
Esempio 5 - Sistema con possibilità di moto rigido (labile)

Il sistema mostrato nella Fig. 7.3, costituito da due masse scorrevoli senza attrito su un piano orizzontale e collegate tra loro da una molla, è chiaramente labile rispetto ad eventuali forze ad esso applicate in senso orizzontale.

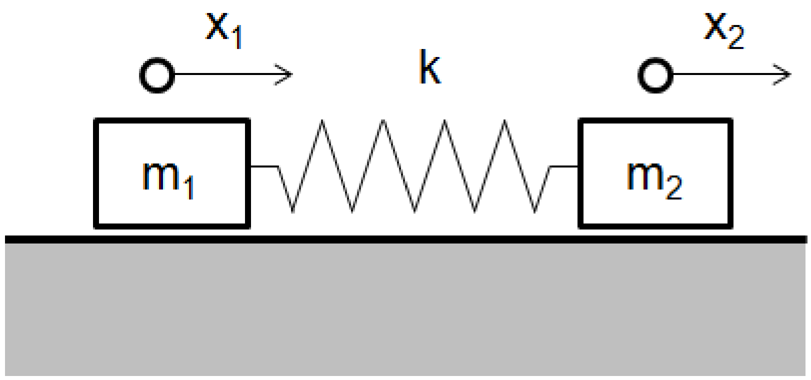

Fig. 7.3

$m_1 := 10 \cdot kg$ $\qquad$ $m_2 := 5 \cdot kg$ $\qquad$ $k := 1500 \cdot \frac{N}{m}$

Calcolarne le frequenze proprie e le forme modali.

Le equazioni di equilibrio dinamico sono:

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Assumendo, come in precedenza:

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$

si ottiene:

$$-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = 0$$

e quindi:

$$\det\begin{bmatrix} k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

L'equazione caratteristica diviene:

$$(k - \omega^2 m_1)(k - \omega^2 m_2) - k^2 =$$
$$= k^2 - \omega^2 m_2 k - \omega^2 m_1 k + \omega^4 m_1 m_2 - k^2 =$$
$$= \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 k(m_2 + m_1) = \omega^2\left(\omega^2 m_1 m_2 - k(m_2 + m_1)\right) = 0$$

con soluzioni:

$$\omega^2 = 0 \qquad \omega_1 := 0 \cdot \frac{1}{s}$$

$$\omega^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \qquad \omega_2 := \sqrt{\frac{k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}} = 21.213\,\frac{1}{s}$$

$$r_1 := \frac{\left(k - \omega_1{}^2 \cdot m_1\right)}{k} = 1 \qquad r_2 := \frac{\left(k - \omega_2{}^2 \cdot m_1\right)}{k} = \blacksquare$$