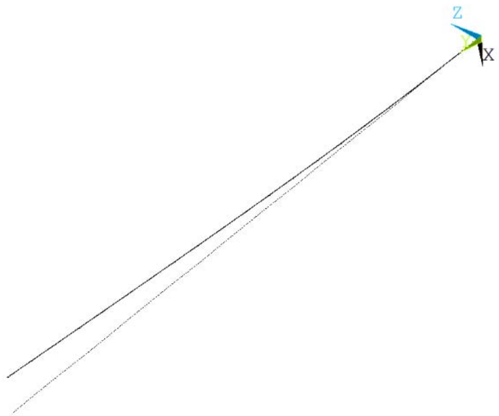
EFFETTO SCELTA ELEMENTO/1

Selezionando un particolare tipo di elemento si vedono solo i modi propri la cui forma modale rispetta le ipotesi alla base dell'elemento stesso.

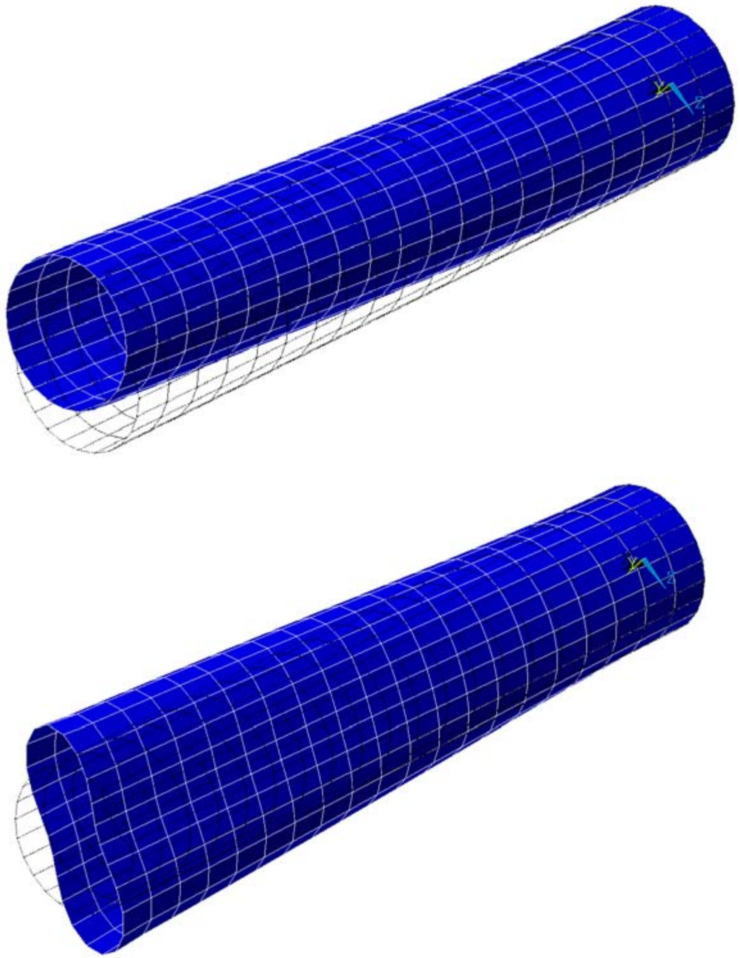
$\phi = 0.1$ m
s=0.01 m



Modello con elementi trave



Modello con elementi shell



UNITÀ DI MISURA/1

È preferibile usare il sistema m.k.s

$$\boxed{\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m}}$$

$$\boxed{kg}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1000}{s^2}} = \frac{1}{s}\sqrt{10^3}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\frac{N}{mm} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm}}$$

$$\boxed{kg}$$

ANALISI RIDOTTA/1

Nell’analisi ridotta, lo stato di spostamento, velocità ed accelerazione della struttura viene espresso in termini di un sottoinsieme dei nodi (Nodi “Master”). Gli spostamenti dei nodi rimanenti (Nodi “Slave”) sono quindi calcolati a partire da quelli dei nodi Master.
L’analisi ridotta può essere applicata anche in capo statico, per ridurre l’onere computazionale dell’analisi.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \boxed{\{U_M\}} \\ \boxed{\{U_S\}} \end{Bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

g.d.l. “Master”

g.d.l. “Slave”

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_M\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

ANALISI RIDOTTA/2

$$\begin{cases} [K_{MM}]\{U_M\} + [K_{MS}]\{U_S\} = \{F_M\} \\ [K_{SM}]\{U_M\} + [K_{SS}]\{U_S\} = \{F_S\} \end{cases}$$

$$\{U_S\} = [K_{SS}]^{-1}\left(\{F_S\} - [K_{SM}]\{U_M\}\right)$$

$$[K_{MM}]\{U_M\} + [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}\left(\{F_S\} - [K_{SM}]\{U_M\}\right) = \{F_M\}$$

$$\left([K_{MM}] - [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}[K_{SM}]\right)\{U_M\} = \{F_M\} - [K_{MS}][K_{SS}]^{-1}\{F_S\}$$

$$\left[\hat{K}\right]\{U_M\} = \left\{\hat{F}\right\} \qquad \{U_M\} = \left[\hat{K}\right]^{-1}\left\{\hat{F}\right\}$$

ANALISI RIDOTTA/3

Introducendo la suddivisione tra “Master” e “Slave” nell’equazione di equilibrio dinamico si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [M_{MM}] & [M_{MS}] \\ [M_{SM}] & [M_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_M\} \\ \{\ddot{U}_S\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{MM}] & [C_{MS}] \\ [C_{SM}] & [C_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_M\} \\ \{\dot{U}_S\} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} [K_{MM}] & [K_{MS}] \\ [K_{SM}] & [K_{SS}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_M\} \\ \{U_S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_M\} \\ \{F_S\} \end{Bmatrix}$$

La riduzione delle matrici di massa e smorzamento ai soli g.d.l. “Master” non può essere fatta in modo esatto, come per la matrice di rigidezza. Si usa pertanto una formula di riduzione semplificata ed approssimata proposta da Guyan (”Guyan reduction”)

ANALISI RIDOTTA/4

Si ottiene in tal modo:

$$\left[\hat{M}\right]\left\{\ddot{U}_M\right\}+\left[\hat{C}\right]\left\{\dot{U}_M\right\}+\left[\hat{K}\right]\left\{U_M\right\}=\left\{\hat{F}\right\}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{M}\right]=&\left[M_{MM}\right]-\left[K_{MS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[M_{SM}\right]-\left[M_{MS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[K_{SM}\right]+\\&+\left[K_{MS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[M_{SS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[K_{SM}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{C}\right]=&\left[C_{MM}\right]-\left[K_{MS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[C_{SM}\right]-\left[C_{MS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[K_{SM}\right]+\\&+\left[K_{MS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[C_{SS}\right]\left[K_{SS}\right]^{-1}\left[K_{SM}\right]\end{aligned}$$

ANALISI RIDOTTA/5

Criteri di selezione dei g.d.l. “Master” (MDOF):

- i MDOF devono essere in numero **almeno doppio** dei modi da estrarre

- scegliere i MDOF nelle direzioni in cui si vuole analizzare le vibrazioni della struttura

- scegliere i MDOF in punti della struttura caratterizzati da bassa rigidezza e/o elevata massa

- scelta automatica: si selezionano i dof per i quli il rapporto: $Q_i = \dfrac{k_{ii}}{m_{ii}}$ assume i valori più bassi

Verifica qualità analisi:

- la massa ridotta deve differire da quella totale per non più del 10-15%
- studio di convergenza al variare del numero di MDOF

ANALISI RIDOTTA/6

Principali algoritmi di estrazione di autovalori ed autovettori (ANSYS) :

Algoritmo	N° modi	N° g.d.l. modello	Velocità	RAM	Hard disk	Note
Block Lanczos	Elevato	Elevato	Elevata	Media	Bassa	Shell o shell+solid. Elementi distorti
Subspace iteration	Basso	Elevato	Media	Bassa	Elevata	Elementi non distorti
Power Dynamics	Basso	Elevato	Elevata	Elevata	Bassa	Richiede mesh fini
Reduced (Householder)	Tutti	Medio-piccolo	Elevata	Bassa	Bassa	Usa MDOF

ANALISI RIDOTTA/7

Potenziali applicazioni dell'analisi ridotta:

- riduzione degli oneri computazionali dell'analisi
- riduzione del numero di g.d.l. attivi nell'analisi modale, rispetto a quella statica, pur utilizzando un unico modello
- in modelli semplici, separazione dell'effetto dei diversi g.d.l. nodali (es. in una trave si possono analizzare separatamente i modi flessionali, estensionali, etc.)

COMANDI ANSYS/1
ANALISI NON RIDOTTA

/SOLU
ANTYPE, MODAL   Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *Method, NMODE, FREQB, FREQE,* *,Nrmkey*

- LANB   Block-Lanczos (Default)
- SUBSP   Subspace
- …..

Frequenza iniziale e finale per la ricerca dei modi

N° modi da estrarre
(per SUBSP, al massimo n° g.d.l./2)

- OFF: forme modali normalizzate su [M]
- ON: forme modali normalizzate al valore 1

Per Power Dynamics:
•MODOPT,SUBSP
•EQSLV,PCG

COMANDI ANSYS/2
ANALISI NON RIDOTTA

LUMPM, *OPZ*   Attiva la matrice di massa “Lumped”

OFF: matrice “consistent” (default)
ON: matrice “lumped” (deafult per “Power Dynamics”)

/POST1
SET,LIST   Gli “n” modi richiesti compaiono come “n” substep del Load step 1

SET,1,*n*   Carica il modo “n”

PLDISP, PRDISP Rappresentano la deformata

COMANDI ANSYS/3
ANALISI RIDOTTA

/SOLU
ANTYPE, MODAL   Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *REDUC, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey*

M, *Node*, *Lab1*, ...

Nodo in cui mettere il MDOF

g.d.l. da usare come MDOF:
-UX, UY, UZ
-ROTX, ROTY, ROTZ
-ALL

TOTAL, *Ntot*, *Nrdof*

Numero totale di MDOF

0 – considera tutti i g.d.l.
1 – esclude i g.d.l. rotazionali

COMANDI ANSYS/4
ANALISI RIDOTTA

MXPAND, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Elcalc*, *SIGNIF*

N° di modi da estrarre
(al massimo, tutti quelli indicati in MODOPT)

Frequenza iniziale e finale per la ricerca dei modi

OFF: non calcola i risultati completi per gli elementi (default)
ON: calcola i risultati completi per gli elementi

SOLVE