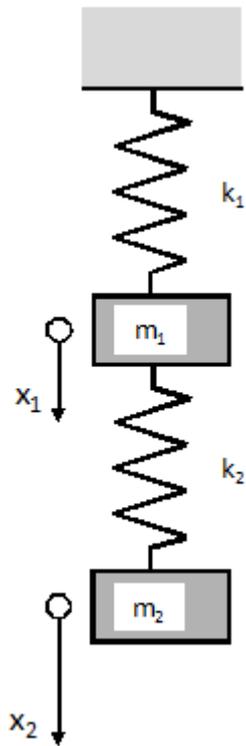


## Esempio 1 – Determinazione modi propri e forme modali per sistema a 2 gdl



Per il sistema di Fig. 7.1, con i seguenti valori assegnati di masse e rigidzze:

$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad m_1 := 14 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$

Matrici di massa e rigidzza

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni proprie e forme modali

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 7.319 \frac{1}{\text{s}}$$

$$r_1 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 \cdot m_1}{k_2} = 2 \quad \text{rapporto } X_2/X_1 \text{ per il modo 1}$$

7.1

$$\omega_2 := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 14.639 \frac{1}{\text{s}}$$

$$r_2 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 \cdot m_1}{k_2} = -1 \quad \text{rapporto } X_2/X_1 \text{ per il modo 2}$$

Si osserva che il rapporto  $X_2/X_1$  è positivo per la  $\omega_1$  e negativo per la  $\omega_2$ . Questo implica che le masse oscillino in fase nel primo caso ed in opposizione di fase nel secondo caso.

Di conseguenza, le forme modali sono date da:

$$[y^{(1)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[y^{(2)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le corrispondenti masse modali sono date da:

$$M_1 := [y^{(1)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(1)}] = 42 \text{ kg}$$

$$M_2 := [y^{(2)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(2)}] = 21 \text{ kg}$$

da cui le forme modali normalizzate rispetto alla matrice di massa:

$$[Y^{(1)}] := \frac{1}{\sqrt{M_1}} \cdot [y^{(1)}] = \begin{pmatrix} 0.154 \\ 0.309 \end{pmatrix}$$

$$[Y^{(2)}] := \frac{1}{\sqrt{M_2}} \cdot [y^{(2)}] = \begin{pmatrix} 0.218 \\ -0.218 \end{pmatrix}$$

Si può immediatamente verificare che risulta:

$$[Y^{(1)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [Y^{(1)}] = 1 \text{ kg}$$

$$[Y^{(2)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [Y^{(2)}] = 1 \text{ kg}$$

---

**Esempio 2 Verifica proprietà di ortogonalità per sistema a 2 gdl**

Si verifica immediatamente che le forme modali precedentemente determinate per il sistema di Fig. 7.1 sono ortogonali rispetto alle matrici di massa e rigidezza::

$$[Y^{(1)}]^{-T} \cdot M \cdot [Y^{(2)}] = 0 \text{ kg}$$

$$[Y^{(2)}]^{-T} \cdot M \cdot [Y^{(1)}] = 0 \text{ kg}$$

$$[Y^{(1)}]^{-T} \cdot M \cdot [Y^{(1)}] = 1 \text{ kg}$$

$$[Y^{(2)}]^{-T} \cdot M \cdot [Y^{(2)}] = 1 \text{ kg}$$

$$[Y^{(1)}]^{-T} \cdot K \cdot [Y^{(2)}] = -0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[Y^{(2)}]^{-T} \cdot K \cdot [Y^{(1)}] = -0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[Y^{(1)}]^{-T} \cdot K \cdot [Y^{(1)}] = 53.6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[Y^{(2)}]^{-T} \cdot K \cdot [Y^{(2)}] = 214.3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

In generale, le forme modali non risultano invece ortogonali tra loro, salvo il caso particolare in cui le masse siano tutte uguali.

---

---

**Esempio 3 - Diagonalizzazione matrici per sistema a 2 gdl**

Si possono costruire la matrice modale e quella delle pulsazioni proprie per il sistema di Fig. 7.1:

$$[\omega^2] := \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53.571 & 0 \\ 0 & 214.286 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

$$[Y] := \text{augment} \left[ [Y^{(1)}], [Y^{(2)}] \right] = \begin{pmatrix} 0.154 & 0.218 \\ 0.309 & -0.218 \end{pmatrix}$$

Si verifica inoltre immediatamente la capacità della matrice modale di diagonalizzare le matrici di massa e rigidezza:

$$[Y]^T \cdot M \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{kg}$$

$$[Y]^T \cdot K \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 53.571 & -2.132 \times 10^{-14} \\ -2.842 \times 10^{-14} & 214.286 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{s^2}$$


---

## Esempio 4 – Determinazione oscillazione libera per sistema a 2 gdl

Si determini la legge del moto per il sistema di Fig. 7.1, con le seguenti condizioni iniziali.

### Condizioni iniziali

$$x_{10} := 10 \cdot \text{mm} \qquad x_{20} := x_{10} \cdot r_1 + x_{20} \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{100} \cdot x_{10} = 7.4 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$x_{p10} := 0 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}} \qquad x_{p20} := 0 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

### Calcolo di ampiezza e fase per i due modi propri

$$a_1 := 0.5 \cdot \text{mm} \qquad a_2 := 1.25 \cdot \text{mm} \qquad \phi_1 := 0 \qquad \phi_2 := 0$$

Given

$$a_1 \cdot \cos(\phi_1) + a_2 \cdot \cos(\phi_2) = x_{10}$$

$$r_1 \cdot a_1 \cdot \cos(\phi_1) + r_2 \cdot a_2 \cdot \cos(\phi_2) = x_{20}$$

$$-\omega_1 \cdot a_1 \cdot \sin(\phi_1) - \omega_2 \cdot a_2 \cdot \sin(\phi_2) = x_{p10}$$

$$-\omega_1 \cdot a_1 \cdot r_1 \cdot \sin(\phi_1) - \omega_2 \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \sin(\phi_2) = x_{p20}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_1, a_2, \phi_1, \phi_2)$$

$$a_1 = 5.8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$a_2 = 4.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

*Rappresentazione della legge del moto per le due masse*

$$x_1(t) := a_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$t := 0\text{-s}, 0.001\text{-s}.. 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\omega_1}$$

$$x_2(t) := a_1 \cdot r_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

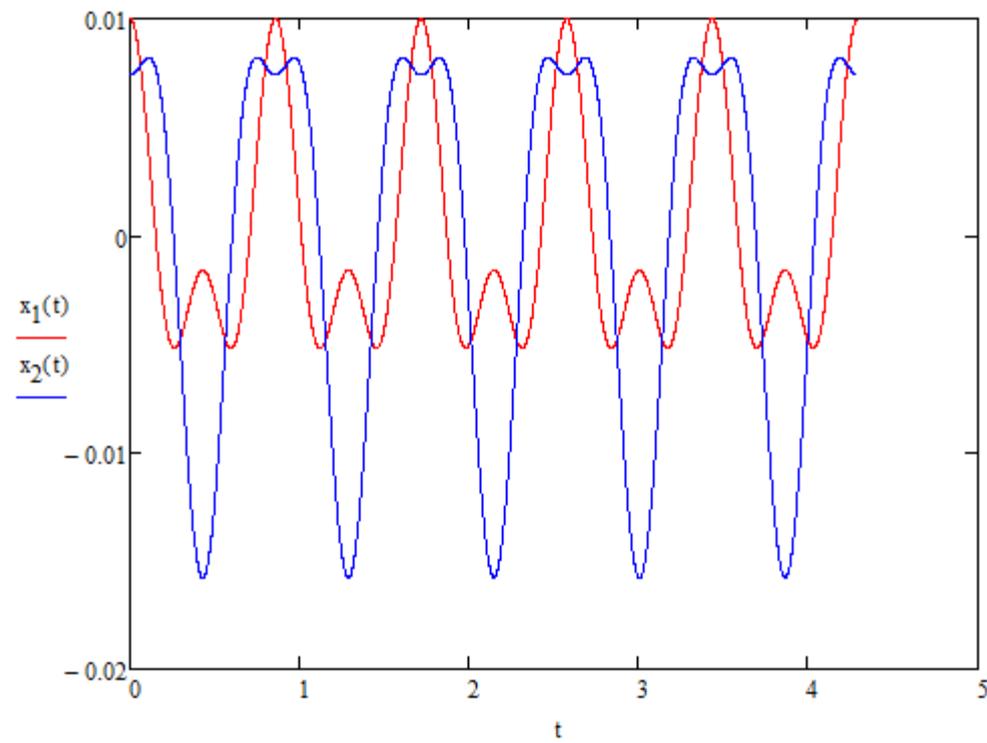


Fig. 7.2

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema non smorzato con forzante :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

Sostituendo nell'equazione lo sviluppo in base alle forme modali:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q\}$$

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [K][Y]\{q\} = \{F(t)\}$$

e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T [M][Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = [Y]^T \{F(t)\}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

$$[Y]^T [M] [Y] \{\ddot{q}\} + [Y]^T [K] [Y] \{q\} = [Y]^T \{F\} e^{i\Omega t}$$

si ottiene:

$$[I] \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \{q\} = [Y]^T \{F\} e^{i\Omega t}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \{Y_j\}^T \{F\} e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

Si osserva che la forzante esterna ha andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Q_j + \omega_j^2 Q_j = f_j$$

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)}$$

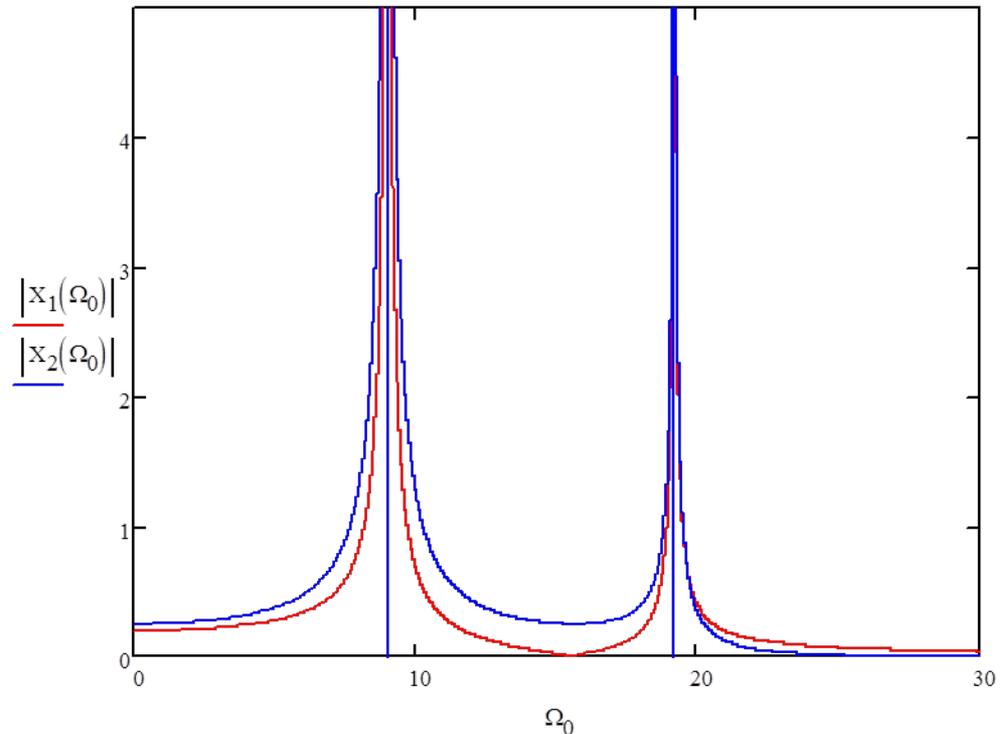
**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)}$$

La soluzione generale risulta quindi data da:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N Q_j \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t} =$$

che può essere vista come  
sovrapposizione di N  
oscillatori elementari ad 1 gdl.



**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE – CEDEVOLEZZA DINAMICA**

Risulta utile formalizzare il comportamento generale del sistema attraverso una **matrice di cedevolezza dinamica**. Posto:

$$\{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t} \quad \{x(t)\} = \{X\}e^{i\Omega t}$$

Si definisce matrice di cedevolezza dinamica la matrice  $\alpha_{ij}$ :

$$\{X\} = [\alpha_{ij}(\Omega)]\{F\}$$

Dall'equazione di equilibrio dinamico si ha:

$$([K] - \Omega^2[M])\{X\} = \{F\}$$

Per cui:

$$([K] - \Omega^2[M]) = [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE – CEDEVOLEZZA DINAMICA

$$([K] - \Omega^2[M]) = [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1}$$

$$[Y]^T [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} [Y] = [Y]^T ([K] - \Omega^2[M]) [Y]$$

$$[Y]^T [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} [Y] = \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2]$$

$$[\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} = ([Y]^T)^{-1} \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2] [Y]^{-1}$$

$$[\alpha_{ij}(\Omega)] = [Y] \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2]^{-1} [Y]^T$$

$$\alpha_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\{Y_i^{(r)}\} \{Y_j^{(r)}\}}{\omega_r^2 - \Omega^2}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE – CEDEVOLEZZA DINAMICA

L'espressione della **matrice di cedevolezza dinamica** può essere ottenuta anche a partire dalle coordinate modali:

$$\{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t} \quad \{x(t)\} = \{X\}e^{i\Omega t} \quad \{X\} = [Y]\{Q\}$$

Si osserva che risulta :

$$\{Q\} = \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2]^{-1} [Y]^T \{F\}$$

per cui si ha:

$$\{X\} = [Y] \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2]^{-1} [Y]^T \{F\}$$

da cui si ottiene immediatamente:

$$[\alpha_{ij}(\Omega)] = [Y] \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2]^{-1} [Y]^T$$

$$\alpha_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\{Y_i^{(r)}\} \{Y_j^{(r)}\}}{\omega_r^2 - \Omega^2}$$

### Esempio 1 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl non smorzato

#### Applicazione

Dati i seguenti valori delle grandezze che definiscono il sistema:.

$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 1000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad m_1 := 10\text{-kg} \quad m_2 := 5\text{-kg}$$

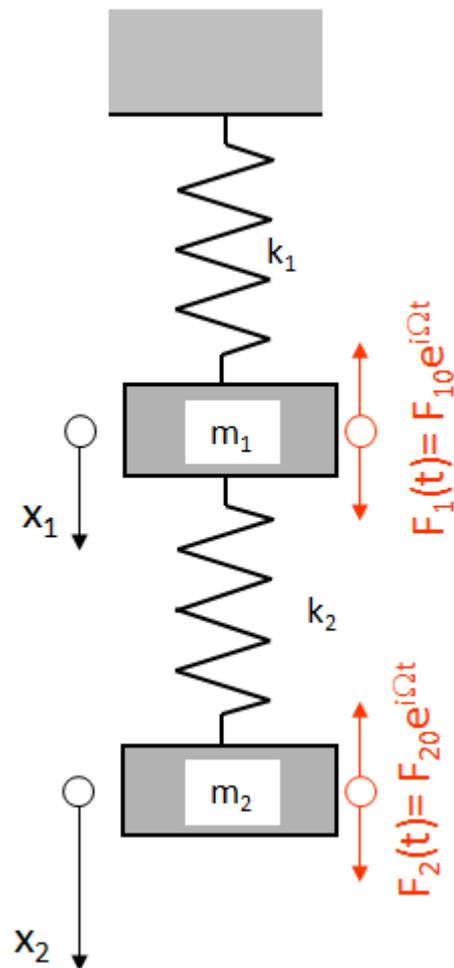
$$F_{10} := 250\text{-N} \quad F_{20} := 50\text{-N}$$

Si determinano i parametri di normalizzazione:

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 12.247 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_2 := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 14.142 \frac{1}{\text{s}}$$

e le espressioni delle ampiezze di vibrazione, in funzione della pulsazione della forzante:

$$\Omega_0 := 0 \cdot \frac{1}{\text{s}}, 0.001 \cdot \frac{1}{\text{s}} \dots 30 \cdot \frac{1}{\text{s}}$$



$$X_1(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) \cdot \frac{F_{10}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

$$X_2(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10}}{k_1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \frac{F_{20}}{k_2}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

$$xx(\Omega_0) := 0$$

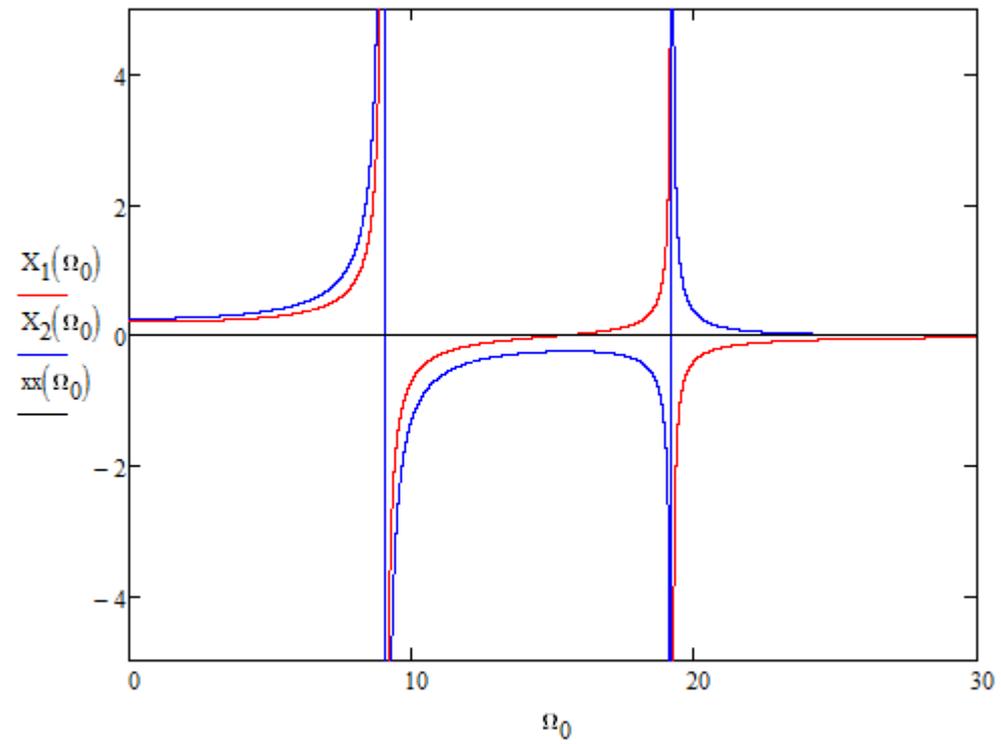


Fig. 9.2

Come nel sistema ad 1 gdl, si osserva che l'ampiezza di vibrazione tende ad infinito allorché la pulsazione della forzante è in risonanza con una delle due frequenze proprie del sistema, date da:

$$\omega_{1n} := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 9.021 \frac{1}{s}$$

$$\omega_{2n} := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 19.199 \frac{1}{s}$$

Si nota inoltre come le due masse si muovano in fase in prossimità della prima risonanza ed in controfase in prossimità della seconda, in accordo con le relative forme modali.

## Esempio 2 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl non smorzato con il metodo di sovrapposizione modale

Si determinano, per il sistema di cui all'esempio 1, le forme modali:

$$r_1 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_{1n}^2 \cdot m_1}{k_2} = 1.686$$

$$r_2 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_{2n}^2 \cdot m_1}{k_2} = -1.186$$

$$[y^{(1)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.686 \end{pmatrix}$$

$$[y^{(2)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.186 \end{pmatrix}$$

Le corrispondenti masse modali sono date da:

$$M_1 := [y^{(1)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(1)}] = 24.215 \text{ kg}$$

$$M_2 := [y^{(2)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(2)}] = 17.035 \text{ kg}$$

da cui le forme modali normalizzate rispetto alla matrice di massa:

$$[Y^{(1)}] := \frac{1}{\sqrt{\frac{M_1}{\text{kg}}}} \cdot [y^{(1)}] = \begin{pmatrix} 0.203 \\ 0.343 \end{pmatrix}$$

$$[Y^{(2)}] := \frac{1}{\sqrt{\frac{M_2}{\text{kg}}}} \cdot [y^{(2)}] = \begin{pmatrix} 0.242 \\ -0.287 \end{pmatrix}$$

Vettore delle forzanti esterne

$$[V] := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{pmatrix}$$

Contributo del modo 1

$$f_1 := \llbracket Y^{(1)} \rrbracket^T \cdot [V] = 67.936 \text{ N}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_1(\Omega) := \frac{f_1}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)}$$

Contributo del modo 2

$$f_2 := \llbracket Y^{(2)} \rrbracket^T \cdot [V] = 46.203 \text{ N}$$

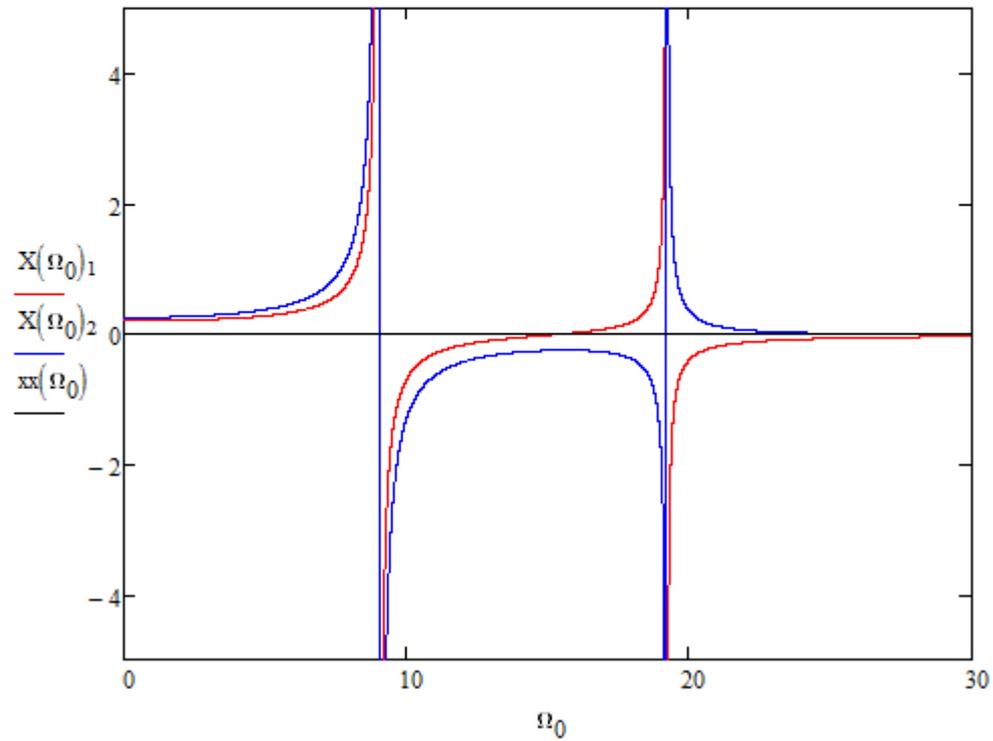
Forza modale per il modo 1

$$Q_2(\Omega) := \frac{f_2}{(\omega_{2n}^2 - \Omega^2)}$$



Soluzione

$$X(\Omega) = Q_1(\Omega) \cdot [Y^{(1)}] + Q_2(\Omega) \cdot [Y^{(2)}]$$





### Esempio 3 - Effetto della distribuzione della forzante sull'oscillazione forzata di sistema a 2 gdl non smorzato

Per il sistema degli esempi 1 e 2, la freccia prodotta sulle due masse dall'applicazione statica della forzante è data da:

$$\delta_1 := \frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} \quad \delta_2 := \frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_2}$$

con rapporto:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} := \frac{\frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_2}}{\frac{F_{10} + F_{20}}{k_1}} = 1 + \frac{\frac{F_{20}}{k_2}}{\frac{F_{10} + F_{20}}{k_1}} = 1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{F_{20}}{F_{10} + F_{20}} = 1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{\frac{F_{10}}{F_{20}} + 1}$$

Uguagliando questo rapporto a quello tra gli spostamenti nelle forme modali si ottiene:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} := r_j$$

$$r_j - 1 := \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{\frac{F_{10}}{F_{20}} + 1}$$

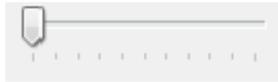
da cui si ricava che il rapporto tra le due forze necessario per avere una deformata uguale, ameno di una costante, alla forma modale "j" è pari a:

$$\left( \frac{F_{10}}{F_{20}} \right)^{(j)} := \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_j - 1} - 1$$

Nel seguito è possibile far variare in modo continuo il rapporto tra le forze tra quello richiesto per avere una deformata statica coincidente con la forma modale 1 e con la forma modale 2:

$r_{j0}=0$  – Forma modale 1

$r_{j0} :=$

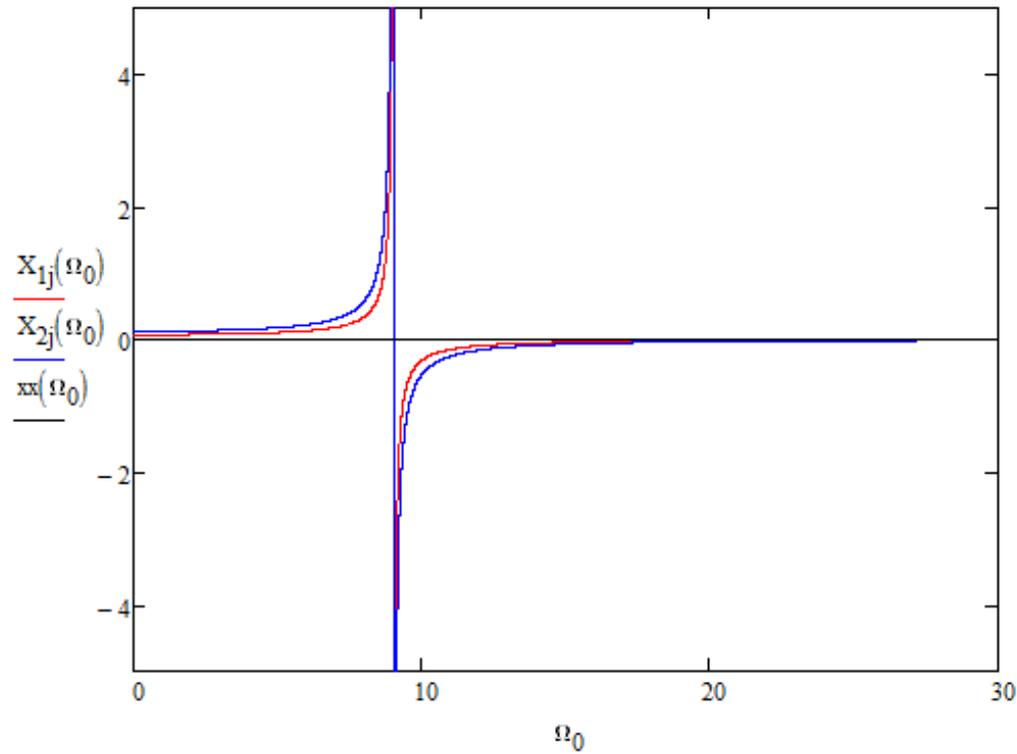


$r_{j0} = 0$

$$F_{10j} := F_{20} \left[ \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_{j0}}{100}} - 1 \right] = 59.307 \text{ N}$$

$$X_{1j}(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) \cdot \frac{F_{10j}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right] \cdot \left[1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$X_{2j}(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10j}}{k_1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \frac{F_{20}}{k_2}}{\left[\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right] \cdot \left[1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$


 $r_{j0}=0$  – Forma modale 1

è inoltre possibile calcolare il lavoro compiuto dal sistema di forze su uno stato di spostamento corrispondente alla forma modale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = 143.61407 \text{ N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = -0 \text{ N}$$

$r_{j0} :=$ 

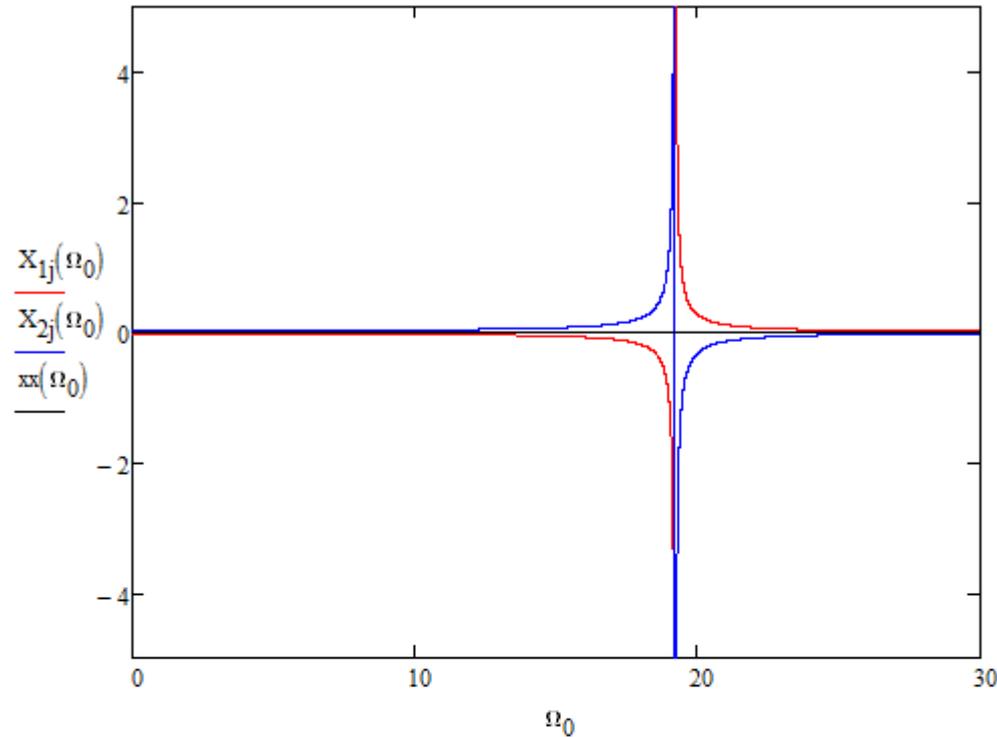
 $r_{j0} = 100$ 

$$F_{10j} := F_{20} \cdot \left[ \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_{j0}}{100}} - 1 \right] = -84.307 \text{ N}$$

$$X_{1j}(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) \cdot \frac{F_{10j}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

$$X_{2j}(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10j}}{k_1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \frac{F_{20}}{k_2}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

 $r_{j0}=100$  – Forma modale 2



$r_{j0}=100$  – Forma modale 2

è inoltre possibile calcolare il lavoro compiuto dal sistema di forze su uno stato di spostamento corrispondente alla forma modale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = 0 \text{ N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = -143.61407 \text{ N}$$

Si può notare che se  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = r_j$  si ha la scomparsa della risonanza relativa al modo diverso da  $\omega_j$ , mentre il lavoro compiuto dal sistema di forze pensato applicato staticamente sulla relativa

## Esempio - Calcolo di matrice di cedevolezza dinamica

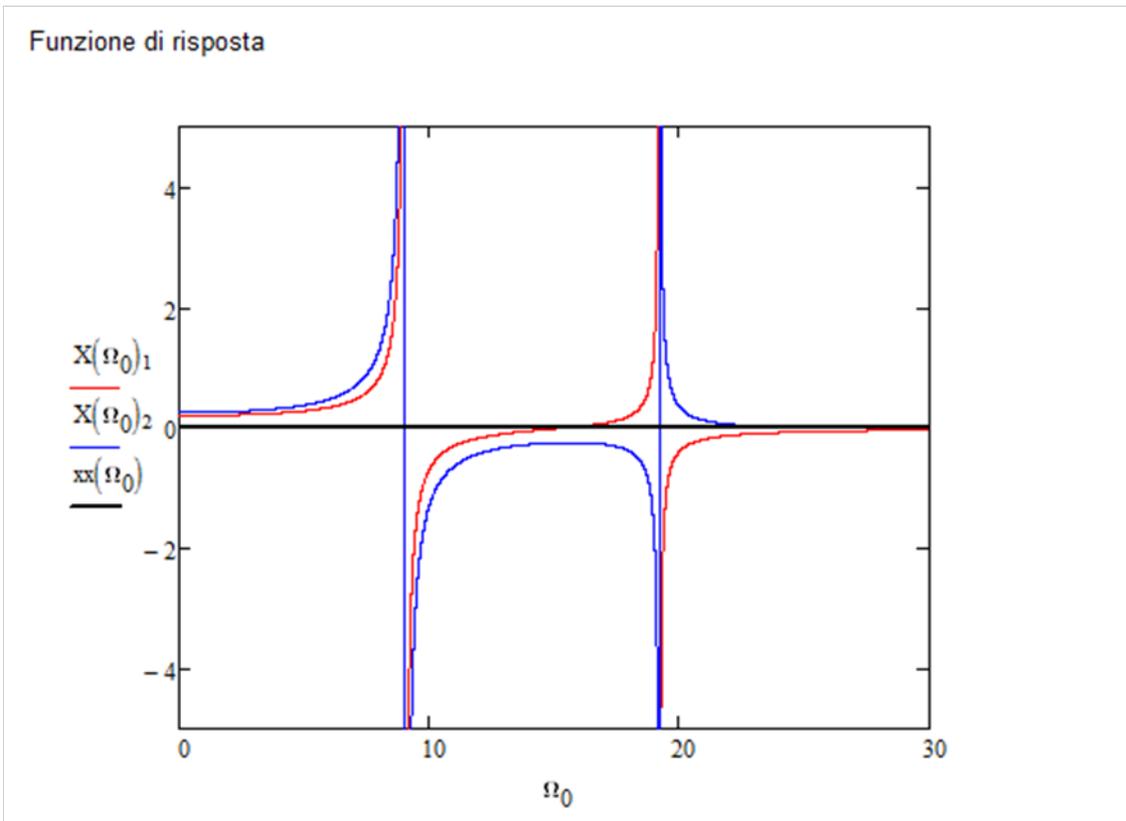
Per il sistema degli esempi 1-3, si ottenga la matrice di cedevolezza dinamica.

$$[Y] := \text{augment} \left[ [Y^{(1)}], [Y^{(2)}] \right] = \begin{pmatrix} 0.203 & 0.242 \\ 0.343 & -0.287 \end{pmatrix} \quad \text{Matrice modale}$$

$$D(\Omega) := \begin{bmatrix} \frac{1}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\omega_{2n}^2 - \Omega^2)} \end{bmatrix} \quad \text{Matrice delle frequenze inversa}$$

$$\alpha(\Omega) := [Y] \cdot D(\Omega) \cdot [Y]^T \quad \text{Matrice di cedevolezza}$$

$$\underline{\underline{X}}(\Omega) := \alpha(\Omega) \cdot [V] \quad \text{Vettore degli spostamenti}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Si dovrebbero cercare soluzioni del tipo

$$\{x\} = \{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\dot{x}\} = \lambda\{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\ddot{x}\} = \lambda^2\{Z\}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2[M]\{Z\}e^{\lambda t} + \lambda[C]\{Z\}e^{\lambda t} + [K]\{Z\}e^{\lambda t} = 0$$

da cui:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{Z\} = 0$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K])\{Z\} = 0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) = 0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2N} + a_1 \lambda^{2N-1} + \dots + a_{2N-1} \lambda^1 + a_{2N} = 0$$

N coppie di radici (autovalori)  $\lambda_j$  complesse coniugate, che sostituite, forniscono N coppie di autovettori complessi  $\{Z_j\}$ .

Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente per piccoli N, o con metodi numerici per N grandi.

Nel seguito saranno presentate delle metodologie di soluzione analitica, finalizzate principalmente a evidenziare le caratteristiche generali del comportamento del sistema.



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

La procedura di soluzione, come è lecito attendersi, è fortemente influenzata dalla natura della matrice  $[C]$ .

In particolare è opportuno distinguere due casi:

- la matrice  $[C]$  viene diagonalizzata dalla matrice modale  $[Y]$  **del sistema non smorzato (“Smorzamento Classico” o “Classical Damping”)**
- la matrice  $[C]$  **non** viene diagonalizzata dalla matrice modale  $[Y]$  **(“Smorzamento Non Classico” o “Non Classical Damping”)**

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

In generale

$$[Y]^T [C] [Y]$$

← Matrice modale sistema non smorzato

non è una matrice diagonale, per cui le equazioni del moto non possono essere disaccoppiate .

Se lo smorzamento è molto piccolo, diviene lecito assumere forme diagonalizzabili della matrice di smorzamento. In tal caso si ha (**Smorzamento Classico o “Classical Damping”**):

$$[Y]^T [C] [Y] = [C_d] = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix} = \text{diag} [c_{jd}]$$

$$c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
CLASSICAL DAMPING**

Ponendo:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q(t)\} \quad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}\} \quad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [C][Y]\{\dot{q}\} + [K][Y]\{q\} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$[Y]^T [M][Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [C][Y]\{\dot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = 0$$

da cui:

$$[I]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[2\xi_j\omega_j]\{\dot{q}\} + \text{diag}[\omega_j^2]\{q\} = 0$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
CLASSICAL DAMPING**

$$[I]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[2\xi_j\omega_j]\{\dot{q}\} + \text{diag}[\omega_j^2]\{q\} = 0$$

Sistema di N equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = 0$$

cui corrispondono autovalori

$$\lambda_j = -\xi_j\omega_j \pm i\omega_j\sqrt{1-\xi_j^2} = -\xi_j\omega_j \pm i\omega_{sj}$$

e soluzioni del tipo:

$$q_j(t) = e^{-\xi_j\omega_j t} \left[ A_{j1}e^{i\omega_{sj}t} + A_{j2}e^{-i\omega_{sj}t} \right]$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

Per quanto riguarda gli autovettori (forme modali) si dimostra che, **nel caso di smorzamento classico, coincidono con quelli del sistema non smorzato.**

$$([K] - \omega_{nj}^2 [M]) \{Y^{(j)}\} = 0 \quad \text{Sistema non smorzato}$$

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Z^{(j)}\} = 0 \quad \text{Sistema smorzato}$$

Ipotizzando che valga la:  $\{Z^{(j)}\} = \{Y^{(j)}\}$  si ottiene:

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Y^{(j)}\} = ([K] - \omega_{nj}^2 [M]) \{Y^{(j)}\}$$

$$\lambda_j^2 [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 [M] \{Y^{(j)}\}$$

Premoltiplicando per la trasposta della forma modale  $\{Y^{(j)}\}$ :

$$\lambda_j^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j \{Y^{(j)}\}^T [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

$$\lambda_j^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j \{Y^{(j)}\}^T [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\}$$

$$\lambda_j^2 + 2\xi_j \omega_j \lambda_j + \omega_j^2 = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm \sqrt{(\xi_j \omega_j)^2 - \omega_j^2} = -\xi_j \omega_j \pm \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

Si dimostra quindi che il problema agli autovalori del sistema smorzato è soddisfatto dagli autovettori del sistema non smorzato e da autovalori dati dalla relazione precedente.

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Y^{(j)}\} = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Si dimostra che la matrice di smorzamento è diagonalizzabile se:

$$[C] = [M] \sum_{l=0}^m \alpha_l \left( [M]^{-1} [K] \right)^l$$

Se si pone  $m=1$ , si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO

### UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Combinando:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

con:

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [M] \{Y_r\} = 0 & \text{per } "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [M] \{Y_r\} = 1 & \text{per } "s" = "r" \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [K] \{Y_r\} = 0 & \text{per } "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [K] \{Y_r\} = \omega_r^2 & \text{per } "s" = "r" \end{cases}$$

si ottiene:

$$[C_d] = [Y]^T [C] [Y] = \alpha [Y]^T [M] [Y] + \beta [Y]^T [K] [Y] = \alpha [I] + \beta \cdot \text{diag}[\omega_j^2]$$

$$c_{rd} = \alpha + \beta \omega_r^2$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

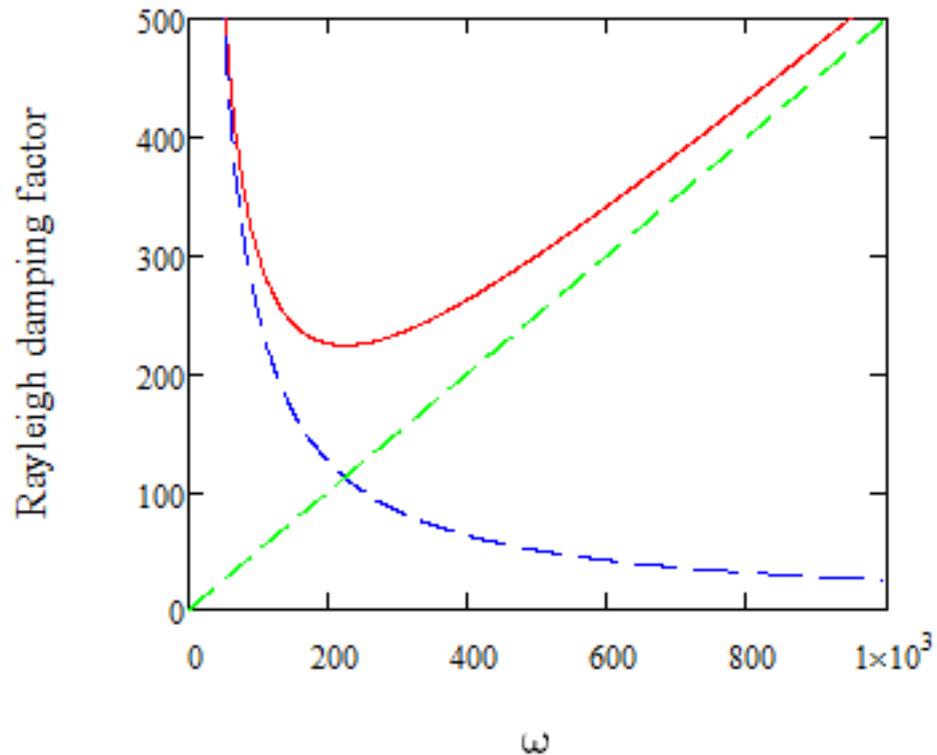
$$c_{rd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

Combinando con :  $c_{rd} = 2\xi_r\omega_r$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_r = \alpha + \beta\omega_r^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_r} + \beta\omega_r \right)$$



- Total damping
- - -  $\alpha/\omega$
- - -  $\beta\omega$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE**  
**CLASSICAL DAMPING**

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q(t)\}$$

pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, qualora la matrice C sia diagonalizzabile, si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \xi_1\omega_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \xi_2\omega_2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n\omega_n \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \{q\} = [Y]^T \{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = \{Y_j\}^T \{F\}e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j\omega_j\Omega Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

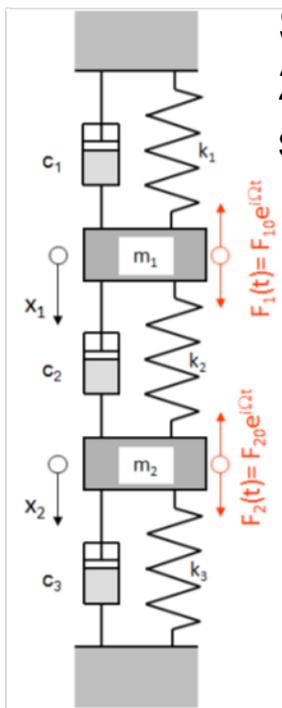
$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j\omega_j\Omega}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

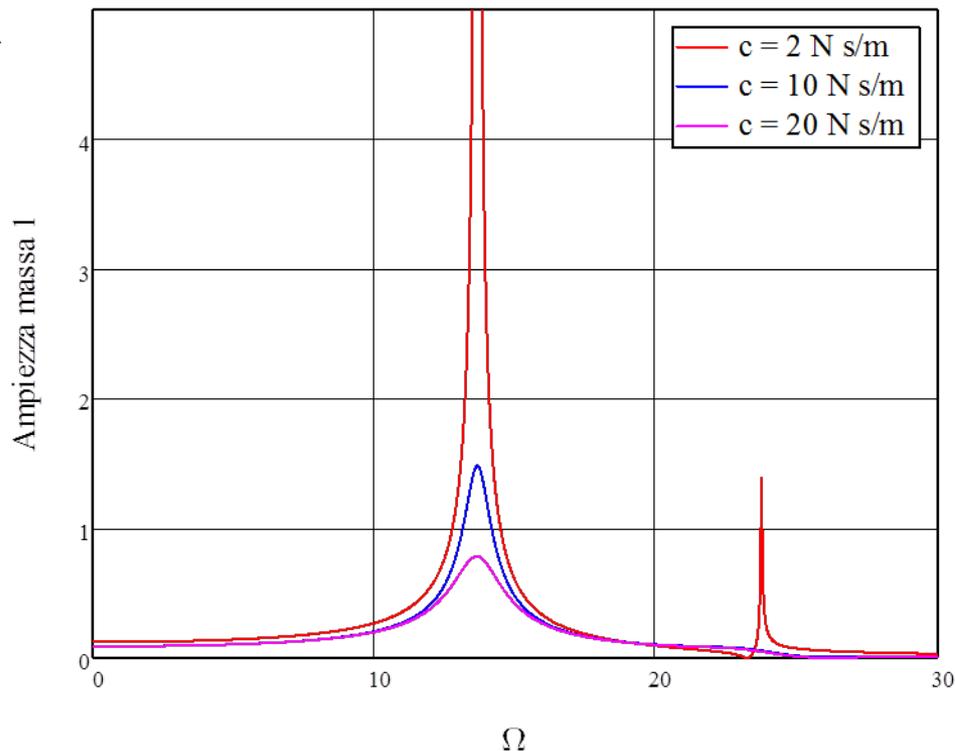
La soluzione completa assume quindi una forma del tipo:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j\omega_j\Omega} \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t}$$

ovvero la somma del contributo di N oscillatori ad 1 gdl, ognuno corrispondente ad uno dei modi propri.

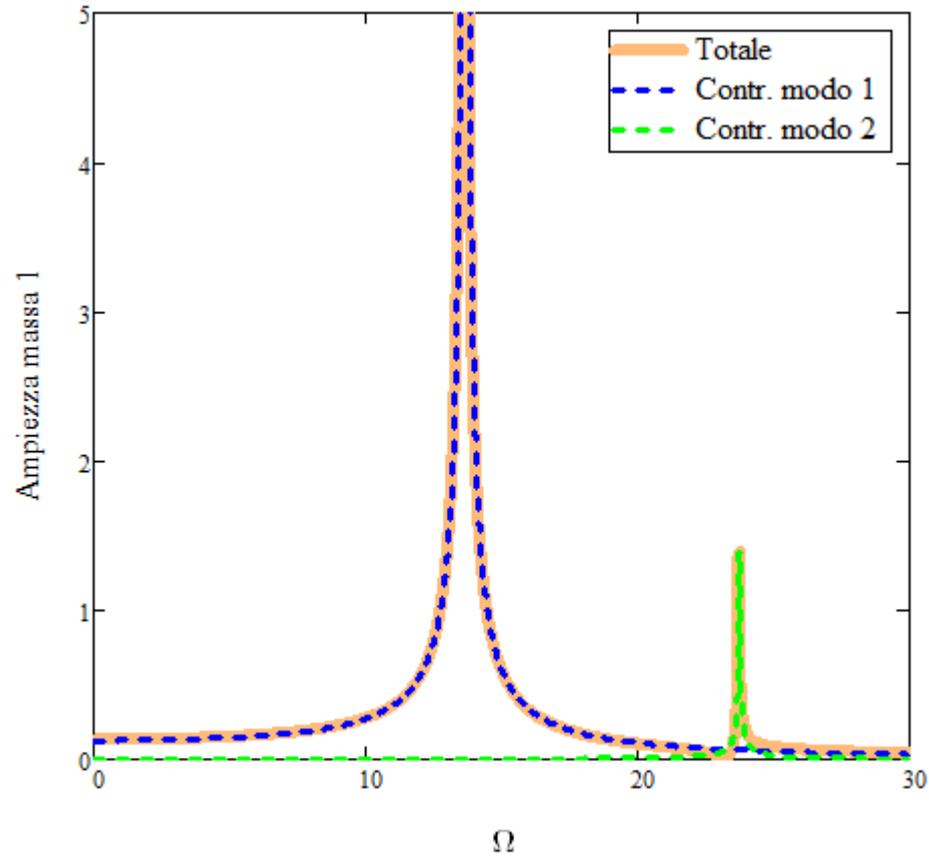
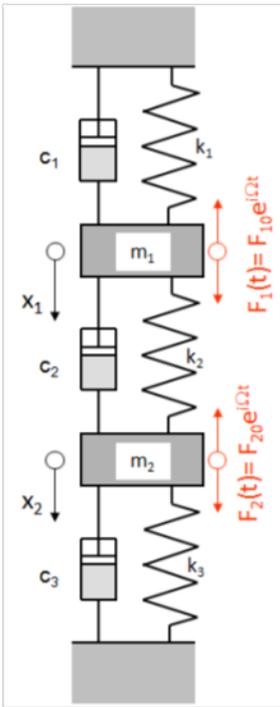


Sistema forzato a 2 gdl – effetto smorzamento



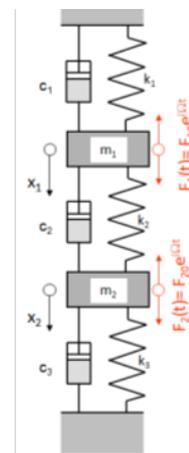
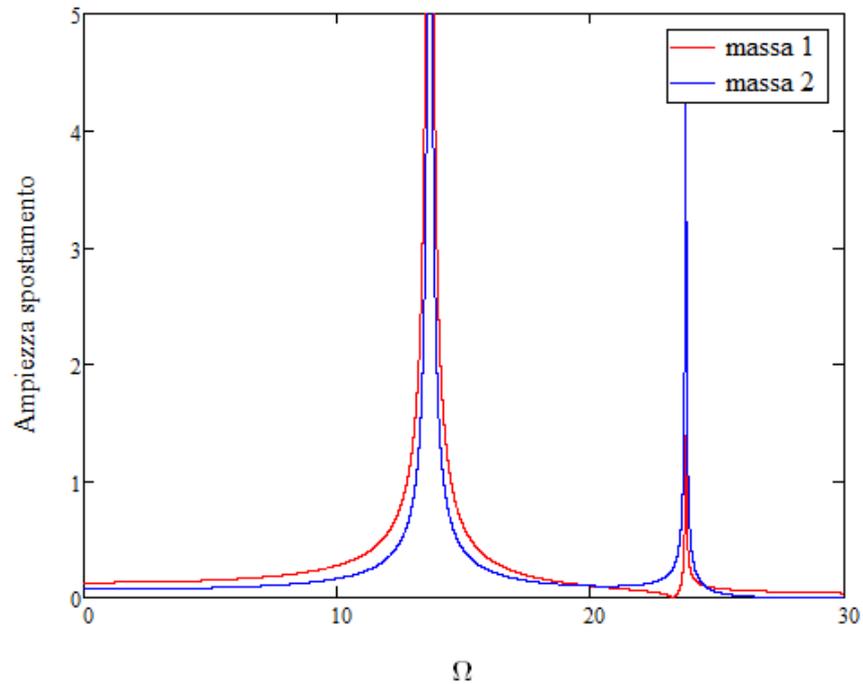
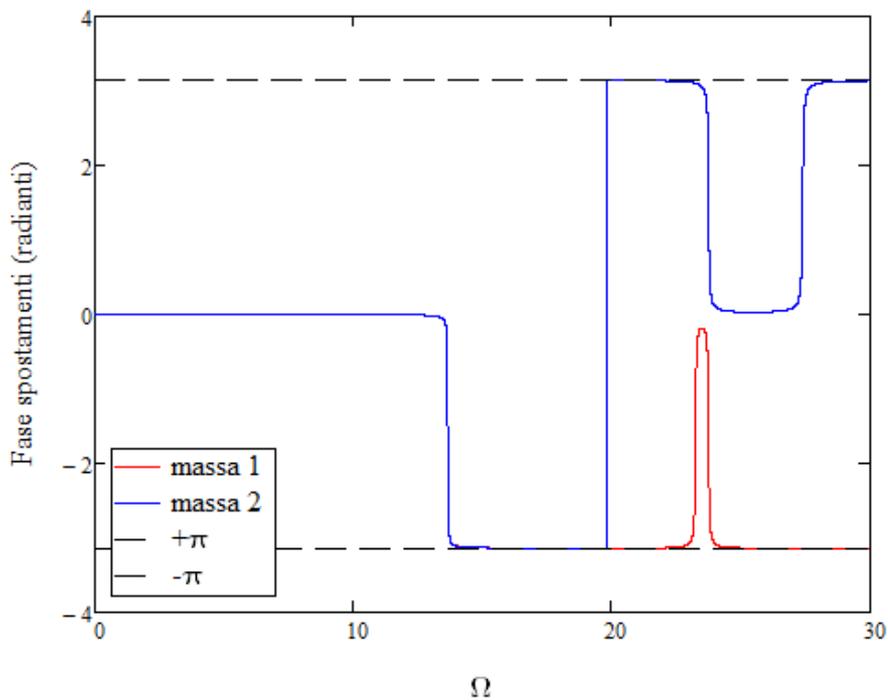
# SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

Contributo dei due modi propri



# SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

Andamento modulo e fase spostamenti



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING – CEDEVOLEZZA DINAMICA

Risulta utile, anche in questo caso, formalizzare il comportamento generale del sistema attraverso una **matrice di cedevolezza dinamica**, definita come :

$$\{X\} = [\alpha_{ij}(\Omega)]\{F\}$$

Dall'equazione di equilibrio dinamico si ha:

$$([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M])\{X\} = \{F\}$$

Per cui:

$$[\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} = ([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M])$$

$$[Y]^T [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} [Y] = [Y]^T ([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M]) [Y]$$

$$[Y]^T [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} [Y] = \text{diag}[\omega_j^2] + i\Omega \text{diag}[2\xi_j \omega_j] - \Omega^2 [I]$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE – CEDEVOLEZZA DINAMICA**

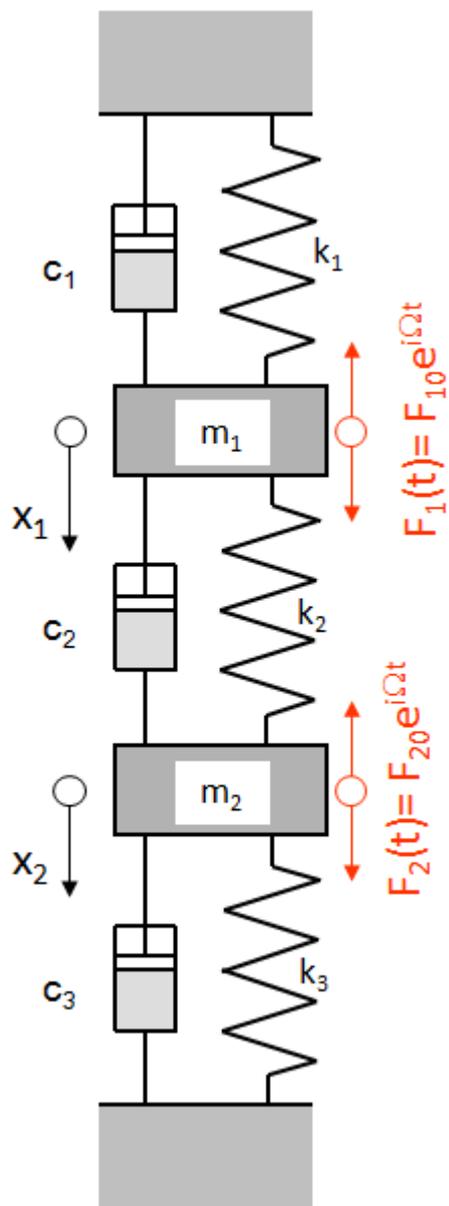
$$[Y]^T [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} [Y] = \text{diag}[\omega_j^2] + i\Omega \text{diag}[2\xi_j \omega_j] - \Omega^2 [I]$$

$$[Y]^T [\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} [Y] = \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2 + i\Omega 2\xi_j \omega_j]$$

$$[\alpha_{ij}(\Omega)]^{-1} = ([Y]^T)^{-1} \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2 + i\Omega 2\xi_j \omega_j] [Y]^{-1}$$

$$[\alpha_{ij}(\Omega)] = [Y] \text{diag}[\omega_j^2 - \Omega^2 + i\Omega 2\xi_j \omega_j]^{-1} [Y]^T$$

$$\alpha_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\{Y_i^{(r)}\} \{Y_j^{(r)}\}}{\omega_r^2 - \Omega^2 + i2\xi_j \omega_j \Omega}$$



## Esempio 1 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl smorzato

Soluzione con metodo diretto

### Esempio applicativo

Calcolo dell'ampiezza di vibrazione del sistema di Fig. 10.1, in funzione della pulsazione della forzante.

$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 1000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad f_{\text{act}} := 0.1$$

$$m_1 := 10 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 5 \cdot \text{kg}$$

$$c_1 := 1.996 \cdot f_{\text{act}} \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad c_2 := 0.668 \cdot f_{\text{act}} \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad c_3 := 1.499 \cdot f_{\text{act}} \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

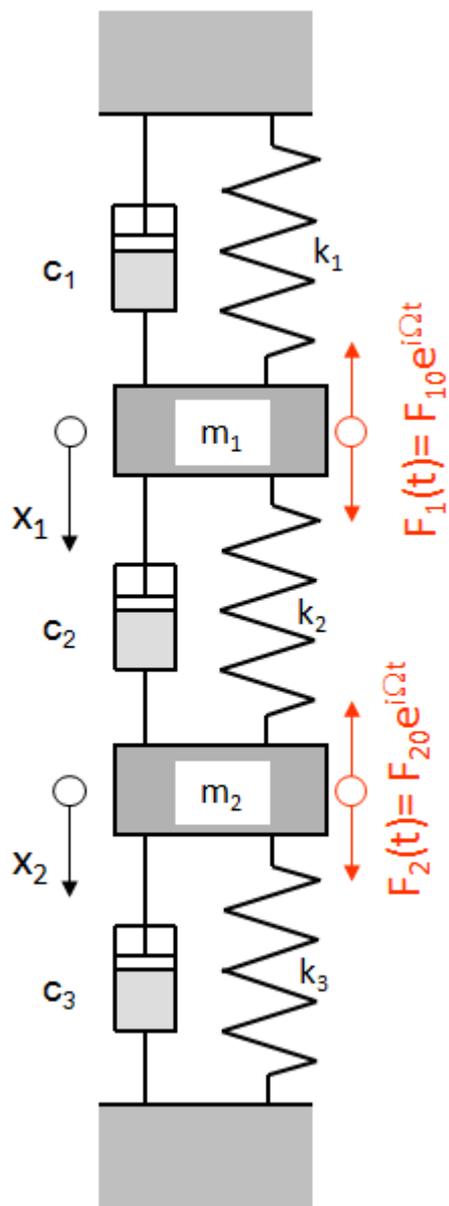
$$F_{10} := 250 \cdot \text{N}$$

$$F_{20} := 50 \cdot \text{N}$$

$$\underline{K} := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \quad \underline{C} := \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \quad \underline{M} := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E10.1.6})$$

$$A_0(\Omega_0) := \underline{K} + j \cdot \Omega_0 \cdot \underline{C} - \Omega_0^2 \cdot \underline{M}$$

$$\Delta(\Omega_0) := A_0(\Omega_0)_{1,1} \cdot A_0(\Omega_0)_{2,2} - A_0(\Omega_0)_{1,2} \cdot A_0(\Omega_0)_{2,1}$$



$$X_{10}(\Omega_0) := \frac{A_0(\Omega_0)_{2,2}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{10} + \frac{-A_0(\Omega_0)_{1,2}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{20} \quad (\text{E10.1.7})$$

$$X_{20}(\Omega_0) := \frac{-A_0(\Omega_0)_{2,1}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{10} + \frac{(A_0(\Omega_0))_{1,1}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{20}$$

Calcolo di modulo e fase della soluzione

$$X_1(\Omega_0) := \sqrt{\text{Re}(X_{10}(\Omega_0))^2 + \text{Im}(X_{10}(\Omega_0))^2}$$

$$X_2(\Omega_0) := \sqrt{\text{Re}(X_{20}(\Omega_0))^2 + \text{Im}(X_{20}(\Omega_0))^2}$$

$$\Omega_0 := 0 \cdot \frac{1}{s}, 0.001 \cdot \frac{1}{s} \dots 30 \cdot \frac{1}{s}$$

$$\text{xx}(\Omega_0) := 0$$

(E10.1.8)

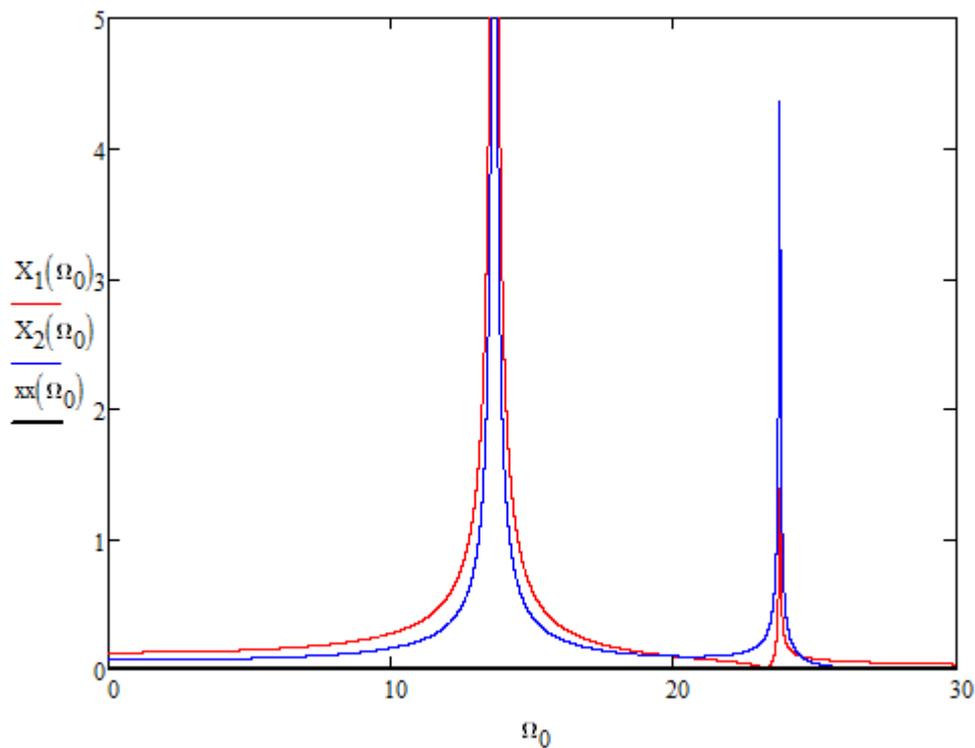
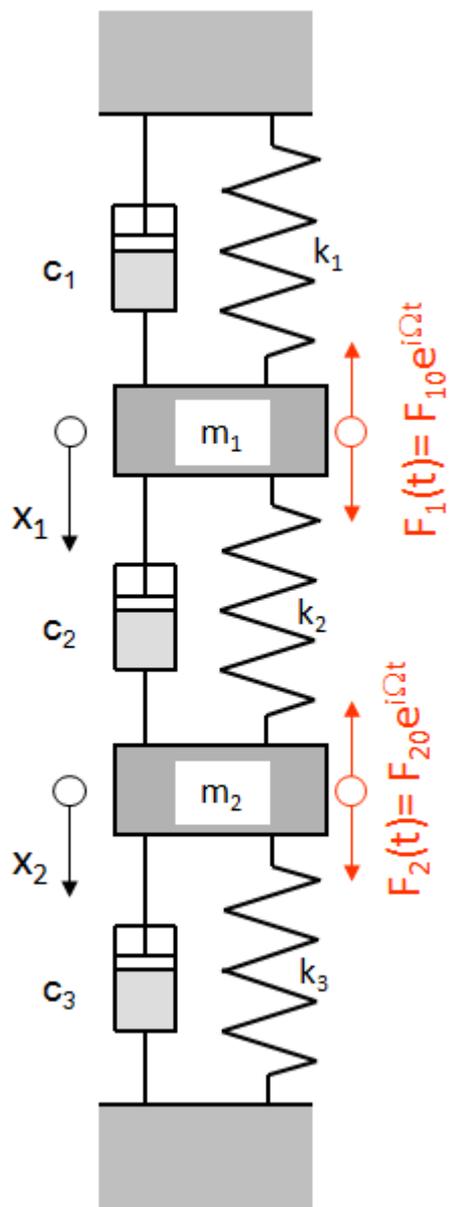
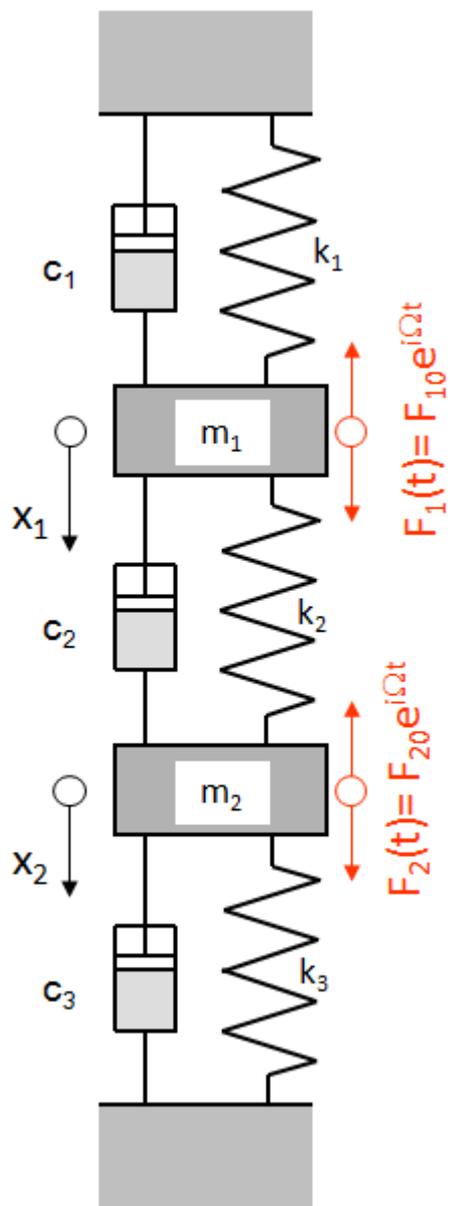


Fig. 10.2



$$\phi_1(\Omega_0) := \arg(X_{10}(\Omega_0))$$

$$x_{p_p}(\Omega_0) := \pi$$

$$\phi_2(\Omega_0) := \arg(X_{20}(\Omega_0))$$

$$x_{m_p}(\Omega_0) := -\pi$$

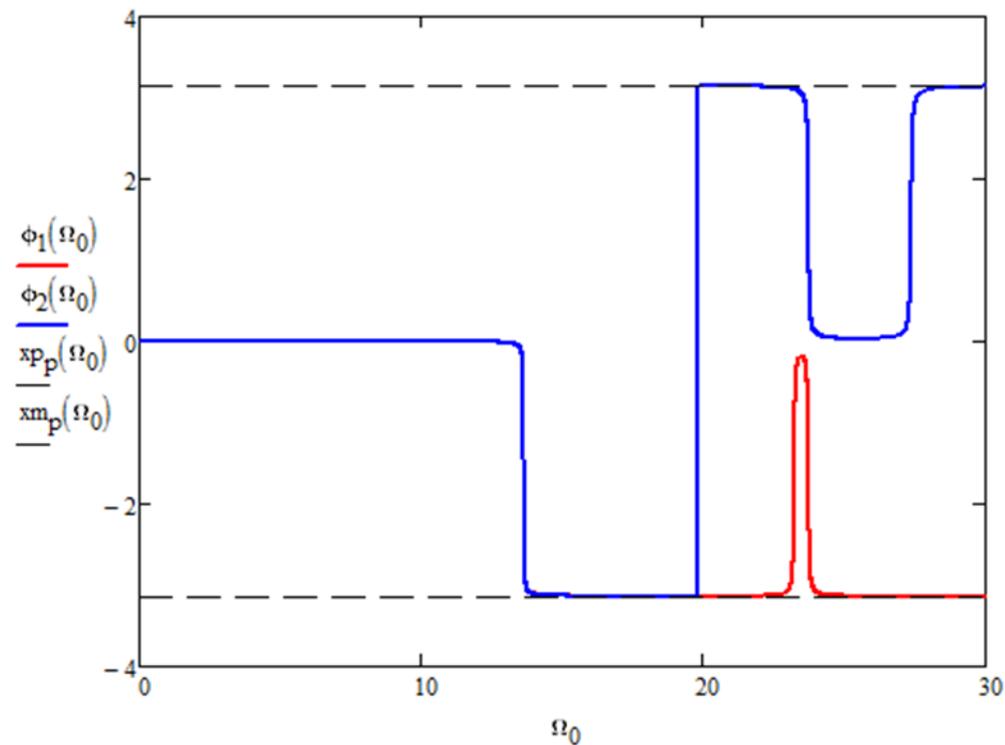
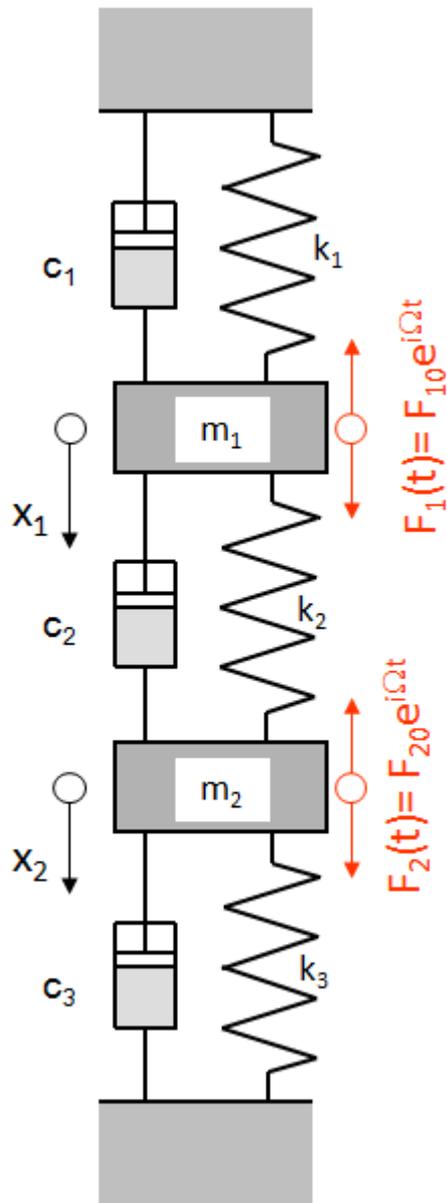


Fig. 10.3



## Esempio 2 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl smorzato con il metodo di sovrapposizione modale

Calcolare la risposta forzata del sistema di Fig., usano i dati dell'esercizio precedente

Vettore delle forzanti esterne

$$[V] := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{pmatrix}$$

Contributo del modo 1

$$f_1 := \left[ [Y^{(1)}] \right]^T \cdot [V] = 81.262 \frac{\text{m} \cdot \text{kg}^{0.5}}{\text{s}^2}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_1(\Omega) := \frac{f_1}{(\omega_1^2 - \Omega^2) + i \cdot C_{d_{1,1}} \cdot \Omega}$$

Contributo del modo 2

$$f_2 := \left[ [Y^{(2)}] \right]^T \cdot [V] = 12.102 \frac{\text{m} \cdot \text{kg}^{0.5}}{\text{s}^2}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_2(\Omega) := \frac{f_2}{(\omega_2^2 - \Omega^2) + i \cdot C_{d_{2,2}} \cdot \Omega}$$

Soluzione

$$X(\Omega) := Q_1(\Omega) \cdot [Y^{(1)}] + Q_2(\Omega) \cdot [Y^{(2)}] \quad (\text{E10.2.3})$$

$$X_M(\Omega) := \sqrt{\text{Re}(X(\Omega))^2 + \text{Im}(X(\Omega))^2} \quad X_\Phi(\Omega) := \arg(X(\Omega)) \quad (\text{E10.2})$$

### Esempio 2 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl smorzato con il metodo di sovrapposizione modale

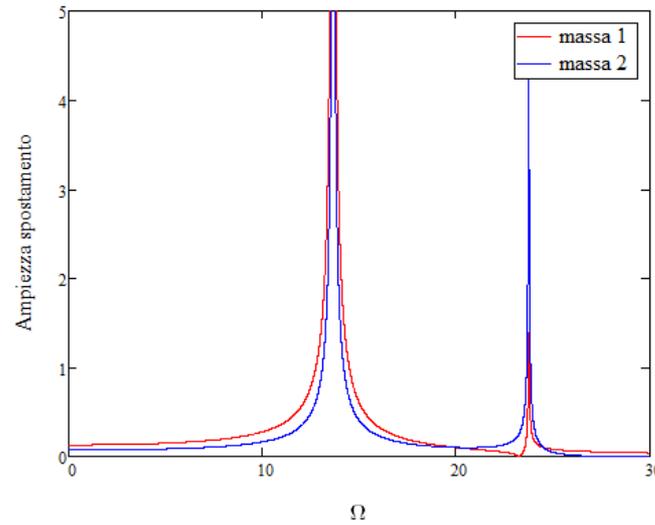
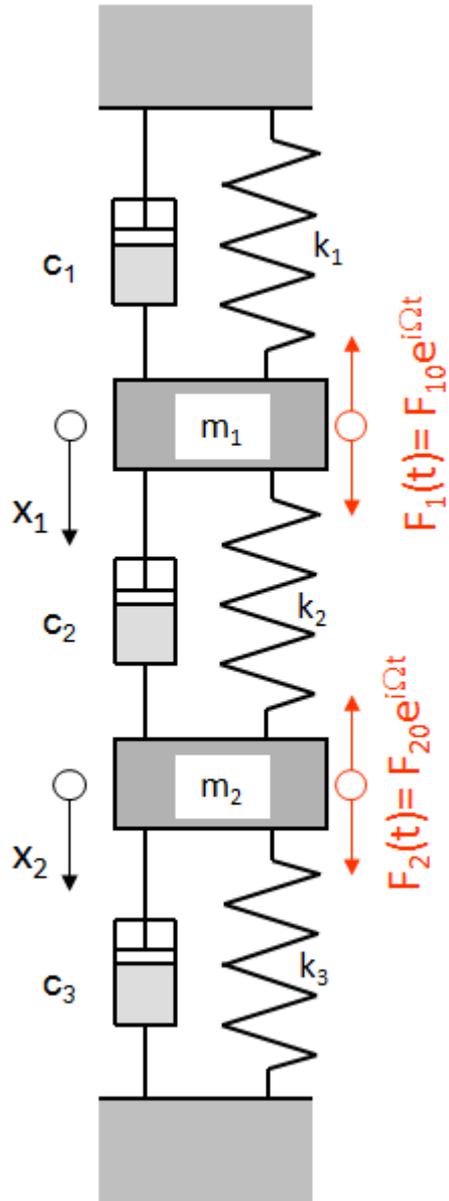
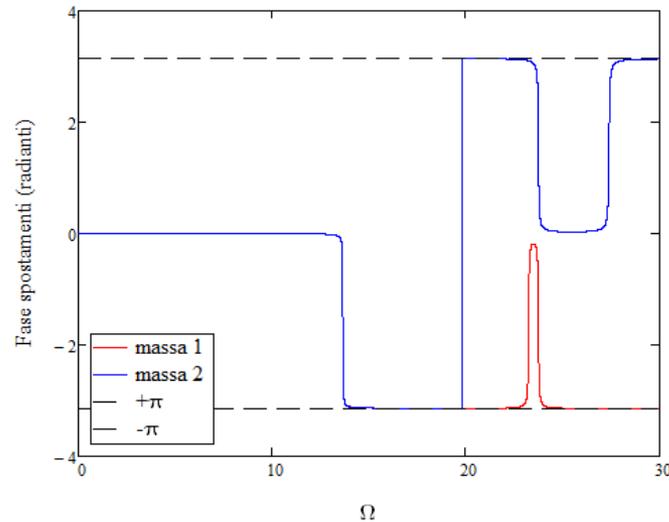


Fig. 9.3



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$[C_d] = [Y]^T [C] [Y]$$

sono trascurabili, si può assumere per essa una forma diagonale, nella quale lo smorzamento di ogni modo viene generalmente ottenuto direttamente per via sperimentale

$$[C_d] \approx \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad n \leq N$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Una quantificazione dell'importanza relativa dei termini fuori diagonale è data dal cosiddetto **Coefficiente di Accoppiamento**  $\Xi$ :

$$[C_d] = \begin{bmatrix} c_{11d} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{iid} & \dots & c_{ijd} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{jjd} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{Nnd} \end{bmatrix} \quad \Xi = \max \left( \frac{c_{ijd}^2}{c_{iid} c_{jjd}} \right)$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

È possibile verificare quantitativamente l'errore commesso nel trascurare i termini fuori diagonale, nel caso del sistema forzato a 2 gdl.

Si assume una matrice di smorzamento principale del tipo:

$$[C_d] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} \\ -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si calcola quindi la risposta del sistema, in termini di un vettore complesso di ampiezze di spostamento, tramite soluzione diretta (esatta) delle equazioni del moto:

$$\{X_{exact}(\xi, \Omega, \Xi)\} = ([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M])^{-1} \{F\}$$

$$[C] = ([Y]^T)^{-1} [C_d] [Y]^{-1}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si calcola quindi la risposta del sistema con il MSM, utilizzando la matrice di spostamento principale seguente (nella quale sono stati trascurati i termini fuori diagonale) :

$$[C_d^*] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si ottiene in tal modo un altro vettore complesso di ampiezze di spostamento

$$\{X_{MSM}(\xi, \Omega, \Xi)\} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j\omega_j\Omega} \{Y^{(j)}\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si definisce quindi un errore percentuale massimo della soluzione ottenuta trascurando i termini fuori diagonale, nella forma :

$$Err(\xi, \Omega, \Xi) = \max_{j=1, N} \left( \left| \frac{X_{exact, j}(\xi, \Omega, \Xi) - X_{MSM, j}(\xi, \Omega, \Xi)}{\max_{j=1, N} (X_{exact, j}(\xi, \Omega, \Xi))} \right| \cdot 100 \right)$$

nella quale l'errore assoluto viene rapportato al massimo valore di ampiezza che si verifica, tra tutti i gradi di libertà, per i valori dati di  $\Omega$ ,  $\Xi$  ed  $\xi$ .

Nel seguito si analizza l'andamento dell'errore, per un sistema a 2 gdl, in un "range" di valori di smorzamento  $0 < \xi < 0.5$  e di frequenza  $0 < \Omega < 30$  Hz.

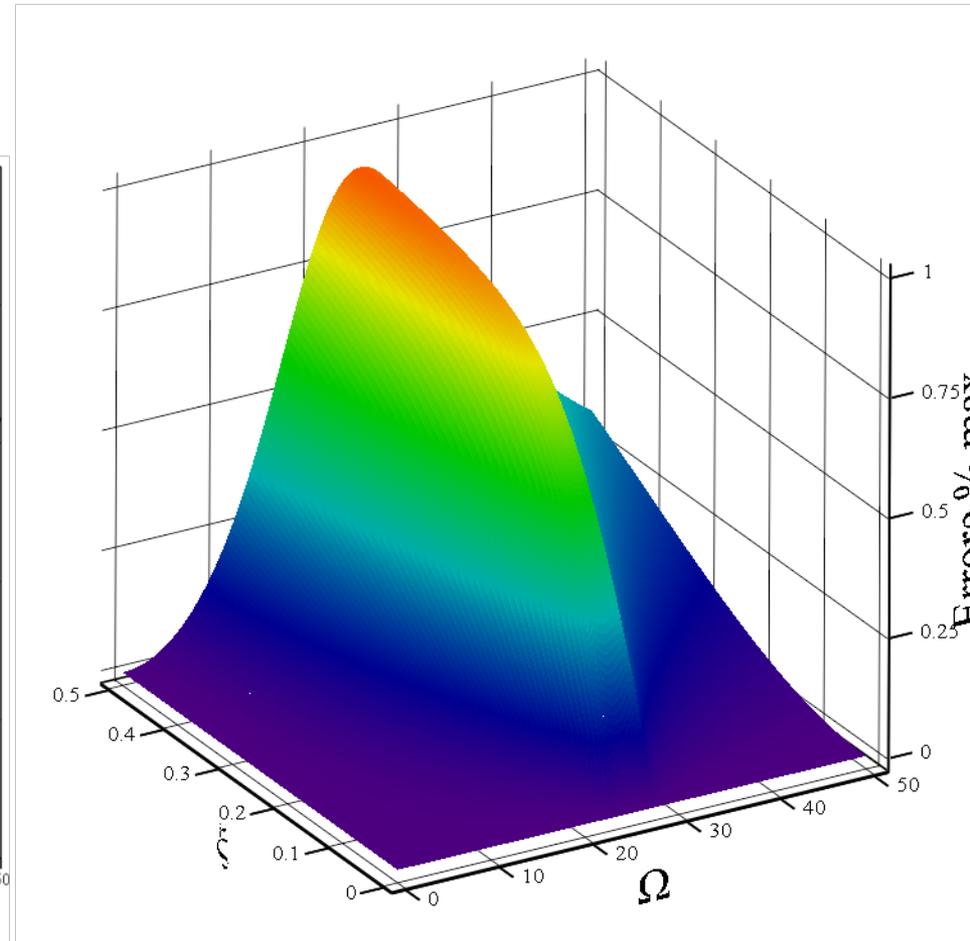
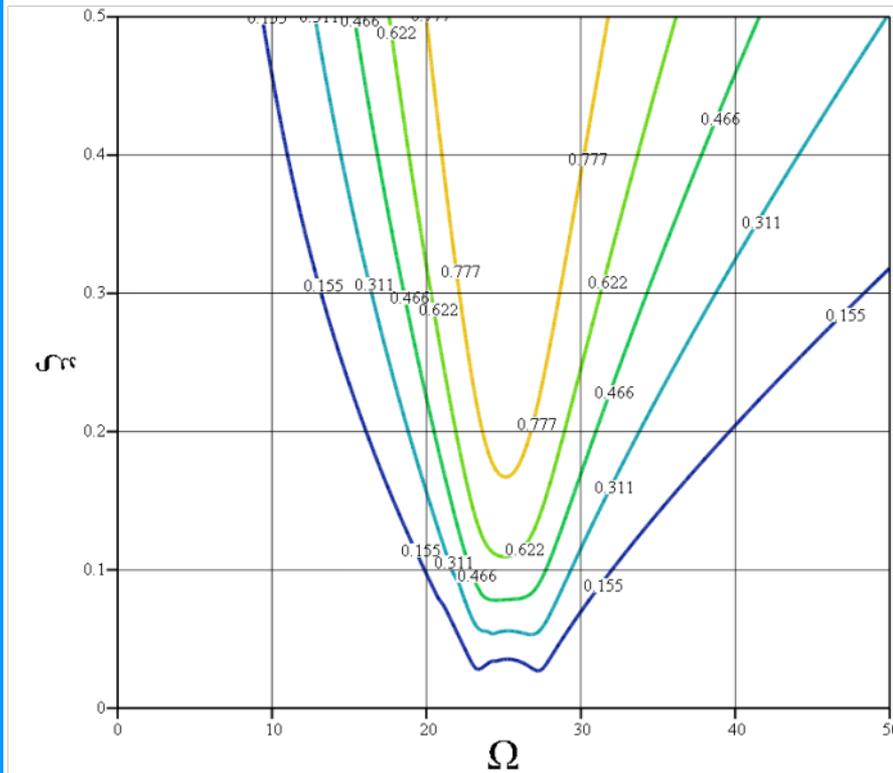
Le pulsazioni naturali del sistema sono:

- $\omega_{n1} = 13.6$  Hz
- $\omega_{n2} = 23.7$  Hz

# SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO

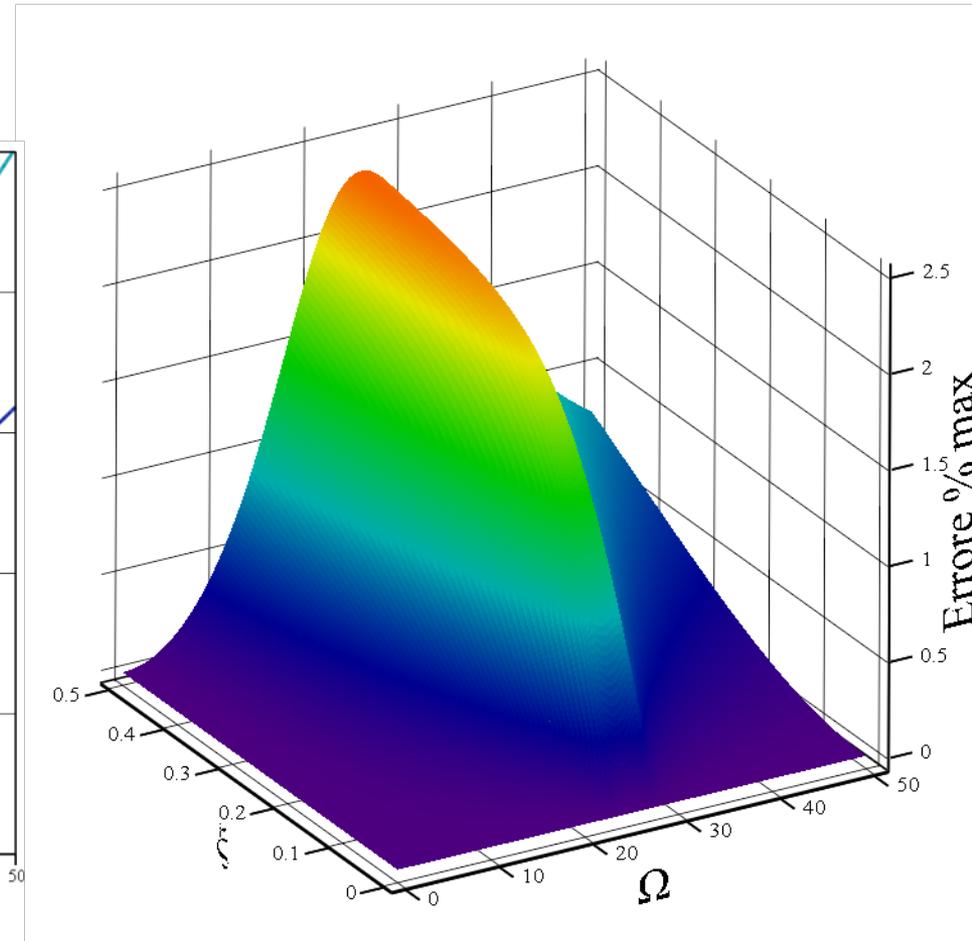
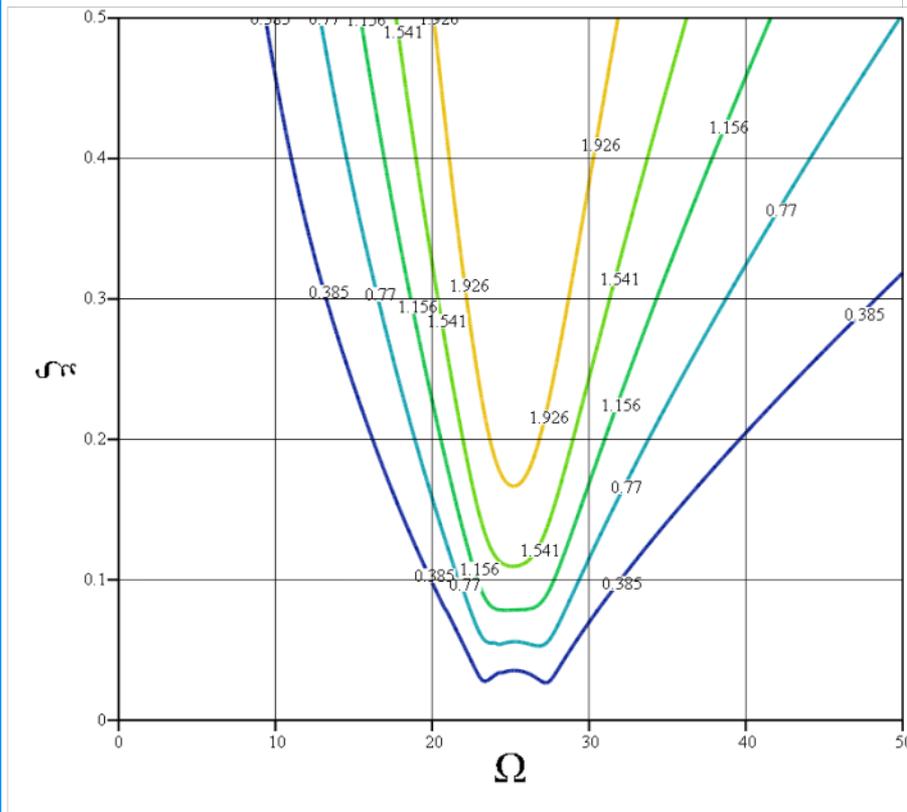
## NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\mathbf{\Gamma} = 0.01$$



# SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\xi = 0.025$$



R<sub>X</sub>

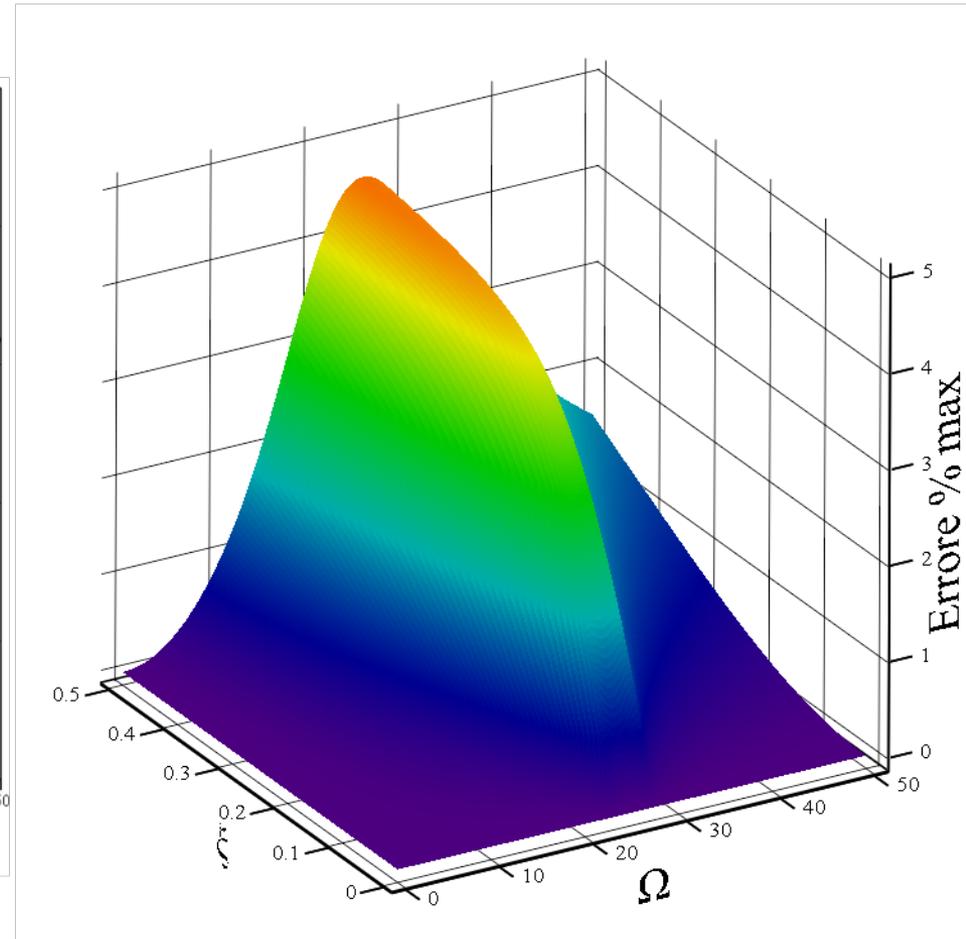
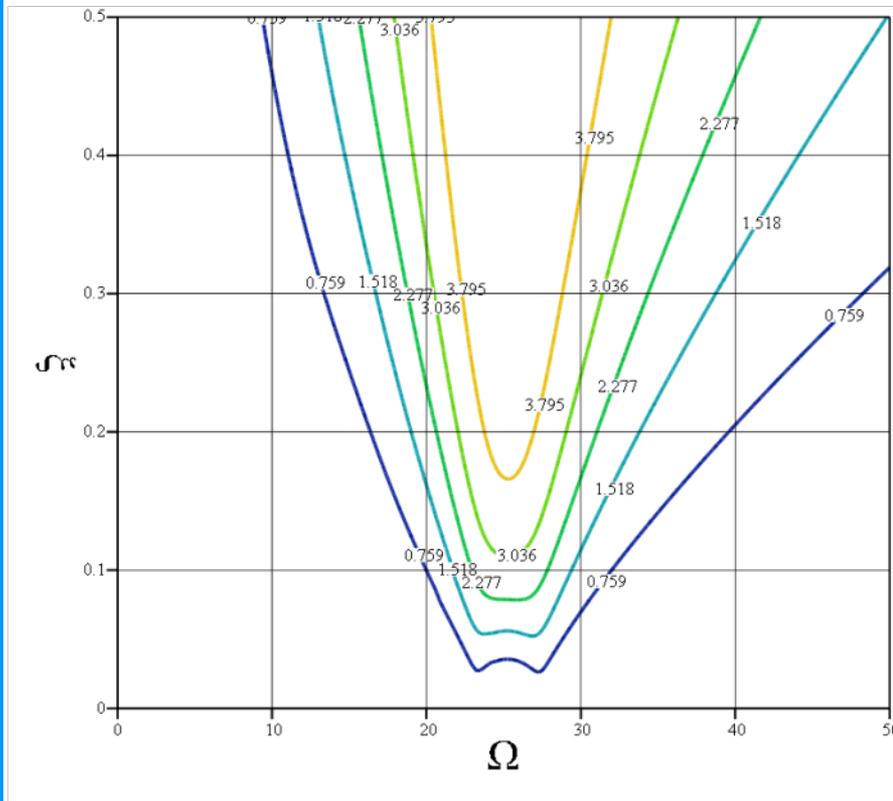
R<sub>X</sub>



# SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO

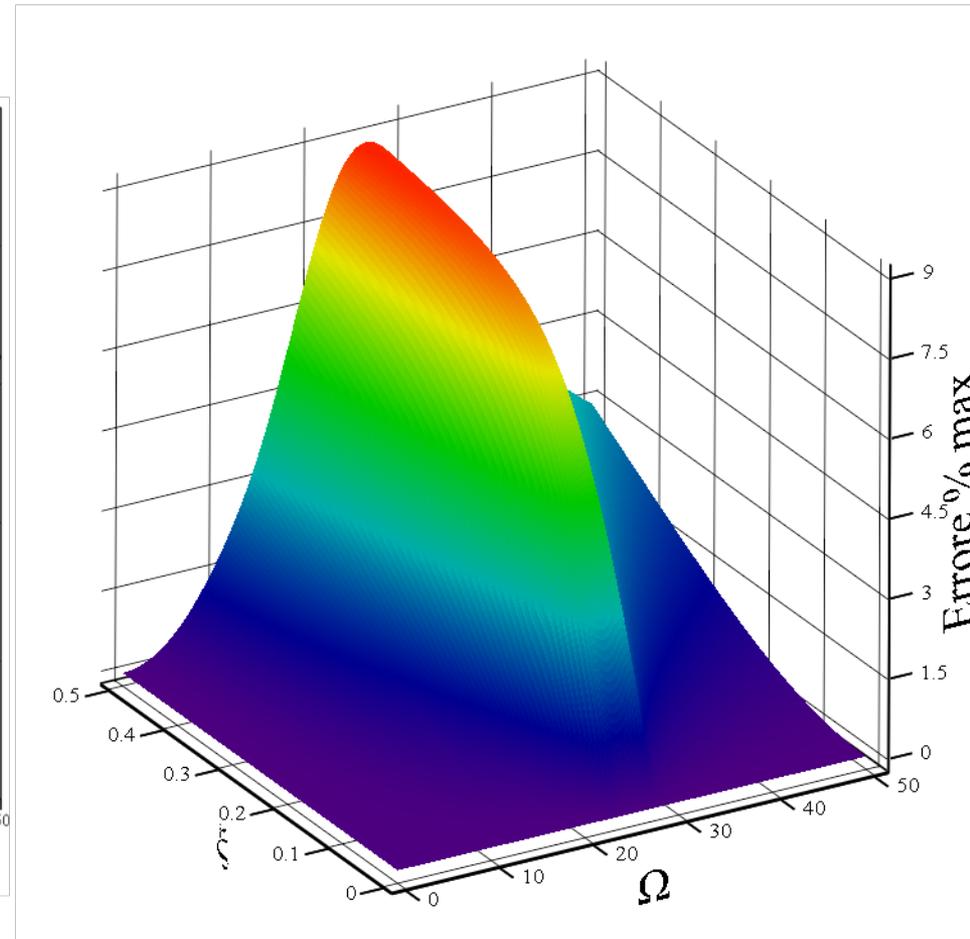
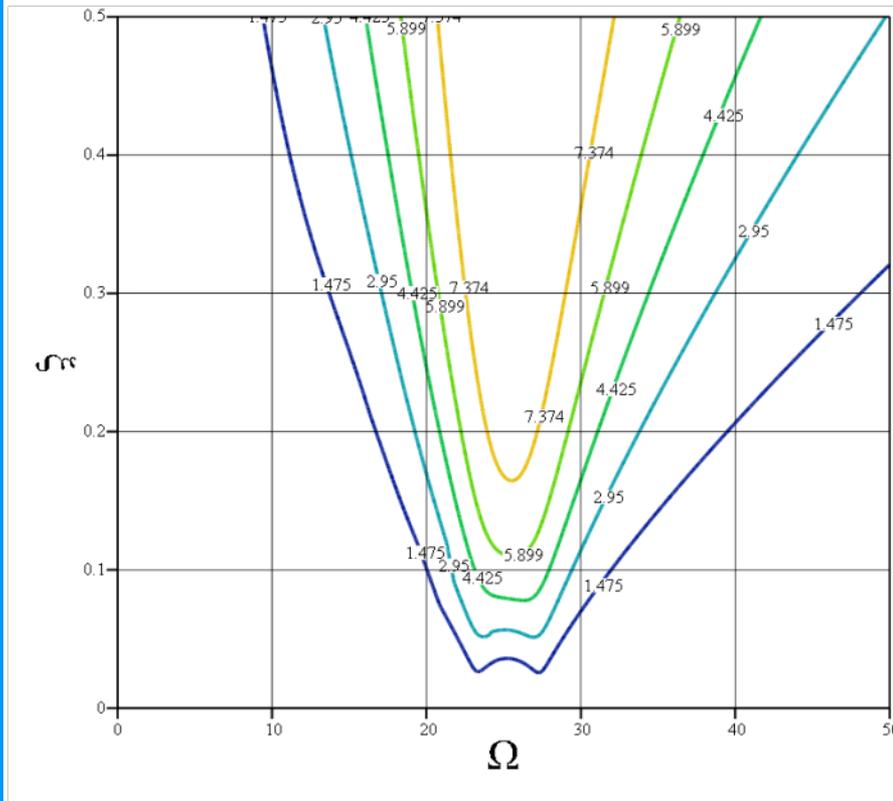
## NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\zeta = 0.05$$



# SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\xi = 0.1$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Osservazioni:

- l'errore percentuale massimo commesso trascurando i termini fuori diagonale appare dipendere principalmente dal Coefficiente di accoppiamento  $\Xi$ , riducendosi a poche unità percentuali su tutto il campo di frequenze e smorzamenti analizzato per  $\Xi < 0.01$ .
- l'errore percentuale massimo appare dipendente anche dal livello generale di smorzamento  $\xi$ , assumendo generalmente valori inferiori a poche unità percentuali per  $\xi < 0.1$
- esistono tuttavia delle condizioni (Es: valori di  $\xi$  relativamente elevati  $>0.1-0.2$ ) nelle quali l'errore commesso trascurando i termini fuori diagonale può risultare inaccettabile; in tali condizioni, diventa necessario risolvere direttamente le equazioni del moto accoppiate, ricorrendo all'**Analisi Modale/Armonica Non Classica**, tramite la tecnica detta dello **Spazio delle Variabili di Stato** o dello **Spazio degli Stati**.

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI

Qualora la matrice di smorzamento non sia diagonalizzabile, è necessario procedere alla soluzione diretta del problema agli autovalori in campo complesso. Nel seguito vedremo le principali caratteristiche della tecnica di soluzione detta di **Analisi nello Spazio degli Stati (State Space Analysis**”), non tanto con l’intento di ottenere strumenti effettivi di calcolo, quanto di poter evidenziare, anche per questo caso, alcune delle caratteristiche salienti della soluzione.

Vettore della variabili di stato (2N componenti, insieme rappresentano completamente lo stato del sistema):

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}$$

Si aggiungono alle N equazioni di equilibrio, N ulteriori equazioni **sempre verificate**:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = 0$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO**  
**ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = 0$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = 0$$

Posto:

$$[A] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

Assumendo una soluzione del tipo:

$$\{x\} = \{X\}e^{st}$$

$$\{\dot{x}\} = s\{X\}e^{st}$$

Si ottiene:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{X\}e^{st} \\ s\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ s\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{U\}e^{st}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{X\}e^{st} \\ s^2\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ s^2\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{U\}e^{st}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI

Sostituendo:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{X\}e^{st} \\ s\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ s\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{U\}e^{st}$$

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{X\}e^{st} \\ s^2\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ s^2\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{U\}e^{st}$$

Si ottiene:

$$s[A]\{U\}e^{st} + [B]\{U\}e^{st} = 0$$

Ovvero:

$$(s[A] + [B])\{U\} = 0$$

Problema agli autovalori in forma generalizzata, che può riportarsi a quella standard:

$$[A]^{-1}[B]\{U\} = -s\{U\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI

La soluzione comprende N coppie di autovalori complessi coniugati  $\lambda_i + N$  coppie di autovettori associati  $\{Z_i\}$ , anch'essi complessi coniugati, che soddisfano la:

$$[A]^{-1}[B]\{Z_i\} = \lambda_i \{Z_i\}$$

$$\lambda_i, \{Z_i\} \qquad \bar{\lambda}_i, \{\bar{Z}_i\}$$

Autovalore +  
autovettore

Coniugati

Autovalori ed autovettori nello spazio delle variabili di stato:

$$\lambda_i = -s_i = -\xi_i \omega_{ni} + i \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

$$\bar{\lambda}_i = -\bar{s}_i = -\xi_i \omega_{ni} - i \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

$$\{W_i\} = \begin{Bmatrix} \{Z_i\} \\ \lambda_i \{Z_i\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{W}_i\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{Z}_i\} \\ \bar{\lambda}_i \{\bar{Z}_i\} \end{Bmatrix}$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

Matrice modale complessa  $2N \times 2N$

$$[W] = [\{W_1\} \quad \{W_2\} \quad - \quad -]$$

Proprietà di ortogonalità rispetto alle matrici di sistema

$$[W]^T [A][W] = \text{diag}[a_r]$$

$$[W]^T [B][W] = \text{diag}[b_r]$$

$$\lambda_r = -\frac{b_r}{a_r}$$

Vettore variabili di stato come combinazione lineare autovettori complessi

$$\{u(t)\} = [W]\{q(t)\}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = [W]\{\dot{q}(t)\}$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO**  
**ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

Sostituendo nel sistema originale:

$$\begin{aligned} \{u(t)\} &= [W] \{q(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} &= [W] \{\dot{q}(t)\} \end{aligned} \quad [A] \{\dot{u}\} + [B] \{u\} = 0$$

Si ottiene:

$$[A][W] \{\dot{q}\} + [B][W] \{q\} = 0$$

Moltiplicando per la trasposta della matrice modale complessa

$$[W]^T [A][W] \{\dot{q}\} + [W]^T [B][W] \{q\} = 0$$

Tenendo conto della ortogonalità, che vale anche per queste forme modali:

$$diag[a_r] \{\dot{q}\} + diag[b_r] \{q\} = 0$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

$$\text{diag}[a_r] \{\dot{q}\} + \text{diag}[b_r] \{q\} = 0$$

Sistema di  $2N$  equazioni disaccoppiate del tipo:

$$a_r \dot{q}_r + b_r q_r = 0$$

Soluzione di ciascuna di esse

$$q_r(t) = Q_r e^{\lambda_r t}$$

Soluzione complessiva

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{w_r\} Q_r e^{\lambda_r t}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI

In presenza di forzanti

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{p(t)\}$$

Dove si è posto:

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = \{P\} e^{i\Omega t}$$

Assumendo, come al solito, una soluzione del tipo :

$$\{u(t)\} = [W]\{q(t)\} = [W]\{Q\}e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = i\Omega[W]\{Q\}e^{i\Omega t}$$

Sostituendo nella equazione dello Spazio degli Stati:

$$i\Omega[A][W]\{Q\}e^{i\Omega t} + [B][W]\{Q\}e^{i\Omega t} = \{P\}e^{i\Omega t}$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

$$i\Omega[A][W]\{Q\}e^{i\Omega t} + [B][W]\{Q\}e^{i\Omega t} = \{P\}e^{i\Omega t}$$

$$i\Omega[A][W]\{Q\} + [B][W]\{Q\} = \{P\}$$

$$(i\Omega[A] + [B])[W]\{Q\} = \{P\}$$

$$[W]\{Q\} = (i\Omega[A] + [B])^{-1} \{P\}$$

Introducendo, ancora una volta, la matrice di flessibilità:

$$[W]\{Q\} = [\alpha]\{P\}$$

Si ottiene:

$$[\alpha]^{-1} = (i\Omega[A] + [B])$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

$$[\alpha]^{-1} = (i\Omega[A] + [B])$$

Pre e post-moltiplicando per la matrice modale

$$[W]^T [\alpha]^{-1} [W] = [W]^T (i\Omega[A] + [B])[W]$$

$$[\alpha]^{-1} = ([W]^T)^{-1} (i\Omega \cdot \text{diag}[a_r] + \text{diag}[b_r])[W]^{-1}$$

$$[\alpha]^{-1} = ([W]^T)^{-1} \text{diag}[a_r] (i\Omega \cdot [I] - \text{diag}[\lambda_r])[W]^{-1}$$

$$[\alpha]^{-1} = ([W]^T)^{-1} \text{diag}[a_r] (\text{diag}[i\Omega - \lambda_r])[W]^{-1}$$

$$[\alpha] = [W] \text{diag}[a_r]^{-1} (\text{diag}[i\Omega - \lambda_r])^{-1} [W]^T$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO**  
**ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

$$[\alpha] = [W] \text{diag}[a_r]^{-1} (\text{diag}[i\Omega - \lambda_r])^{-1} [W]^T$$

Il singolo termine della matrice di cedevolezza dinamica è dato da:

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\}}{a_r (i\Omega - \lambda_r)}$$

Se si tiene conto che gli autovalori/vettori compaiono in coppie complesse coniugate, si può porre:

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\}}{a_r (i\Omega - \lambda_r)} + \frac{\{\bar{W}_j^{(r)}\} \{\bar{W}_k^{(r)}\}}{\bar{a}_r (i\Omega - \bar{\lambda}_r)} \right)$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO

### ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\}}{a_r \left( i\Omega + \left( \xi_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right)} + \frac{\{\bar{W}_j^{(r)}\}\{\bar{W}_k^{(r)}\}}{\bar{a}_r \left( i\Omega + \left( \xi_r \omega_r - i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right)} \right)$$

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\}}{a_r \left( \xi_r \omega_r + i \left( \Omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right)} + \frac{\{\bar{W}_j^{(r)}\}\{\bar{W}_k^{(r)}\}}{\bar{a}_r \left( \xi_r \omega_r + i \left( \Omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right)} \right)$$

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\} a_r \left( \xi_r \omega_r + i \left( \Omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right) + \{\bar{W}_j^{(r)}\}\{\bar{W}_k^{(r)}\} \bar{a}_r \left( \xi_r \omega_r + i \left( \Omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right)}{a_r \left( \xi_r \omega_r + i \left( \Omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right) \bar{a}_r \left( \xi_r \omega_r + i \left( \Omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \right)} \right)$$

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{(\xi_r \omega_r + i\Omega) \{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\} a_r + \{\bar{W}_j^{(r)}\}\{\bar{W}_k^{(r)}\} \bar{a}_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} (\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\} a_r - \{\bar{W}_j^{(r)}\}\{\bar{W}_k^{(r)}\} \bar{a}_r)}{a_r \bar{a}_r \left( \xi_r^2 \omega_r^2 - \left( \Omega^2 - \left( \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right)^2 \right) \right) + \xi_r \omega_r i \left( \Omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right) + \xi_r \omega_r i \left( \Omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \right)} \right)$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO**  
**ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI**

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{(\xi_r \omega_r + i\Omega) 2 \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r) + i \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} 2i \operatorname{Im}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r)}{a_r \bar{a}_r (\xi_r^2 \omega_r^2 - \Omega^2 + \omega_r^2 (1 - \xi_r^2) + 2i \xi_r \omega_r \Omega + i \xi_r \omega_r^2 \sqrt{1 - \xi_r^2} - i \xi_r \omega_r^2 \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right)$$

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\omega_r (2\xi_r \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r) - 2\sqrt{1 - \xi_r^2} \operatorname{Im}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r)) + 2i\Omega \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r)}{a_r \bar{a}_r (\omega_r^2 - \Omega^2 + 2i \xi_r \omega_r \Omega)} \right)$$

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{(2\xi_r \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r) - 2\sqrt{1 - \xi_r^2} \operatorname{Im}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r)) + 2i \frac{\Omega}{\omega_r} \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\} \{W_k^{(r)}\} a_r)}{a_r \bar{a}_r (\omega_r^2 - \Omega^2 + 2i \xi_r \omega_r \Omega)} \omega_r \right)$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO ANALISI NON CLASSICA - SPAZIO DEGLI STATI

Il confronto tra l'espressione trovata per la matrice di **cedevolezza dinamica** nel caso di **smorzamento non classico**:

$$\alpha_{jk}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\left( 2\xi_r \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\}a_r) - 2\sqrt{1-\xi_r^2} \operatorname{Im}(\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\}a_r) \right) + 2i \frac{\Omega}{\omega_r} \operatorname{Re}(\{W_j^{(r)}\}\{W_k^{(r)}\}a_r)}{a_r \bar{a}_r (\omega_r^2 - \Omega^2 + 2i\xi_r \omega_r \Omega)} \omega_r \right)$$

e quella trovata in precedenza per il caso di **smorzamento classico**:

$$\alpha_{ij}(\Omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\{Y_i^{(r)}\}\{Y_j^{(r)}\}}{\omega_r^2 - \Omega^2 + i2\xi_j \omega_j \Omega}$$

si può osservare come la principale differenza tra le due sia che, nella prima, il numeratore dipende da  $\Omega$ .

Tuttavia, dato che i singoli termini della sommatoria sono significativi soprattutto in un ristretto range di valori di  $\Omega$  attorno alla risonanza, l'andamento effettivo atteso delle due diverse espressioni sarà molto simile.