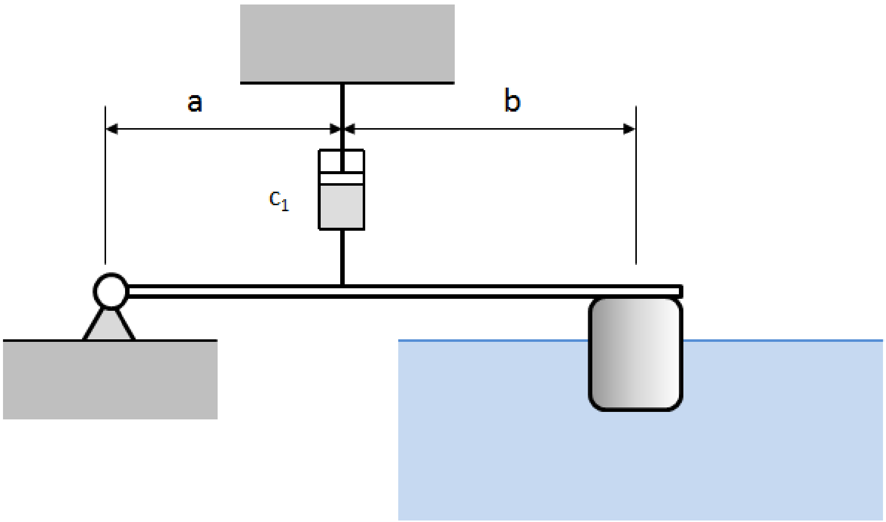
OSCILLAZIONI SMORZATE DI MISURATORE DI LIVELLO

Si consideri il misuratore di livello di un serbatotio, recante all'estremità un galleggiante immerso in acqua

Valutare:

- il valore da attribuire al coefficiente di smorzamento dello smorzatore c_1 affinché lo smorzamento relativo sia pari ad 1
- il tempo occorente, nelle condizioni di cui sopra, perché lo spostamento si riduca al 10% dell'eventuale valore iniziale imposto in seguito ad una perturbazione
- il valore da attribuire al coefficiente di smorzamento dello smorzatore c_1 affinché l'oscillazione massima dopo una eventuale perturbazione risulti pari al 10% della freccia statica



DATI

$a := 25 \cdot mm$ distanza tra la cerniera ed il punto di applicazione dello smorzatore

$b := 35 \cdot mm$ distanza tra la cerniera ed il punto di attacco del galleggiante

$\rho_A := 1000 \cdot \frac{kg}{m^3}$ Densità del liquido

$M_G := 0.5 \cdot kg$ Massa del galleggiante

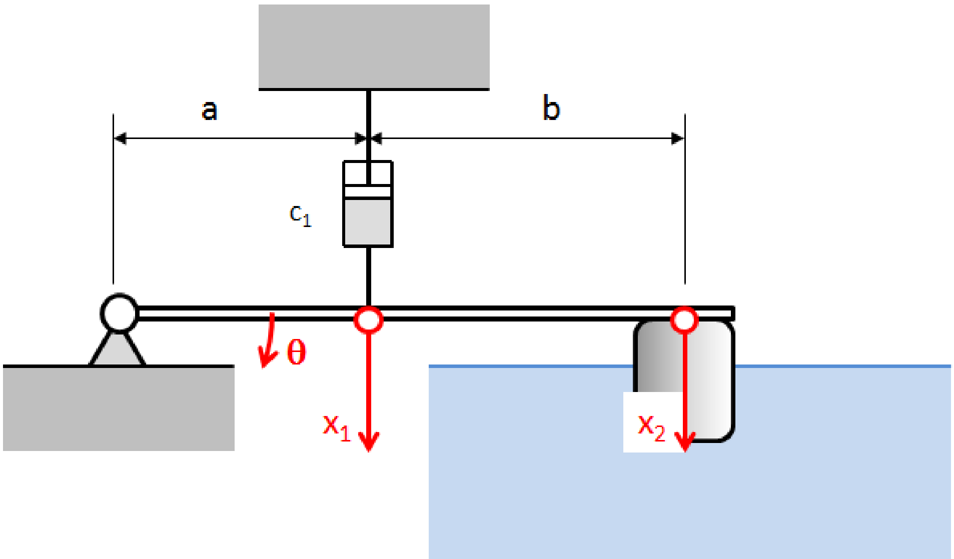
$V_G := 1 \cdot l$ Volume del galleggiante

$A_G := 1 \cdot 10^{-2} \cdot m^2$ Sezione trasversale del galleggiante

$A_O := 0.1$ Ampiezza relativa della prima oscillazione

RIDUZIONE AD UN SISTEMA AD 1 GDL

Si assume come coordinata generalizzata l'angolo di rotazione attorno alla cerniera e come punti significativi i punti indicati con 1 e 2 nella Figura.



Il vettore colonna di conversione tra la coordinata generalizzata ed i punti significativi è pertanto dato da:

$$d_c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Rigidezza ridotta

Se il galleggiante viene immerso in acqua per una altezza aggiuntiva dx, la forza di reazione è data da:

$$dF_{idr} := A_G \cdot dx \cdot \rho_A \cdot g$$

per cui l'immersione equivale ad una molla applicata nel punto 2 di rigidezza:

$$k_L := A_G \cdot \rho_A \cdot g = 98.066 \cdot \frac{N}{m}$$

la corrispondente matrice completa di rigidezza:

$$K_C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_L \end{pmatrix}$$

da cui la rigidezza equivalente del sistema ad 1 gdl:

$$k_{1gdl} := d_c^{\,T} \cdot K_C \cdot d_c = 0.12\,J$$

Massa ridotta

La massa viene ridotta in modo analogo:

$$M_C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_G \end{pmatrix}$$

$$m_{1gdl} := d_c^T \cdot M_C \cdot d_c = 6.125 \times 10^{-4} \, m^2 \cdot kg$$

Smorzamento ridotto

$$C_C(c_1) := \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{1gdl} := d_c^T \cdot C_C \cdot d_c = \quad a^2 \cdot c_1$$

CALCOLO FREQUENZA PROPRIA

La frequenza propria del sistema non smorzato vale:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_{1gdl}}{m_{1gdl}}} = 14.005\,\frac{1}{s}$$

Lo smorzamento critico è dato da:

$$c_{cr} := 2\cdot\sqrt{k_{1gdl}\cdot m_{1gdl}} = 0.017\,m\cdot\frac{N}{\frac{1}{s}}$$

per cui il valore critico di c_1 risulta pari a:

$$c_{1cr} := \frac{c_{cr}}{a^2} = 27.449\cdot\frac{N}{\frac{m}{s}}$$

Il tempo dopo il quale lo spostamento scende al 10% del valore iniziale è dato da:

$$A_O := e^{-\xi\omega_n\cdot t_{01}}$$

$$t_{01} := -\frac{\ln(A_O)}{\omega_n} = 0.164\,s$$

Se il sistema viene spostato dalla condizione di equilibrio di una quantità Θ e lasciato libero di oscillare la legge del moto è data da:

$$\theta(t) := e^{-\xi\omega_n t}\cdot\left(\Theta\cdot\cos\left(\omega_s\cdot t\right)\right)$$

Alla fine del primo periodo, T_s, l'ampiezza sarà data da:

$$\theta\left(T_s\right) := \Theta\cdot e^{-\xi\omega_n\cdot T_s}$$

per cui si ha:

$$A_O := \frac{\theta\left(T_s\right)}{\theta(0)} \qquad := \frac{\Theta\cdot e^{-\xi\omega_n\cdot T_s}}{\Theta} \qquad := e^{-\xi\omega_n\cdot T_s}$$

da cui:

$$\ln\left(A_O\right) := -\xi\omega_n\cdot T_s \qquad := -\xi\omega_n\cdot\frac{2\pi}{\omega_n\cdot\sqrt{1-\xi^2}} \qquad := -2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$-2\pi\,\xi := \ln\left(A_O\right)\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$4\pi^2\,\xi^2 := \left(\ln\left(A_O\right)\right)^2\cdot\left(1-\xi^2\right)$$

$$\xi := \sqrt{\frac{\left(\ln\left(A_O\right)\right)^2}{4\cdot\pi^2+\left(\ln\left(A_O\right)\right)^2}} = 0.344$$

da cui:

$$c_1 := \frac{\xi\cdot c_{cr}}{a^2} = 9.445\cdot\frac{N}{\frac{m}{s}}$$