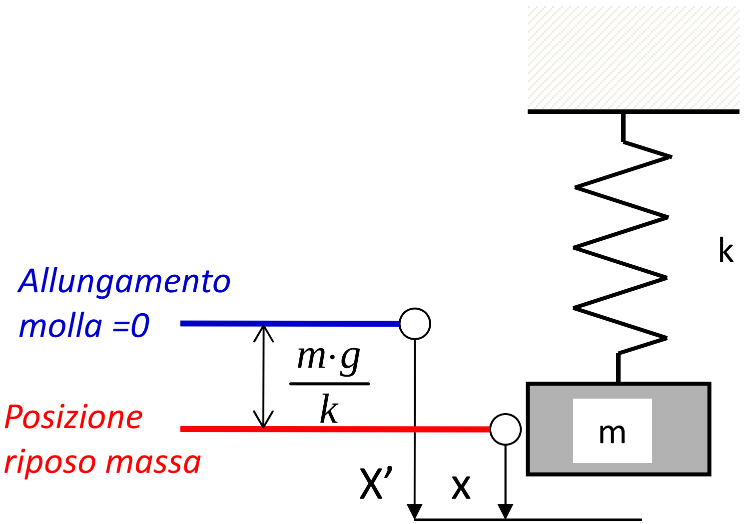
OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO



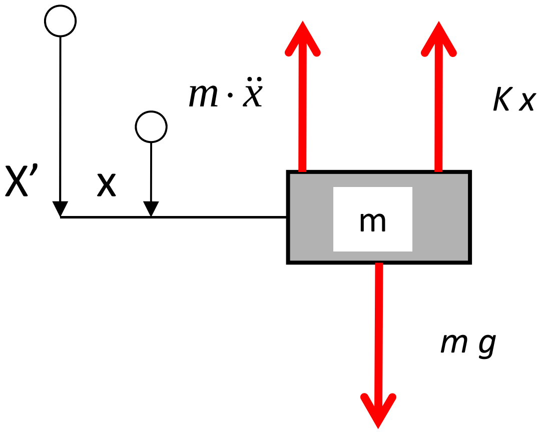
$$X' = x + \frac{mg}{k}$$

$$\ddot{X}' = \ddot{x}$$

$$-m\ddot{X}' - kX' + mg = 0$$

$$-m\ddot{x} - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) + mg = 0$$

Analisi delle forze agenti



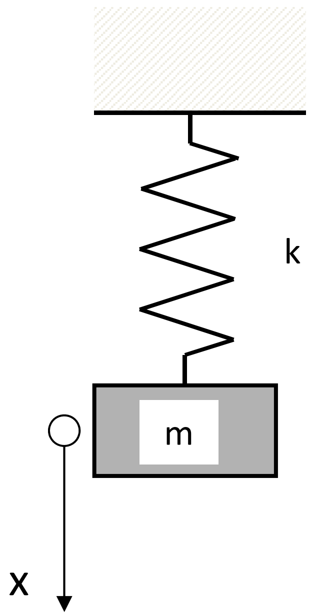
$$-m\ddot{x} - kx - mg + mg = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Equazione del moto non influenzata dalla forza peso

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

$$z^2 + \omega_n^2 = 0 \qquad z_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

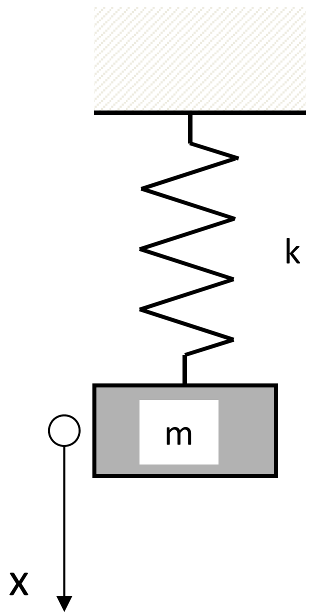
$$x(t) = C_3 \cos(\omega_n t) + C_4 \sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = C_5 \cos(\omega_n t + \varphi_6)$$

$$x(t) = C_7 \cos(\omega_n t + \varphi_8)$$

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Energia totale

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Soluzione trovata

$$x(t) = A \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t)$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot (A\omega_n \cos(\omega_n t))^2 + \frac{1}{2} k \cdot (A \sin(\omega_n t))^2 =$$

$$= \frac{A^2}{2}\left(m\,\omega_n^2 \cos^2(\omega_n t) + k \sin^2(\omega_n t)\right)$$

$$E = \text{cost} \;\rightarrow\; m\omega_n^2 = k$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

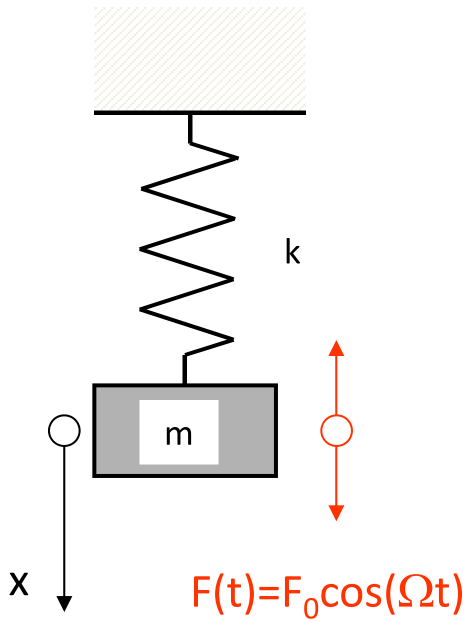
$$E = \frac{A^2}{2}\left(m \frac{k}{m} \cos^2(\omega_n t) + k \sin^2(\omega_n t)\right) =$$

$$= \frac{A^2 k}{2}\left(\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)\right) = \frac{A^2 k}{2} = \text{cost}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} = F_0 \cos(\Omega t) \qquad (\Omega \neq \omega_n)$$



$$x(t) = \boxed{C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}} + \boxed{X e^{i\Omega t}}$$

Integrale generale omogenea associata

Integrale particolare non omogenea

Verifica validità integrale particolare non omogenea:

$$x(t) = X e^{i\Omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

$$-m\Omega^2 X e^{i\Omega t} + kX e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$$

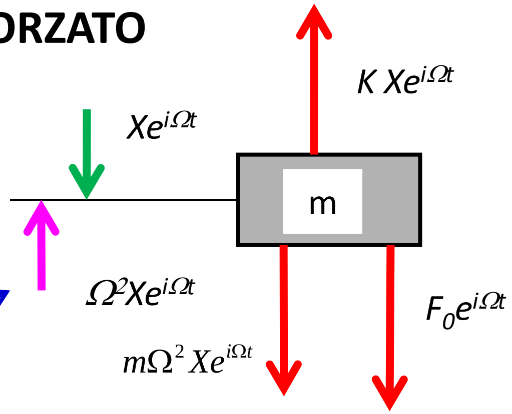
$$X = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m\Omega^2}{k}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

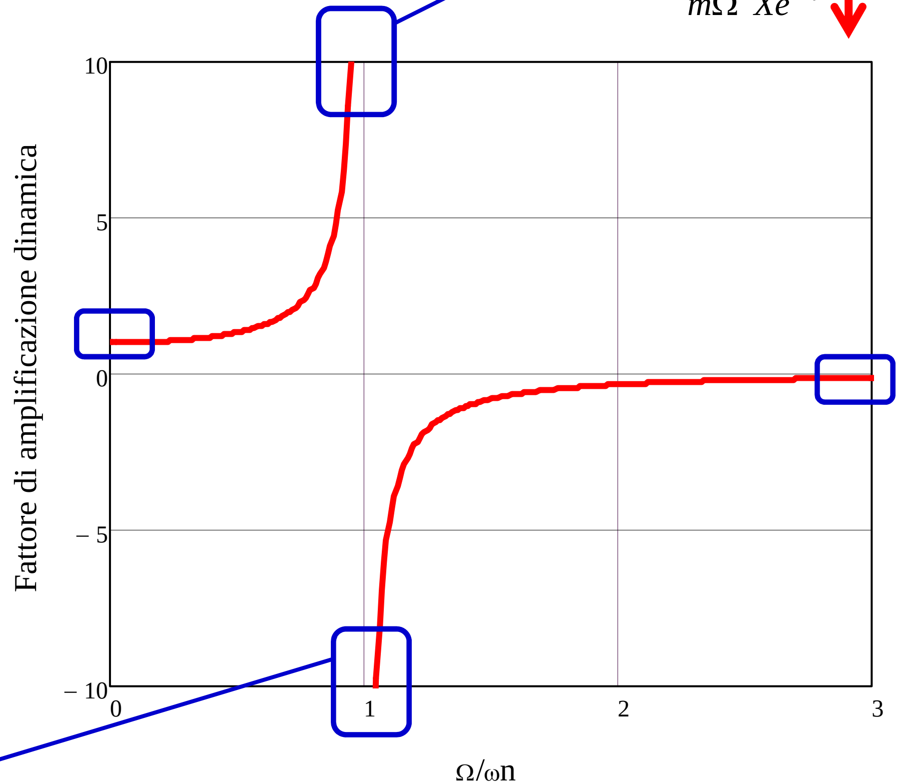
OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

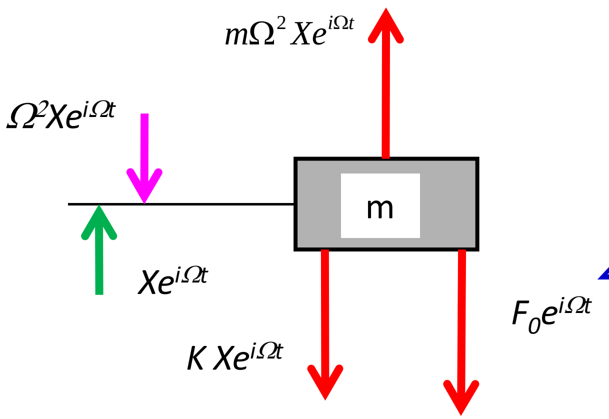
$$X = \boxed{\frac{F_0}{k}} \boxed{\frac{1}{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Freccia statica

Fattore di amplificazione dinamica



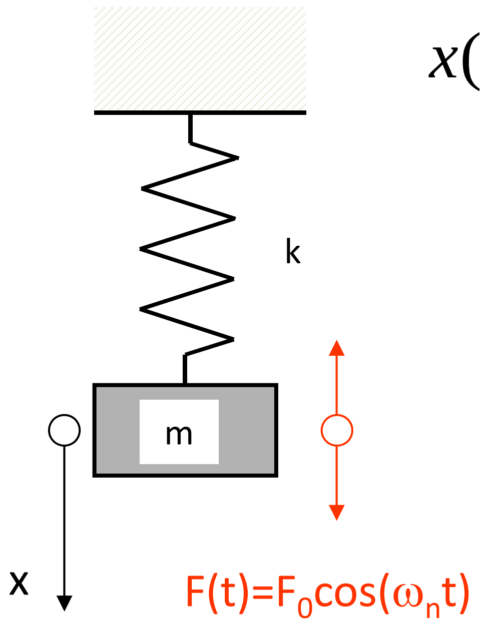




OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_n t} \qquad \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$



$$x(t) = \boxed{Xte^{i\omega_n t}}$$

Integrale particolare non omogenea

$$\dot{x}(t) = Xe^{i\omega_n t}\left(1 + i\omega_n t\right)$$

$$\ddot{x}(t) = \omega_n X e^{i\omega_n t}\left(2i - \omega_n t\right)$$

$$\omega_n X e^{i\omega_n t}\left(2i - \omega_n t\right) + \omega_n^2 Xte^{i\omega_n t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$

$$2i\omega_n X - \omega_n^2 Xt + \omega_n^2 Xt = \frac{F_0}{m}$$

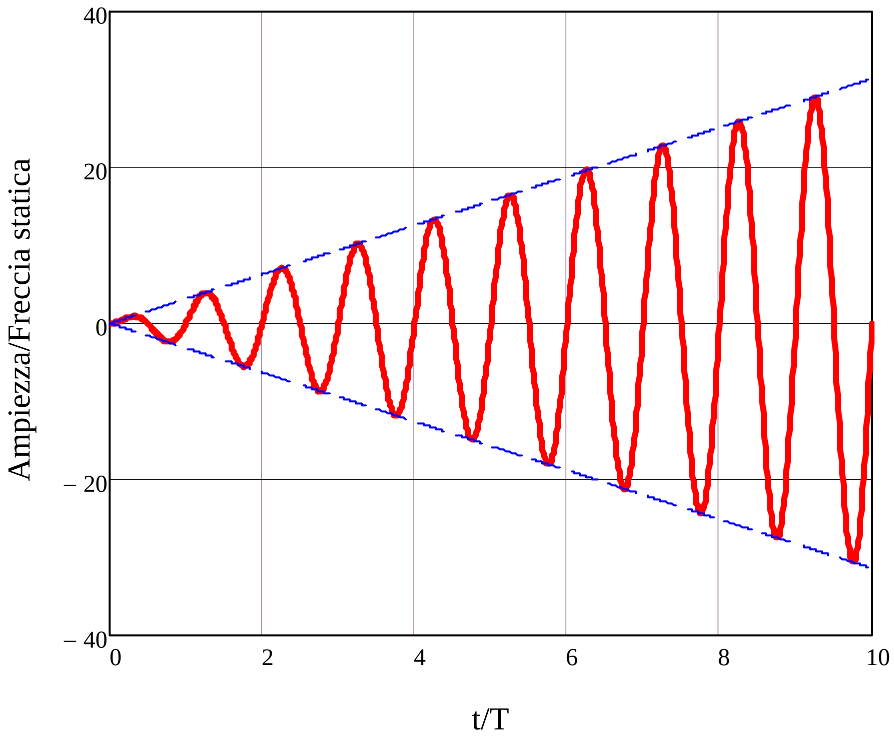
$$X = \frac{F_0}{m}\frac{1}{2i\omega_n} = \frac{F_0}{k}\frac{\omega_n}{2i}$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\frac{\omega_n}{2i} t e^{i\omega_n t} = -i\pi \frac{F_0}{k}\frac{t}{T} e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$

Dato che, in corrispondenza di ω_n, il sistema è in grado di oscillare senza cedere energia all'esterno, tutto il lavoro fatto dalla forza applicata si tasforma in aumento del suo contenuto enegetico.

$$\frac{x(t)}{\frac{F_0}{k}} = -i\pi \frac{t}{T} e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$



OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

$$\boxed{\ddot{x}} + \boxed{\omega_n^2 x} = \boxed{\frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}}$$

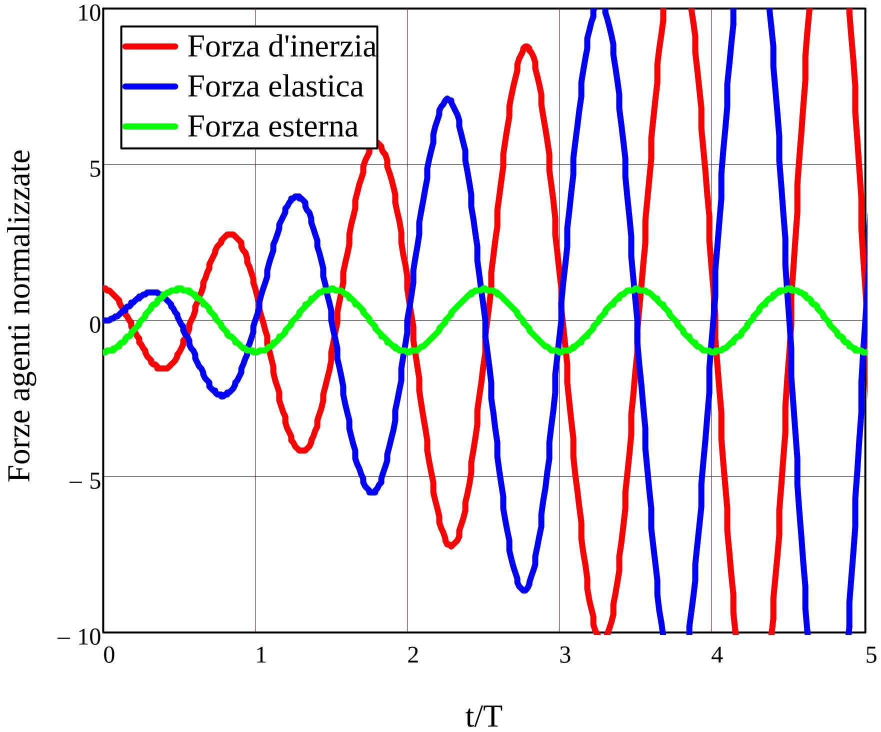
$$x(t) = -i\frac{F_0}{2k}\omega_n t e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$

Forza d'inerzia

Forza elastica

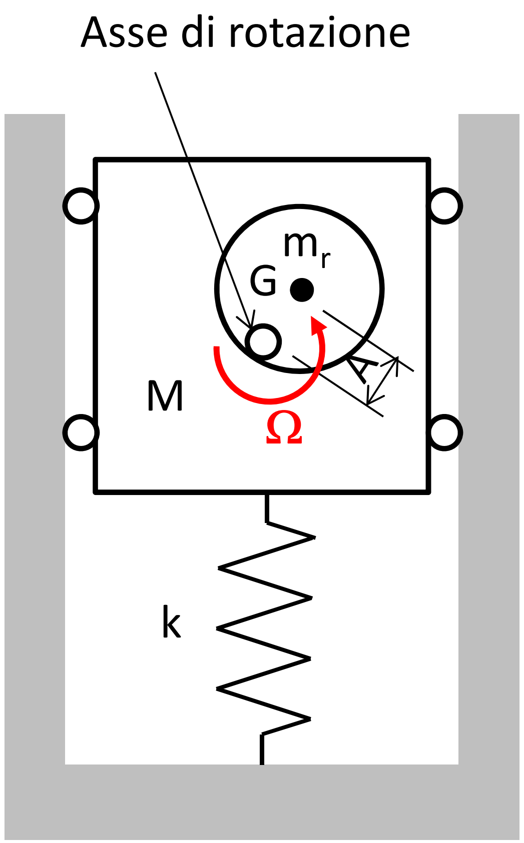
Forza esterna

$$\boxed{\frac{F_0}{k}\omega_n^2 e^{i\omega_n t}\left(1+i\frac{\omega_n}{2}t\right)} - \boxed{i\frac{F_0}{2k}\omega_n^3 t e^{i\omega_n t}} = \boxed{\frac{F_0}{k}\omega_n^2 e^{i\omega_n t}}$$



OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Forzante armonica di ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione



$$M\ddot{x} + kx = m_r A \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{m_r A}{M} \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = X e^{i\Omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t}$$

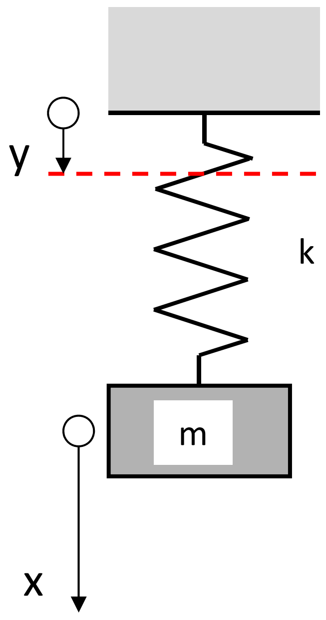
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 X e^{i\Omega t} + \omega_n^2 X e^{i\Omega t} = \frac{m_r A}{M} \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{\frac{m_r A}{M}\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{\frac{m_r A}{M}}{\frac{\omega_n^2}{\Omega^2} - 1}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Eccitazione per moto del supporto



$$m\ddot{x} + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = ky = kYe^{i\Omega t} \qquad \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{k}{m} Ye^{i\Omega t} = \omega_n^2 Ye^{i\Omega t}$$

$$x(t) = Xe^{i\Omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\Omega Xe^{i\Omega t}$$

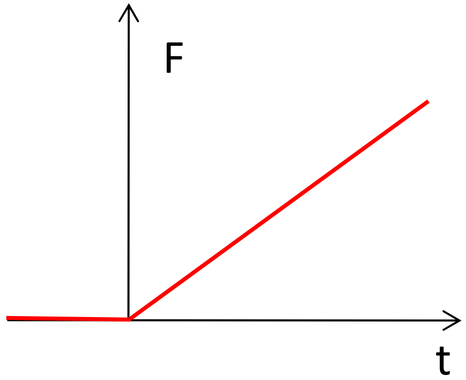
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 Xe^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Xe^{i\Omega t} + \omega_n^2 Xe^{i\Omega t} = \omega_n^2 Ye^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{\omega_n^2 Y}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{Y}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile "a rampa"



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = \boxed{A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t}} + \boxed{\frac{B}{k} t}$$

Integrale generale omogenea associata

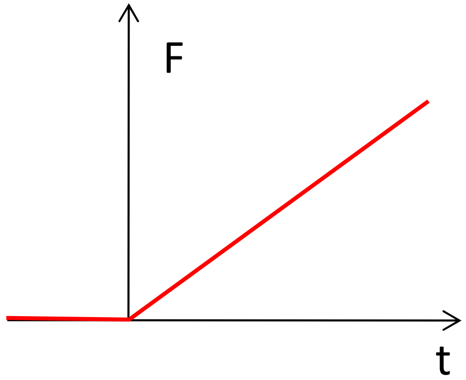
Integrale particolare non omogenea

$$x(t) = Xt \qquad \dot{x}(t) = X$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$kXt = Bt \quad \Rightarrow \quad X = \frac{B}{k}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con forza variabile "a rampa"



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t} + \frac{B}{k} t$$

Condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} & x(0) = A_1 + B_1 = 0 \\ & \dot{x}(0) = i\omega_n A_1 - i\omega_n B_1 + \frac{B}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = i\dfrac{B}{2k\omega_n} \\ B_1 = -i\dfrac{B}{2k\omega_n} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{B}{k}\left(i\frac{e^{i\omega_n t}}{2\omega_n} - i\frac{e^{-i\omega_n t}}{2\omega_n} + t \right) = \frac{B}{k}\left(\frac{i}{2\omega_n} 2i Sin(\omega_n t) + t \right) = \frac{B}{k}\left(t - \frac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right)$$

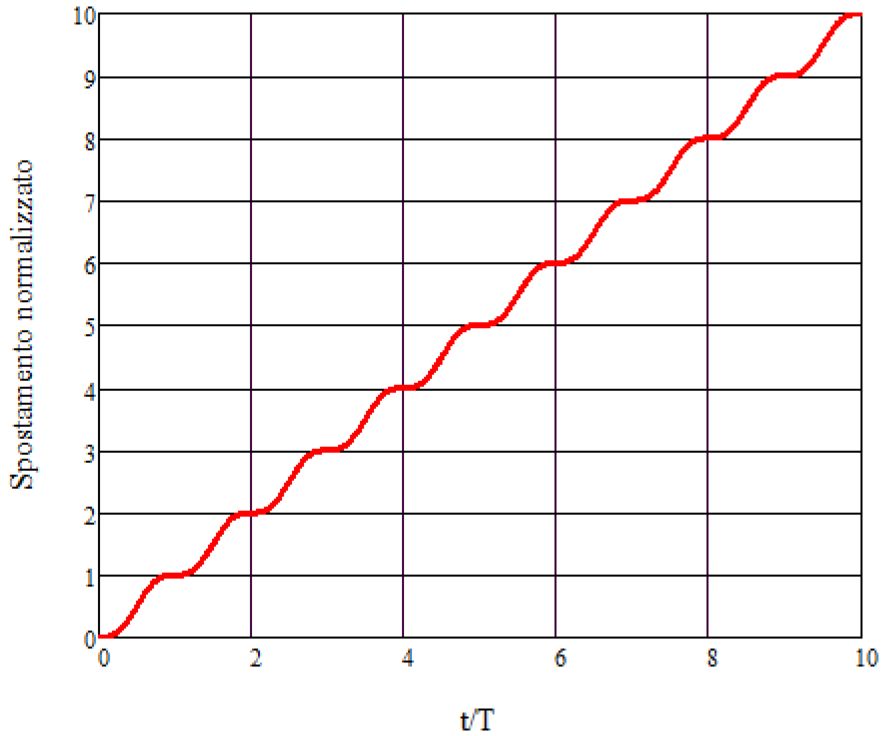
OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile "a rampa"

$$x(t) = \frac{B}{k}\left(t - \frac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right) = \frac{BT}{k}\left(\frac{t}{T} - \frac{Sin(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi}\right)$$

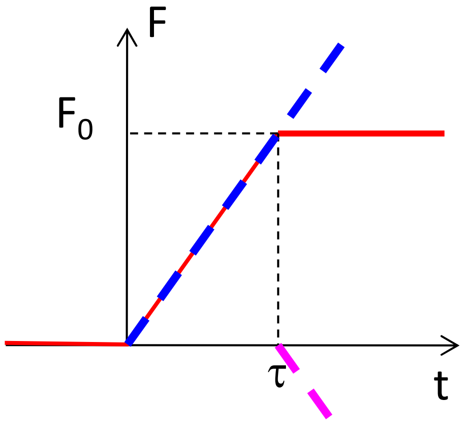
Spostamento normalizzato

$$\frac{x(t)}{\frac{BT}{k}} = \left(\frac{t}{T} - \frac{Sin(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi}\right)$$



OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



$$\begin{cases} \boxed{F = \dfrac{F_0}{\tau} t = Bt} & 0 \le t \le \tau \\ \boxed{F = Bt - B(t-\tau) = F_0} & \tau < t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le t \le \tau & x(t) = \dfrac{B}{k}\left(t - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right) \\ \tau < t & x(t) = \dfrac{B}{k}\left(t - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right) - \dfrac{B}{k}\left((t-\tau) - \dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{\omega_n} \right) = \\ & = \dfrac{B}{k}\left(\tau - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n} + \dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{\omega_n} \right) \end{cases}$$

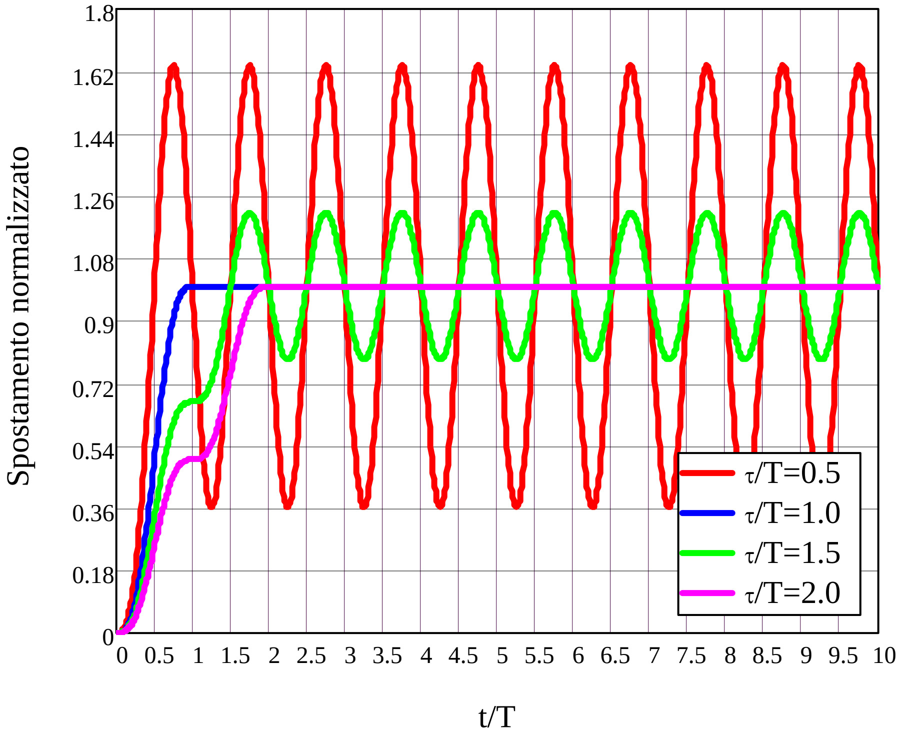
OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale

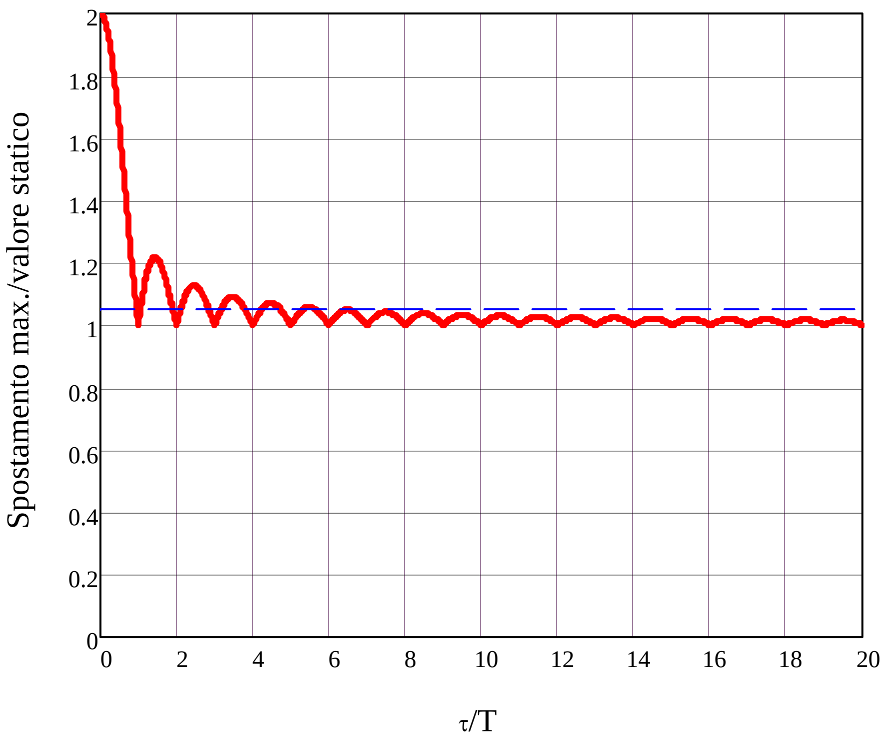
$$
\begin{cases}
0 \le t \le \tau & \dfrac{x(t)k}{F_0} = \dfrac{T}{\tau} \cdot \left(\dfrac{t}{T} - \cdot \dfrac{Sin(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right) \\[2ex]
\tau < t & \dfrac{x(t)k}{F_0} = 1 - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\tau\omega_n} + \dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{\tau\omega_n} = \\[2ex]
 & = 1 + \dfrac{T}{\tau}\left(\dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{2\pi} - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{2\pi} \right)
\end{cases}
$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale

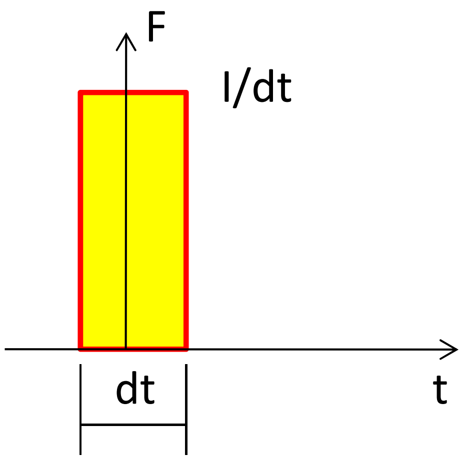


OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con impulso I al tempo t=0



$$F = \lim_{dt \to 0} \frac{I}{dt}$$

$$I = mv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{m}$$

Condizioni iniziali

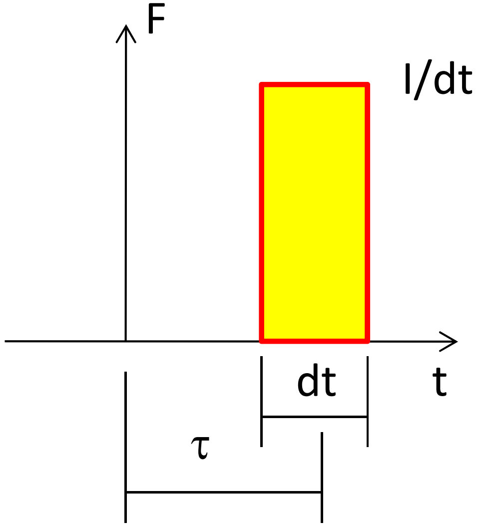
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases}$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t}$$

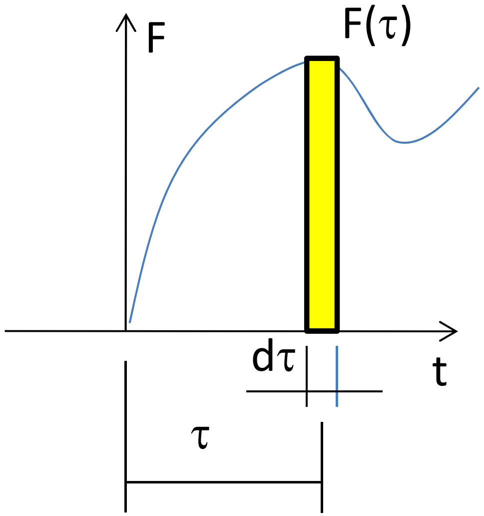
$$\left.\begin{aligned} x(0) &= A_1 + B_1 = 0 \\ \dot{x}(0) &= i\omega_n A_1 - i\omega_n B_1 = \frac{I}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -i\dfrac{I}{2m\omega_n} \\ B_1 = i\dfrac{I}{2m\omega_n} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{I}{2\omega_n m}\left(ie^{i\omega_n t} - ie^{-i\omega_n t}\right) = \frac{I}{2\omega_n m}\left(i2iSin(\omega_n t)\right) = \frac{ISin(\omega_n t)}{2\omega_n m}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con impulso I al tempo t=τ



$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{I Sin(\omega_n (t-\tau))}{2\omega_n m} & t \geq \tau \\ x(t) = 0 & t < \tau \end{cases}$$



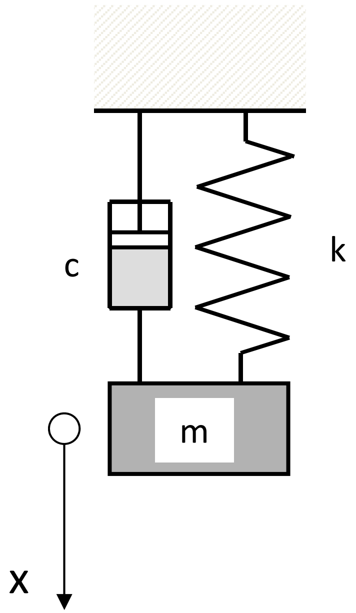
La forza di andamento generico può essere vista come una successione di impulsi di valore F(τ) dτ.

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_n m} \int_0^t F(\tau) Sin(\omega_n (t-\tau)) \cdot d\tau$$

Integrale di convoluzione o di Duhamel

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = A_1 \cdot e^{a_1 t} + A_2 \cdot e^{a_2 t}$$

$$a^2 + \frac{c}{m}a + \frac{k}{m} = 0$$

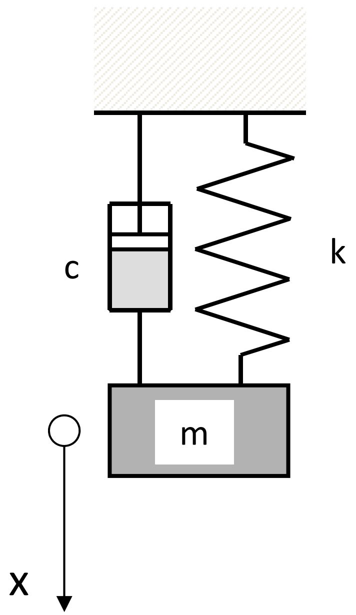
$$\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad c = c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

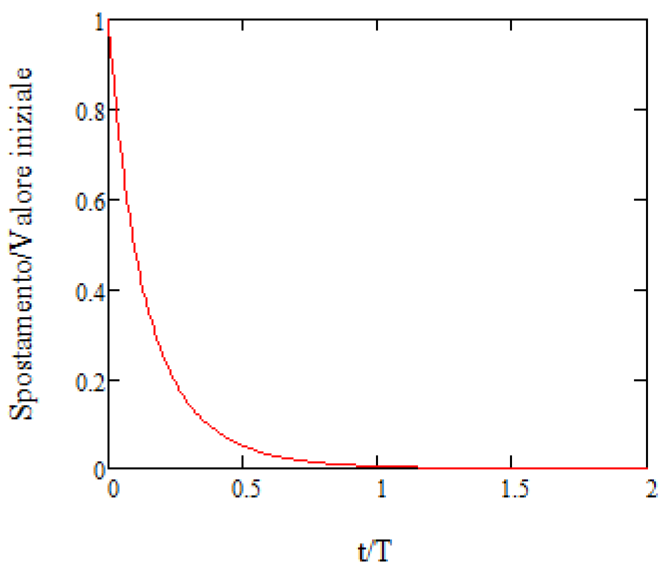
Sistema ad 1 g.d.l.

$$c > c_{cr} \quad \rightarrow \quad \Delta > 0$$

$$a_1,\ a_2 \quad reali < 0$$

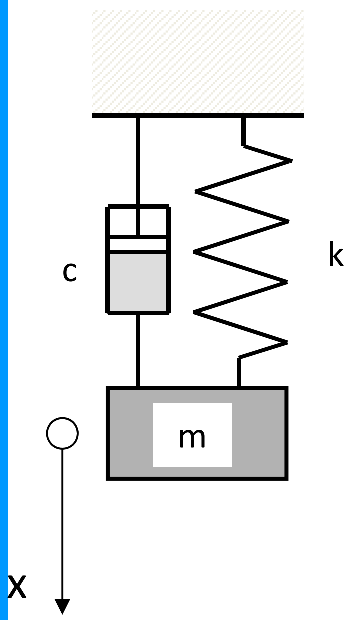


$$a_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}$$



OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l. $c < c_{cr} \quad \rightarrow \quad \Delta < 0$



$$a_1,\ a_2 \quad complesse \quad coniugate = -\frac{c}{2m} \pm i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}}$$

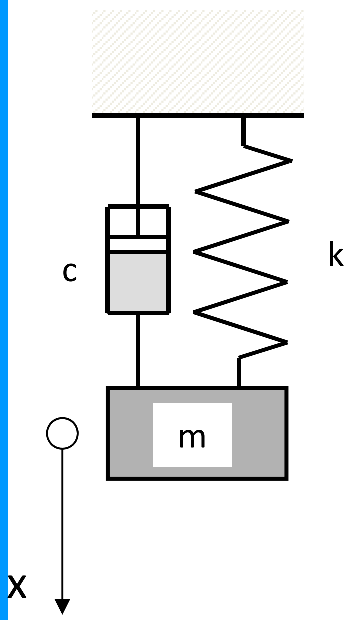
$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

$$\frac{c}{2m} = \frac{c\sqrt{k}}{2m\sqrt{k}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{c_{cr}}\omega_n = \xi\omega_n$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{cr}^2}} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_s$$

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

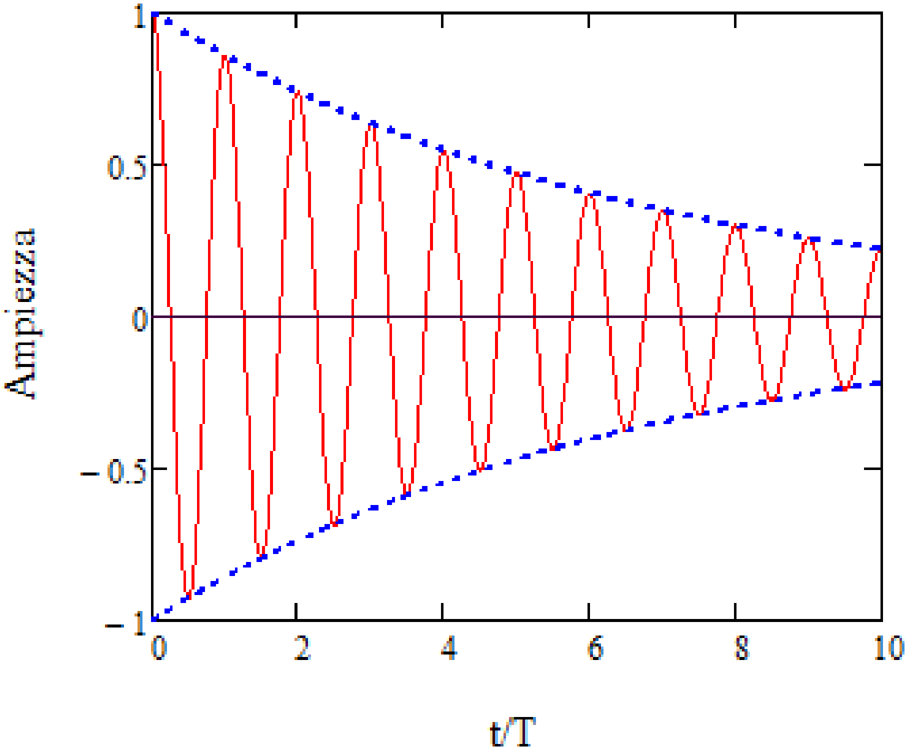
Sistema ad 1 g.d.l.



$$a_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_s$$

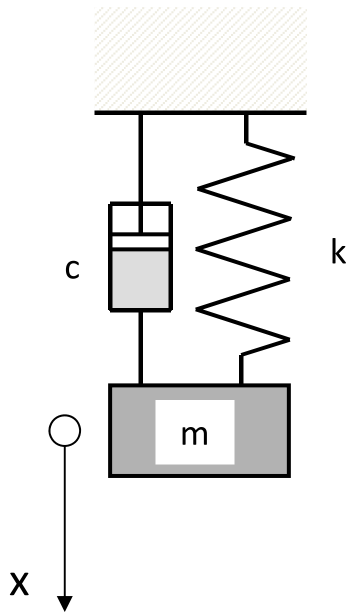
$$x(t) = A_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_s)t} + B_1 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_s)t} = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 e^{i\omega_s t} + B_1 e^{-i\omega_s t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t)\right)$$



OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

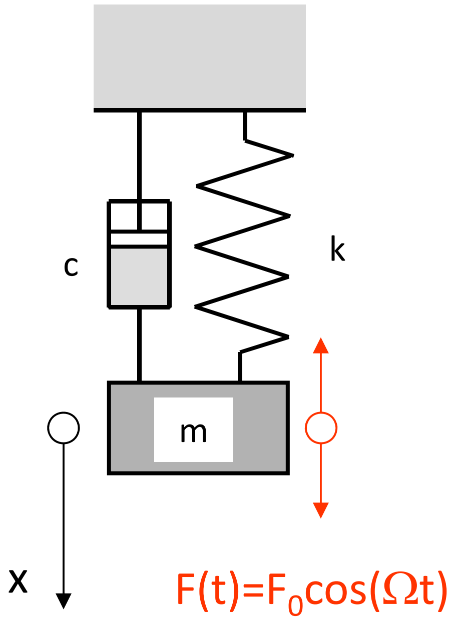
Per la maggior parte dei sistemi meccanici è piuttosto piccolo (< 0.1)

$$\left.\begin{array}{l} \omega_s = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ \xi = 0.1 \end{array}\right\rangle \omega_s = \omega_n \sqrt{1-0.1^2} = 0.99\omega_n$$

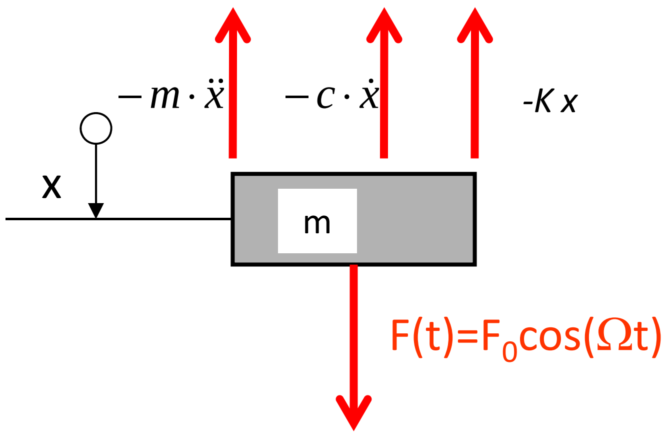
Per questo è solitamente possibile trascurare l'effetto dello smorzamento **sul valore dei modi propri**

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



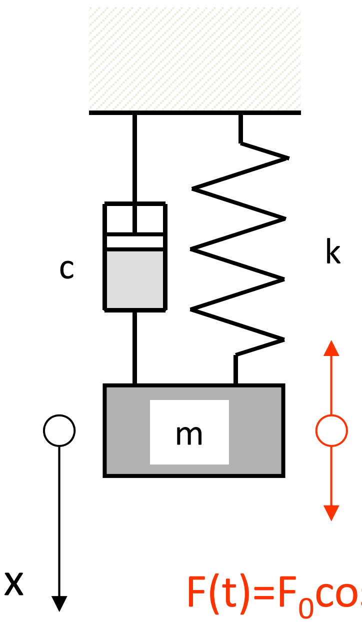
Analisi delle forze agenti



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

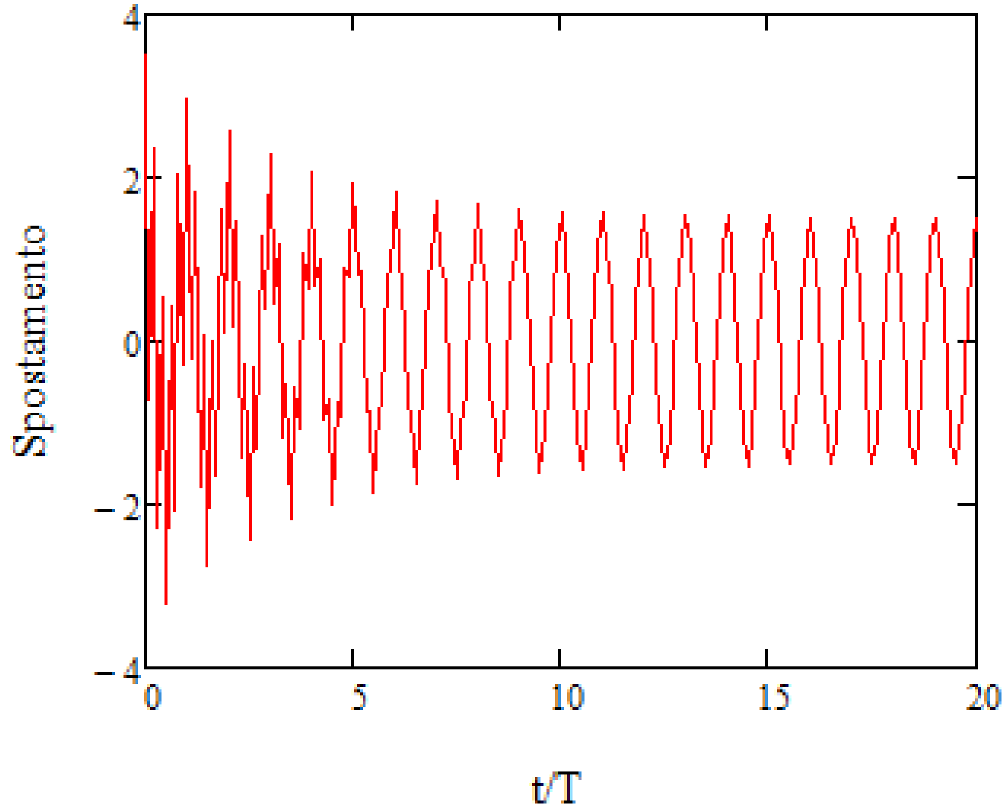


$F(t)=F_0\cos(\Omega t)$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_n}$$

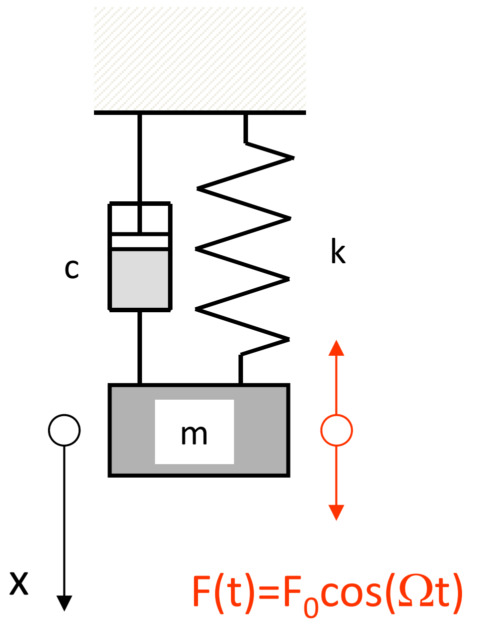
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos(\Omega t)$$

$$x(t)=\boxed{X\cdot\cos(\Omega t-\varphi)}+\boxed{e^{-\xi\omega_n t}A\sin(\omega_s t+\phi)}$$



OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

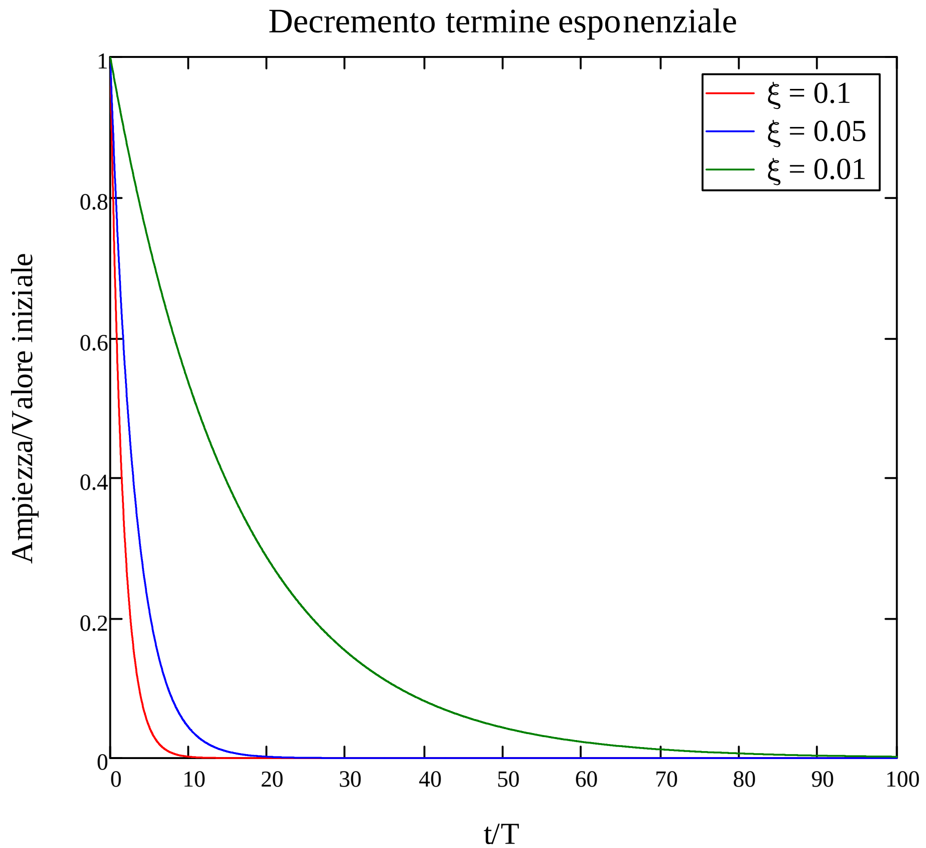
Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Downarrow$$

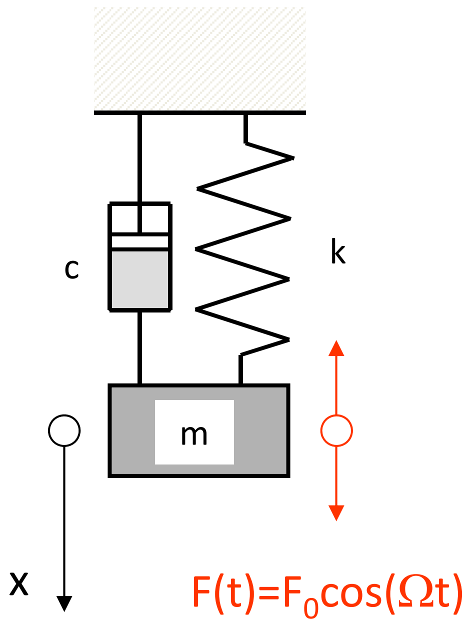
$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) + \boxed{e^{-\xi \omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)}$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$

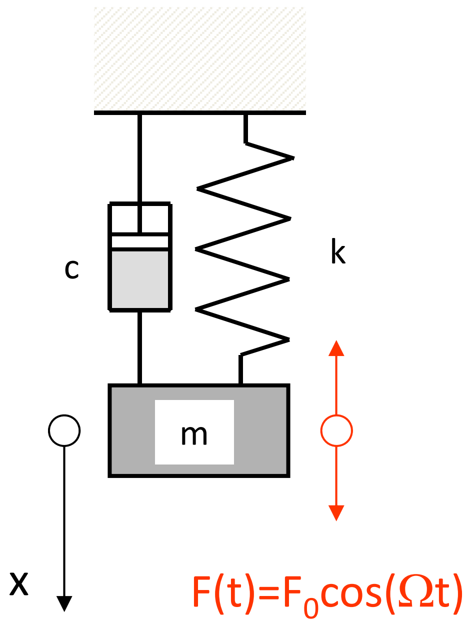
$$\frac{k}{m} = \omega_n^2$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$x(t) = \boxed{X\cdot\cos(\Omega t - \varphi)} + \boxed{e^{-\xi\omega_n t} A\sin(\omega_s t + \phi)}$$

$$x(t) \cong X\cdot\cos(\Omega t - \varphi) \qquad per\ t > t_{trans}$$

$$\dot{x}(t) \cong -\Omega X\cdot\sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) \cong -\Omega^2 X\cdot\cos(\Omega t - \varphi)$$

$$-\Omega^2 X\cdot\cos(\Omega t - \varphi) - 2\xi\omega_n\Omega X\cdot\sin(\Omega t - \varphi) + \omega_n^2 X\cdot\cos(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

$$-\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t-\varphi) - 2\xi\omega_n\Omega X \cdot \sin(\Omega t-\varphi) + \omega_n^2 X \cdot \cos(\Omega t-\varphi) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$\omega_n^2 X \cdot \cos(\Omega t)\cos(\varphi) + \omega_n^2 X \cdot \sin(\Omega t)\sin(\varphi) -$$

$$-\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t)\cos\varphi - \Omega^2 X \cdot \sin(\Omega t)\sin\varphi +$$

$$+2\xi\omega_n\Omega X \cdot \cos(\Omega t)\sin(\varphi) - 2\xi\omega_n\Omega X \cdot \sin(\Omega t)\cos(\varphi) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

$$\left[\omega_n^2\cos(\varphi) - \Omega^2\cos\varphi + 2\xi\omega_n\Omega\sin(\varphi)\right]\cdot X\cos(\Omega t) +$$

$$+\left[\omega_n^2\sin(\varphi) - \Omega^2\sin\varphi - 2\xi\omega_n\Omega\cos(\varphi)\right]\sin(\Omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

$$\begin{cases} \left[\omega_n^2 \cos(\varphi) - \Omega^2 \cos\varphi + 2\xi\omega_n\Omega\sin(\varphi)\right]X = \dfrac{F_0}{m} \\ \omega_n^2 \sin(\varphi) - \Omega^2 \sin\varphi - 2\xi\omega_n\Omega\cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{2\xi\dfrac{\Omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 \cos^2(\varphi) + 4\xi^2\omega_n^2\Omega^2 \sin^2(\varphi) + 4\xi\omega_n\Omega\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \left(\dfrac{F_0}{Xm}\right)^2 \\ \left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 \sin^2(\varphi) + 4\xi^2\omega_n^2\Omega^2 \cos^2(\varphi) - 4\xi\omega_n\Omega\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

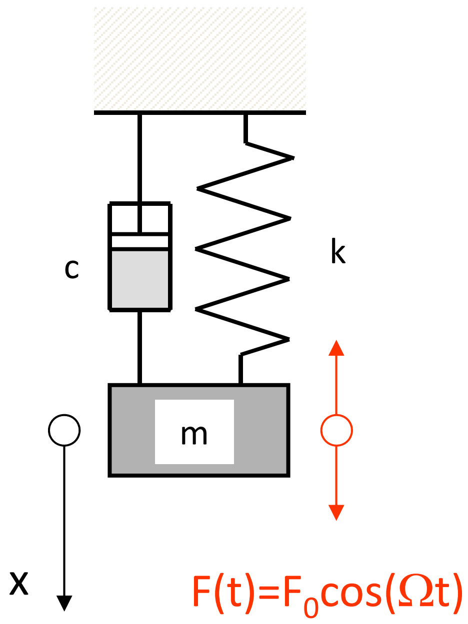
$$\begin{cases} \left(\omega_n^2-\Omega^2\right)^2\cos^2(\varphi)+4\xi^2\omega_n^2\Omega^2\sin^2(\varphi)+4\xi\omega_n\Omega\sin(\varphi)\cos(\varphi)=\left(\dfrac{F_0}{Xm}\right)^2 \\ \left(\omega_n^2-\Omega^2\right)^2\sin^2(\varphi)+4\xi^2\omega_n^2\Omega^2\cos^2(\varphi)-4\xi\omega_n\Omega\sin(\varphi)\cos(\varphi)=0 \end{cases}$$

$$\left(\omega_n^2-\Omega^2\right)^2+4\xi^2\omega_n^2\Omega^2=\left(\frac{F_0}{Xm}\right)^2$$

$$X=\frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\Omega^2\right)^2+4\xi^2\omega_n^2\Omega^2}}=\frac{\dfrac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = \boxed{X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)} + \boxed{e^{-\xi\omega_n t} A\sin(\omega_s t + \phi)}$$

$$x(t) \cong X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \qquad per\ t > t_{trans}$$

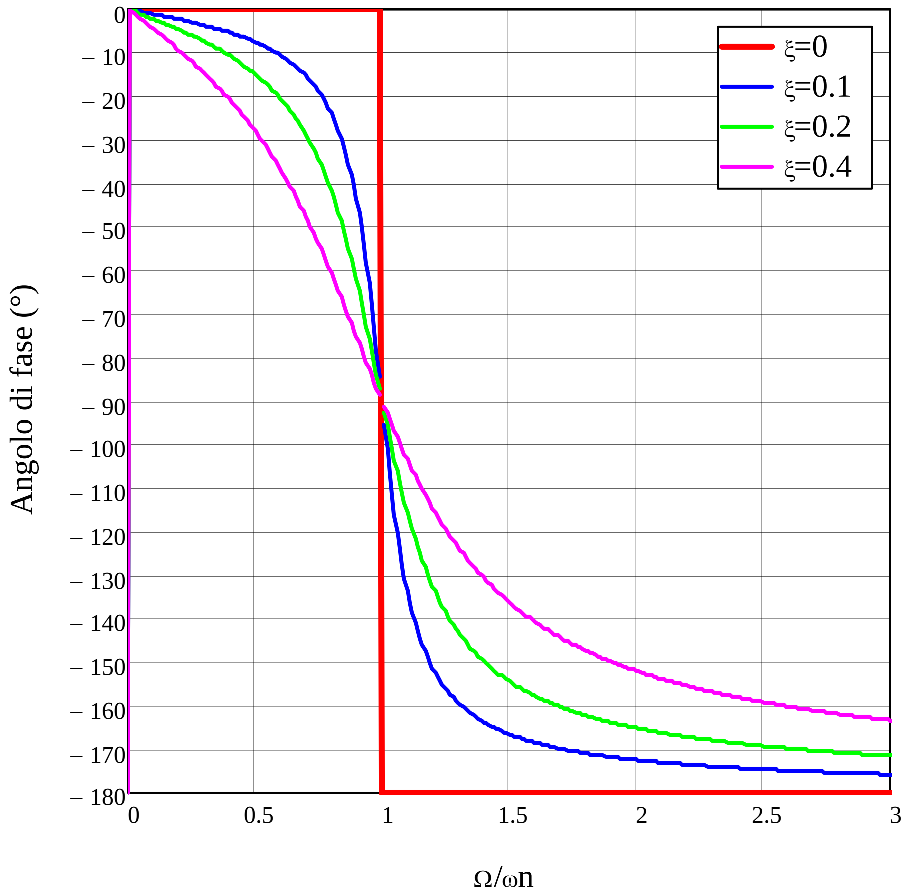
$$X = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

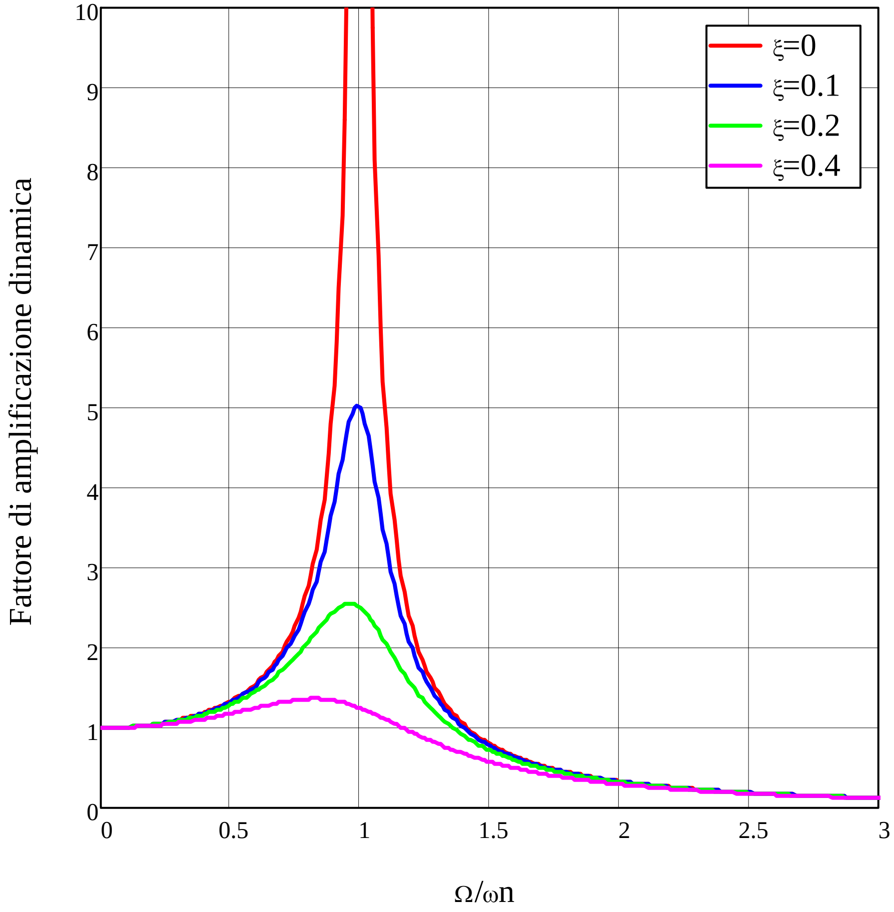
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

$$X = \frac{F_0}{K}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$





$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\xi\frac{\Omega}{\omega_n}}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

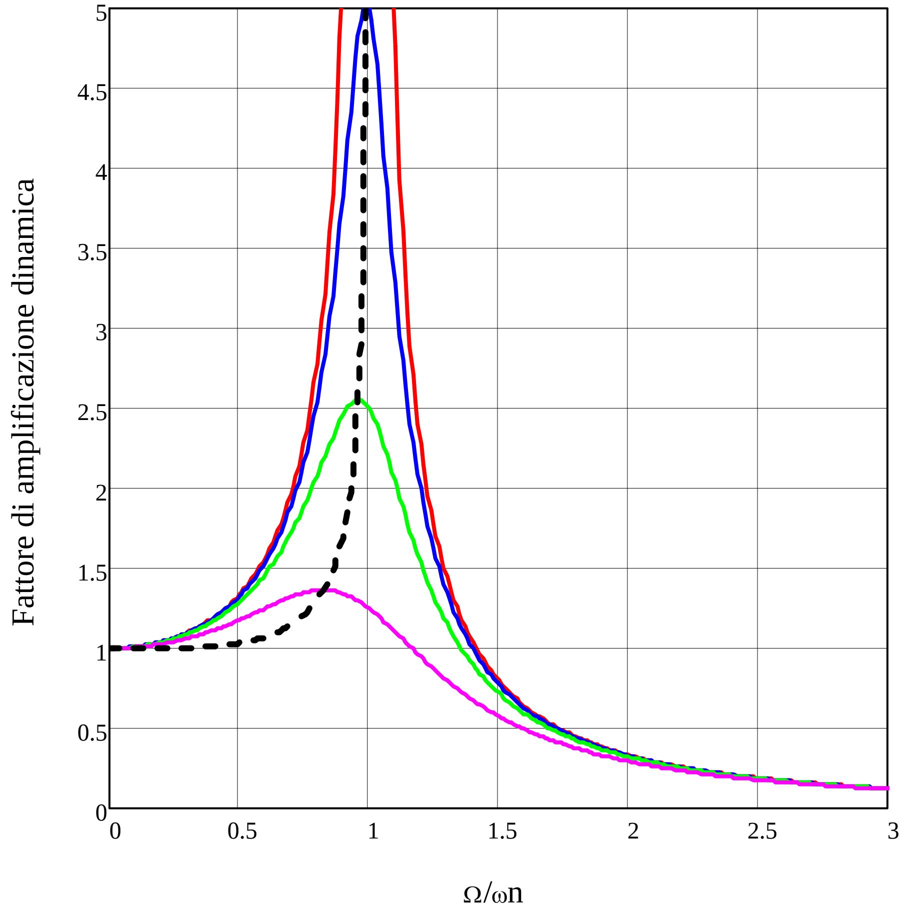
OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Rapporto di frequenza per il quale si ha il massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)_{\max} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

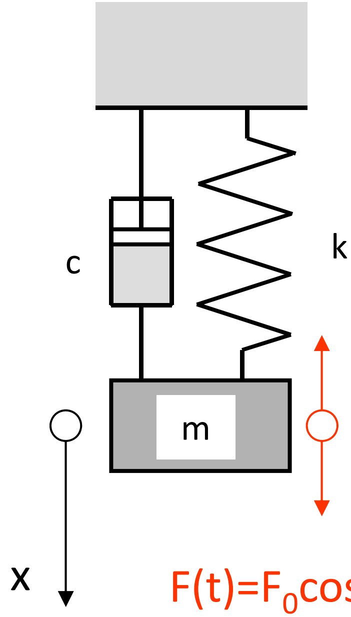
Massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$



OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l. $$\ddot{x}+\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_n t)$$



$F(t)=F_0\cos(\omega_n t)$

$$x(t)=\boxed{X\sin(\omega_n t)}$$

Integrale particolare non omogenea

$$\dot{x}(t)=\omega_n X\cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{x}(t)=-\omega_n^2 X\sin(\omega_n t)$$

$$-\omega_n^2 X\sin(\omega_n t)+2\xi\omega_n^2 X\cos(\omega_n t)+\omega_n^2 X\sin(\omega_n t)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_n t)$$

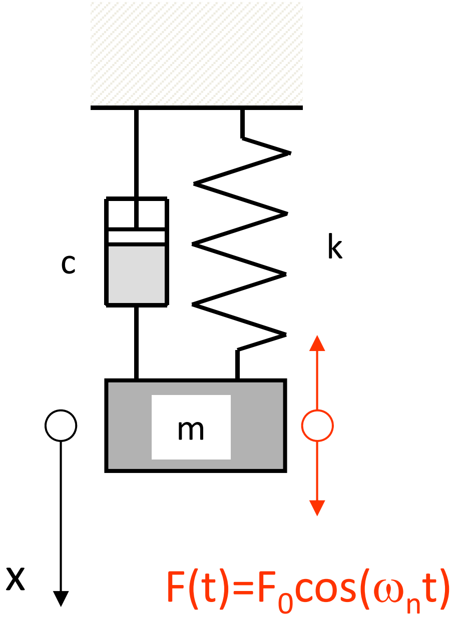
$$2\xi\omega_n^2 X\cos(\omega_n t)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_n t)$$

$$X=\frac{F_0}{m}\frac{1}{2\xi\omega_n^2}=\frac{F_0}{km}\frac{k}{2\xi\omega_n^2}=\frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos(\omega_s t) + B_1 \sin(\omega_s t)\right) + \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}\sin(\omega_n t)$$



Condizioni iniziali
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(0) = A_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A_1 + \omega_s B_1 + \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}\omega_n = 0$$

$$B_1 = \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

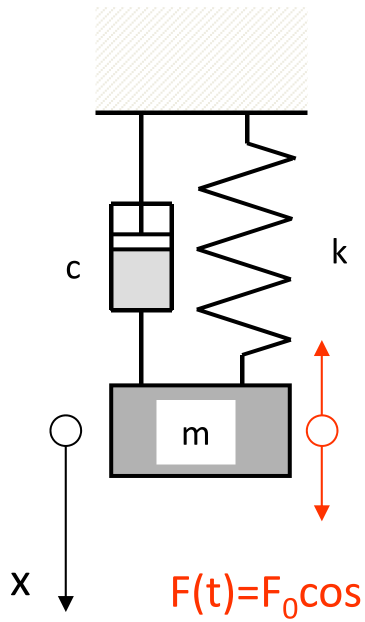
$$A_1 = 0$$

$$x(t) = -e^{-\xi\omega_n t}\frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_s t) + \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}\sin(\omega_n t)$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$x(t) = -e^{-\xi\omega_n t}\frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_s t) + \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}\sin(\omega_n t)$$



$F(t)=F_0\cos(\omega_n t)$

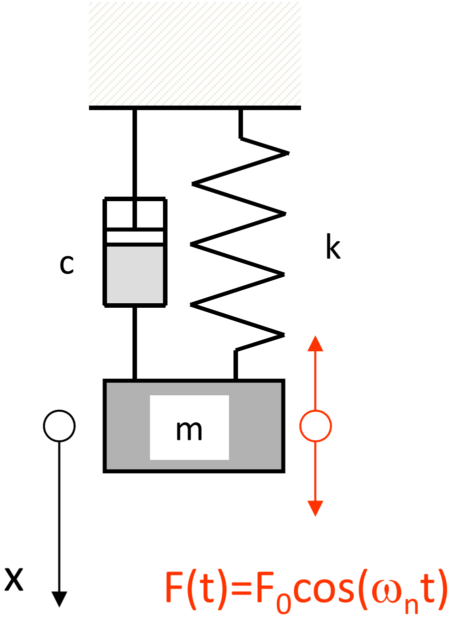
$$x(t) = \frac{F_0}{2k\xi}\left(\sin(\omega_n t) - e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_s t)\right)$$

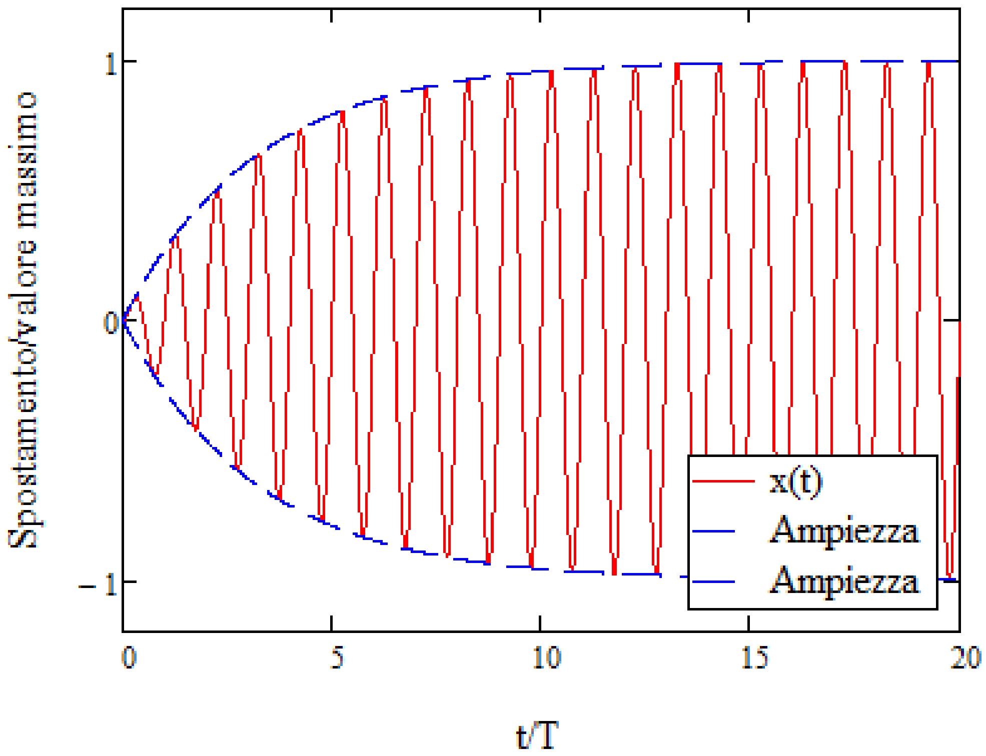
$$x(t) \approx \frac{F_0}{2k\xi}\sin(\omega_n t)\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

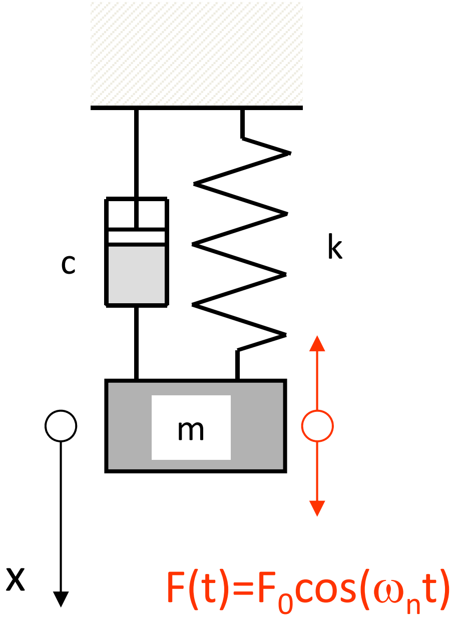
$$\frac{x(t)}{\dfrac{F_0}{2k\xi}} \approx \sin(\omega_n t)\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$



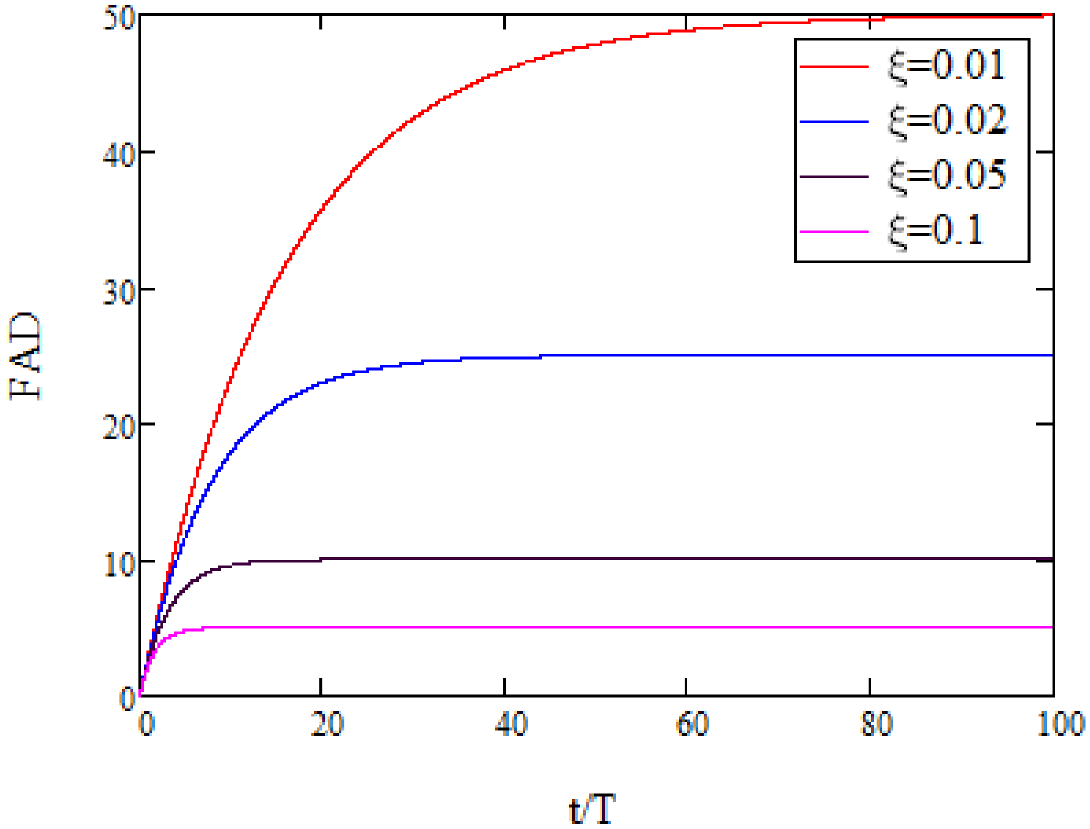


OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



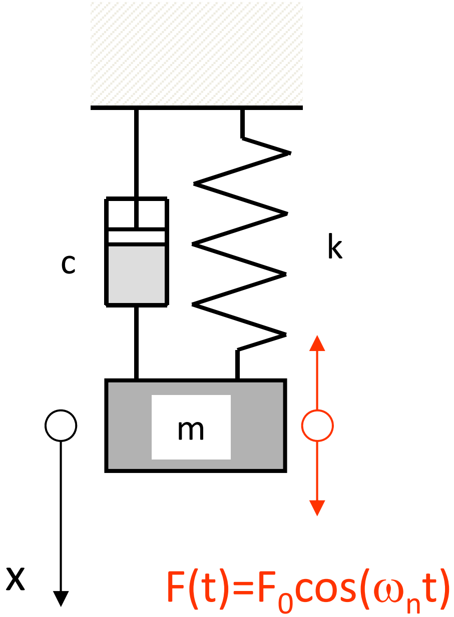
$$FAD = \frac{x(t)}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{2\xi}\left(1 - e^{-\xi\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

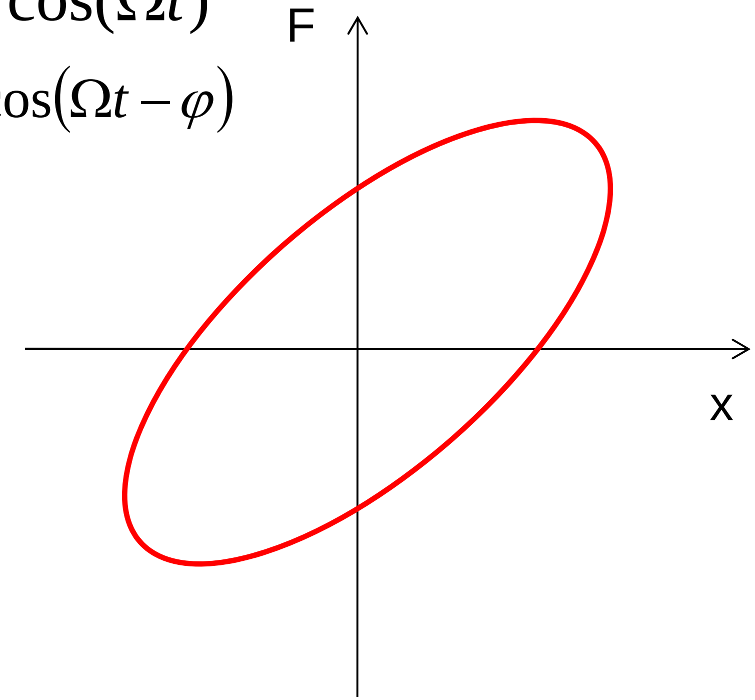


LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

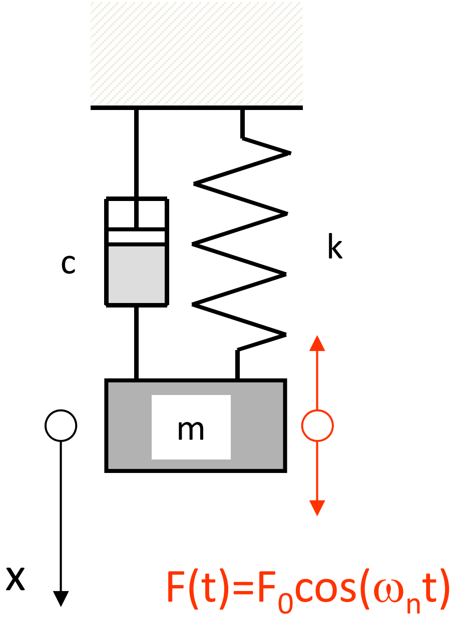


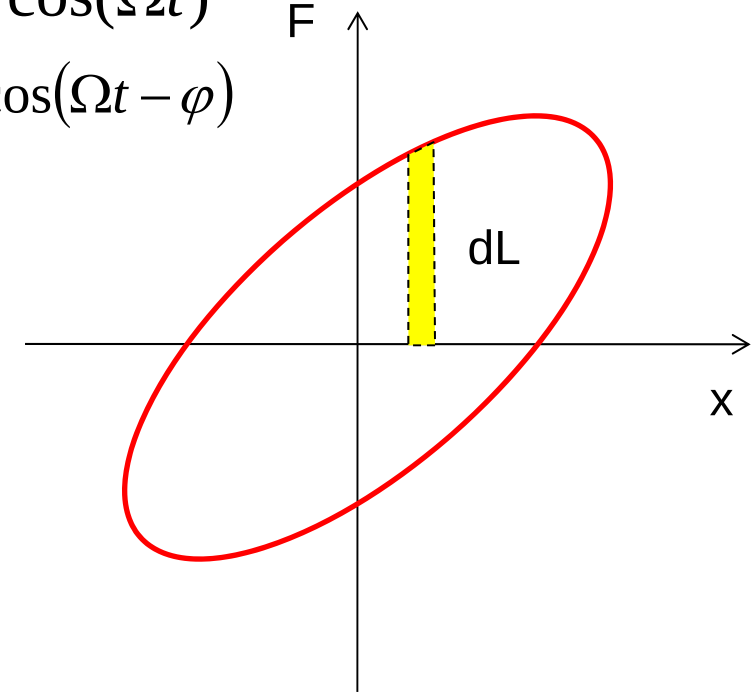


LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$



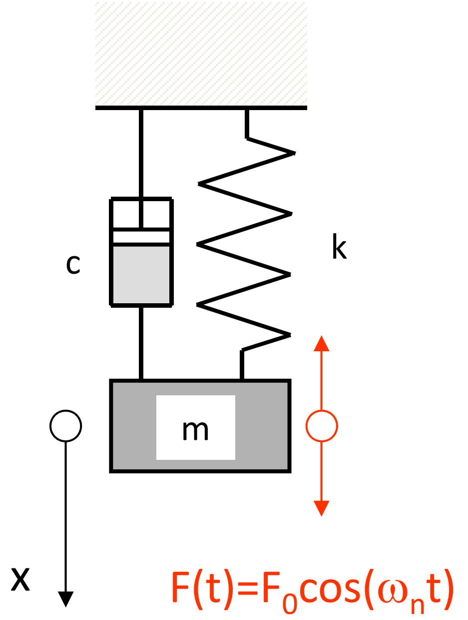


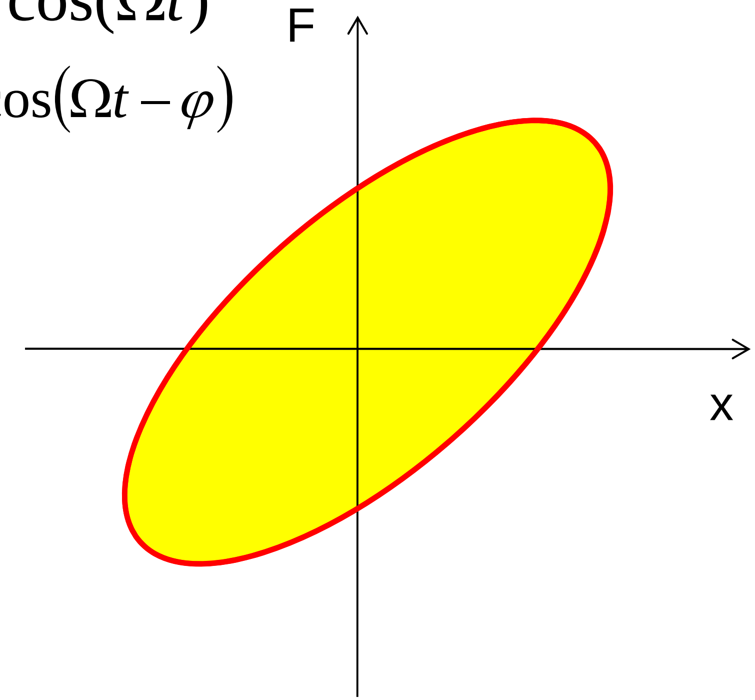
$$dL = F(t)dx = F(t)\dot{x} \cdot dt$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

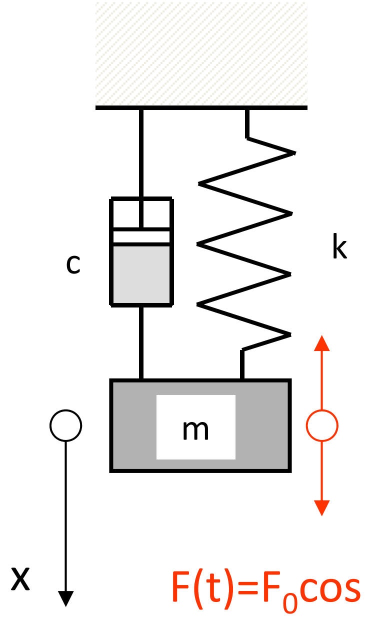




$$dL = F(t)dx = F(t)\dot{x} \cdot dt$$

$$L = \int_0^T F(t)\dot{x} \cdot dt$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



F(t)=F_0cos(ω_nt)

$$L = \int_0^T F(t)\dot{x}\cdot dt = \int_0^T F_0 \cos(\Omega t)\Omega X \sin(\Omega t - \varphi)\cdot dt$$

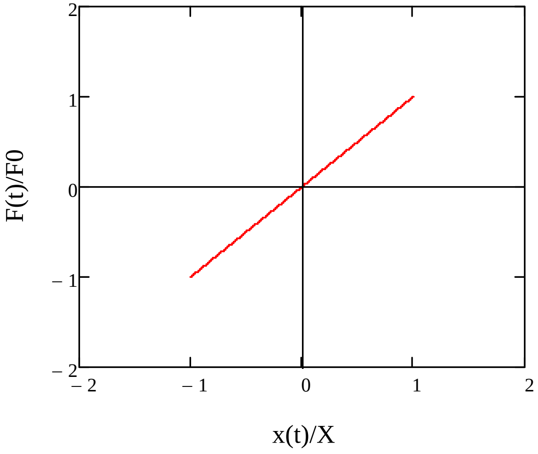
$$= F_0 \Omega X \int_0^T \cos(\Omega t)\sin(\Omega t - \varphi)\cdot dt$$

$$= F_0 \Omega X \int_0^T \frac{1}{2}\left[\sin(2\Omega t - \varphi) + \sin(-\varphi)\right]\cdot dt$$

$$= \frac{F_0 \Omega X}{2}\sin(\varphi)\int_0^T dt \;= \frac{F_0 \Omega X}{2}\sin(\varphi)\frac{2\pi}{\Omega} =$$

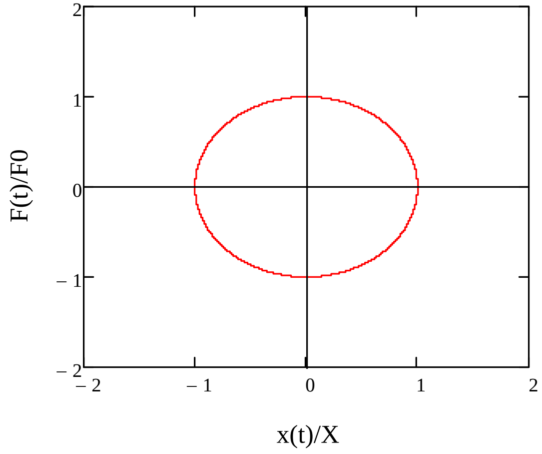
$$= \pi F_0 X \sin(\varphi)$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



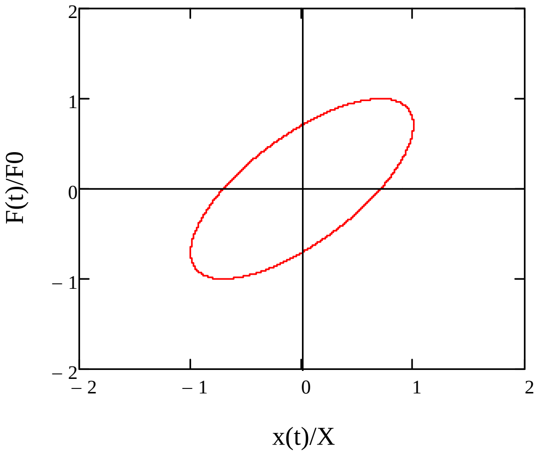
$$\varphi = 0° \ o \ 180°$$

$$L = 0$$



$$\varphi = 90°$$

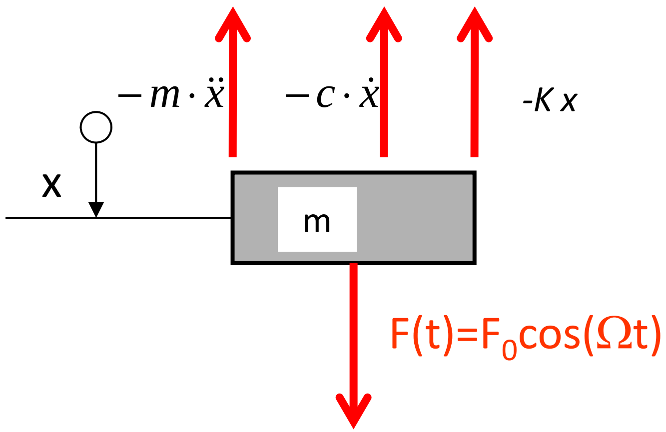
$$L = \pi F_0 X$$



$$\varphi = 45°$$

$$L = \pi F_0 X \frac{\sqrt{2}}{2}$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

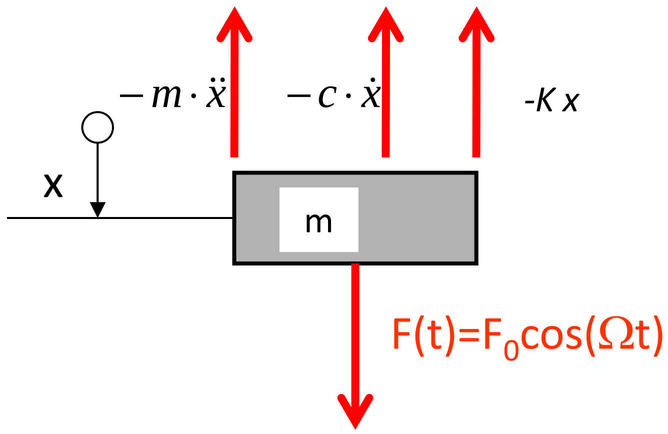


$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$
$$\dot{x}(t) = -\Omega X \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$Forza\ elastica\ \ molla = -kx \rightarrow\ fase\ con\ x(t) = 180° \rightarrow L_k = 0$$
$$Forza\ smorzatore = -c\dot{x} \rightarrow\ fase\ con\ x(t) = 270° \rightarrow L_c = \pi c \Omega X^2$$
$$Forza\ inerzia = -m\ddot{x} \rightarrow\ fase\ con\ x(t) = 0° \rightarrow L_i = 0$$

$$Lavoro\ \ F\ \ esterna = \pi F_0 X \sin(\varphi) = L_c$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



$$\pi F_0 X \sin(\varphi) = \pi c \Omega X^2$$

$$X = \frac{F_0}{c\Omega}\sin(\varphi)$$

$$Se\ \Omega = \omega_n \rightarrow \varphi = 90°$$

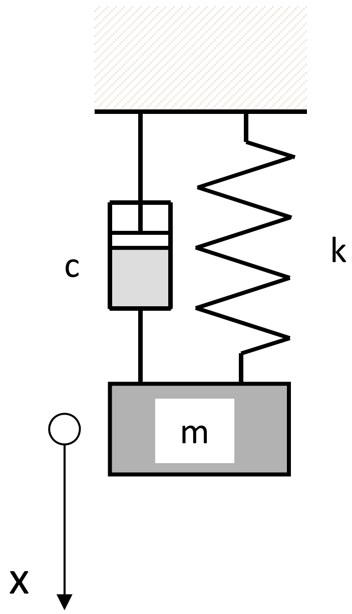
$$X = \frac{F_0}{c\omega_n} = \frac{F_0}{c\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{F_0}{\frac{c\cdot 2\cdot k}{2\sqrt{km}}} = \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

Da soluzione generale

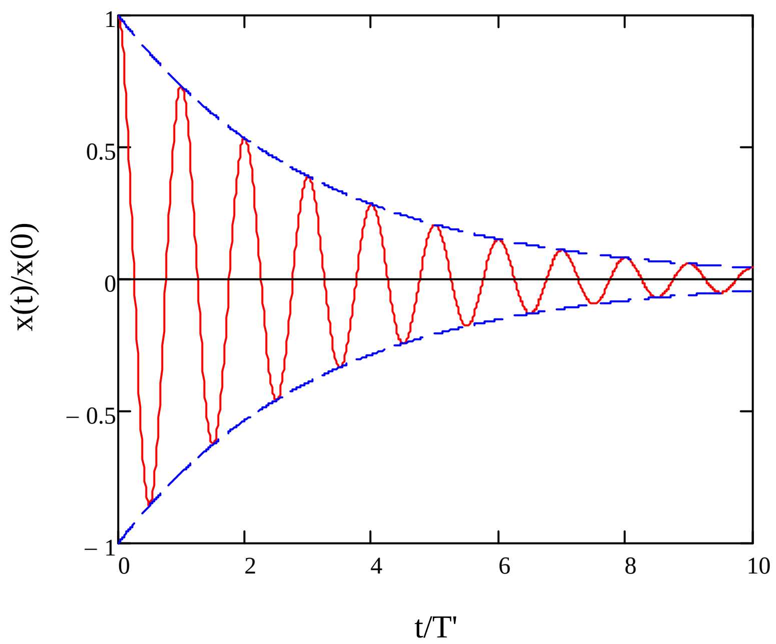
$$X = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO



Si basa sull’andamento delle ampiezze di oscillazione rilevate sulla struttura, in seguito ad una perturbazione iniziale.



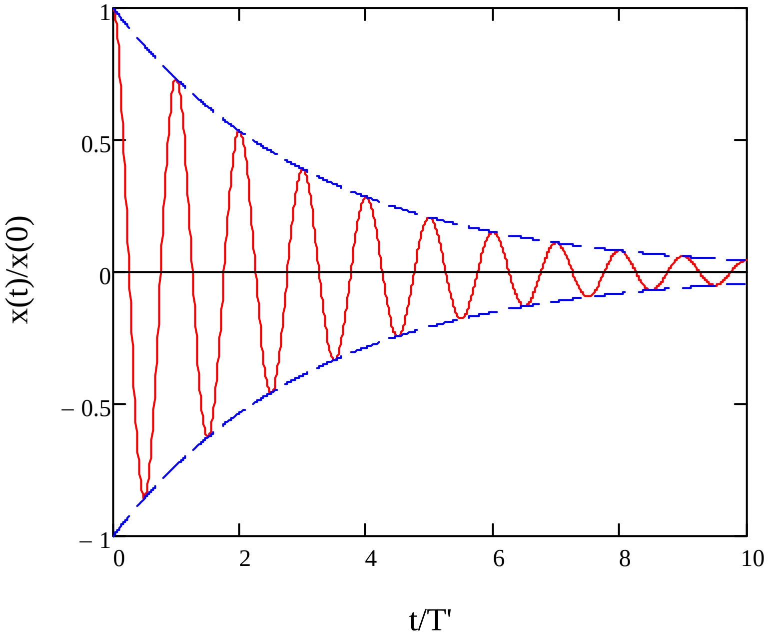
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t)\right)$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO

Rapporto di ampiezza tra due picchi successivi

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$R = \frac{e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t)\right)}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}\left(A\cos(\omega_s (t+T')) + B\sin(\omega_s (t+T'))\right)} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}}$$



Decremento Logaritmico

$$\delta = \ln\left(\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}}\right) = \xi\omega_n T' = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_s}$$

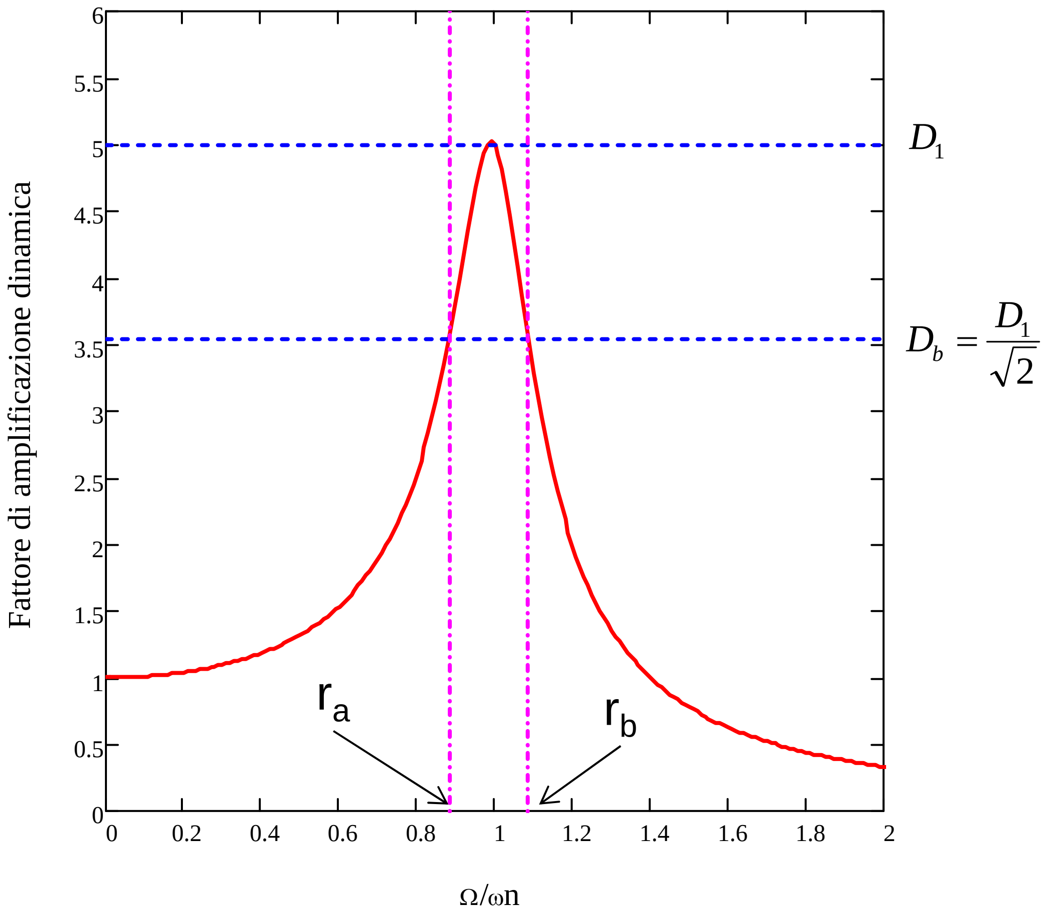
$$= \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

Si basa sull'andamento del coefficiente di amplificazione dinamica del sistema al variare della frequenza della forzante.



DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

Calcolo di r_a ed r_b

$$D_1 = \frac{1}{2\xi}$$

$$D_b = \frac{D_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + 4\xi^2 r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

Elevando al quadrato

$$\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2 + 4\xi^2 r^2} = \frac{1}{8\xi^2}$$

$$r^4 + 2r^2\left(2\xi^2 - 1\right) + \left(1 - 8\xi^2\right) = 0$$

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{\left(2\xi^2 - 1\right)^2 - \left(1 - 8\xi^2\right)} = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{\left(4\xi^4 - 4\xi^2 + 1\right) - \left(1 - 8\xi^2\right)} = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

Per ξ<<1

$$r_{a,b}^2 \approx 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi$$

$$r_{a,b} = \sqrt{1 - 2\xi^2 \pm 2\xi}$$

Per x<<1 si può porre

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \ldots \Rightarrow r_{a,b} \approx 1 - \xi^2 \pm \xi$$

$$\Downarrow$$

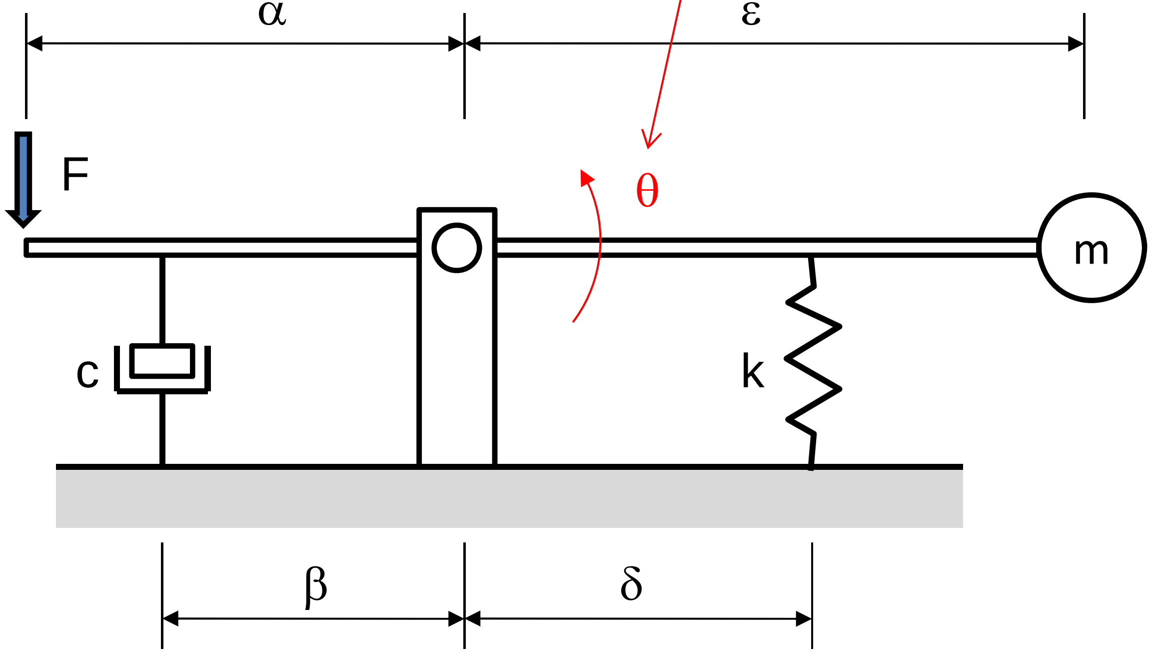
$$r_a = 1 - \xi^2 - \xi \qquad r_b = 1 - \xi^2 + \xi$$

$$\boxed{\xi \approx \frac{r_b - r_a}{2}}$$

RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

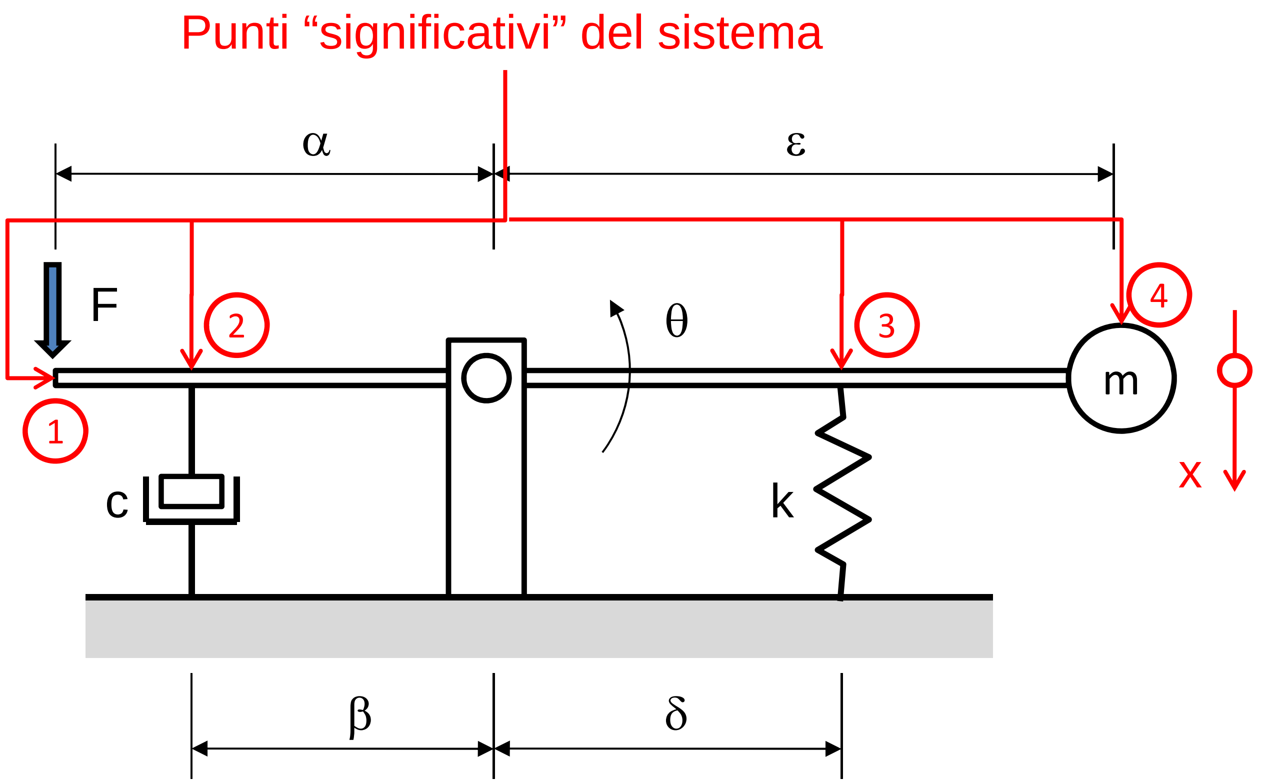
Dato un sistema meccanico formato da corpi rigidi, uniti a masse concentrate, molle e smorzatori, il cui moto sia rappresentabile con il valore di una sola grandezza.

Coordinata generalizzata o "Lagrangiana"



RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Rappresentazione degli spostamenti



$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} \Leftrightarrow \vartheta \ ?$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \cdot \vartheta \\ x_2 = \beta \cdot \vartheta \\ x_3 = -\delta \cdot \vartheta \\ x_4 = -\varepsilon \cdot \vartheta \end{cases}$$

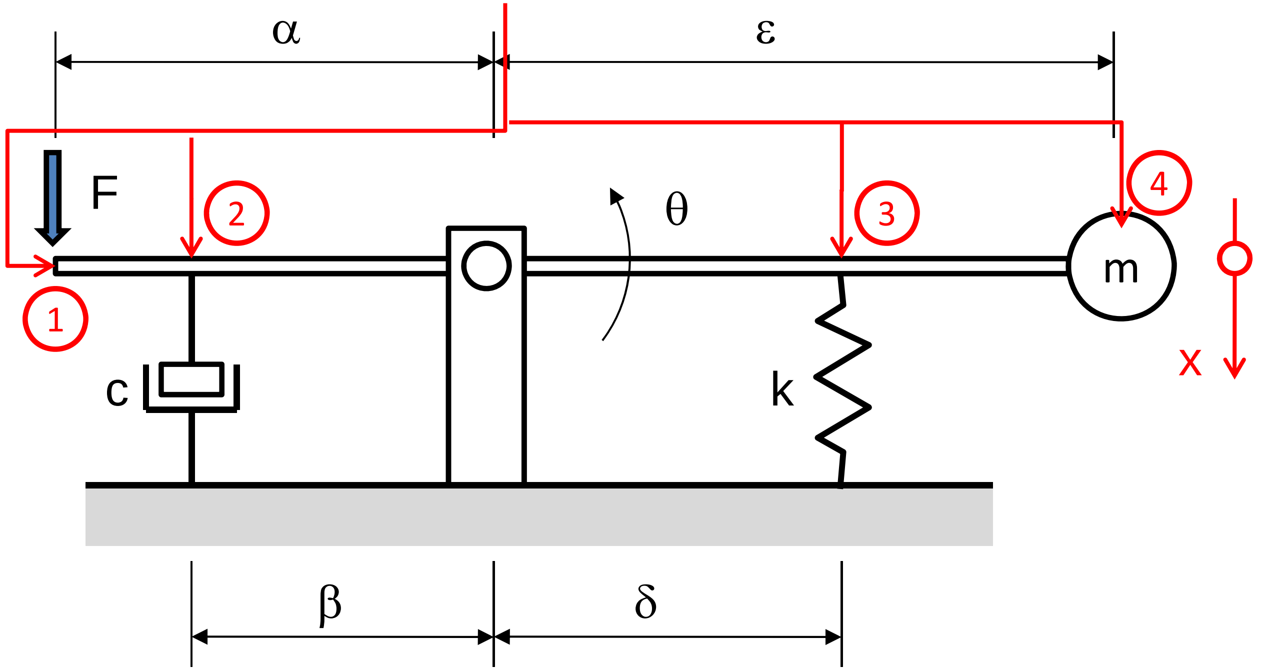
$$\{x\} = [d]\vartheta \qquad [d] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\delta \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$$

RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti "significativi" del sistema

"Riduzione" delle forze

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Lavoro forze effettive x spost. effettivi = Lavoro forza ridotta x coord. lagrangiana

$$Q \cdot \vartheta = \{x\}^T \{f\}$$

$$\{x\} = [d]\vartheta$$

$$Q \cdot \vartheta = \vartheta [d]^T \{f\}$$

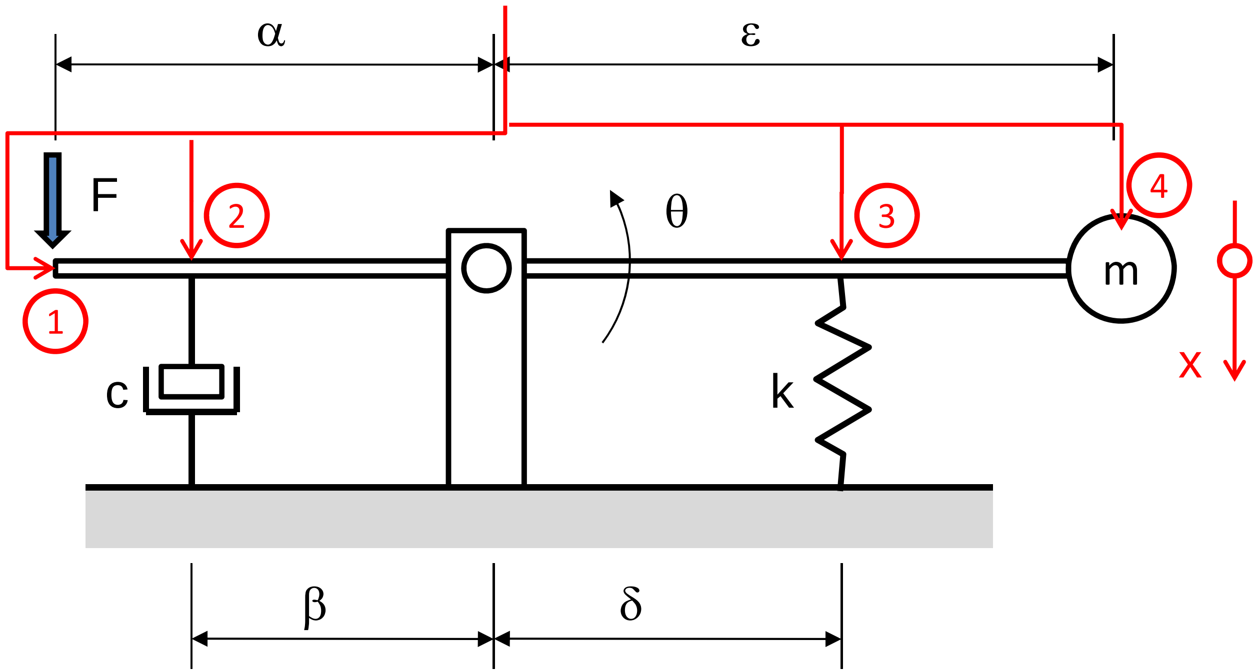
$$Q = [d]^T \{f\}$$

RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti "significativi" del sistema

"Riduzione" delle rigidezze

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}= \\ =\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Lavoro forze effettive x spost. effettivi = Lavoro forza ridotta x coord. lagrangiana

$$k^* \cdot \vartheta \cdot \vartheta = \{x\}^T [k] \{x\}$$

$$\{x\} = \{d\}\vartheta$$

$$k^* \cdot \vartheta \cdot \vartheta = \vartheta \{d\}^T [K] \{d\} \vartheta$$

$$k^* = \{d\}^T [K] \{d\}$$

$$k^* = \{\alpha \quad \beta \quad -\delta \quad -\varepsilon\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\delta \\ -\varepsilon \end{Bmatrix} = \delta^2 k$$

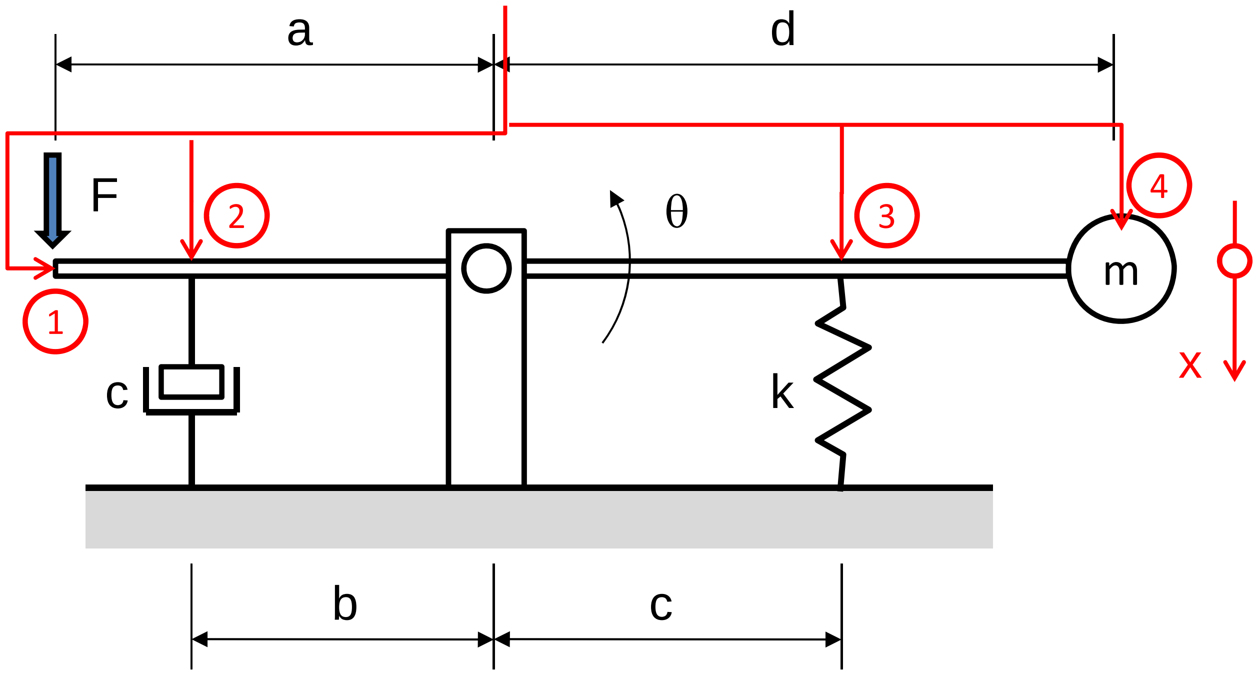
RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti “significativi” del sistema

“Riduzione” delle masse e degli smorzamenti

$$m^* = \{d\}^T [M] \{d\}$$

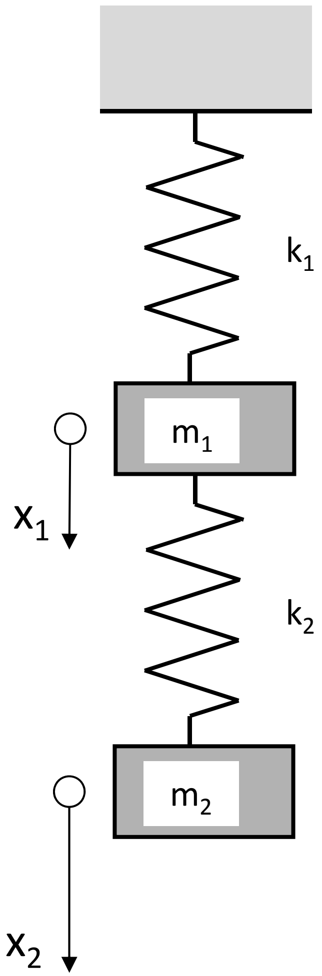
$$c^* = \{d\}^T [C] \{d\}$$



Equazione di equilibrio dinamico del sistema ridotto

$$m^* \ddot{\vartheta} + c^* \dot{\vartheta} + k^* \vartheta = Q$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

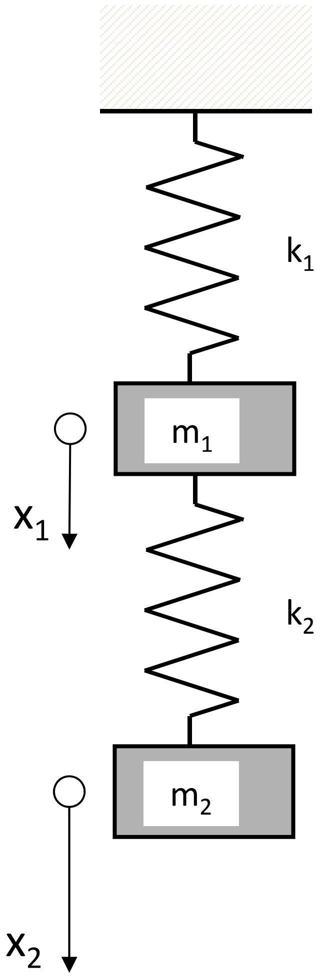
$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\omega t} \\ X_2 e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$
$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Esempio di sistema a 2 g.d.l.



$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = 0$$

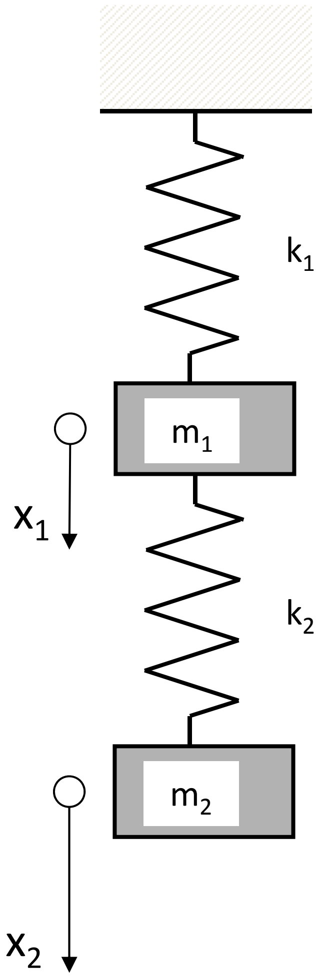
$$-\omega^2 [M]\{X\} e^{i\omega t} + [K]\{X\} e^{i\omega t} = 0$$

$$\left([K] - \omega^2 [M]\right)\{X\} = 0$$

$$\det\left([K] - \omega^2 [M]\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$\det\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2 =$$

$$= k_1 k_2 - \omega^2 m_2 k_1 + k_2^2 - \omega^2 m_2 k_2 - \omega^2 m_1 k_2 + \omega^4 m_1 m_2 - k_2^2 =$$

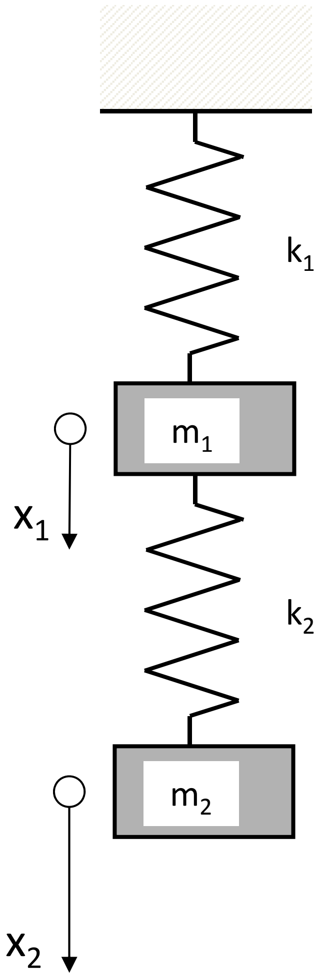
$$= k_1 k_2 - \omega^2 m_2 k_1 - \omega^2 m_2 k_2 - \omega^2 m_1 k_2 + \omega^4 m_1 m_2 =$$

$$= \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 \left(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2\right) + k_1 k_2 =$$

$$= \omega^4 - \omega^2 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}}{2}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Pulsazioni proprie

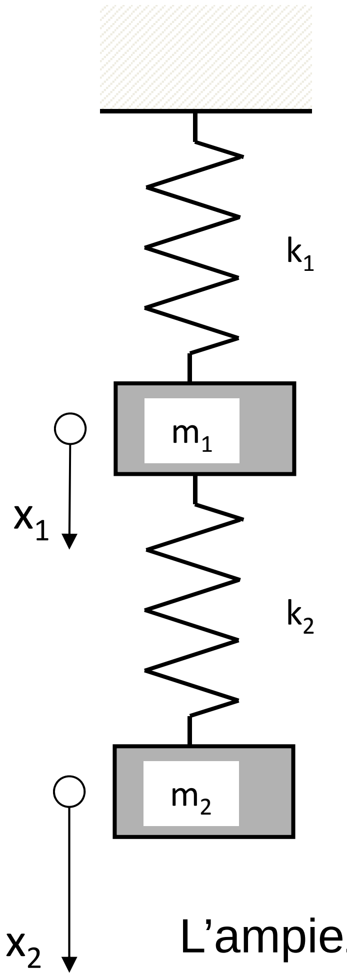
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)-\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}}{2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)+\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2}{m_1m_2}}}{2}}$$

Solitamente sono ordinate in modo crescente, per cui:

$$\omega_1 < \omega_2$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Sostituendo una delle due pulsazioni proprie nelle equazioni di equilibrio dinamico si ottiene un sistema di due equazioni dalle quali ricavare quale ricavare X_1 ed X_2.

$$\left\{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

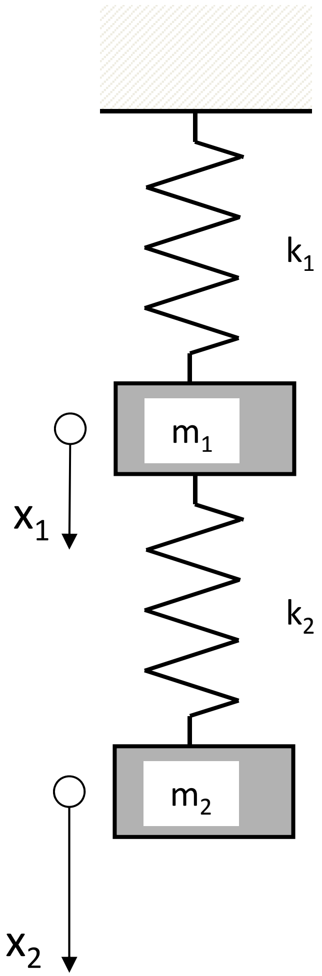
È necessario osservare che le due equazioni non sono **linearmente indipendenti** (Det=0).
Si ha, quindi, **una sola equazione** dalla quale ricavare X_1 ed X_2.
Se si indica con:

$$X_i^{(j)}$$

L'ampiezza relativa al grado di libertà "i", ottenuta per $\omega = \omega_j$, si ottiene:

$$\left\{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} - \omega_j^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} X_1^{(j)} \\ X_2^{(j)} \end{Bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Da cui si ricava:

$$\left[\left(k_1+k_2\right)-\omega_j^2 m_1\right]X_1^{(j)}-k_2 X_2^{(j)}=0$$

che non consente di determinare i valori effettivi dei due spostamenti, ma fissa il loro rapporto:

$$r_j=\frac{X_2^{(j)}}{X_1^{(j)}}=\frac{\left(k_1+k_2\right)-\omega_j^2 m_1}{k_2}$$

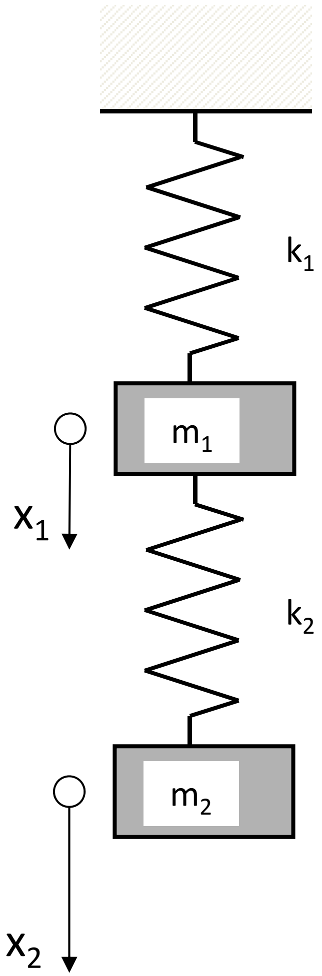
Gli effettivi spostamenti, noti a meno di una costante, possono essere determinati solo fissando le condizioni iniziali. Risulta tuttavia fissata la “forma” della deformata assunta dal sistema per ogni modo proprio:

$$\{Y_1\}=\begin{Bmatrix}1\\ r_1\end{Bmatrix}$$

$$\{Y_2\}=\begin{Bmatrix}1\\ r_2\end{Bmatrix}$$

“forme modali”

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

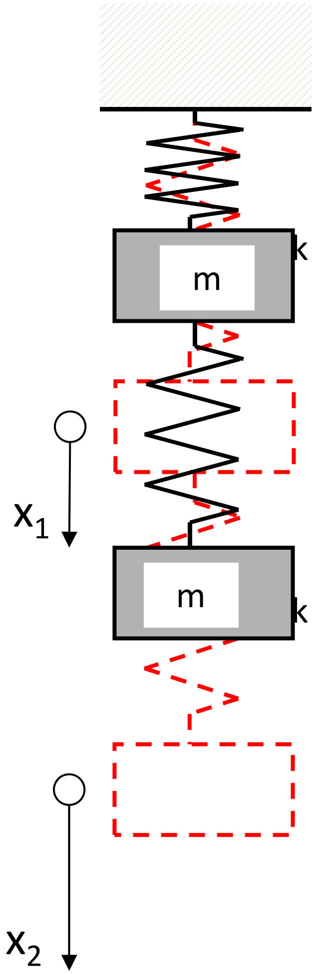


Caso particolare: $k_1=k_2=k$, $m_1=m_2=m$

$$\omega^2 = \frac{\frac{3k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{3k}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)^2}}{2} = \frac{k}{m}\frac{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



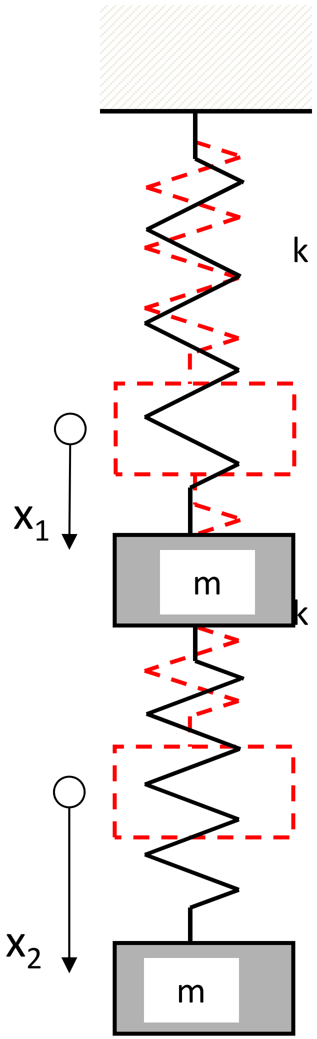
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.618$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_1 = \left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx 1.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



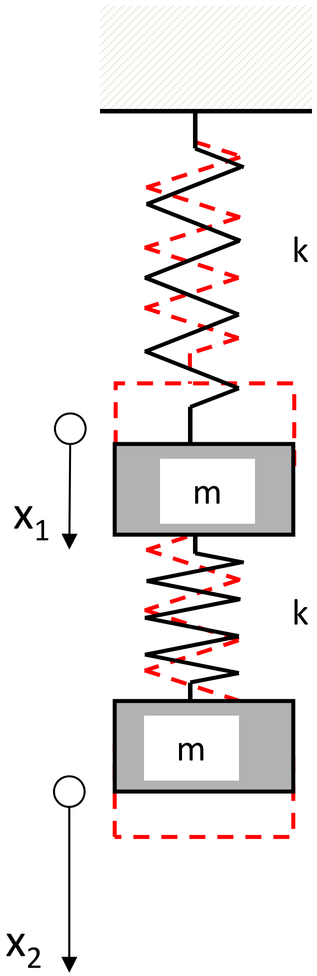
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0.618$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_1 = \left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx 1.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



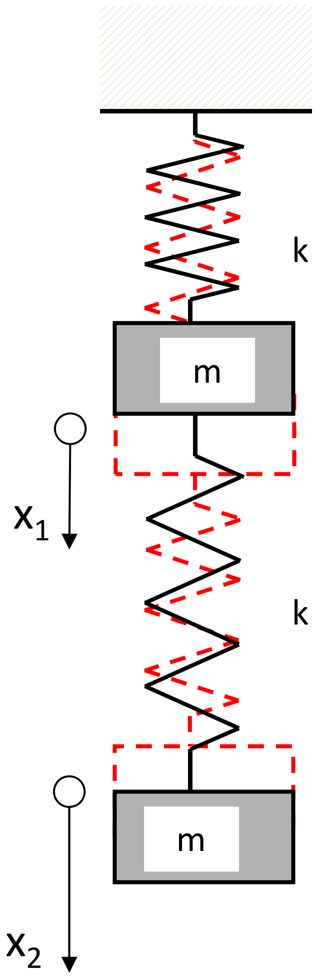
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 1.62$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_2 = \left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx -0.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



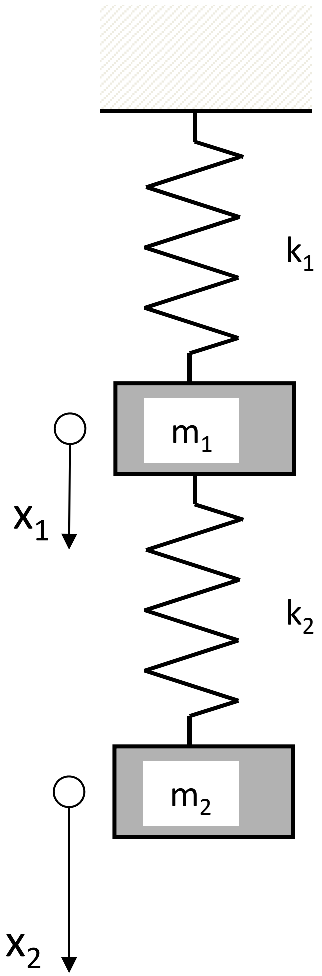
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 1.62$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$r_2 = \left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx -0.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Condizioni iniziali

Tipicamente vengono fissati spostamenti e velocità delle due masse ad un istante dato:

$$x_1(0) = x_{10}$$
$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$$
$$x_2(0) = x_{20}$$
$$\dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$

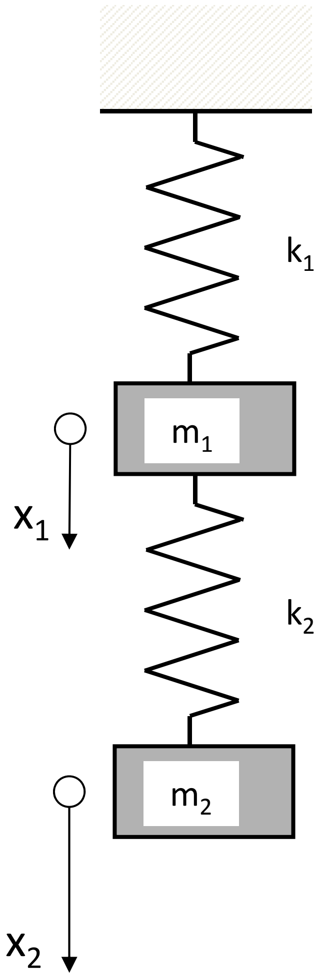
In generale, l'oscillazione del sistema sarà **una combinazione dei due modi propri**:

$$\{x(t)\} = A_1\{Y_1\}e^{i\omega_1 t} + A_2\{Y_2\}e^{i\omega_2 t}$$

A_1 ed A_2 in generale complessi, con variazioni tra i due modi propri in modulo e fase.

$$\{x(t)\} = a_1 e^{i\varphi_1}\{Y_1\}e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\varphi_2}\{Y_2\}e^{i\omega_2 t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



$$\{x(t)\} = a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} e^{i\omega_2 t}$$

Derivando ed imponendo le condizioni iniziali:

$$\{x(0)\} = a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} + a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix} = \{x_0\}$$

$$\{\dot{x}(0)\} = i\omega_1 a_1 e^{i\varphi_1} \{Y_1\} + i\omega_2 a_2 e^{i\varphi_2} \{Y_2\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{Bmatrix} = \{\dot{x}_0\}$$

Considerando la parte reale si ottengo 4 eq.ni algebriche:

$$a_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2) = x_{10}$$

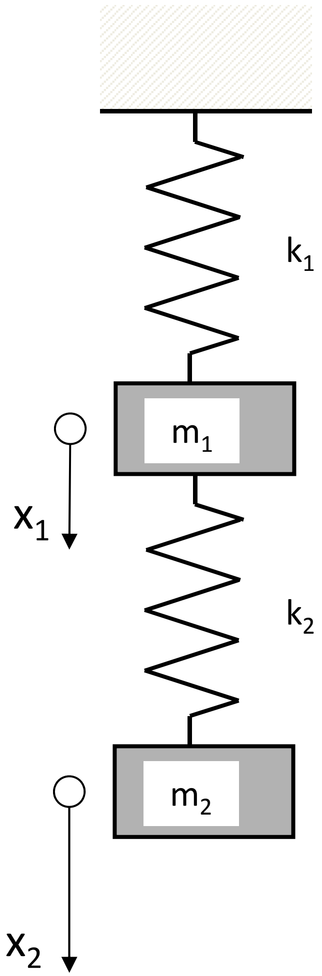
$$a_1 r_1 \cos(\varphi_1) + a_2 r_2 \cos(\varphi_2) = x_{20}$$

$$-\omega_1 a_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\varphi_2) = \dot{x}_{10}$$

$$-\omega_1 a_1 r_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 r_2 \sin(\varphi_2) = \dot{x}_{20}$$

da cui si possono ottenere i 4 coefficienti incogniti

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



È particolarmente interessante il caso di velocità iniziali entrambe nulle, per il quale si ottiene:

$$a_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2) = x_{10}$$
$$a_1 r_1 \cos(\varphi_1) + a_2 r_2 \cos(\varphi_2) = x_{20}$$
$$-\omega_1 a_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\varphi_2) = 0$$
$$-\omega_1 a_1 r_1 \sin(\varphi_1) - \omega_2 a_2 r_2 \sin(\varphi_2) = 0$$

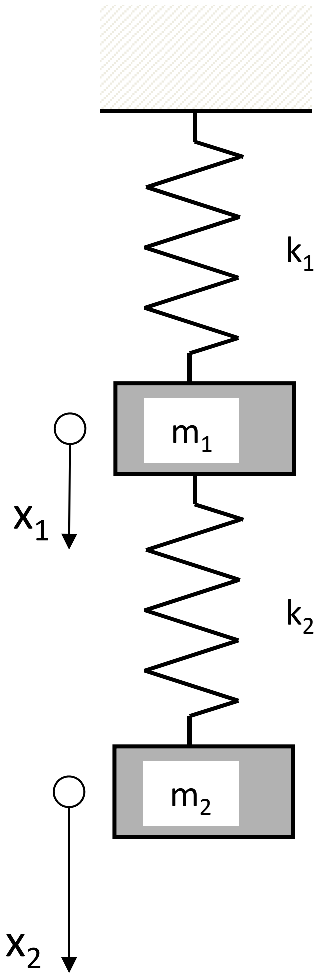
da cui:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \sin(\varphi_1) &= 0 \\ a_2 \sin(\varphi_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$a_1 = \frac{(x_{20} - r_2 x_{10})}{r_1 - r_2}$$

$$a_2 = \frac{(r_1 x_{10} - x_{20})}{r_1 - r_2}$$

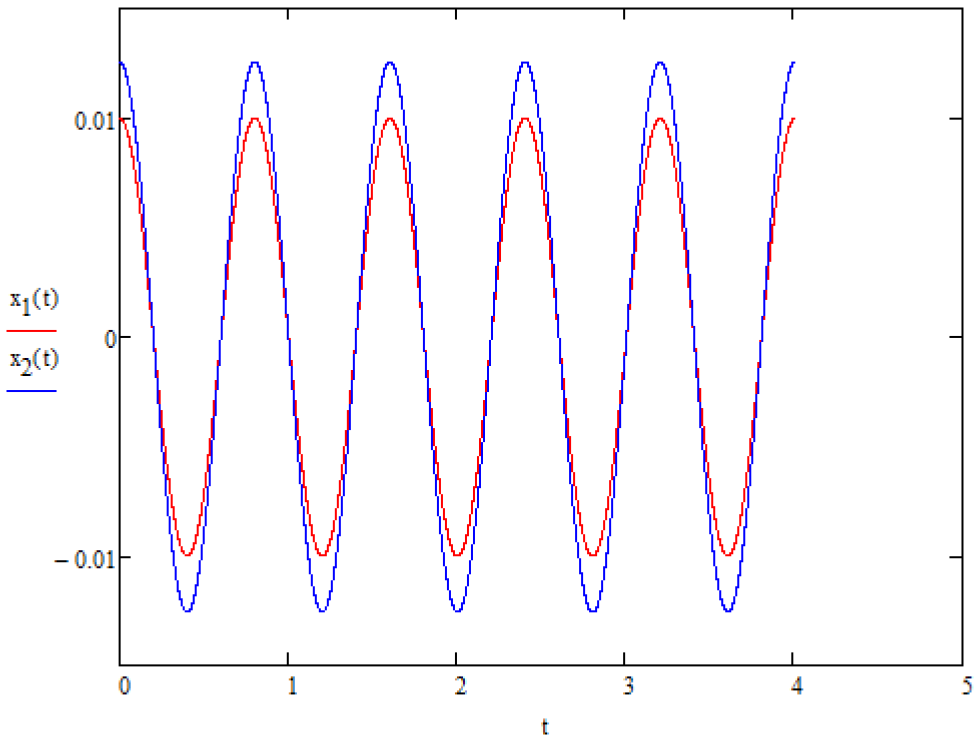
SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



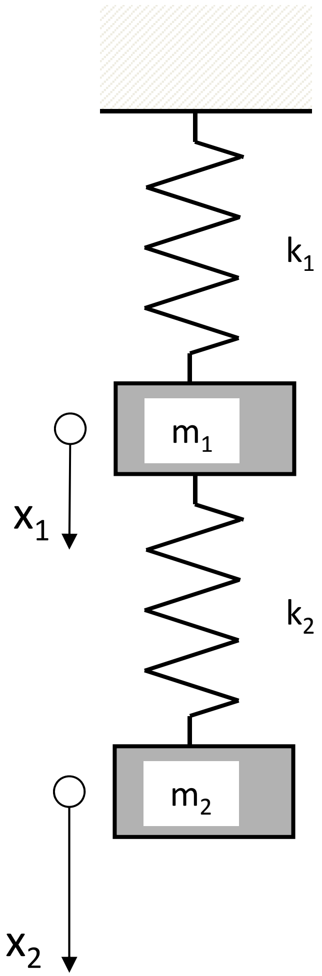
Caso : $x_{20} = r_1 x_{10}$

$$a_2 = \frac{\left(r_1 x_{10} - x_{20}\right)}{r_1 - r_2} = 0$$

per cui il sistema vibra solo secondo il modo proprio 1.



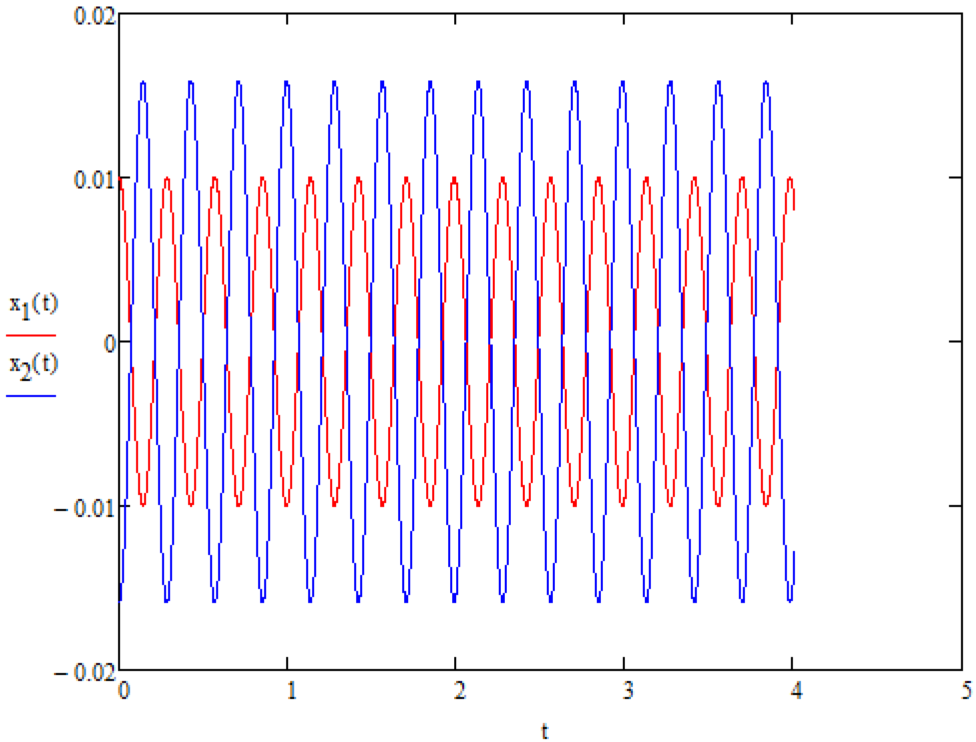
SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



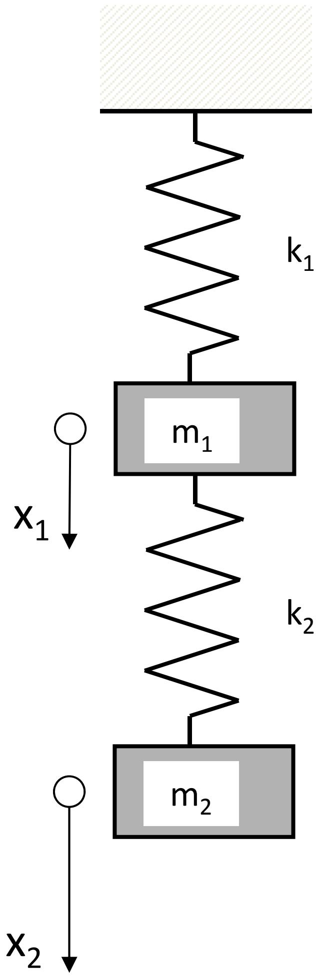
Caso : $x_{20} = r_2 x_{10}$

$$a_1 = \frac{\left(x_{20} - r_2 x_{10}\right)}{r_1 - r_2} = 0$$

per cui il sistema vibra solo secondo il modo proprio 2.

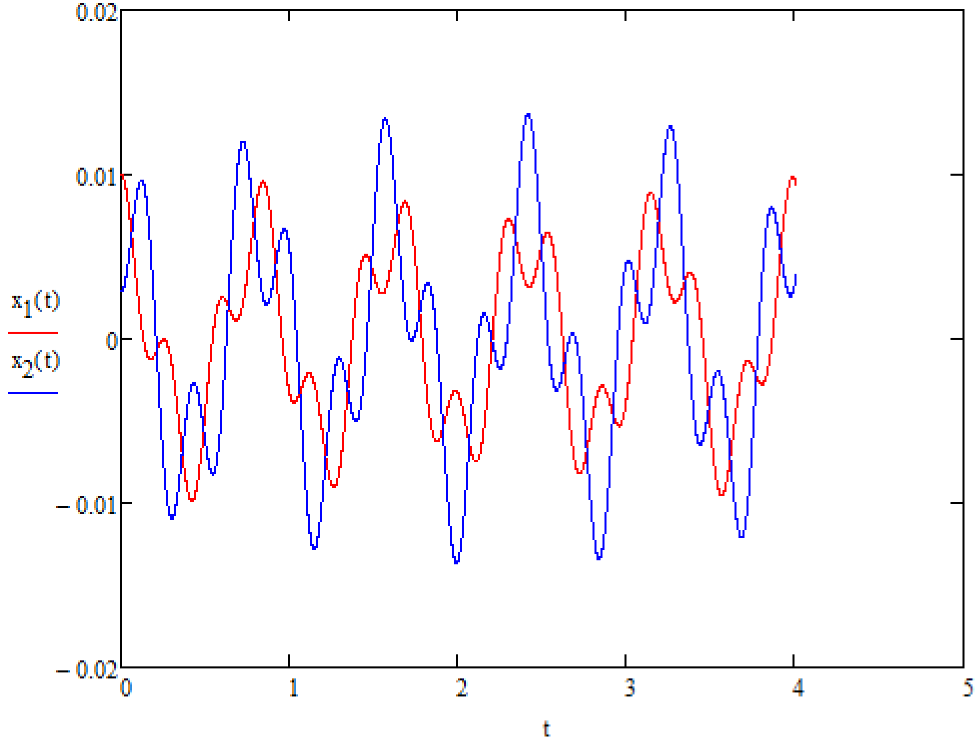


SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Caso generale $a_1 \neq 0; \quad a_2 \neq 0$

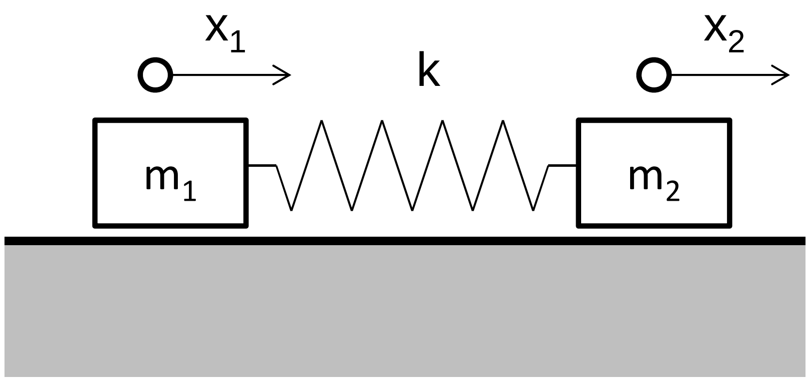
per cui l'oscillazione è una combinazione di quelle corrispondenti ai due modi propri



Nota: in generale, a meno che T_1/T_2 non sia un numero razionale, il moto, a stretto rigore di termini, non può nemmeno dirsi periodico.

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Sistemi con possibilità di moti rigidi (labili)



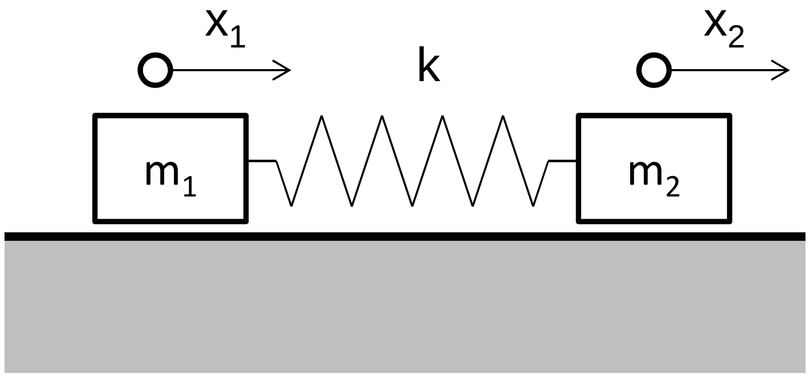
$$m_1\ddot{x}_1 + k\left(x_1 - x_2\right) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Sistemi con possibilità di moti rigidi (labili)



$$-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}=0$$

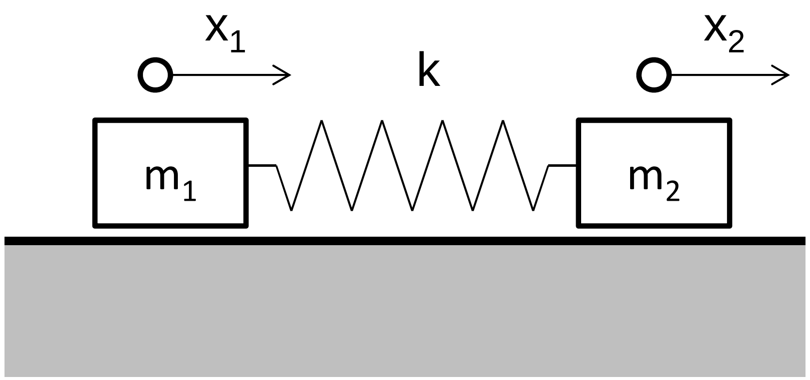
$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}=0$$

$$\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

$$\det\begin{bmatrix} k-\omega^2 m_1 & -k \\ -k & k-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}=0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Sistemi con possibilità di moti rigidi (labili)



$$\det\begin{bmatrix} k-\omega^2 m_1 & -k \\ -k & k-\omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(k-\omega^2 m_1\right)\left(k-\omega^2 m_2\right) - k^2 =$$

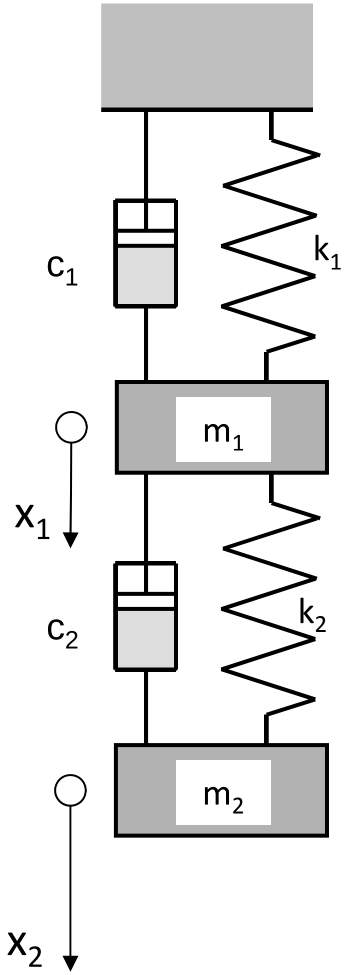
$$= k^2 - \omega^2 m_2 k - \omega^2 m_1 k + \omega^4 m_1 m_2 - k^2 =$$

$$= \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 k\left(m_2 + m_1\right) = \omega^2\left(\omega^2 m_1 m_2 - k\left(m_2 + m_1\right)\right) = 0$$

$\omega^2 = 0 \longrightarrow X_1 = X_2 \longrightarrow$ Moto rigido

$\omega^2 = \dfrac{k\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 m_2} \longrightarrow \dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{m_1}{m_2} \longrightarrow$ Oscillazione

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO E SMORZATO



Equazioni di equilibrio

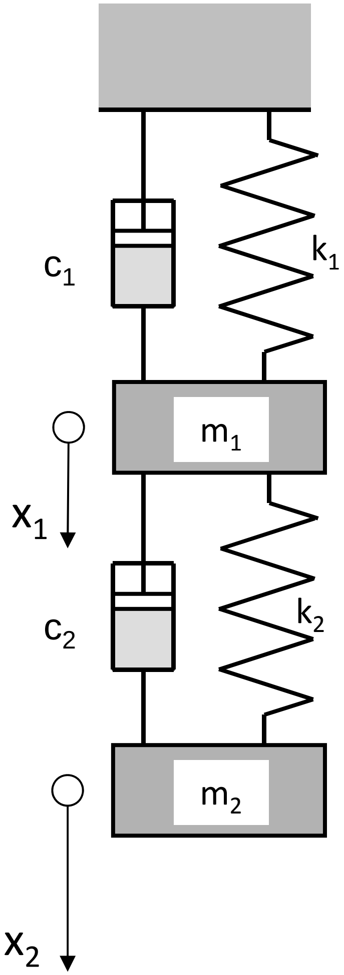
$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + k_2\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO E SMORZATO



$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

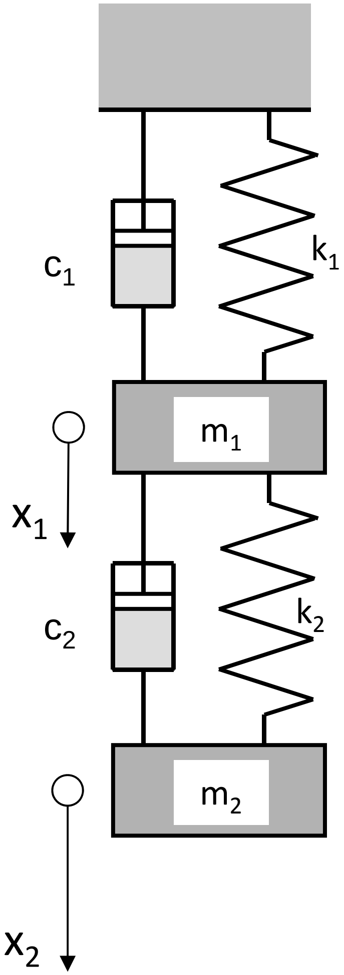
Si assume

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\omega t} \\ X_2 e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = i\omega \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO E SMORZATO



$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Sostituendo

$$-\omega^2[M]\{X\}e^{i\omega t}+i\omega[C]\{X\}e^{i\omega t}+[K]\{X\}e^{i\omega t}=0$$

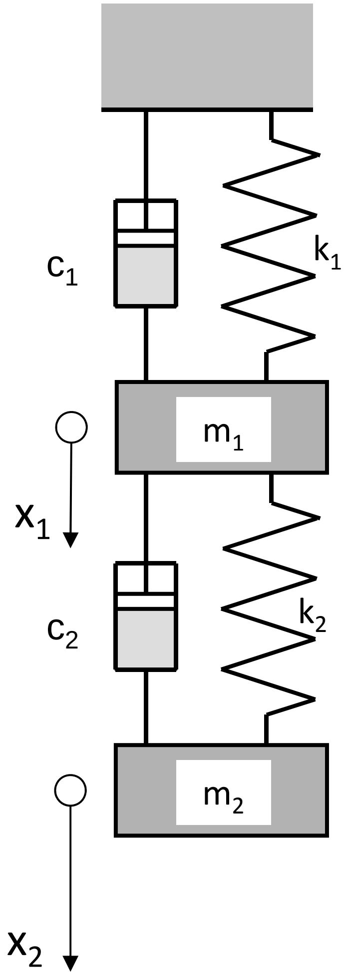
da cui:

$$\left([K]-\omega^2[M]+i\omega[C]\right)\{X\}=0$$

In generale il vettore spostamenti sarà composto da numeri complessi, per cui:

- i vari gdl vibrano con la stessa pulsazione
- i vari gdl possono avere uno sfasamento reciproco

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO E SMORZATO



$$\left([K]-\omega^2[M]+i\omega[C]\right)\{X\}=0$$

Sistema lineare omogeneo, per avere sln non banale:

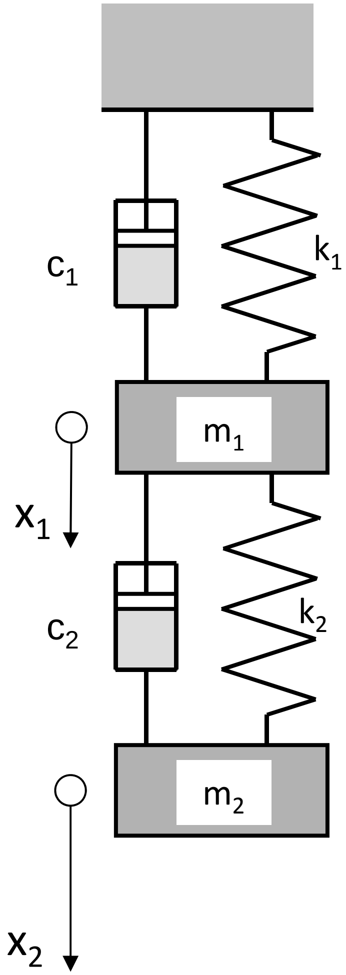
$$\det\begin{bmatrix} k_1+k_2+i\omega(c_1+c_2)-\omega^2 m_1 & -k_2-i\omega c_2 \\ -k_2-i\omega c_2 & k_2+i\omega c_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\left(k_1+k_2+i\omega(c_1+c_2)-\omega^2 m_1\right)\left(k_2+i\omega c_2-\omega^2 m_2\right)-\left(k_2+i\omega c_2\right)^2=0$$

In generale, radici in campo complesso:

$$\omega_j=\omega_s^{(j)}+i\omega_n^{(j)}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO E SMORZATO



$$\omega_j = \omega_s^{(j)} + i\omega_n^{(j)}$$

Soluzione del tipo:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(J)} \\ X_2^{(j)} \end{Bmatrix} e^{-\omega_n^{(j)}t} e^{i\omega_s^{(j)}t}$$

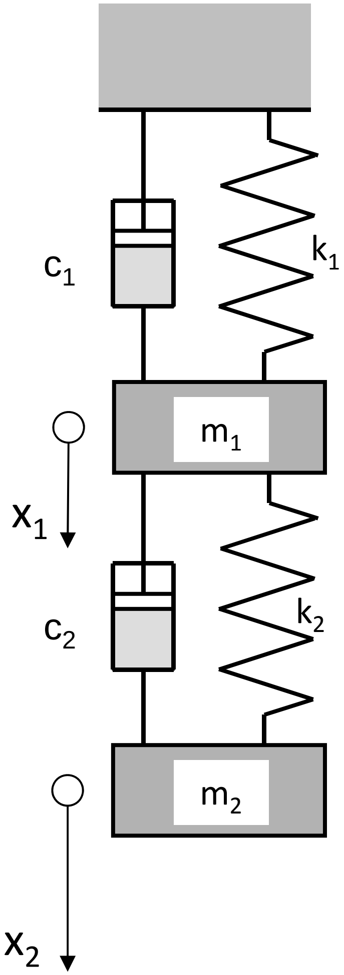
Andamento armonico smorzato

Forme modali

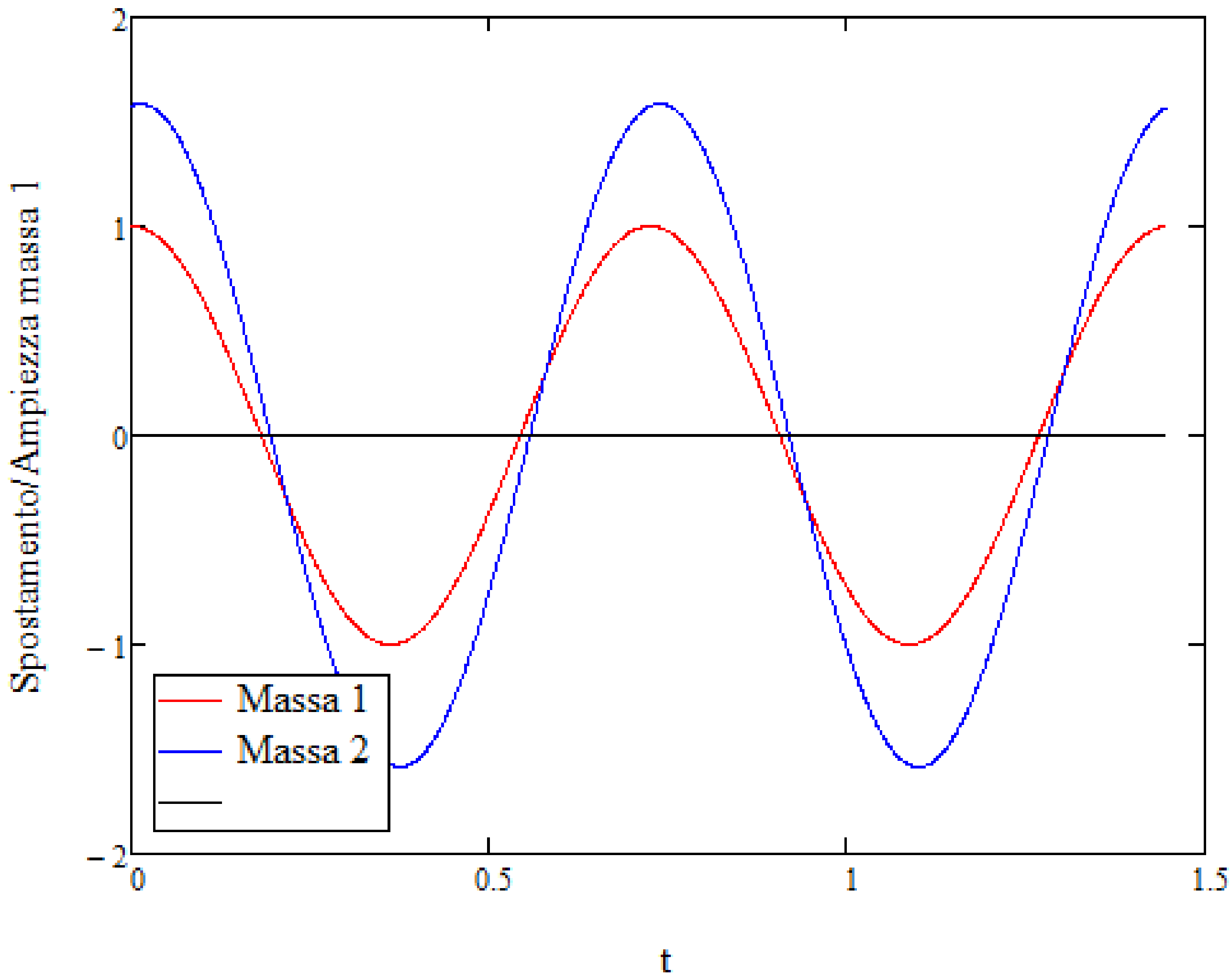
$$r_j = \frac{X_2^{(j)}}{X_1^{(j)}} = \frac{k_1 + k_2 + i\omega_j(c_1 + c_2) - \omega^2 m_1}{k_2 + i\omega_j c_2}$$

Rapporto con ampiezza e fase

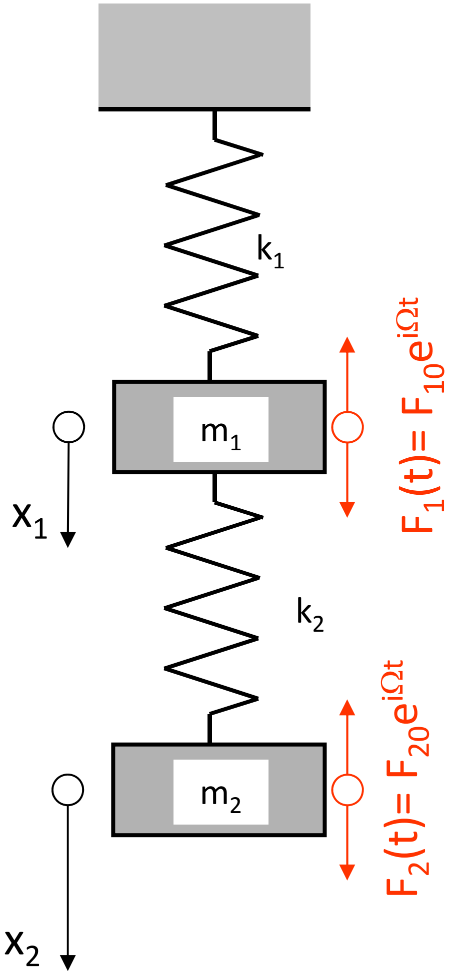
SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO E SMORZATO



Esempio di oscillazione libera secondo uno dei modi propri



SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



Equazioni di equilibrio

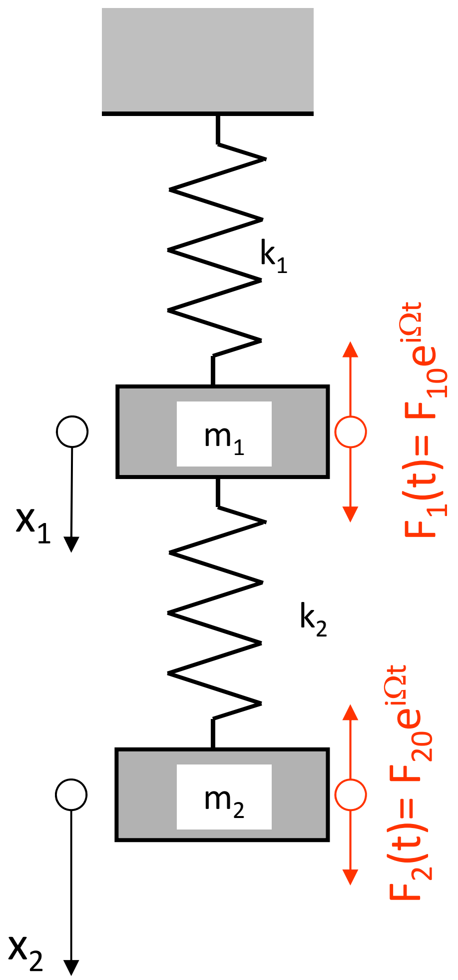
$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = F_{10}e^{1\Omega t}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2\left(x_2 - x_1\right) = F_{20}e^{1\Omega t}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}e^{i\Omega t}$$

$$\left[M\right]\left\{\ddot{x}\right\} + \left[K\right]\left\{x\right\} = \left\{F\right\}e^{i\Omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}e^{i\Omega t}$$

Soluzione “a regime”, dopo esaurimento del transitorio iniziale

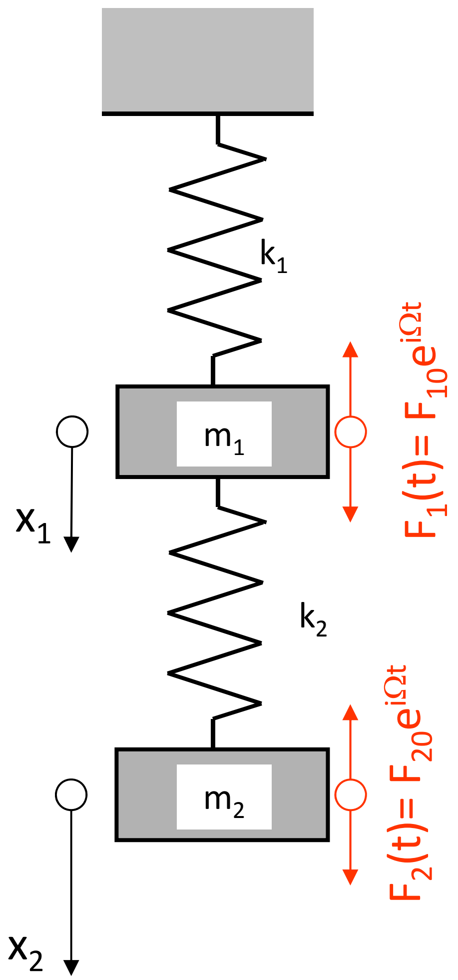
Soluzione = Integrale particolare sistema non omogeneo

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\Omega t} \\ X_2 e^{i\Omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = \{X\} e^{i\Omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = i\Omega \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = i\Omega \{X\} e^{i\Omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\Omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \{X\} e^{i\Omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



Sostituendo

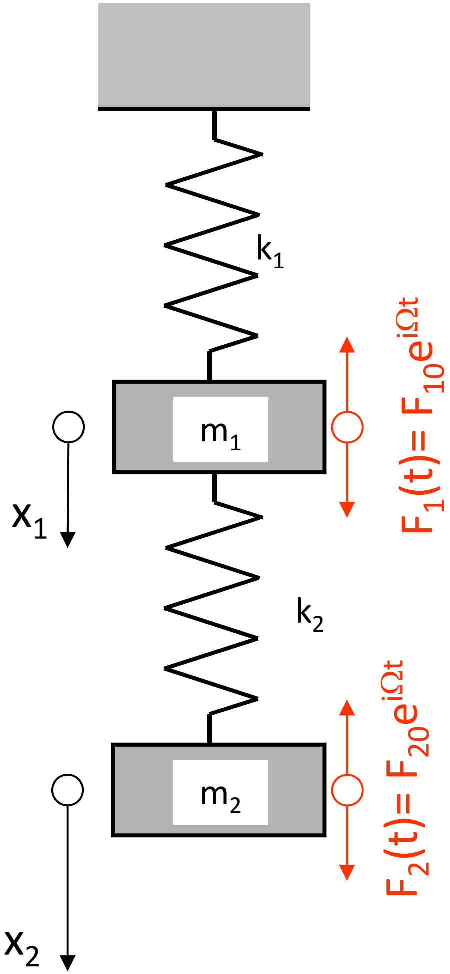
$$-\Omega^2[M]\{X\}e^{i\Omega t}+[K]\{X\}e^{i\Omega t}=\{F\}e^{i\Omega t}$$

da cui

$$\left([K]-\Omega^2[M]\right)\{X\}=\{F\}$$

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-\Omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\Omega^2 m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \Omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \Omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

posto

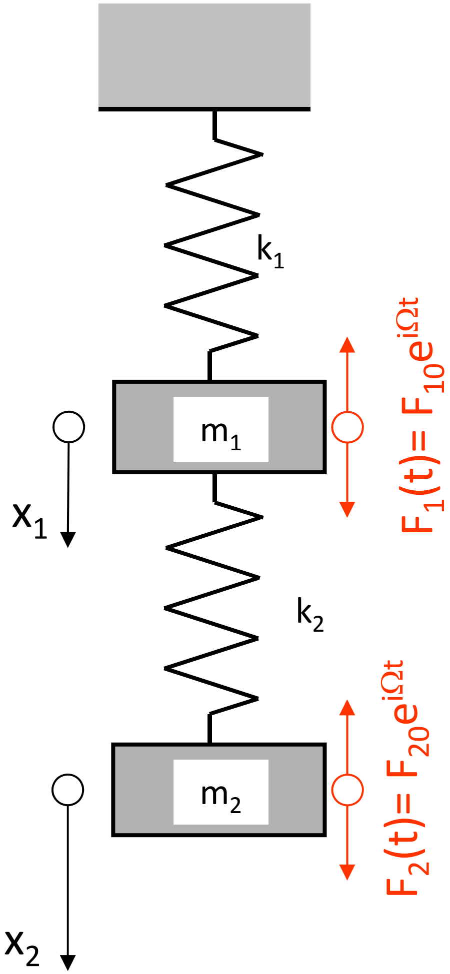
$$\Delta = \left(k_1 + k_2 - \Omega^2 m_1\right)\left(k_2 - \Omega^2 m_2\right) - \left(k_2\right)^2$$

si ottiene:

$$X_1(\Omega_0) := \frac{\left(k_2 - \Omega_0{}^2 \cdot m_2\right) \cdot F_{10} + k_2 \cdot F_{20}}{\left(k_1 + k_2 - \Omega_0{}^2 \cdot m_1\right) \cdot \left(k_2 - \Omega_0{}^2 \cdot m_2\right) - k_2{}^2}$$

$$X_2(\Omega_0) := \frac{k_2 \cdot F_{10} + \left(k_1 + k_2 - \Omega_0{}^2 \cdot m_1\right) \cdot F_{20}}{\left(k_1 + k_2 - \Omega_0{}^2 \cdot m_1\right) \cdot \left(k_2 - \Omega_0{}^2 \cdot m_2\right) - k_2{}^2}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



definendo:

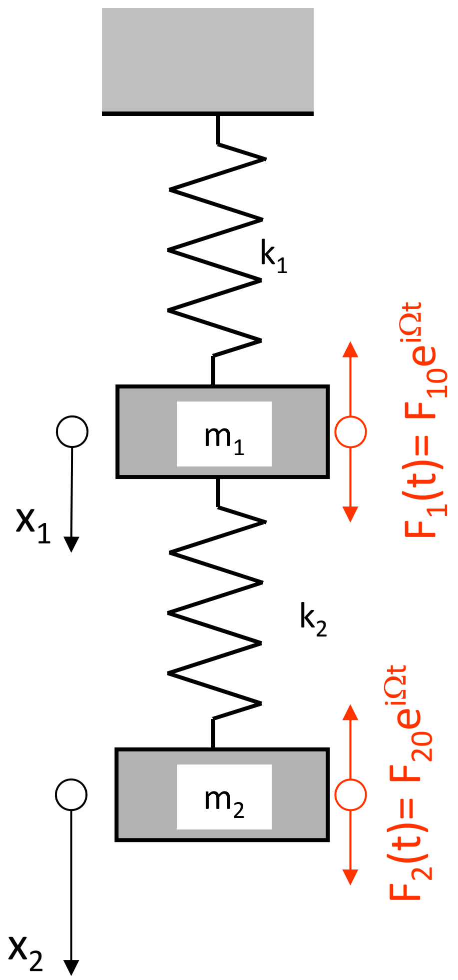
$$\omega_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad \omega_2 := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

si possono porre nella forma:

$$X_1(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_2^{\,2}}\right)\cdot\frac{F_{10}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_1^{\,2}}\right)\cdot\left(1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_2^{\,2}}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

$$X_2(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10}}{k_1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_1^{\,2}}\right)\cdot\frac{F_{20}}{k_2}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_1^{\,2}}\right)\cdot\left(1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_2^{\,2}}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



L'andamento può essere studiato per un caso particolare, quale: $m_1=m_2= m$; $k_1=k_2= k$; $F_{10}=F_{20}= F_0$, ponendo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

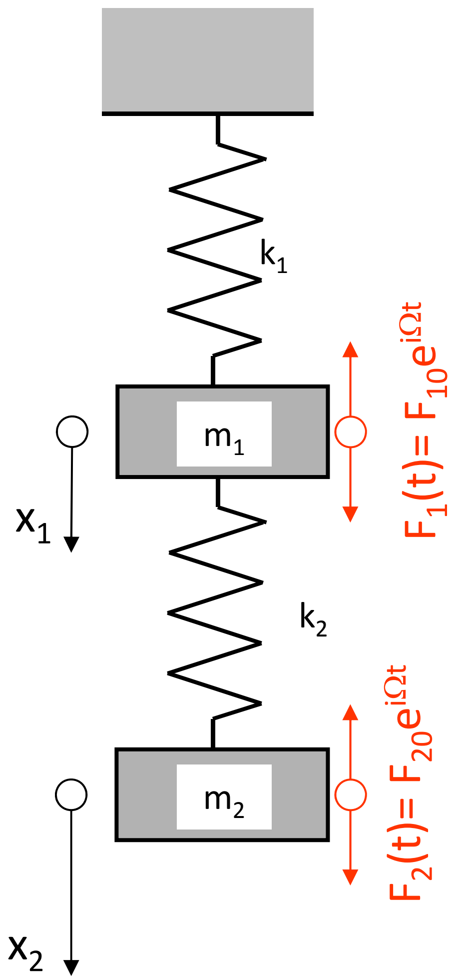
$$r_f = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

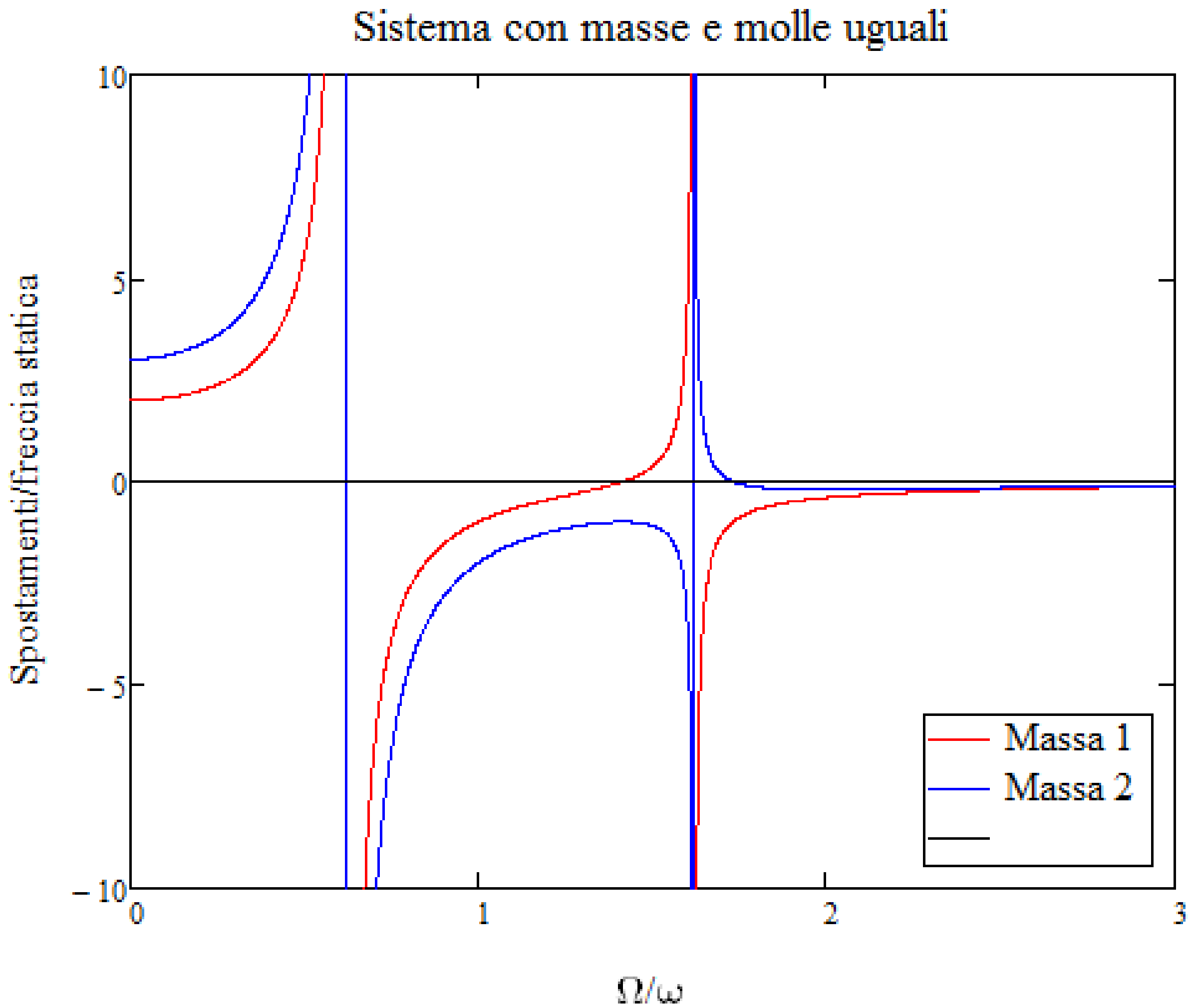
E normalizzando gli spostamenti rispetto alla freccia statica:

$$\frac{X_1}{F_0/k} = \frac{\left(1-r_f^2\right)+1}{\left[\left(2-r_f^2\right)\left(1-r_f^2\right)-1\right]}$$

$$\frac{X_2}{F_0/k} = \frac{\left(2-r_f^2\right)+1}{\left[\left(2-r_f^2\right)\left(1-r_f^2\right)-1\right]}$$

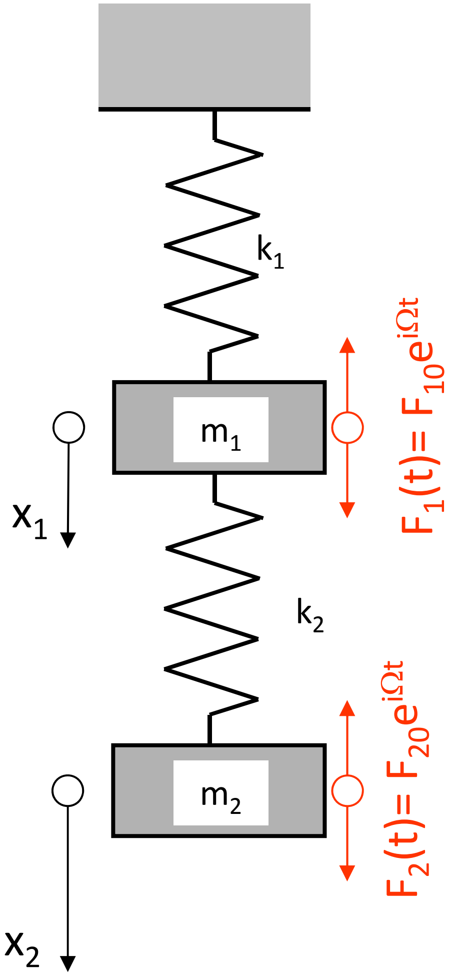
SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA

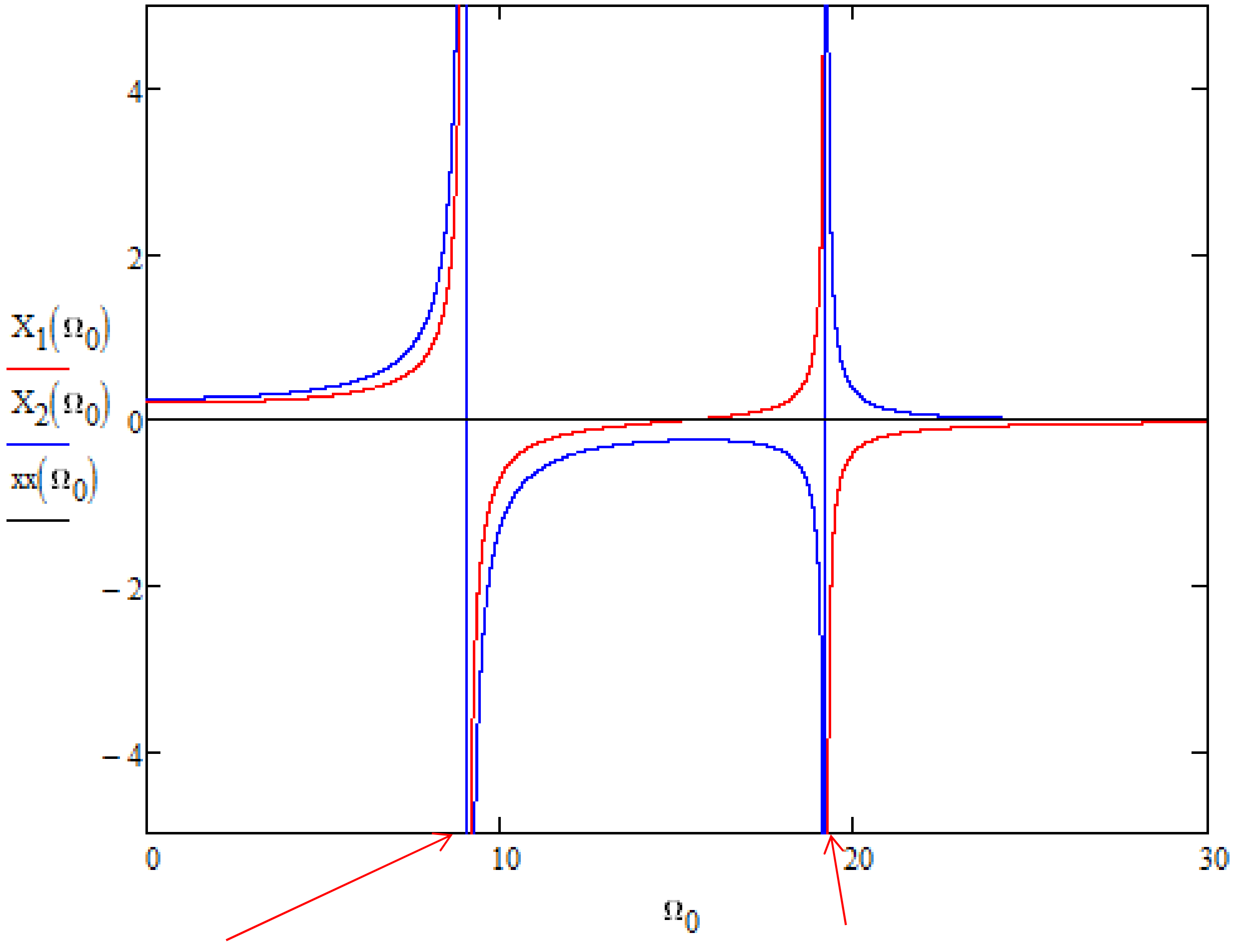




SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA

Andamenti simili si ottengono in un caso generale, quale:
m_1=10 kg, m_2= 5 kg, k_1=1500 N/m, k_2= 1000 N/m
F_{10}=250 N, F_{20}=50 N

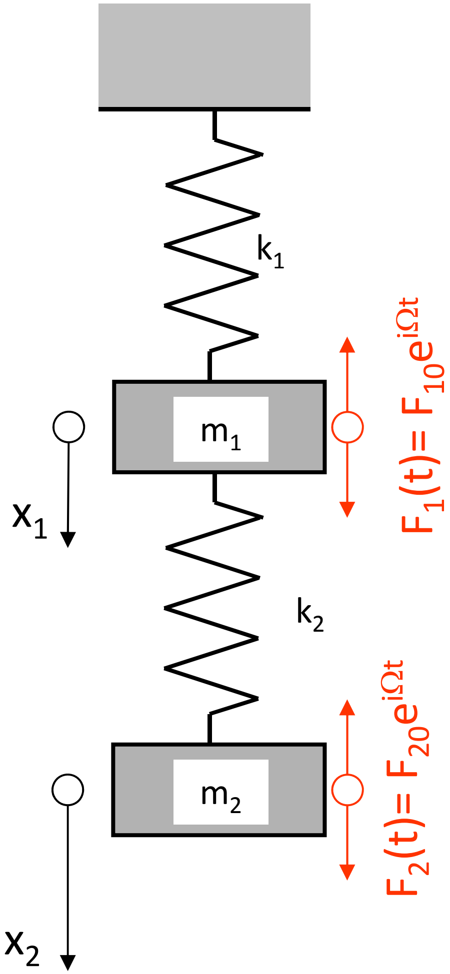




$$\omega_{1n} = 9.021\ rad/s \qquad \omega_{2n} = 19.199\ rad/s$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA

Freccia statica prodotta dalle forze

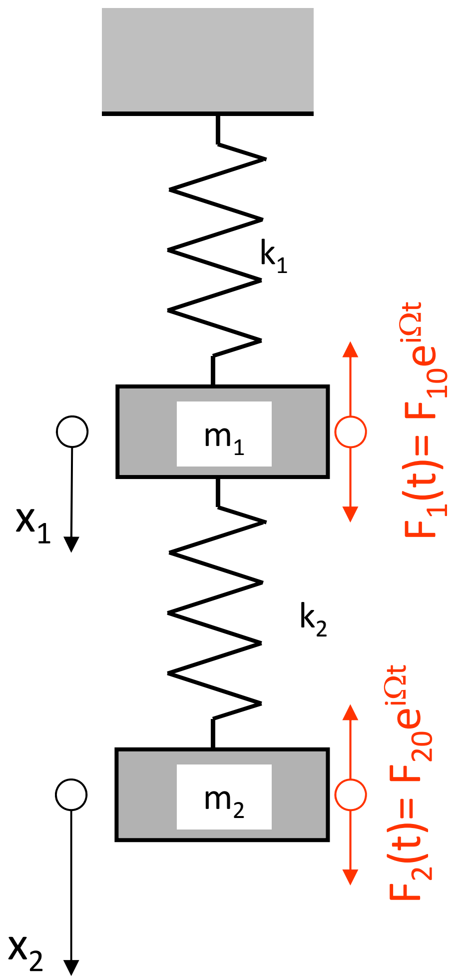


$$\delta_1 := \frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} \qquad \delta_2 := \frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_2}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} := \frac{\dfrac{F_{10} + F_{20}}{k_1} + \dfrac{F_{20}}{k_2}}{\dfrac{F_{10}+F_{20}}{k_1}} = 1 + \frac{\dfrac{F_{20}}{k_2}}{\dfrac{F_{10}+F_{20}}{k_1}} =$$

$$1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{F_{20}}{F_{10} + F_{20}} = 1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{\dfrac{F_{10}}{F_{20}} + 1}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



Uguagliando al rapporto tra gli spostamenti nelle forme modali:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} := r_j$$

si ottiene:

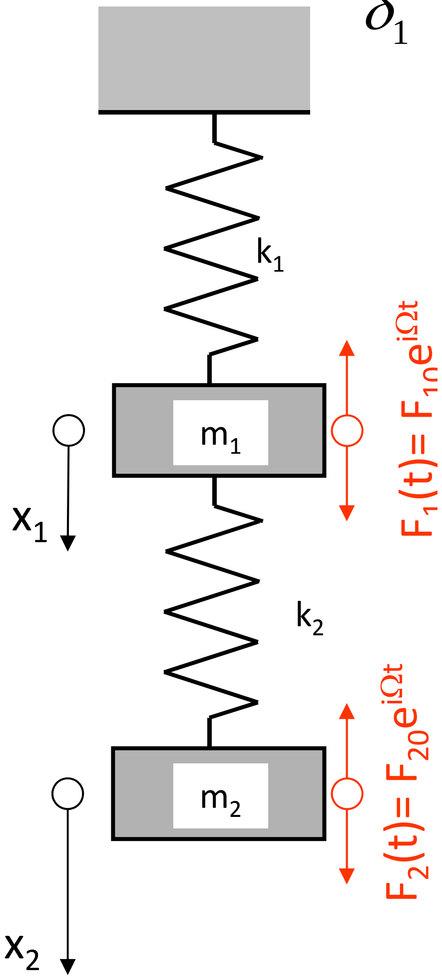
$$r_j - 1 := \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{\frac{F_{10}}{F_{20}} + 1}$$

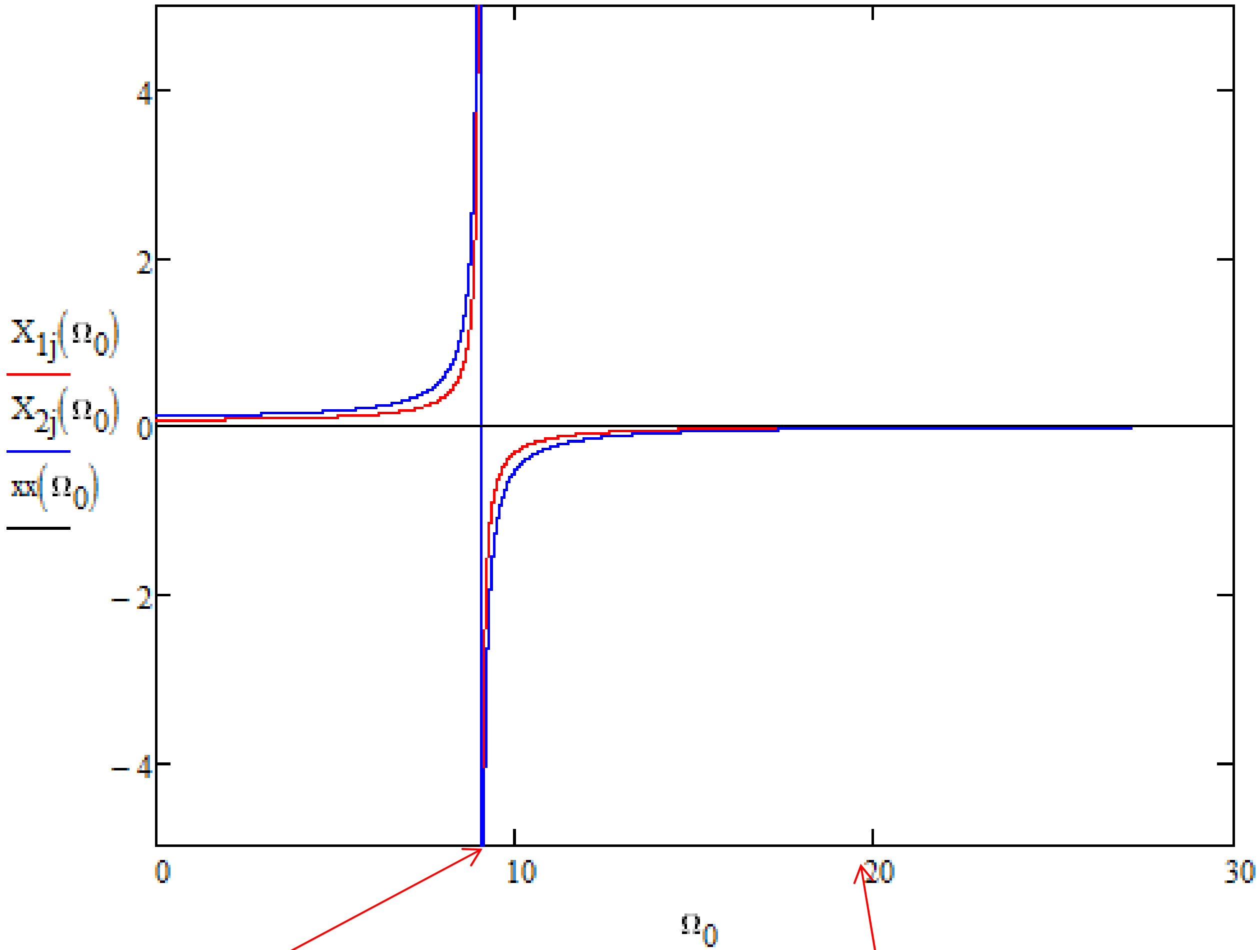
da cui:

$$\left(\frac{F_{10}}{F_{20}}\right)^{(j)} := \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_j - 1} - 1$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = r_1 \qquad \{1 \quad r_1\}\begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \neq 0 \qquad \{1 \quad r_2\}\begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} = 0$$

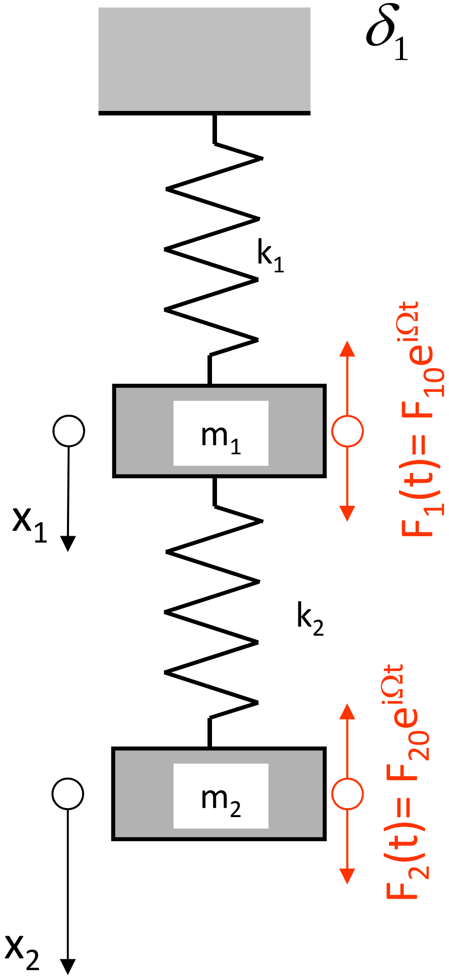


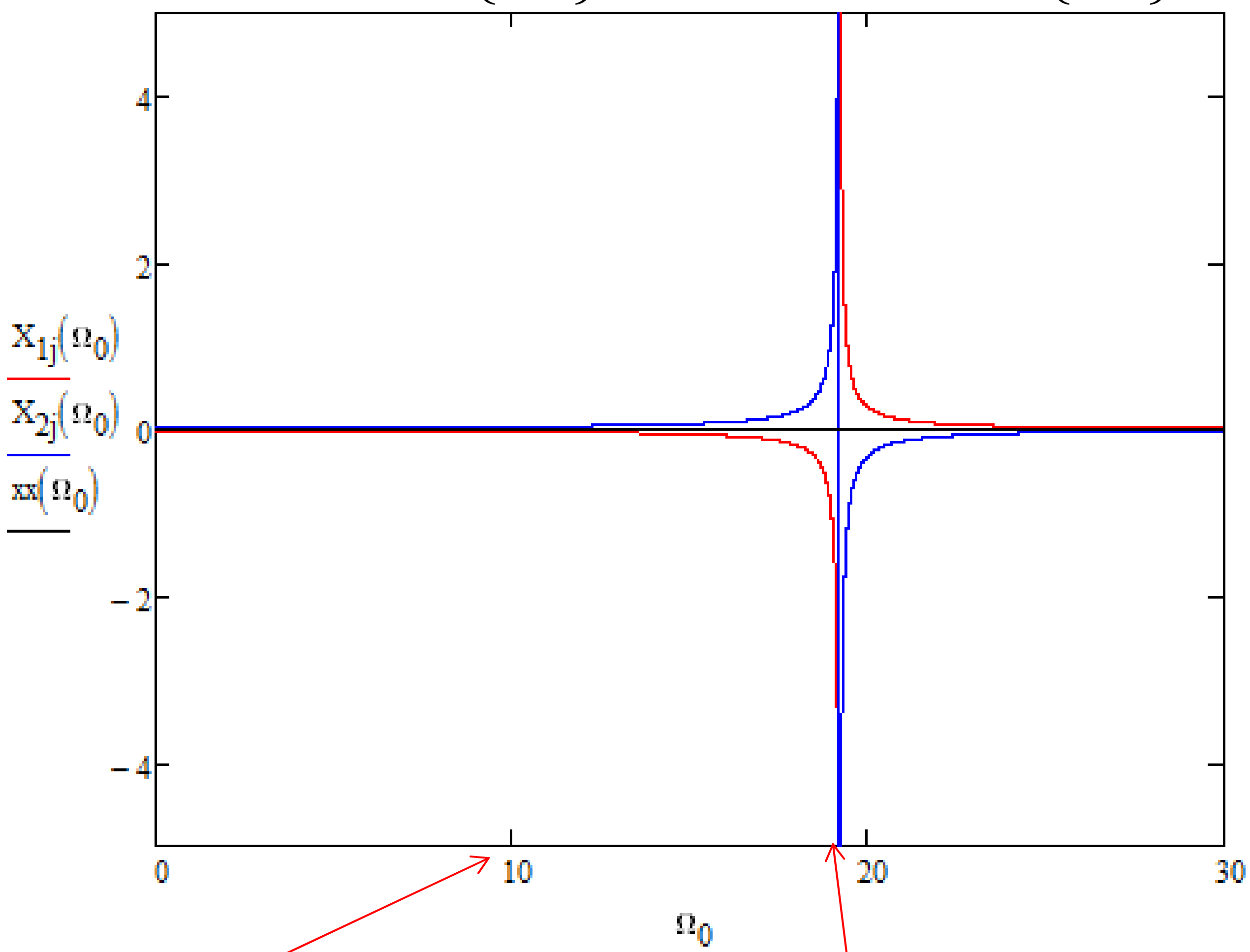


$$\omega_{1n} = 9.021\ rad/s \qquad \omega_{2n} = 19.199\ rad/s$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA

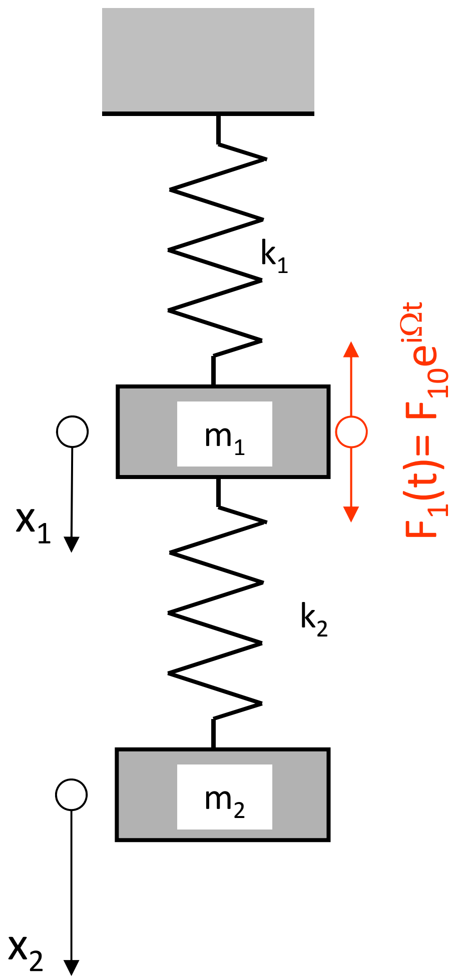
$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = r_2 \qquad \{1 \quad r_1\}\begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} = 0 \qquad \{1 \quad r_2\}\begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \neq 0$$





$$\omega_{1n} = 9.021\ rad/s \qquad \omega_{2n} = 19.199\ rad/s$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SM.CON FORZANTE - SMORZATORE DINAMICO



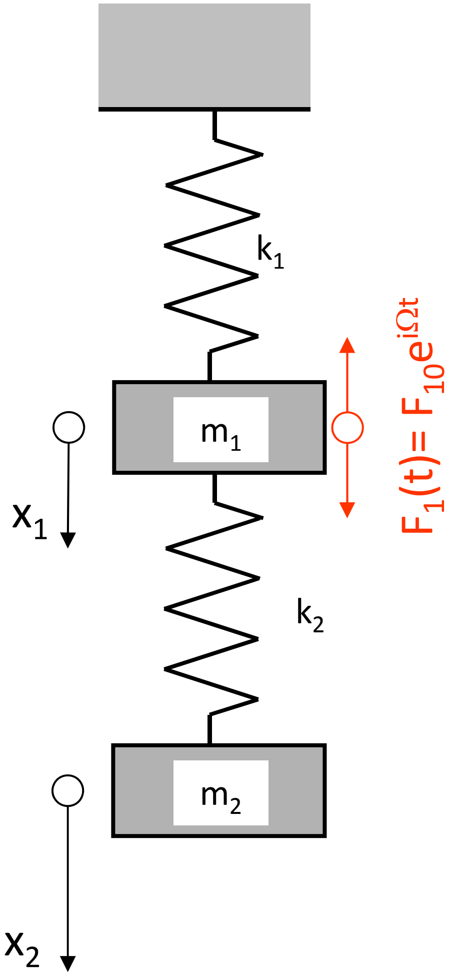
Si vuole studiare il caso:

$$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_0 \qquad F_{20} := 0$$

$$X_{1sd}(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right)\cdot\frac{F_{10}}{k_1}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right)\cdot\left(1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

$$X_{2sd}(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10}}{k_1}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right)\cdot\left(1 - \frac{\Omega_0^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. NON SM.CON FORZANTE - SMORZATORE DINAMICO



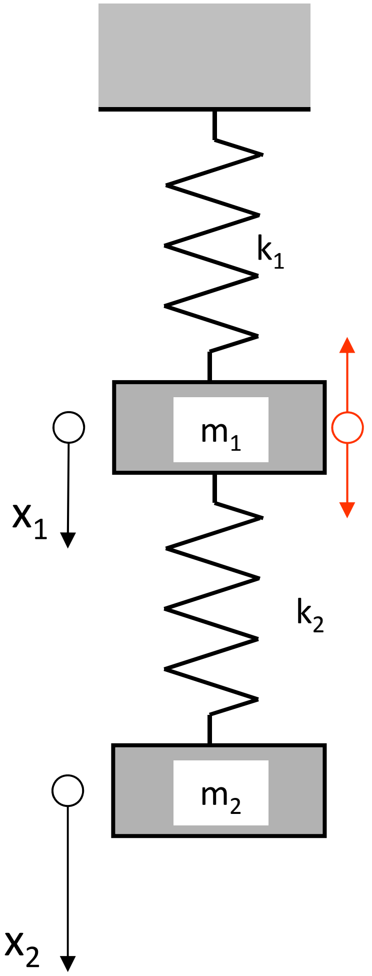
Ponendo: $r_f = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$

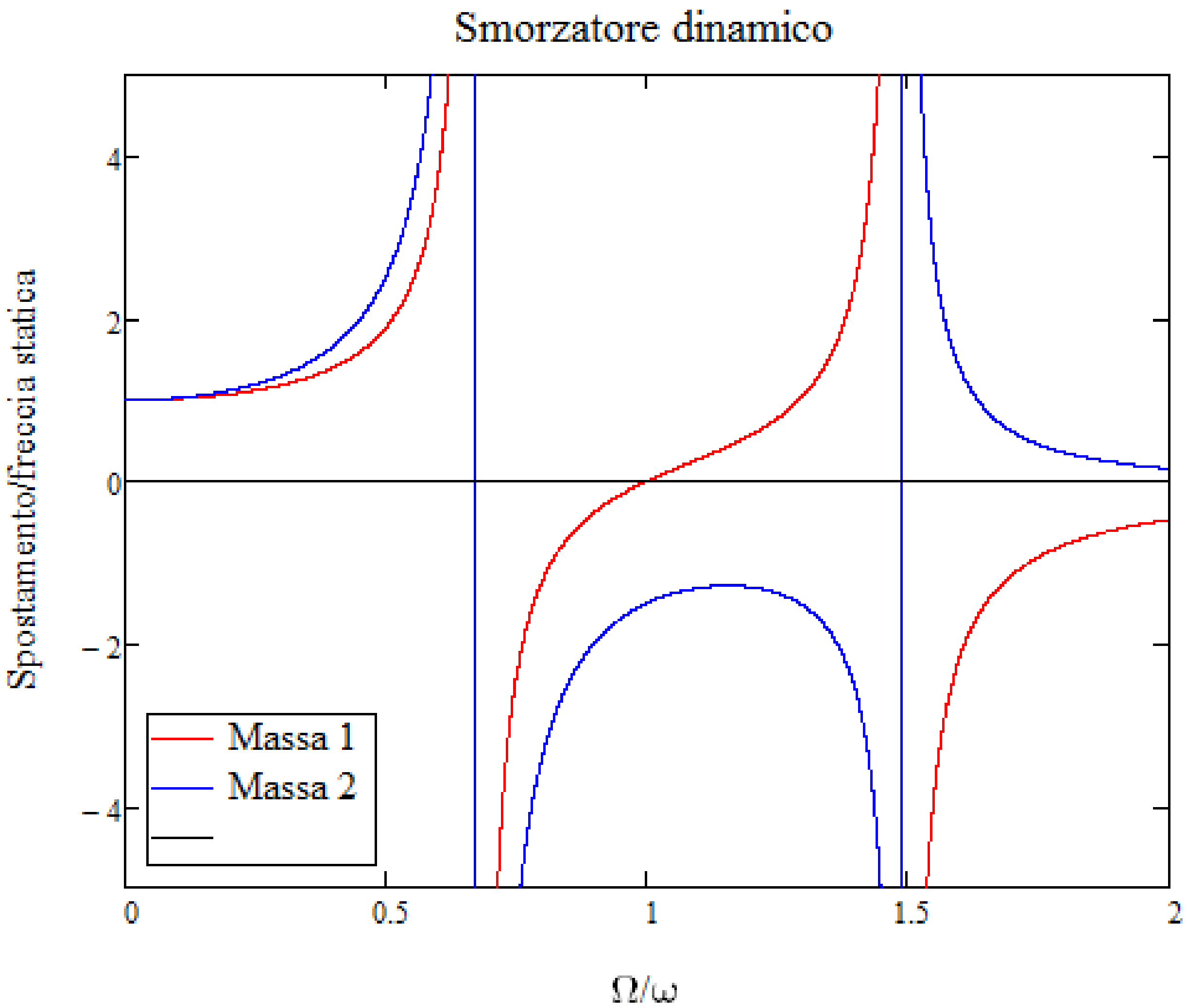
e normalizzando rispetto alla freccia statica: $\dfrac{F_{10}}{k_1}$

$$\frac{X_1}{F_{10}/k_1} = \frac{\left(1-r_f^2\right)}{\left(\dfrac{k_2}{k_1}+1-r_f^2\right)\left(1-r_f^2\right)-\dfrac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{F_{10}/k_1} = \frac{1}{\left(\dfrac{k_2}{k_1}+1-r_f^2\right)\left(1-r_f^2\right)-\dfrac{k_2}{k_1}}$$

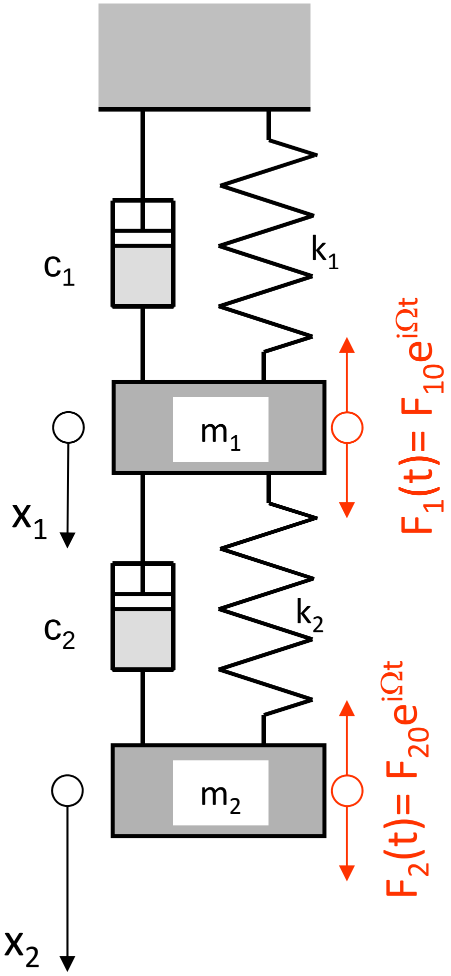
SISTEMA A 2 G.D.L. NON SM.CON FORZANTE - SMORZATORE DINAMICO





In risonanza lo spostamento della massa 1 è nullo.

SISTEMA A 2 G.D.L. SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



Forzanti aventi identica pulsazione, con possibile differenza tra loro di ampiezza e fase

Equazioni di equilibrio

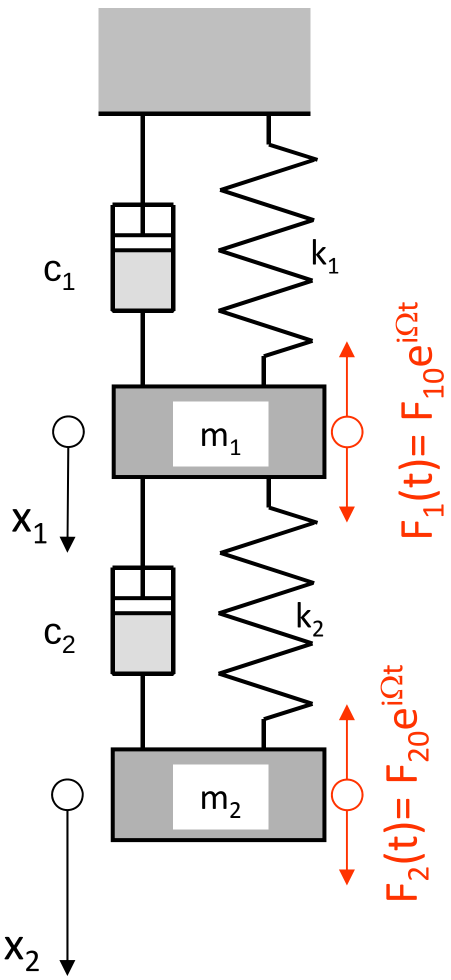
$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = F_{10}e^{1\Omega t}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + k_2\left(x_2 - x_1\right) = F_{20}e^{1\Omega t}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}e^{i\Omega t}$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F\}e^{i\Omega t}$$

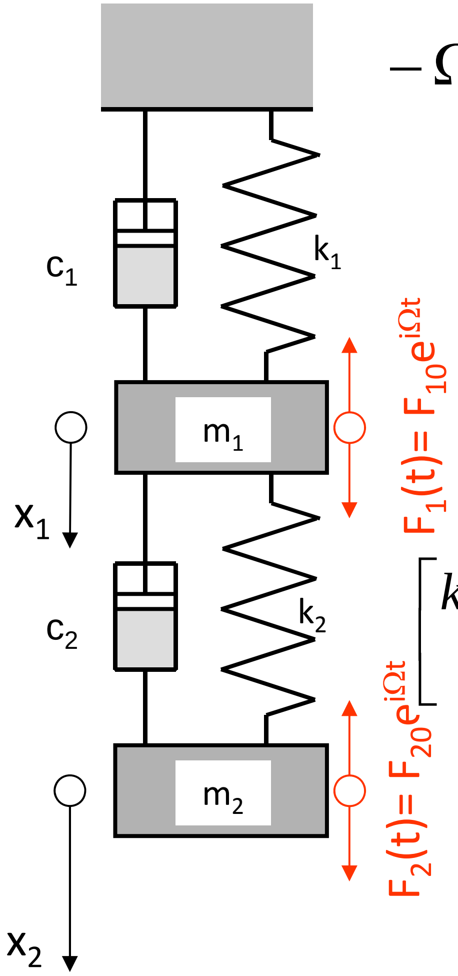
Soluzione a regime = integrale particolare sistema non omogeneo.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\Omega t} \\ X_2 e^{i\Omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = \{X\}e^{i\Omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = i\Omega \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = i\Omega\{X\}e^{i\Omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\Omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} = -\Omega^2\{X\}e^{i\Omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



Sostituendo:

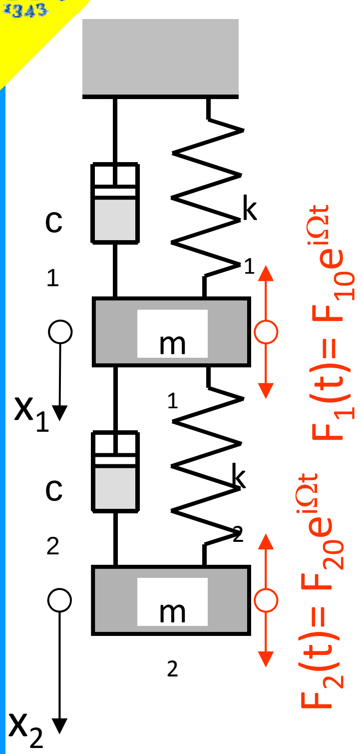
$$-\Omega^2[M]\{X\}e^{i\Omega t} + i\Omega[C]\{X\}e^{i\Omega t} + [K]\{X\}e^{i\Omega t} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

$$\left([K]-\Omega^2[M]+i\Omega[C]\right)\{X\}=\{F\}$$

Sistema lineare non omogeneo

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2+i\Omega(c_1+c_2)-\Omega^2 m_1 & -k_2-i\Omega c_2 \\ -k_2-i\Omega c_2 & k_2+i\Omega c_2-\Omega^2 m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + i\Omega(c_1 + c_2) - \Omega^2 m_1 & -k_2 - i\Omega c_2 \\ -k_2 - i\Omega c_2 & k_2 + i\Omega c_2 - \Omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

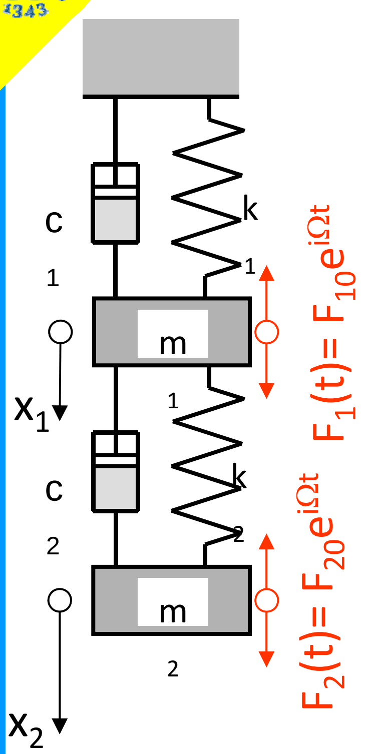
Posto:

$$\Delta = \left(k_1 + k_2 + i\Omega(c_1 + c_2) - \Omega^2 m_1\right)\left(k_2 + i\Omega c_2 - \Omega^2 m_2\right) - \left(k_2 + i\Omega c_2\right)^2$$

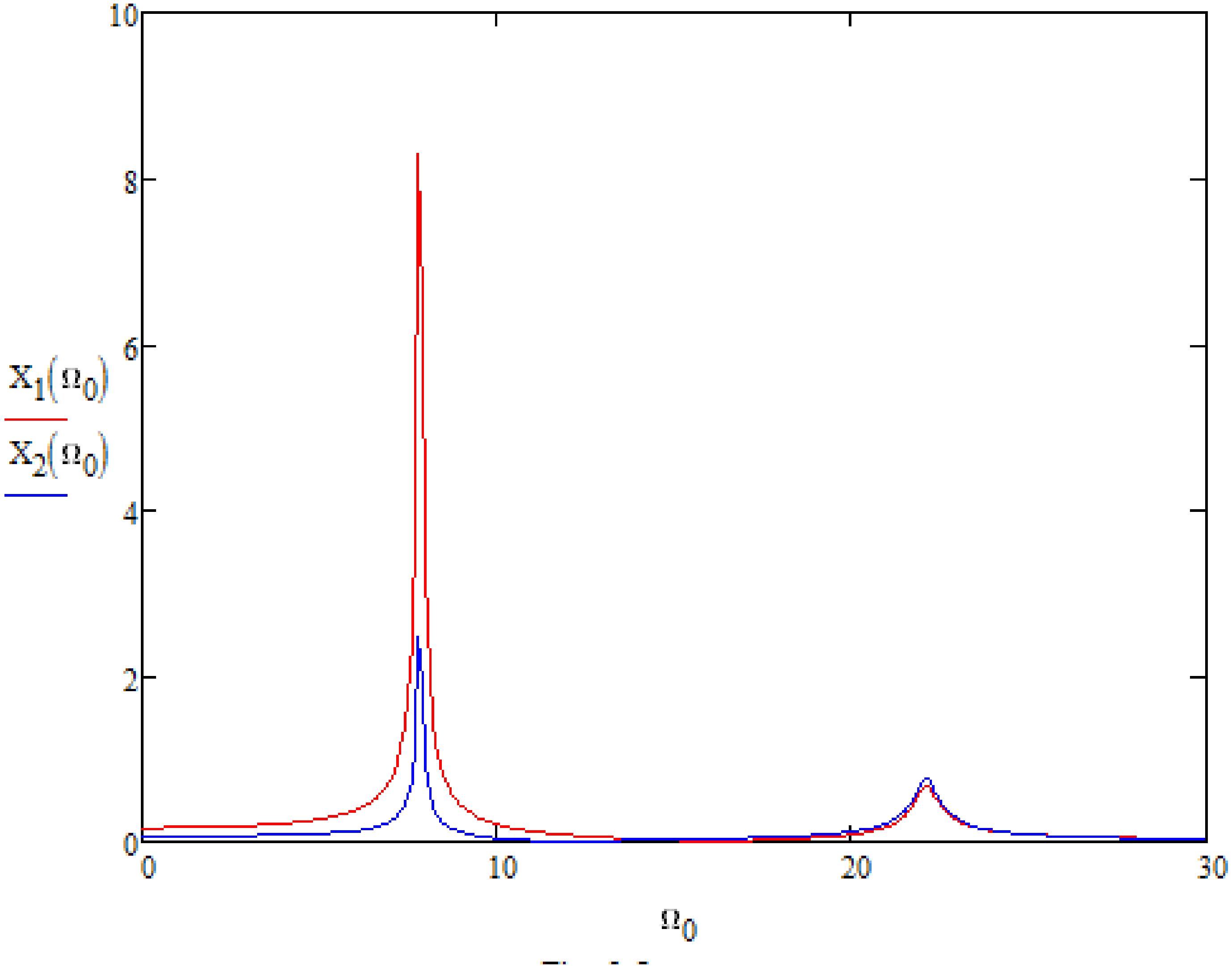
si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_2 + i\Omega c_2 - \Omega^2 m_2 & k_2 + i\Omega c_2 \\ k_2 + i\Omega c_2 & k_1 + k_2 + i\Omega(c_1 + c_2) - \Omega^2 m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

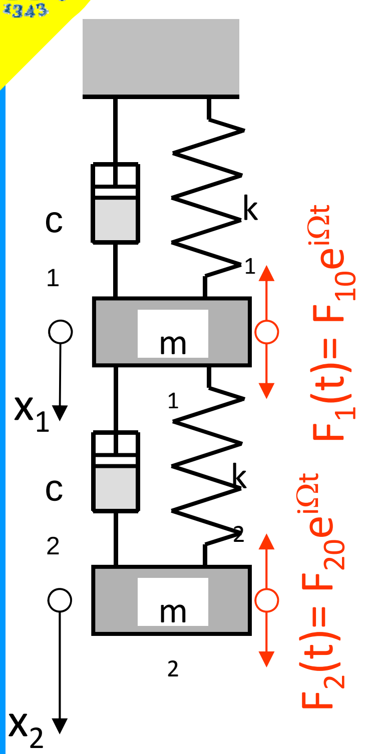
SISTEMA A 2 G.D.L. SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



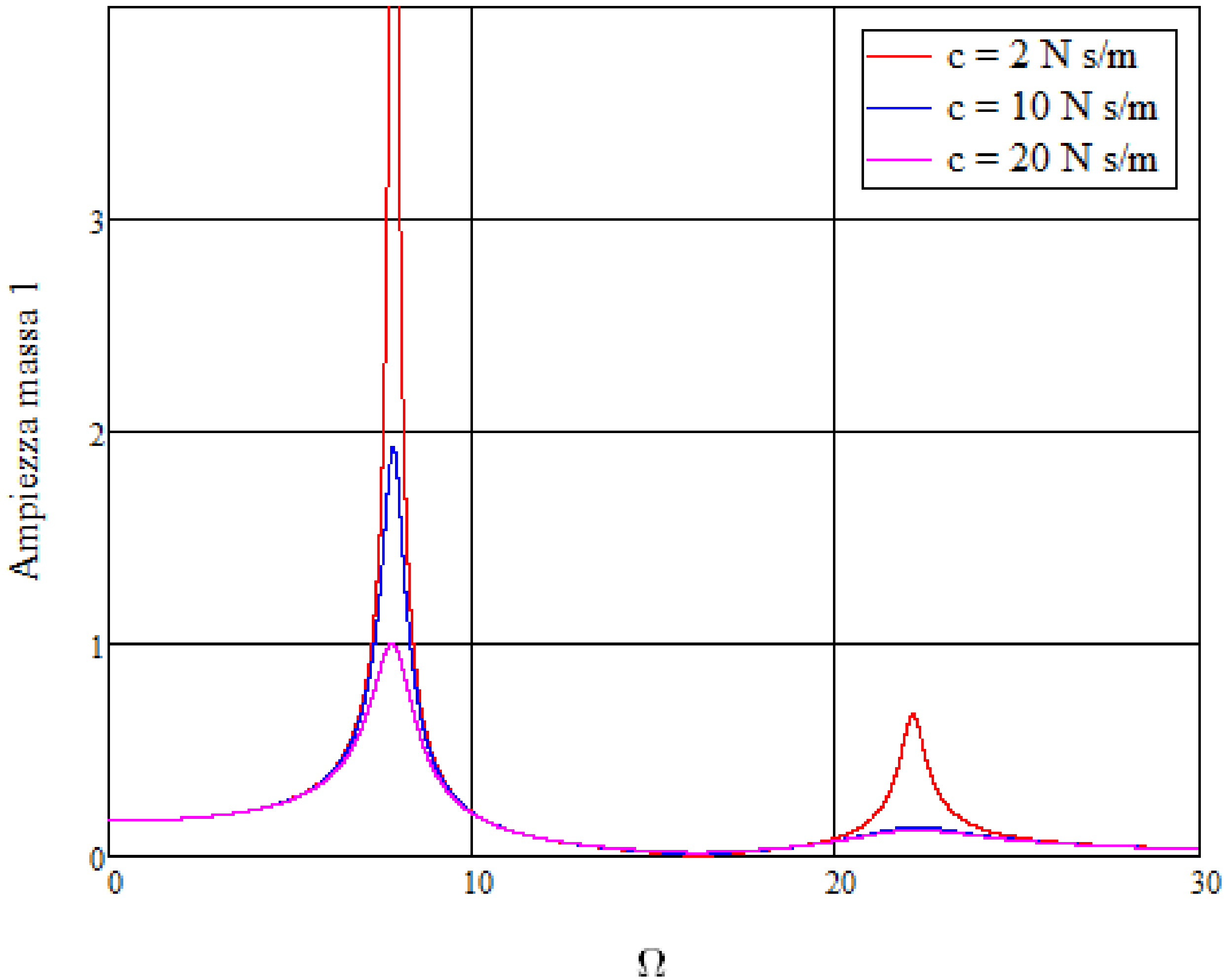
si ottiene:



SISTEMA A 2 G.D.L. SMORZATO CON FORZANTE ESTERNA



Al variare dello smorzamento:



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{X\}e^{i\omega t}$$

$$\{\ddot{x}\}=-\omega^2\{X\}e^{i\omega t}$$

Sostituendo

$$-\omega^2[M]\{X\}e^{i\omega t}+[K]\{X\}e^{i\omega t}=0$$

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Condizione per avere una soluzione non banale

$$\det\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)=0$$

$$\left(\omega^2\right)^n+a_{n-1}\left(\omega^2\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(\omega^2\right)+a_n=0$$ "Polinomio caratteristico"

$$\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_n$$ n radici (autovalori) tutte reali (K ed M simmetriche)

Sostituendo un autovalore ω_j è possibile determinare il relativo autovettore Y_j (forma modale), soluzione di:

$$\left(\left[K\right]-\omega_j^2\left[M\right]\right)\left\{Y_j\right\}=0$$

Dato che il determinante è uguale a 0, la soluzione è nota a meno di una costante e deve essere normalizzata, ad esempio:

$$\left\{Y_j\right\}^T\left[M\right]\left\{Y_j\right\}=1$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Problema agli autovalori in forma standard:

$$[K]\{Y_j\} = \omega_j^2 [M]\{Y_j\}$$

$$[M]^{-1}[K]\{Y_j\} = \omega_j^2 \{Y_j\}$$

$$[A] = [M]^{-1}[K]$$

$$\lambda_j = \omega_j^2$$

$$[A]\{Y_j\} = \lambda_j \{Y_j\}$$

$$[A]\{Y_j\} = \omega_j^2 \{Y_j\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Gli autovalori ω_j^2 ed i relativi autovettori Y_j sono solitamente organizzati in due matrici n x n

$$\left[\omega_j^2\right]=\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[Y\right]=\left[\{Y_1\} \quad \{Y_2\} \quad - \quad \{Y_n\}\right]$$ “Matrice modale”

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Presi due modi propri qualsiasi:

$$\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

$$\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_s\}=0$$

Premoltiplicando la prima per $\{Y_s\}^T$

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

Trasponendo la seconda e postmoltiplicando per $\{Y_r\}$

$$\{Y_s\}^T\left([K]^T-\omega_s^2[M]^T\right)\{Y_r\}=0$$

Dato che M e K sono simmetriche

$$\{Y_s\}^T\left([K]^T-\omega_s^2[M]^T\right)\{Y_r\}=\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_r\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Si ha:

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

Sottraendo

$$\left(\omega_s^2-\omega_r^2\right)\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}=0 \qquad \begin{cases}\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}=0 & se\ \omega_s\neq\omega_r\\ \{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}\neq 0 & se\ \omega_s=\omega_r\end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}=\omega_r^2\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\} \qquad \begin{cases}\{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}=0 & se\ \omega_s\neq\omega_r\\ \{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}\neq 0 & se\ \omega_s=\omega_r\end{cases}$$

Infine:

$$\omega_r^2=\frac{\{Y_r\}^T[K]\{Y_r\}}{\{Y_r\}^T[M]\{Y_r\}}=\boxed{\frac{k_r}{m_r}}$$

Rapporto di Rayleigh
(k_r, m_r rigidezza e massa "modali" per il modo r)

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa :

$$[Y]^T[M][Y] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

masse modali

Matrice di massa principale

$$[Y]^T[K][Y] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

rigidezze modali

Matrice di rigidezza principale

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Se, in particolare, si normalizzano le forme modali in modo che risulti:

$$\{Y_r\}^T[M]\{Y_r\}=1$$

si ha:

$$\{Y_r\}^T[K]\{Y_r\}=\omega_r^2$$

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa diviene:

$$\{Y\}^T[M]\{Y\}=[I]$$

$$\{Y\}^T[K]\{Y\}=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2\end{bmatrix}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori nulli

Dato che risulta :

$$[Y]^T[K][Y] = [\omega_i^2]$$

si ha:

$$\det\left([Y]^T[K][Y]\right) = \det[Y]^T \det[K]\det[Y] = \det[\omega_i^2] = \prod_i \omega_i^2$$

Se la struttura è labile, si ha:

$$\det[K] = 0$$

il che implica che alcuni degli autovalori siano nulli. Il numero di autovalori nulli è pari al grado di labilità della struttura

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Indipendenza lineare

Un sistema di vettori è linearmente indipendente se la condizione:

$$\sum_i a_i \{Y_i\} = 0$$

implica che tutti gli a_i siano uguali a 0.
Si osserva che la condizione è equivalente al sistema lineare, omogeneo:

$$[Y]\{a_i\} = 0$$

Dato che si ha:

$$[Y]^T [M][Y] = [I]$$

$$\det\left([Y]^T [M][Y]\right) = \det[Y]^T \det[M]\det[Y] = \det[I] = 1$$

Per cui:

$$\det[Y] \neq 0$$

e di conseguenza si ha la sola soluzione banale $\{a_i\} = 0$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Forme modali come base

Date le proprietà di indipendenza ed ortogonalità, le forme modali costituiscono una "base", per cui qualsiasi vettore dello spazio vettoriale può essere espresso come combinazione lineare di essi:

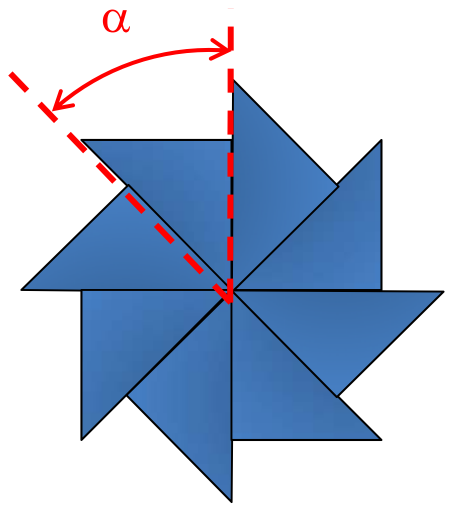
$$V = \sum_i b_i \{Y_i\} = [Y]\{b_i\}$$

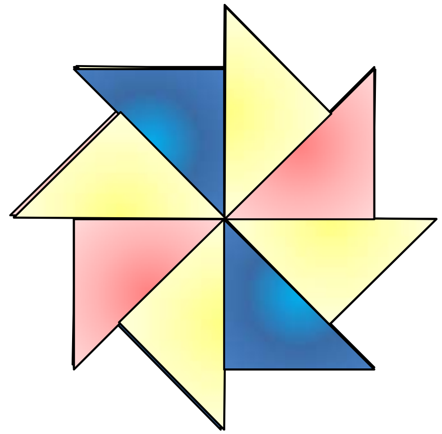
con i coefficienti b, scalari univocamente determinati

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

In alcuni casi è possibile ottenere degli autovalori coincidenti (aventi quindi molteplicità maggiore di 1).
Un primo caso in cui questo può verificarsi, si ha quando la struttura presenta una simmetria di rotazione, con angolo caratteristico < 180°.

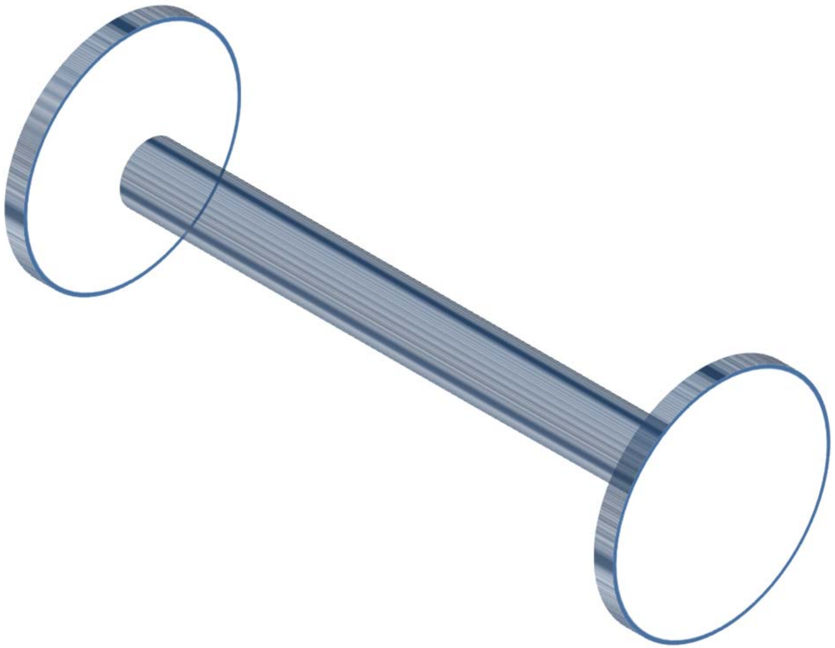




SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA’ DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

La coincidenza degli autovalori può inoltre verificarsi, anche tra modi di vibrare indipendenti.
Ad esempio, è possibile fare in modo che, in un albero con due volani, la prima pulsazione flessionale e la prima torsionale coincidano.



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
DISACCOPPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Le proprietà delle forme modali consentono di esprimere il vettore spostamento come una loro combinazione lineare:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i\} \qquad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}_i\} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [K][Y]\{q_i\} = 0$$

Pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [Y]^T[K][Y]\{q_i\} = [I]\{\ddot{q}_i\} + \mathrm{diag}\left[\omega_i^2\right]\{q_i\} = 0$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si dovrebbero cercare soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{Z\}e^{\lambda t}$$
$$\{\dot{x}\}=\lambda\{Z\}e^{\lambda t}$$
$$\{\ddot{x}\}=\lambda^2\{Z\}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2[M]\{Z\}e^{\lambda t}+\lambda[C]\{Z\}e^{\lambda t}+[K]\{Z\}e^{\lambda t}=0$$

da cui:

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)=0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2N}+a_1\lambda^{2N-1}+\ldots+a_{2N-1}\lambda^1+a_{2N}=0$$

N coppie di radici (autovalori) λ_j complesse coniugate, che sostituite, forniscono N coppie di autovettori complessi $\{Z_j\}$.
Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente per piccoli N, o con metodi numerici per N grandi.

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE (smorzamento "classico")

In generale

$$[Y]^T[C][Y]$$

non è una matrice diagonale, per cui le equazioni del moto non possono essere disaccoppiate.

Se lo smorzamento è molto piccolo, diviene lecito assumere forme diagonalizzabili della matrice di smorzamento. In tal caso si ha **(Smorzamento Classico o "Classical Damping"):**

$$[Y]^T[C][Y] = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix}$$

$$c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE (smorzamento "classico")

Ponendo:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i(t)\} \qquad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}_i\} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [C][Y]\{\dot{q}_i\} + [K][Y]\{q_i\} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [Y]^T[C][Y]\{\dot{q}_i\} + [Y]^T[K][Y]\{q_i\} = 0$$

da cui:

$$[I]\{\ddot{q}_i\} + \mathrm{diag}[2\xi_i\omega_i]\{\dot{q}_i\} + \mathrm{diag}[\omega_i^2]\{q_i\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALIZZABILE (smorzamento "classico")

$$[I]\{\ddot{q}_i\} + \mathrm{diag}[2\xi_i\omega_i]\{\dot{q}_i\} + \mathrm{diag}[\omega_i^2]\{q_i\} = 0$$

Sistema di N equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

cui corrispondono autovalori

$$\lambda_i = -\xi_i\omega_i \pm i\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} = -\xi_i\omega_i \pm i\omega_{si}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO CLASSICO

Si dimostra che la matrice di smorzamento è diagonalizzabile se:

$$[C] = [M]\sum_{l=0}^{m} \alpha_l \left([M]^{-1}[K]\right)^l$$

Se si pone m=1, si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO CLASSICO

Combinando:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

con:

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [M]\{Y_r\} = 0 & per\ "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [M]\{Y_r\} = 1 & per\ "s" = "r" \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [K]\{Y_r\} = 0 & per\ "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [K]\{Y_r\} = \omega_r^2 & per\ "s" = "r" \end{cases}$$

si ottiene:

$$c_{jd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO CLASSICO

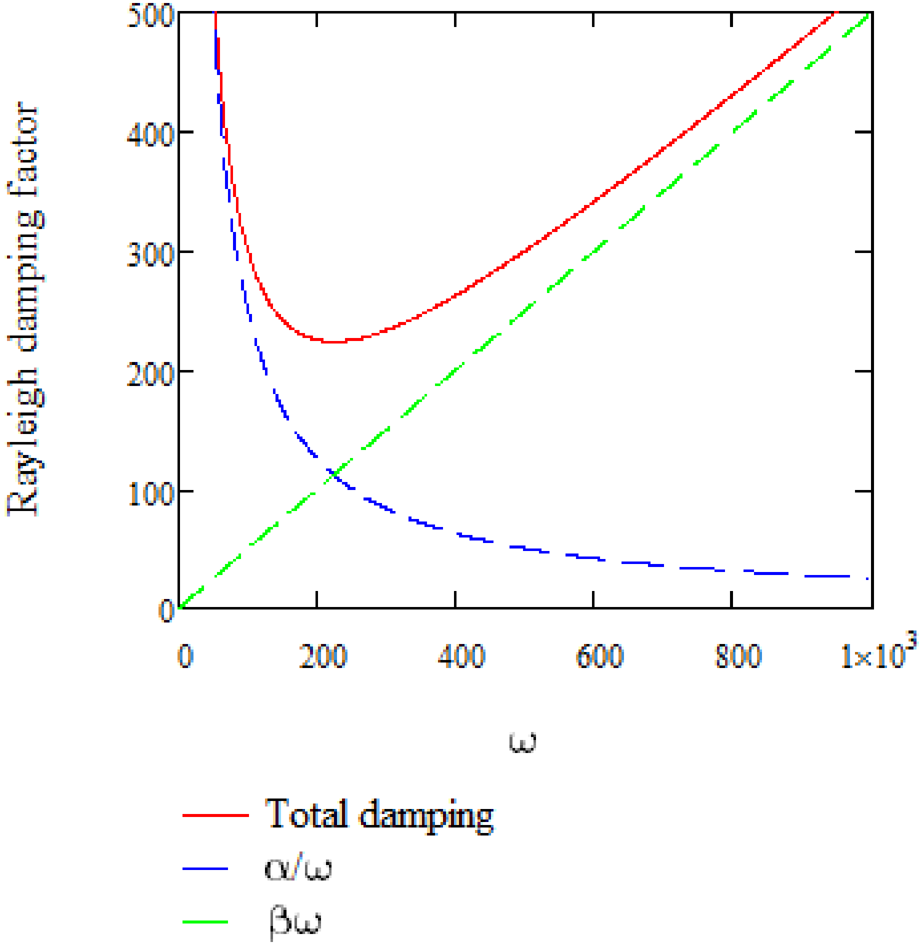
$$c_{jd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

Combinando con : $c_{jd} = 2\xi_j\omega_j$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_r = \alpha + \beta\omega_r^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta\omega_r\right)$$



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO PROPORZIONALE - AUTOVETTORI

Combinando

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0 \qquad [C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda\alpha[M]+\lambda\beta[K]+[K]\right)\{Z\}=0$$

Raccogliendo a fattor comune

$$\left([M]\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)+[K](1+\lambda\beta)\right)\{Z\}=0$$

Moltiplicando per $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1}[K]\{Z\}=-\frac{\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)}{(1+\lambda\beta)}\{Z\}$$

Il problema è identico a quello del sistema non smorzato

$$[M]^{-1}[K]\{Z_j\}=\omega_j^2\{Z_j\}$$

Per cui ha gli stessi autovettori ed autovalori :

$$-\frac{\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)}{(1+\lambda\beta)}=\omega_j^2$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
SMORZAMENTO PROPORZIONALE - AUTOVETTORI

$$-\frac{\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)}{\left(1+\lambda\beta\right)}=\omega_j^2$$

$$-\left(\lambda^2+\lambda\alpha\right)=\omega_j^2\left(1+\lambda\beta\right)$$

$$\lambda^2+\lambda\alpha+\omega_j^2\left(1+\lambda\beta\right)=0$$

$$\lambda^2+\lambda\left(\alpha+\beta\omega_j^2\right)+\omega_j^2=0$$

$$\lambda=\frac{-\left(\alpha+\beta\omega_j^2\right)\pm\sqrt{\left(\alpha+\beta\omega_j^2\right)^2-4\omega_j^2}}{2}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
MATRICE DI SMORZAMENTO DIAGONALE

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$[C_d] = [Y]^T [C][Y]$$

sono trascurabili, si può assumere per essa una forma diagonale, nella quale lo smorzamento di ogni modo viene generalmente ottenuto direttamente per via sperimentale

$$[C_d] \approx \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n \end{bmatrix} \qquad n \leq N$$

Spesso si possono determinare solo i primi n modi

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
REQUISITI SULLO SMORZAMENTO PER DIAGONALIZZAZIONE

Se lo smorzamento è piccolo, si può ritenere che gli autovalori e gli autovettori differiscano poco da quelli del sistema non smorzato:

$$\lambda_i \approx i\omega_i + \Delta\lambda_i$$

$$\{Z_i\} \approx \{Y_i\} + \{\Delta Z_i\}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\left\{\left(-\omega_i^2 + 2i\omega_i\Delta\lambda_i + \Delta\lambda_i^2\right)[M] + \left(i\omega_i + \Delta\lambda_i\right)[C] + [K]\right\}\left(\{Y_i\} + \{\Delta Z_i\}\right) = 0$$

$$\cancel{-\omega_i^2[M]\{Y_i\}} - \omega_i^2[M]\{\Delta Z_i\} + 2i\omega_i\Delta\lambda_i[M]\{Y_i\} + 2i\omega_i\Delta\lambda_i[M]\{\Delta Z_i\} +$$

$$+\cancel{\Delta\lambda_i^2[M]\{Y_i\}} + \cancel{\Delta\lambda_i^2[M]\{\Delta Z_i\}} + i\omega_i[C]\{Y_i\} + \cancel{i\omega_i[C]\{\Delta Z_i\} + \Delta\lambda_i[C]\{Y_i\}} +$$

$$\cancel{+\Delta\lambda_i[C]\{\Delta Z_i\}} + \cancel{[K]\{Y_i\}} + [K]\{\Delta Z_i\} = 0$$

Trascurando i termini di secondo ordine i prodotti $C\Delta\lambda$ e $C\Delta Z$

e tenendo conto che: $$\left([K] - \omega_i^2[M]\right)\{Y_i\} = 0$$

si ottiene:

$$\left([K] - \omega_i^2[M]\right)\{\Delta Z_i\} + i\omega_i\left(2\Delta\lambda_i[M] + [C]\right)\{Y_i\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Pre-moltiplicando per la trasposta della forma modale:

$$\{Y_i\}^T\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{\Delta Z_i\}+i\omega_i\{Y_i\}^T\left(2\Delta\lambda_i[M]+[C]\right)\{Y_i\}=0$$

$$\{Y_i\}^T\left(2\Delta\lambda_i[M]+[C]\right)\{Y_i\}=0$$

Da cui si ottiene:

$$\Delta\lambda_i=-\frac{\{Y_i\}^T[C]\{Y_i\}}{2\{Y_i\}^T[M]\{Y_i\}}=-\frac{d_{ii}}{2}$$

$$\lambda_i=-\frac{d_{ii}}{2}+i\omega_i$$

Termine reale negativo, che produce una riduzione esponenziale nel tempo dell'ampiezza delle oscillazioni

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Espandendo ΔZ in termini delle forme modali del sistema non smorzato:

$$\Delta Z_i = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^{n} \alpha_s \{Y_s\}$$

Sostituendo e pre-moltiplicando per la trasposta della forma modale “j”:

$$\{Y_j\}^T \left([K]-\omega_i^2[M]\right)\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\{Y_s\}+i\omega_i\{Y_j\}^T\left(2\Delta\lambda_i[M]+[C]\right)\{Y_i\}=0$$

Tenendo conto della ortogonalità e del fatto che:

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_i\}=0$$

Si ottiene:

$$\{Y_j\}^T\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_j\}\alpha_j+i\omega_i\{Y_j\}^T[C]\{Y_i\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\{Y_j\}^T\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_j\}\alpha_j + i\omega_i\{Y_j\}^T[C]\{Y_i\}=0$$

Ricordando che::

$$\{Y_r\}^T[K]\{Y_r\}=\omega_r^2$$

$$\{Y_r\}^T[M]\{Y_r\}=1$$

Si ottiene

$$\left(\omega_j^2-\omega_i^2\right)\alpha_j + i\omega_i d_{ji}=0$$

Da cui:

$$\{\Delta Z_i\}\approx\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{i\omega_i c_{ji,d}}{\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)}\{Y_j\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\{\Delta Z_i\} \approx \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{i\omega_i c_{ji,d}}{\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right)}\{Y_j\}$$

Dividendo per il quadrato di ω_i ed osservando che:

$$\{Y_i\}^T [M]\{Y_i\} = m_i = 1$$

$$\{Y_i\}^T [K]\{Y_i\} = k_i = \omega_i^2$$

$$c_{cr,i} = 2\sqrt{k_i m_i} = 2\omega_i$$

Si ricava:

$$\{\Delta Z_i\} \approx \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{i2c_{ji,d}}{c_{cr,i}\left(1-\frac{\omega_j^2}{\omega_i^2}\right)}\{Y_j\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\{\Delta Z_i\} \approx \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{i2c_{ji,d}}{c_{cr,i}\left(1-\frac{\omega_j^2}{\omega_i^2}\right)}\{Y_j\}$$

Ipotizzando:
- errore complessivo di circa il 10% sulla forma modale
- rapporti di frequenza pari a 2, 3, 4, 5…
- valori dei termini di smorzamento fuori diagonale tutti uguali

Si ottiene:

$$0.1 \geq 2\frac{c_{ji,d}}{c_{cr,i}}\left(\frac{1}{(1-2^2)}+\frac{1}{(1-3^2)}+\frac{1}{(1-4^2)}+\ldots\right)$$

Da cui:

$$\frac{c_{ji,d}}{c_{cr,i}} \leq\approx 0.03$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
METODO DELLO SPAZIO DEGLI STATI

Qualora la matrice di smorzamento non sia diagonalizzabile,è necessario procedere alla soluzione diretta del problema agli autovalori in campo complesso. Nel seguito vedremo le principali caratteristiche della tecnica di soluzione detta di **Analisi nello Spazio degli Stati (State Space Analysis”)**

Vettore della variabili di stato (2N componenti):

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}$$

Si aggiungono alle N equazioni di equilibrio, N ulteriori equazioni sempre verificate:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$
$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
METODO DELLO SPAZIO DEGLI STATI

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$
$$[M]\{\dot{x}\}-[M]\{\dot{x}\}=0$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}=0$$

Posto:

$$[A]=\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$[A]\{\dot{u}\}+[B]\{u\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Assumendo una soluzione del tipo:

$$\{x\} = \{X\}e^{st}$$

$$\{\dot{x}\} = s\{X\}e^{st}$$

Si ottiene:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{X\}e^{st} \\ s\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ s\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{U\}e^{st}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{X\}e^{st} \\ s^2\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ s^2\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{U\}e^{st}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Sostituendo:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{X\}e^{st} \\ s\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{X\} \\ s\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{U\}e^{st}$$

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} s\{X\}e^{st} \\ s^2\{X\}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\{X\} \\ s^2\{X\} \end{Bmatrix} e^{st} = s\{U\}e^{st}$$

Si ottiene:

$$s[A]\{U\}e^{st} + [\mathrm{B}]\{U\}e^{st} = 0$$

Ovvero:

$$(s[A] + [\mathrm{B}])\{U\} = 0$$

Problema agli autovalori in forma generalizzata

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Problema agli autovalori in forma generalizzata

$$(s[A]+[\mathrm{B}])\{U\}=0$$

N coppie autovalori complessi coniugati + N coppie autovettori complessi coniugati

$$s_i, \quad \{Z_i\} \qquad\qquad \bar{s}_i, \quad \{\bar{Z}_i\}$$

Autovalore + autovettore

Coniugati

Autovettori nello spazio della variabili di stato:

$$\{W_i\}=\begin{Bmatrix} \{Z_i\} \\ s_i\{Z_i\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{W}_i\}=\begin{Bmatrix} \{\bar{Z}_i\} \\ \bar{s}_i\{\bar{Z}_i\} \end{Bmatrix}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Autovettori nello spazio della variabili di stato:

$$\{W_i\} = \begin{Bmatrix} \{Z_i\} \\ s_i\{Z_i\} \end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{W}_i\} = \begin{Bmatrix} \{\overline{Z}_i\} \\ \overline{s}_i\{\overline{Z}_i\} \end{Bmatrix}$$

Matrice modale complessa 2Nx2N

$$[W] = \left[\{W_1\} \quad \{W_2\} \quad - \quad -\right]$$

Vettore variabili di stato come combinazione lineare autovettori complessi

$$\{u(t)\} = [W]\{q(t)\}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = [W]\{\dot{q}(t)\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Sostituendo nel sistema originale:

$$\{u(t)\} = [W]\{q(t)\}$$

$$\{\dot{u}(t)\} = [W]\{\dot{q}(t)\}$$

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$$

Si ottiene:

$$[A][W]\{\dot{q}\} + [\mathrm{B}][W]\{q\} = 0$$

Moltiplicando per la trasposta della matrice modale complessa

$$[W]^T [A][W]\{\dot{q}\} + [W]^T [\mathrm{B}][W]\{q\} = 0$$

Tenendo conto della ortogonalità, che vale anche per queste forme modali:

$$diag[a]\{\dot{q}\} + diag[b]\{q\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

$$diag[a]\{\dot{q}\} + diag[b]\{q\} = 0$$

Sistema di 2N equazioni disaccoppiate del tipo:

$$a_r \dot{q}_r + b_r q = 0$$

Soluzione di ciascuna di esse

$$q_r(t) = Q_r \, e^{s_r t}$$

Soluzione complessiva

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{W_r\} Q_r e^{s_r t}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
EQUAZIONI DISACCOPPIABILI

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\}=[Y]\{q_i\}$$

pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, qualora la matrice C sia diagonalizzabile, si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \xi_1\omega_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \xi_2\omega_2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n\omega_n \end{bmatrix}\{\dot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}\{q_i\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i q_i+\omega_i^2 q_i=\{Y_i\}^T\{F(t)\}=f_i$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE EQUAZIONI DISACCOPPIABILI

Nel caso la forzante esterna abbia andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j q_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

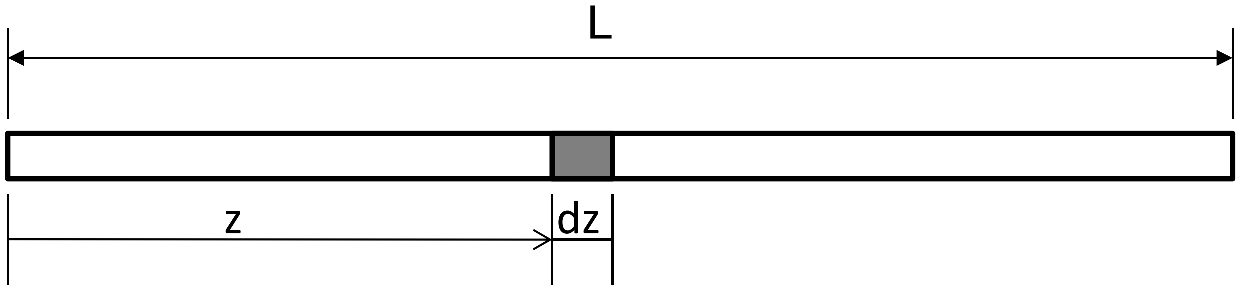
$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

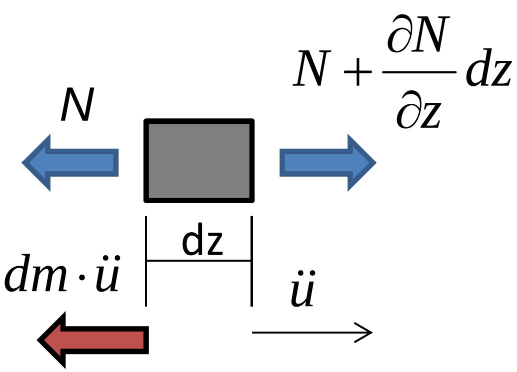
Si ottiene:

$$-\Omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$\boxed{Q_j = \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right) + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j}}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI





Equazione di equilibrio:

$$\rho A dz \cdot \ddot{u} = N + \frac{\partial N}{\partial z} dz - N$$

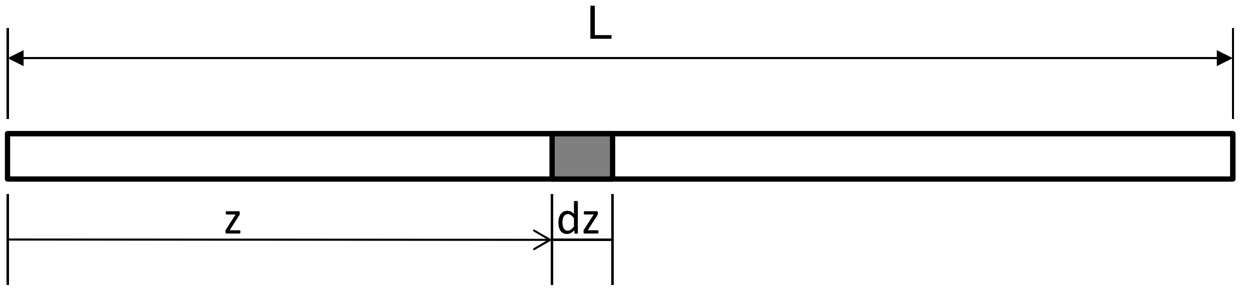
$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

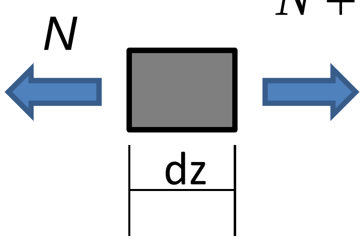
$$N = EA\varepsilon = EA\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho A \ddot{u} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



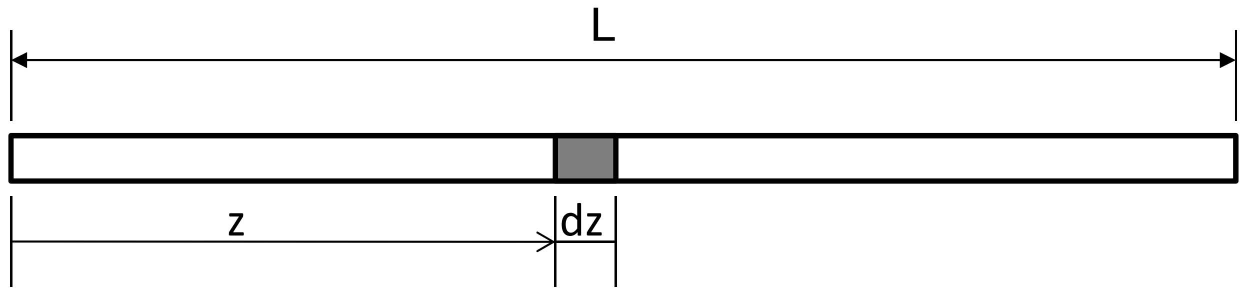


$$N + \frac{\partial N}{\partial z} dz$$

$$\rho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\ddot{u} = \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



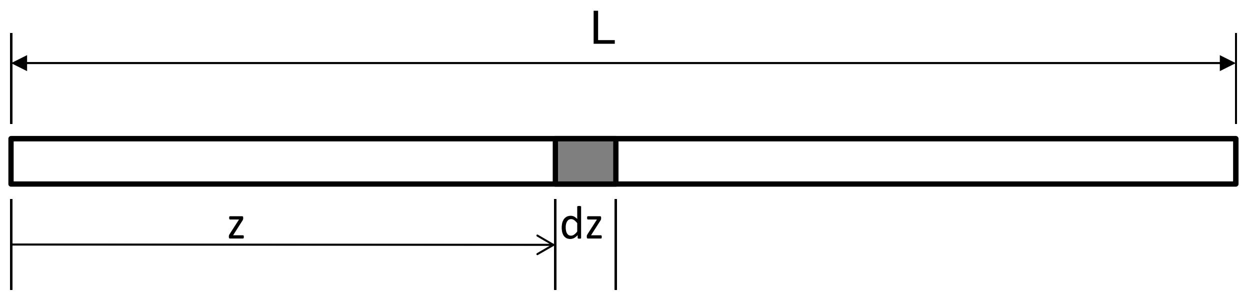
$$\ddot{u} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad u(z,t) = Z(z)T(t) \rightarrow \begin{aligned} \ddot{u}(z,t) &= Z(z)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} &= T(t)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$Z(z)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 T(t)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = v^2 \frac{\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} \longrightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \frac{Z^{II}}{Z}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$\ddot{T} - aT = 0$$

$$\nu^2 Z^{II} - aZ = 0$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

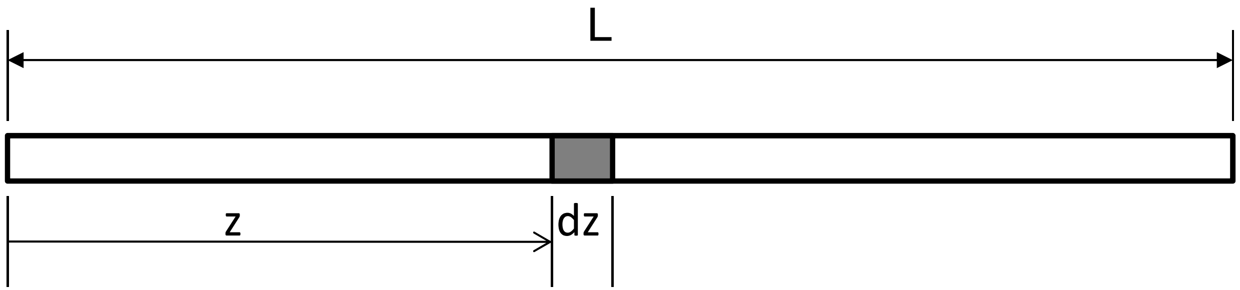
$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$Z^{II} + \frac{\omega^2}{\nu^2} Z = 0$$

$$Z(z) = C \cdot \cos(\chi z) + D \cdot \sin(\chi z)$$

$$\chi = \frac{\omega}{\nu}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



Trave bloccata agli estremi

$$u^I(0,t) = Z^I(0)T(t) = 0 \qquad u^I(L,t) = Z^I(L)T(t) = 0$$

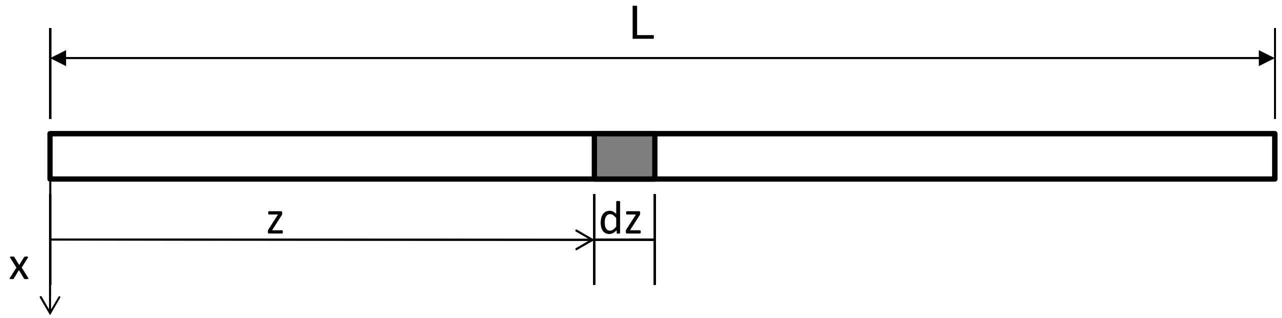
$$Z^I(0) = 0 \qquad C = 0$$

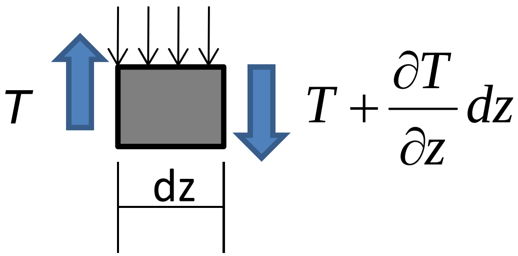
$$Z^I(L) = 0 \qquad D \cdot \sin(\chi L) = 0$$

$$\chi L = k\pi \qquad \frac{\omega}{\nu} L = k\pi$$

$$\omega = \frac{k\pi\nu}{L}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI





Equazione di equilibrio:

$$\rho A dz \cdot \ddot{v} = T + \frac{\partial T}{\partial z} dz - T$$

$$T = -EJv^{III}$$

$$\rho A \ddot{v} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

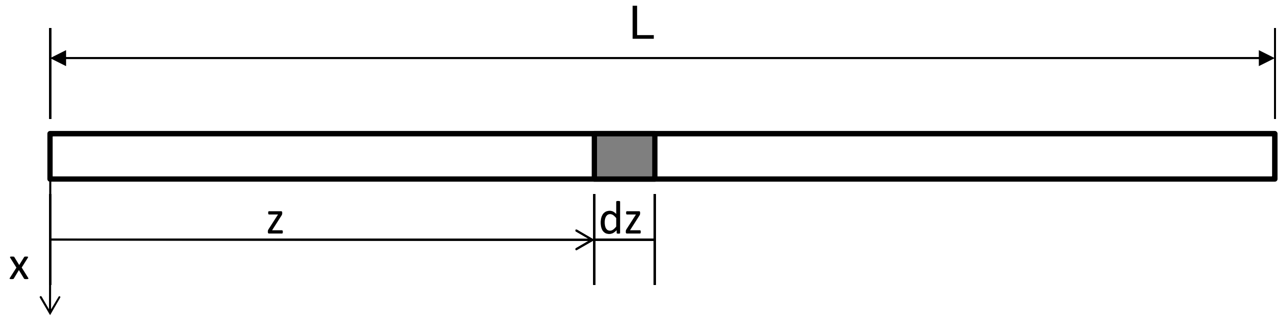
$$\frac{\partial T}{\partial z} = -EJv^{IV}$$

$$\rho A \ddot{v} = -EJv^{IV}$$

$$\ddot{v} = -k^2 v^{IV}$$

$$k = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

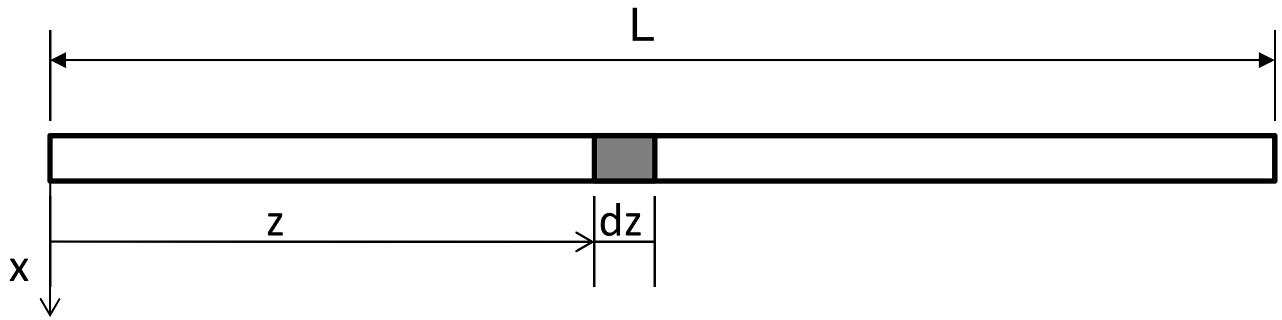
SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$\ddot{v} = k^2 v^{IV} \longrightarrow v(z,t) = Z(z)T(t)$$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \frac{Z^{IV}}{Z}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$k^2 Z^{IV} - \omega^2 Z = 0$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$Z^{IV} - \frac{\omega^2}{\nu^2} Z = Z^{IV} - \chi^4 Z = 0 \qquad dove\ \chi = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

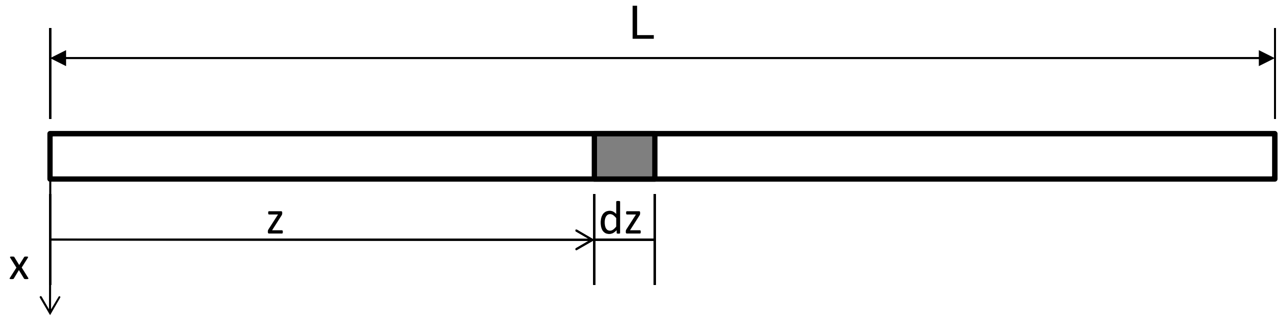
$$s^4 - \chi^4 = 0$$

$$s = \pm\chi; \pm i\chi$$

$$Z(z) = C_1 \cdot e^{\chi z} + D_1 \cdot e^{-\chi z} + E_1 \cdot e^{i\chi z} + F_1 \cdot e^{-i\chi z}$$

$$Z(z) = C \cdot \cos(\chi z) + D \cdot \sin(\chi z) + E \cdot \cosh(\chi z) + F \sinh(\chi z)$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave incastrata agli estremi

$$v(0) = v^I(0) = v(L) = v^I(L) = 0$$

$$Z(0) = Z^I(0) = Z(L) = Z^I(L) = 0$$

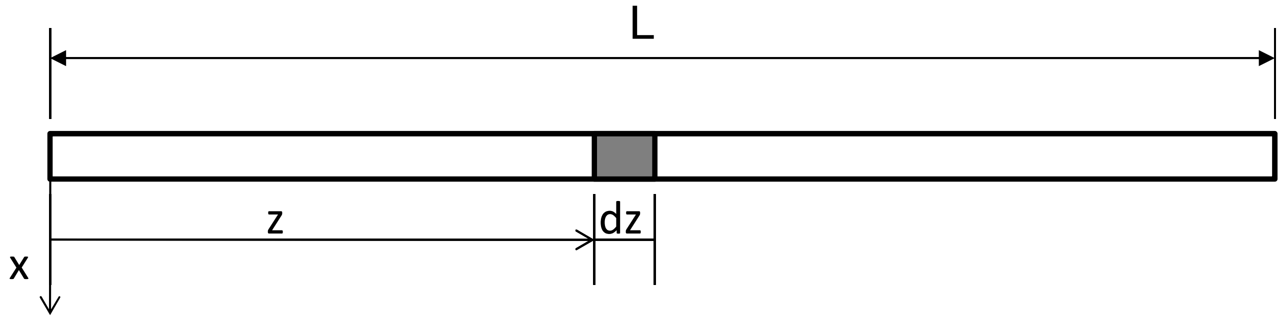
$$Z(0) = C + E = 0 \qquad C = -E$$

$$Z^I(0) = D + F = 0 \qquad D = -F$$

$$C(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L)) + D(\sin(\chi L) - \sinh(\chi L)) = 0$$

$$\chi\left[-C(\sin(\chi L) + \sinh(\chi L)) + D(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L))\right] = 0$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera nello spazio

$$v^{II}(0) = v^{III}(0) = v^{II}(L) = v^{III}(L) = 0$$

$$Z^{II}(0) = Z^{III}(0) = Z^{II}(L) = Z^{III}(L) = 0$$

$$Z^{II}(0) = -C + E \;\; = 0 \qquad\qquad C = E$$

$$Z^{III}(0) = -D + F \;\; = 0 \qquad\qquad D = F$$

$$\chi^2\left[C(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L)) + D(\sin(\chi L) - \sinh(\chi L))\right] = 0$$

$$\chi^2\left[-C(\sin(\chi L) + \sinh(\chi L)) + D(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L))\right] = 0$$