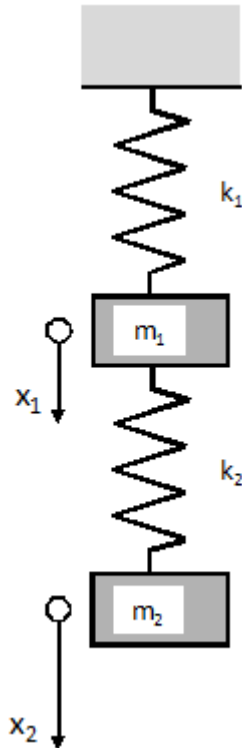


## Esempio 1 – Determinazione modi propri e forme modali per sistema a 2 gdl



7.1

Per il sistema di Fig. 7.1, con i seguenti valori assegnati di masse e rigidezze:

$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad m_1 := 14 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$

Matrici di massa e rigidezza

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni proprie e forme modali

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 7.319 \frac{1}{\text{s}}$$

$$r_1 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 \cdot m_1}{k_2} = 2 \quad \text{rapporto } X_2/X_1 \text{ per il modo 1}$$

$$\omega_2 := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 14.639 \frac{1}{\text{s}}$$

$$r_2 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 \cdot m_1}{k_2} = -1 \quad \text{rapporto } X_2/X_1 \text{ per il modo 2}$$

Si osserva che il rapporto  $X_2/X_1$  è positivo per la  $\omega_1$  e negativo per la  $\omega_2$ . Questo implica che le masse oscillino in fase nel primo caso ed in opposizione di fase nel secondo caso.



Di conseguenza, le forme modali sono date da:

$$[y^{(1)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[y^{(2)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le corrispondenti masse modali sono date da:

$$M_1 := [y^{(1)}]^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} [y^{(1)}] = 42 \text{ kg}$$

$$M_2 := [y^{(2)}]^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} [y^{(2)}] = 21 \text{ kg}$$

da cui le forme modali normalizzate rispetto alla matrice di massa:

$$[Y^{(1)}] := \frac{1}{\sqrt{\frac{M_1}{\text{kg}}}} [y^{(1)}] = \begin{pmatrix} 0.154 \\ 0.309 \end{pmatrix}$$

$$[Y^{(2)}] := \frac{1}{\sqrt{\frac{M_2}{\text{kg}}}} [y^{(2)}] = \begin{pmatrix} 0.218 \\ -0.218 \end{pmatrix}$$

Si può immediatamente verificare che risulta:

$$[Y^{(1)}]^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} [Y^{(1)}] = 1 \text{ kg}$$

$$[Y^{(2)}]^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} [Y^{(2)}] = 1 \text{ kg}$$

---

**Esempio 2 Verifica proprietà di ortogonalità per sistema a 2 gdl**

Si verifica immediatamente che le forme modali precedentemente determinate per il sistema di Fig. 7.1 sono ortogonali rispetto alle matrici di massa e rigidezza::

$$[Y^{(1)}]^T \cdot M \cdot [Y^{(2)}] = 0 \text{ kg}$$

$$[Y^{(2)}]^T \cdot M \cdot [Y^{(1)}] = 0 \text{ kg}$$

$$[Y^{(1)}]^T \cdot M \cdot [Y^{(1)}] = 1 \text{ kg}$$

$$[Y^{(2)}]^T \cdot M \cdot [Y^{(2)}] = 1 \text{ kg}$$

$$[Y^{(1)}]^T \cdot K \cdot [Y^{(2)}] = -0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[Y^{(2)}]^T \cdot K \cdot [Y^{(1)}] = -0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[Y^{(1)}]^T \cdot K \cdot [Y^{(1)}] = 53.6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[Y^{(2)}]^T \cdot K \cdot [Y^{(2)}] = 214.3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

In generale, le forme modali non risultano invece ortogonali tra loro, salvo il caso particolare in cui le masse siano tutte uguali.

---

---

**Esempio 3 - Diagonalizzazione matrici per sistema a 2 gdl**

Si possono costruire la matrice modale e quella delle pulsazioni proprie per il sistema di Fig. 7.1:

$$[\omega^2] := \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53.571 & 0 \\ 0 & 214.286 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

$$[Y] := \text{augment} \left[ [Y^{(1)}], [Y^{(2)}] \right] = \begin{pmatrix} 0.154 & 0.218 \\ 0.309 & -0.218 \end{pmatrix}$$

Si verifica inoltre immediatamente la capacità della matrice modale di diagonalizzare le matrici di massa e rigidità:

$$[Y]^T \cdot M \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{kg}$$

$$[Y]^T \cdot K \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 53.571 & -2.132 \times 10^{-14} \\ -2.842 \times 10^{-14} & 214.286 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{s^2}$$


---



### Esempio 4 – Determinazione oscillazione libera per sistema a 2 gdl

Si determini la legge del moto per il sistema di Fig. 7.1, con le seguenti condizioni iniziali.

#### Condizioni iniziali

$$\begin{aligned}x_{10} &:= 10 \cdot \text{mm} & x_{20} &:= x_{10} \cdot r_1 + x_{20} \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{100} \cdot x_{10} = 7.4 \times 10^{-3} \text{ m} \\x_{p10} &:= 0 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}} & x_{p20} &:= 0 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}\end{aligned}$$

#### Calcolo di ampiezza e fase per i due modi propri

$$a_1 := 0.5 \cdot \text{mm} \quad a_2 := 1.25 \cdot \text{mm} \quad \phi_1 := 0 \quad \phi_2 := 0$$

Given

$$a_1 \cdot \cos(\phi_1) + a_2 \cdot \cos(\phi_2) = x_{10}$$

$$r_1 \cdot a_1 \cdot \cos(\phi_1) + r_2 \cdot a_2 \cdot \cos(\phi_2) = x_{20}$$

$$-\omega_1 \cdot a_1 \cdot \sin(\phi_1) - \omega_2 \cdot a_2 \cdot \sin(\phi_2) = x_{p10}$$

$$-\omega_1 \cdot a_1 \cdot r_1 \cdot \sin(\phi_1) - \omega_2 \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \sin(\phi_2) = x_{p20}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_1, a_2, \phi_1, \phi_2)$$

$$a_1 = 5.8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$a_2 = 4.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

*Rappresentazione della legge del moto per le due masse*

$$x_1(t) := a_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad t := 0\text{-s}, 0.001\text{-s}.. 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\omega_1}$$

$$x_2(t) := a_1 \cdot r_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

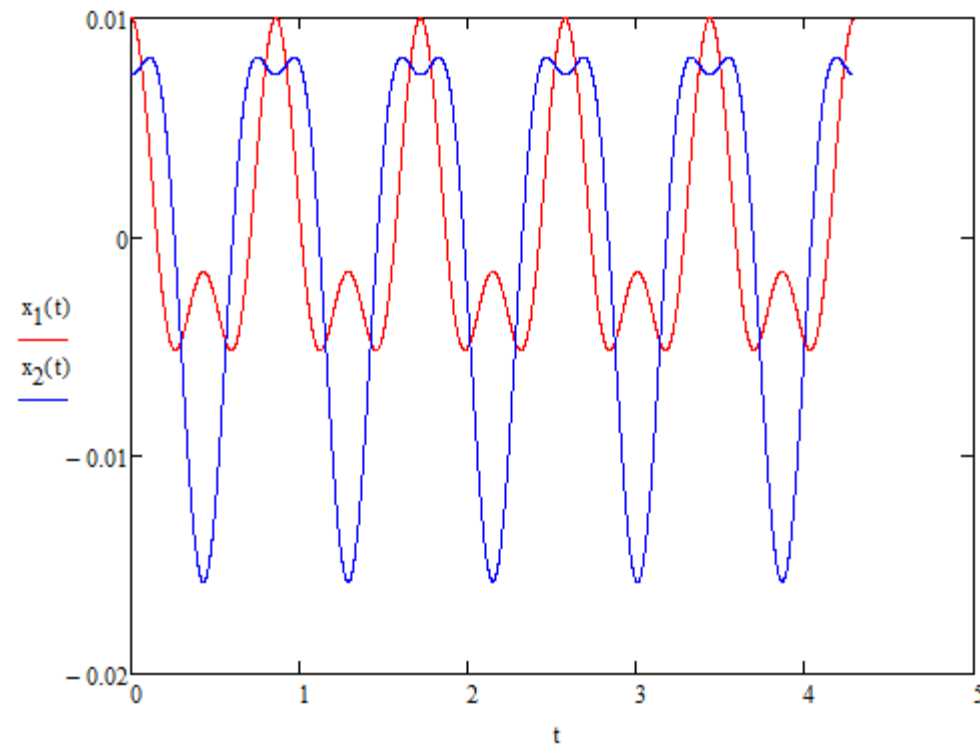


Fig. 7.2



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema non smorzato con forzante :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

Sostituendo nell'equazione lo sviluppo in base alle forme modali:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q\}$$

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [K][Y]\{q\} = \{F(t)\}$$

e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T [M][Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = [Y]^T \{F(t)\}$$



**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

$$[Y]^T [M] [Y] \{\ddot{q}\} + [Y]^T [K] [Y] \{q\} = [Y]^T \{F\} e^{i\Omega t}$$

si ottiene:

$$[I] \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \{q\} = [Y]^T \{F\} e^{i\Omega t}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \{Y_j\}^T \{F\} e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Si osserva che la forzante esterna ha andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Q_j + \omega_j^2 Q_j = f_j$$

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)}$$



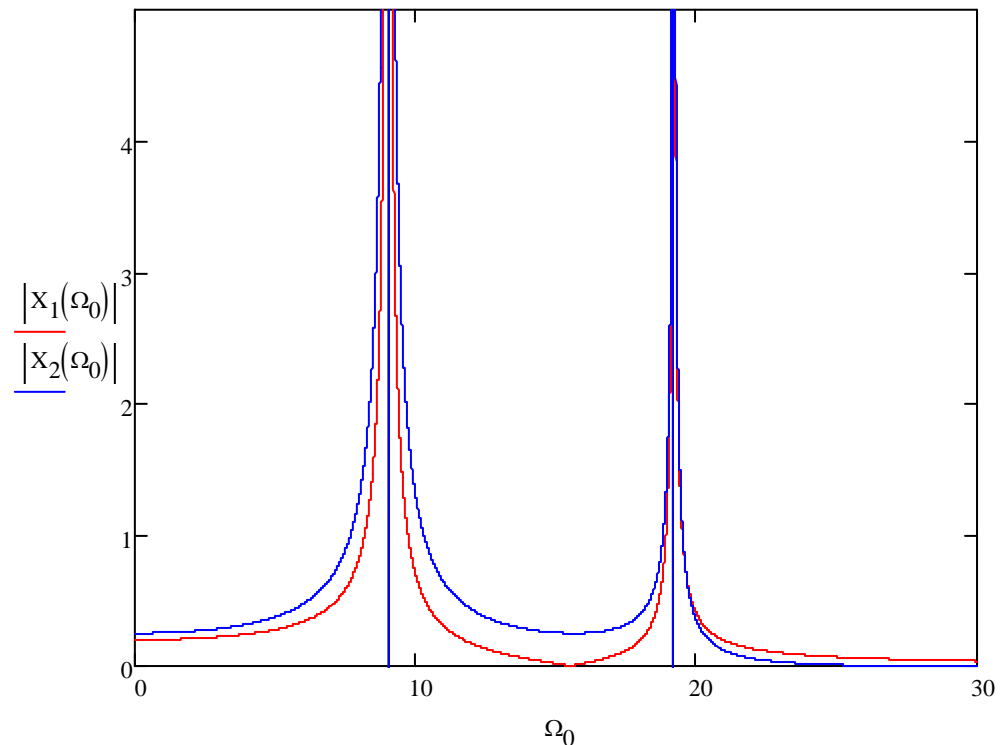
**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE**  
**METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)}$$

La soluzione generale risulta quindi data da:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N Q_j \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t} =$$

che può essere vista come  
sovrapposizione di N  
oscillatori elementari ad 1 gdl.



### Esempio 1 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl non smorzato

Applicazione

Dati i seguenti valori delle grandezze che definiscono il sistema:

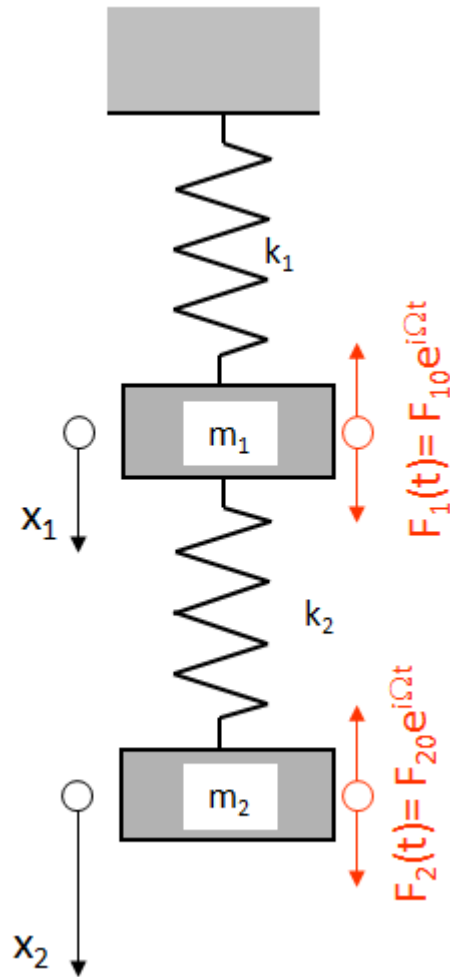
$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 1000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad m_1 := 10 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 5 \cdot \text{kg}$$

$$F_{10} := 250 \cdot \text{N} \quad F_{20} := 50 \cdot \text{N}$$

Si determinano i parametri di normalizzazione:

$$\omega_1 := \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 12.247 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_2 := \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = 14.142 \frac{1}{\text{s}}$$

e le espressioni delle ampiezze di vibrazione, in funzione della pulsazione della forzante:



$$X_1(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) \frac{F_{10}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right] \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\Omega_0 := 0 \cdot \frac{1}{\text{s}}, 0.001 \cdot \frac{1}{\text{s}} \dots 30 \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

$$X_2(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10}}{k_1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \frac{F_{20}}{k_2}}{\left[\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right] \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$xx(\Omega_0) := 0$$

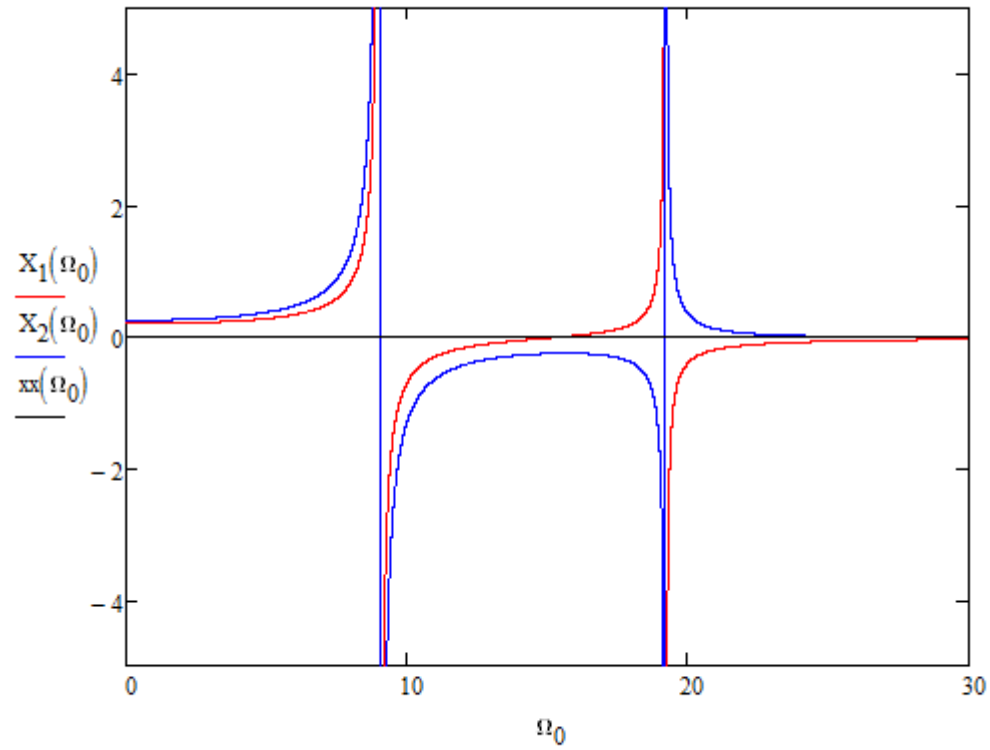


Fig. 9.2



Come nel sistema ad 1 gdl, si osserva che l'ampiezza di vibrazione tende ad infinito allorché la pulsazione della forzante è in risonanza con una delle due frequenze proprie del sistema, date da:

$$\omega_{1n} := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 9.021 \frac{1}{s}$$

$$\omega_{2n} := \sqrt{\frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}}}{2}} = 19.199 \frac{1}{s}$$

Si nota inoltre come le due masse si muovano in fase in prossimità della prima risonanza ed in controfase in prossimità della seconda, in accordo con le relative forme modali.

## Esempio 2 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl non smorzato con il metodo di sovrapposizione modale

Si determinano, per il sistema di cui all'esempio 1, le forme modali:

$$r_1 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_{1n}^2 \cdot m_1}{k_2} = 1.686$$

$$r_2 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_{2n}^2 \cdot m_1}{k_2} = -1.186$$

$$[y^{(1)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.686 \end{pmatrix}$$

$$[y^{(2)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.186 \end{pmatrix}$$

Le corrispondenti masse modali sono date da:

$$M_1 := [y^{(1)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(1)}] = 24.215 \text{ kg}$$

$$M_2 := [y^{(2)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(2)}] = 17.035 \text{ kg}$$



da cui le forme modali normalizzate rispetto alla matrice di massa:

$$[Y^{(1)}] := \frac{1}{\sqrt{\frac{M_1}{\text{kg}}}} \cdot [y^{(1)}] = \begin{pmatrix} 0.203 \\ 0.343 \end{pmatrix}$$

$$[Y^{(2)}] := \frac{1}{\sqrt{\frac{M_2}{\text{kg}}}} \cdot [y^{(2)}] = \begin{pmatrix} 0.242 \\ -0.287 \end{pmatrix}$$

Vettore delle forzanti esterne

$$[V] := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{pmatrix}$$

Contributo del modo 1

$$f_1 := \left[ [Y^{(1)}] \right]^T \cdot [V] = 67.936 \text{ N}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_1(\Omega) := \frac{f_1}{(\omega_{1n}^2 - \Omega^2)}$$

Contributo del modo 2

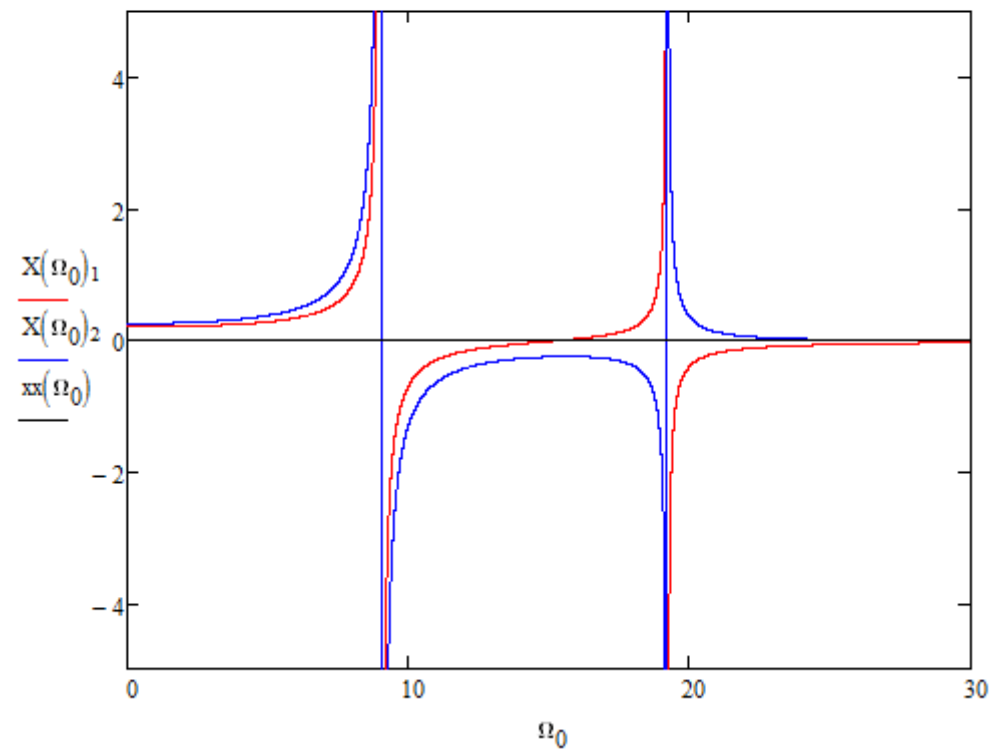
$$f_2 := \left[ [Y^{(2)}] \right]^T \cdot [V] = 46.203 \text{ N}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_2(\Omega) := \frac{f_2}{(\omega_{2n}^2 - \Omega^2)}$$

Soluzione

$$X(\Omega) = Q_1(\Omega) \cdot [Y^{(1)}] + Q_2(\Omega) \cdot [Y^{(2)}]$$





### Esempio 3 - Effetto della distribuzione della forzante sull'oscillazione forzata di sistema a 2 gdl non smorzato

Per il sistema degli esempi 1 e 2, la freccia prodotta sulle due masse dall'applicazione statica della forzante è data da:

$$\delta_1 := \frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} \quad \delta_2 := \frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_2}$$

con rapporto:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} := \frac{\frac{F_{10} + F_{20}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_2}}{\frac{F_{10} + F_{20}}{k_1}} = 1 + \frac{\frac{F_{20}}{k_2}}{\frac{F_{10} + F_{20}}{k_1}} = 1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{F_{20}}{F_{10} + F_{20}} = 1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{\frac{F_{10}}{F_{20}} + 1}$$

Uguagliando questo rapporto a quello tra gli spostamenti nelle forme modali si ottiene:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} := r_j$$

$$r_j - 1 := \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{\frac{F_{10}}{F_{20}} + 1}$$

da cui si ricava che il rapporto tra le due forze necessario per avere una deformata uguale, ameno di una costante, alla forma modale "j" è pari a:

$$\left( \frac{F_{10}}{F_{20}} \right)^{(j)} := \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_j - 1} - 1$$

Nel seguito è possibile far variare in modo continuo il rapporto tra le forze tra quello richiesto per avere una deformata statica coincidente con la forma modale 1 e con la forma modale 2:

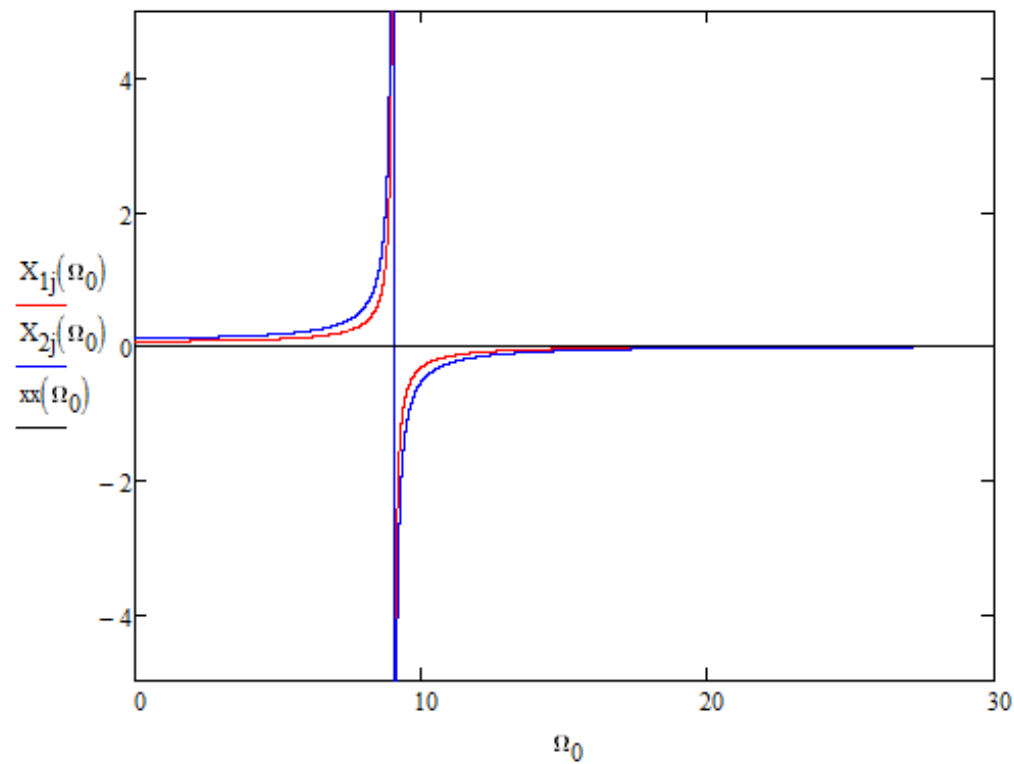
$r_{j0}=0$  – Forma modale 1

$r_{j0} :=$    $r_{j0} = 0$

$$F_{10j} := F_{20} \left[ \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_{j0}}{100}} - 1 \right] = 59.307 \text{ N}$$

$$X_{1j}(\Omega_0) := \frac{\left( 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2} \right) \cdot \frac{F_{10j}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[ \left( \frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2} \right) - \frac{k_2}{k_1} \right]}$$

$$X_{2j}(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10j}}{k_1} + \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2} \right) \cdot \frac{F_{20}}{k_2}}{\left[ \left( \frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2} \right) - \frac{k_2}{k_1} \right]}$$



$rj0=0$  – Forma modale 1

è inoltre possibile calcolare il lavoro compiuto dal sistema di forze su uno stato di spostamento corrispondente alla forma modale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = 143.61407 \text{ N}$$

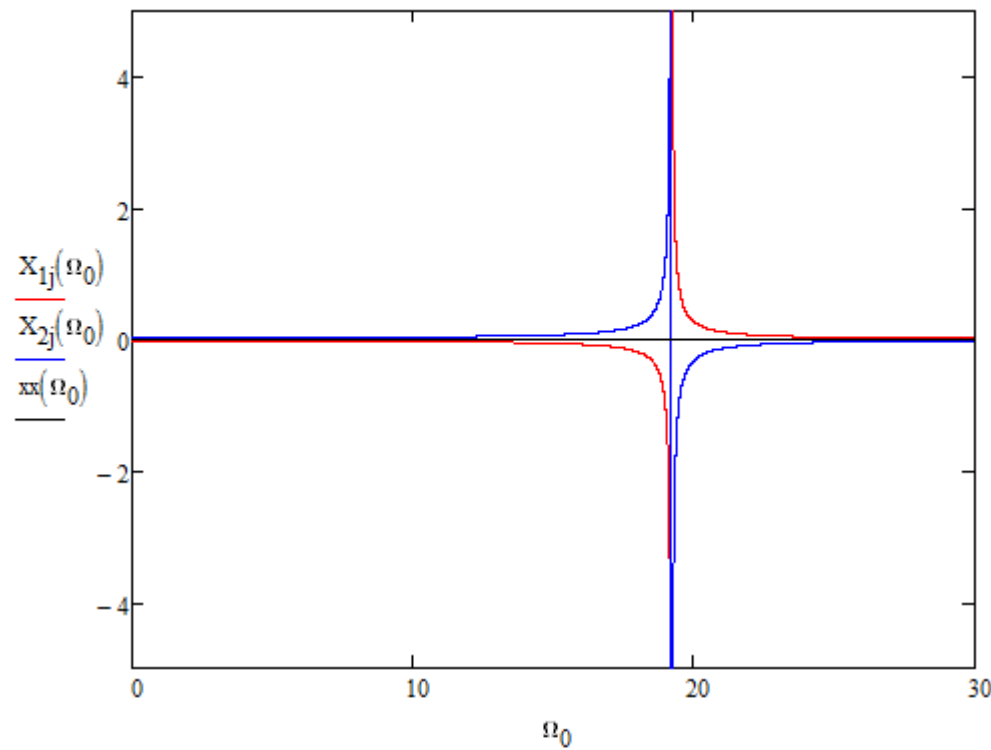
$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = -0 \text{ N}$$

$$r_{j0} := \text{[Slider Control]} \quad r_{j0} = 100$$

$r_{j0}=100$  – Forma modale 2

$$F_{10j} := F_{20} \left[ \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) \cdot \frac{r_{j0}}{100}} - 1 \right] = -84.307 \text{ N}$$

$$X_{1j}(\Omega_0) := \frac{\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) \cdot \frac{F_{10j}}{k_1} + \frac{F_{20}}{k_1}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]} \quad X_{2j}(\Omega_0) := \frac{\frac{F_{10j}}{k_1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \frac{F_{20}}{k_2}}{\left[\left(\frac{k_2}{k_1} + 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}\right]}$$



$rj0=100$  – Forma modale 2

è inoltre possibile calcolare il lavoro compiuto dal sistema di forze su uno stato di spostamento corrispondente alla forma modale

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = 0 \text{ N}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_{10j} \\ F_{20} \end{pmatrix} = -143.61407 \text{ N}$$

Si può notare che se  $\frac{\delta_2}{\delta_1} = r_j$  si ha la scomparsa della risonanza relativa al modo diverso da  $\omega_j$ , mentre il lavoro compiuto dal sistema di forze pensato applicato staticamente sulla relativa



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Si dovrebbero cercare soluzioni del tipo

$$\{x\} = \{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\dot{x}\} = \lambda\{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\ddot{x}\} = \lambda^2\{Z\}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2[M]\{Z\}e^{\lambda t} + \lambda[C]\{Z\}e^{\lambda t} + [K]\{Z\}e^{\lambda t} = 0$$

da cui:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{Z\} = 0$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{Z\} = 0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]) = 0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2N} + a_1 \lambda^{2N-1} + \dots + a_{2N-1} \lambda^1 + a_{2N} = 0$$

N coppie di radici (autovalori)  $\lambda_j$  complesse coniugate, che sostituite, forniscono N coppie di autovettori complessi  $\{Z_j\}$ .

Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente per piccoli N, o con metodi numerici per N grandi.

Nel seguito saranno presentate delle metodologie di soluzione analitica, finalizzate principalmente a evidenziare le caratteristiche generali del comportamento del sistema.



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

La procedura di soluzione, come è lecito attendersi, è fortemente influenzata dalla natura della matrice [C].

In particolare è opportuno distinguere due casi:

- la matrice [C] viene diagonalizzata dalla matrice modale [Y] **del sistema non smorzato (“Smorzamento Classico” o “Classical Damping”)**
- la matrice [C] **non** viene diagonalizzata dalla matrice modale [Y] **(“Smorzamento Non Classico” o “Non Classical Damping”)**





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

In generale

$$[Y]^T [C] [Y]$$

Matrice modale sistema non smorzato

non è una matrice diagonale, per cui le equazioni del moto non possono essere disaccoppiate .

Se lo smorzamento è molto piccolo, diviene lecito assumere forme diagonalizzabili della matrice di smorzamento. In tal caso si ha (**Smorzamento Classico o “Classical Damping”**):

$$[Y]^T [C] [Y] = [C_d] = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix} = \text{diag}[c_{jd}]$$

$$c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

Ponendo:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q(t)\} \quad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}\} \quad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [C][Y]\{\dot{q}\} + [K][Y]\{q\} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$[Y]^T [M][Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [C][Y]\{\dot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = 0$$

da cui:

$$[I]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[2\xi_j\omega_j]\{\dot{q}\} + \text{diag}[\omega_j^2]\{q\} = 0$$



**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
CLASSICAL DAMPING**

$$[I]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[2\xi_j\omega_j]\{\dot{q}\} + \text{diag}[\omega_j^2]\{q\} = 0$$

Sistema di N equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = 0$$

cui corrispondono autovalori

$$\lambda_j = -\xi_j\omega_j \pm i\omega_j\sqrt{1-\xi_j^2} = -\xi_j\omega_j \pm i\omega_{sj}$$

e soluzioni del tipo:

$$q_j(t) = e^{-\xi_j\omega_j t} \left[ A_{j1}e^{i\omega_{sj}t} + A_{j2}e^{-i\omega_{sj}t} \right]$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

Per quanto riguarda gli autovettori (forme modali) si dimostra che, **nel caso di smorzamento classico, coincidono con quelli del sistema non smorzato.**

$$([K] - \omega_{nj}^2 [M]) \{Y^{(j)}\} = 0 \quad \text{Sistema non smorzato}$$

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Z^{(j)}\} = 0 \quad \text{Sistema smorzato}$$

Ipotizzando che valga la:  $\{Z^{(j)}\} = \{Y^{(j)}\}$  si ottiene:

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Y^{(j)}\} = ([K] - \omega_{nj}^2 [M]) \{Y^{(j)}\}$$

$$\lambda_j^2 [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 [M] \{Y^{(j)}\}$$

Premoltiplicando per la trasposta della forma modale  $\{Y^{(j)}\}$ :

$$\lambda_j^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j \{Y^{(j)}\}^T [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

$$\lambda_j^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j \{Y^{(j)}\}^T [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\}$$

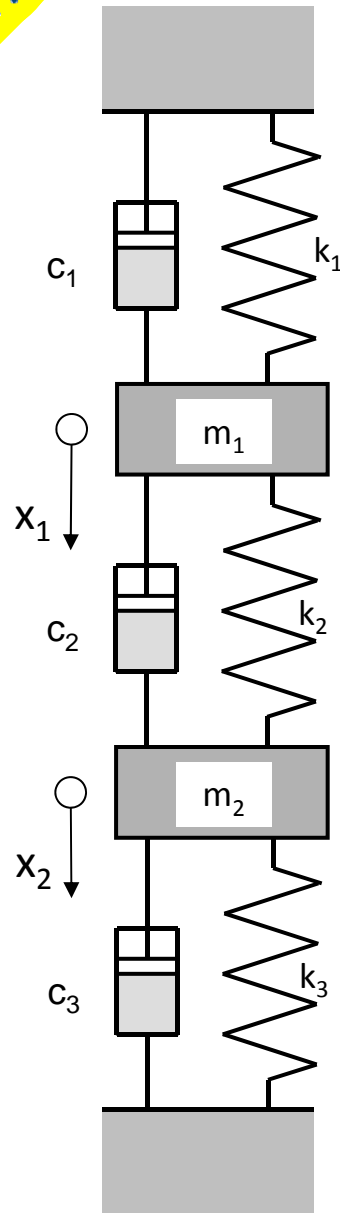
$$\lambda_j^2 + 2\xi_j \omega_j \lambda_j + \omega_j^2 = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm \sqrt{(\xi_j \omega_j)^2 - \omega_j^2} = -\xi_j \omega_j \pm \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

Si dimostra quindi che il problema agli autovalori del sistema smorzato è soddisfatto dagli autovettori del sistema non smorzato e da autovalori dati dalla relazione precedente.

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Y^{(j)}\} = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$$



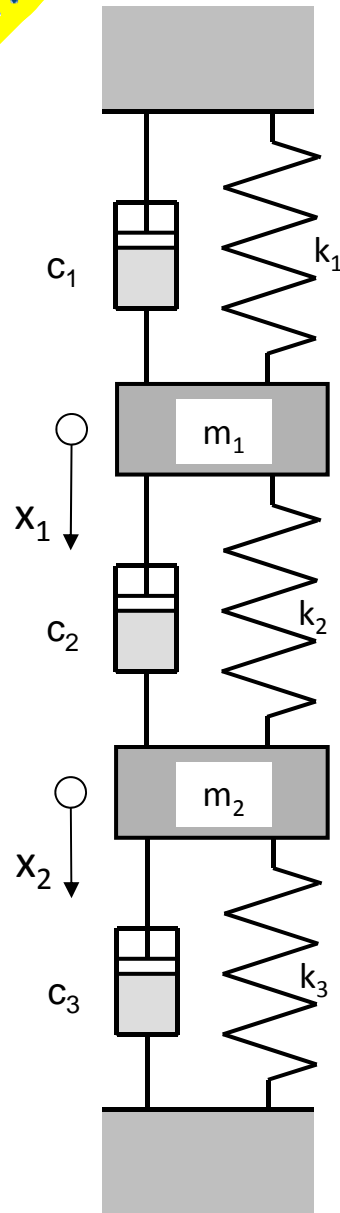
## Esempio NLS-1

Dato il sistema mostrato nella Figura, calcolare:

- calcolare modi propri e forme modali del sistema non smorzato
- verificare la capacità della matrice modale di diagonalizzare le matrici del sistema
- calcolare modi propri del sistema smorzato

Dati:

- $k_1 = 1500 \text{ N/m}$
- $k_2 = 1000 \text{ N/m}$
- $k_3 = 1500 \text{ N/m}$
- $c_1 = 0.1996 \text{ N/(m/s)}$
- $c_2 = 0.0668 \text{ N/(m/s)}$
- $c_3 = 0.1499 \text{ N/(m/s)}$
- $m_1 = 10 \text{ kg}$
- $m_2 = 5 \text{ kg}$



## Esempio NLS-1

### Svolgimento

Matrici di massa, rigidezza e smorzamento

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ kg}$$

$$K := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^3 & -1 \times 10^3 \\ -1 \times 10^3 & 2.5 \times 10^3 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

(E10.2.1)

$$C := \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

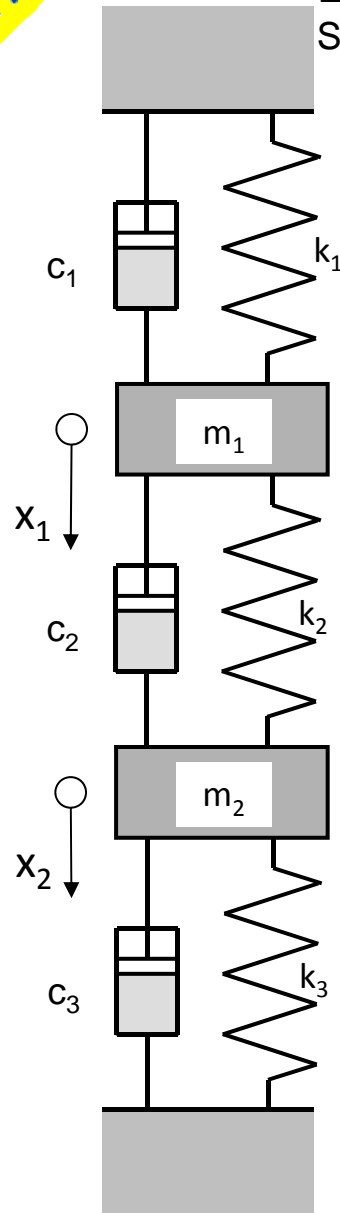
N.B.: i valori delle costanti di smorzamento sono stati scelti in modo da rendere diagonalizzabile la matrice C

Calcolo dei modi propri del sistema non smorzato

$$\omega_1 := \sqrt{\text{eigenvals}(M^{-1} \cdot K)_1} = 13.647 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_2 := \sqrt{\text{eigenvals}(M^{-1} \cdot K)_2} = 23.743 \frac{1}{\text{s}}$$

Esempio NLS-1  
Svolgimento



Calcolo della matrice modale del sistema non smorzato

$$r_1 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_1^2 \cdot m_1}{k_2} = 0.637$$

rapporto  $X_2/X_1$  per il modo 1

$$r_2 := \frac{k_1 + k_2 - \omega_2^2 \cdot m_1}{k_2} = -3.137$$

rapporto  $X_2/X_1$  per il modo 2

$$[y^{(1)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.637 \end{pmatrix}$$

Forme modali

$$[y^{(2)}] := \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3.137 \end{pmatrix}$$

$$M_1 := [y^{(1)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(1)}] = 12.032 \text{ kg}$$

Masse modali

$$M_2 := [y^{(2)}]^T \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot [y^{(2)}] = 59.218 \text{ kg}$$

$$[Y^{(1)}] := \frac{1}{\sqrt{M_1}} \cdot [y^{(1)}] = \begin{pmatrix} 0.288 \\ 0.184 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{kg}^{0.5}}$$

Forme modali normalizzate rispetto alla matrice di massa:

$$[Y^{(2)}] := \frac{1}{\sqrt{M_2}} \cdot [y^{(2)}] = \begin{pmatrix} 0.13 \\ -0.408 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{kg}^{0.5}}$$

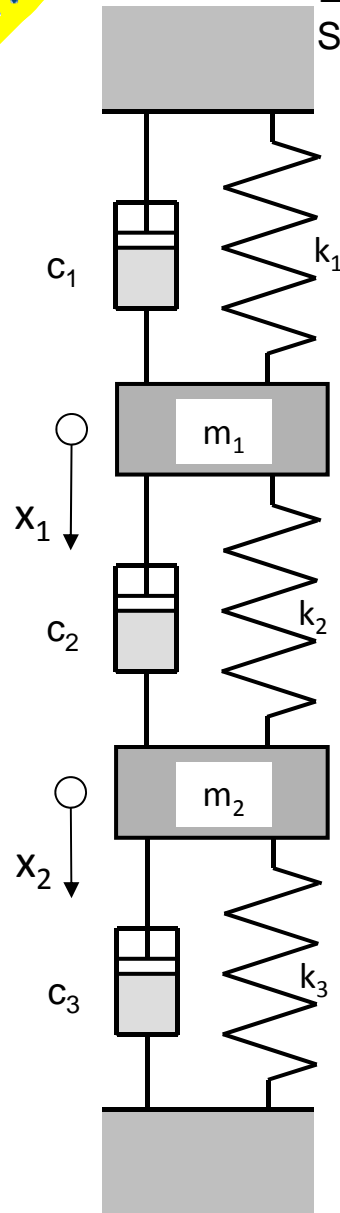
$$[Y] := \text{augment}[[Y^{(1)}], [Y^{(2)}]] = \begin{pmatrix} 0.288 & 0.13 \\ 0.184 & -0.408 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{kg}^{0.5}}$$

Matrice modale



## Esempio NLS-1

Svolgimento



Matrici diagonalizzate

$$M_d := [Y]^T \cdot M \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_d := [Y]^T \cdot C \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 0.022 & 0 \\ 0 & 0.048 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

(E10.2.2)

$$K_d := [Y]^T \cdot K \cdot [Y] = \begin{pmatrix} 186.254 & 0 \\ 0 & 563.746 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

Calcolo pulsazioni sistema smorzato

$$\omega_{n1} := \sqrt{K_{d1,1}} = 13.647 \frac{1}{s} \quad \omega_{n2} := \sqrt{K_{d2,2}} = 23.743 \frac{1}{s}$$

$$\xi_1 := \frac{C_{d1,1}}{2 \cdot \omega_{n1}} = 8.2 \times 10^{-4} \quad \xi_2 := \frac{C_{d2,2}}{2 \cdot \omega_{n2}} = 1.002 \times 10^{-3}$$

$$\omega_{d1} := -\xi_1 \cdot \omega_{n1} + i \cdot \omega_{n1} \cdot \sqrt{1 - \xi_1^2} = (-0.011 + 13.647i) \frac{1}{s}$$

$$\omega_{d2} := -\xi_2 \cdot \omega_{n2} + i \cdot \omega_{n2} \cdot \sqrt{1 - \xi_2^2} = (-0.024 + 23.743i) \frac{1}{s}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Si dimostra che la matrice di smorzamento è diagonalizzabile se:

$$[C] = [M] \sum_{l=0}^m \alpha_l ([M]^{-1} [K])^l$$

Se si pone  $m=1$ , si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Combinando:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

con:

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [M] \{Y_r\} = 0 & \text{per } "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [M] \{Y_r\} = 1 & \text{per } "s" = "r" \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [K] \{Y_r\} = 0 & \text{per } "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [K] \{Y_r\} = \omega_r^2 & \text{per } "s" = "r" \end{cases}$$

si ottiene:

$$[C_d] = [Y]^T [C] [Y] = \alpha [Y]^T [M] [Y] + \beta [Y]^T [K] [Y] = \alpha [I] + \beta \cdot \text{diag}[\omega_j^2]$$

$$c_{rd} = \alpha + \beta \omega_r^2$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

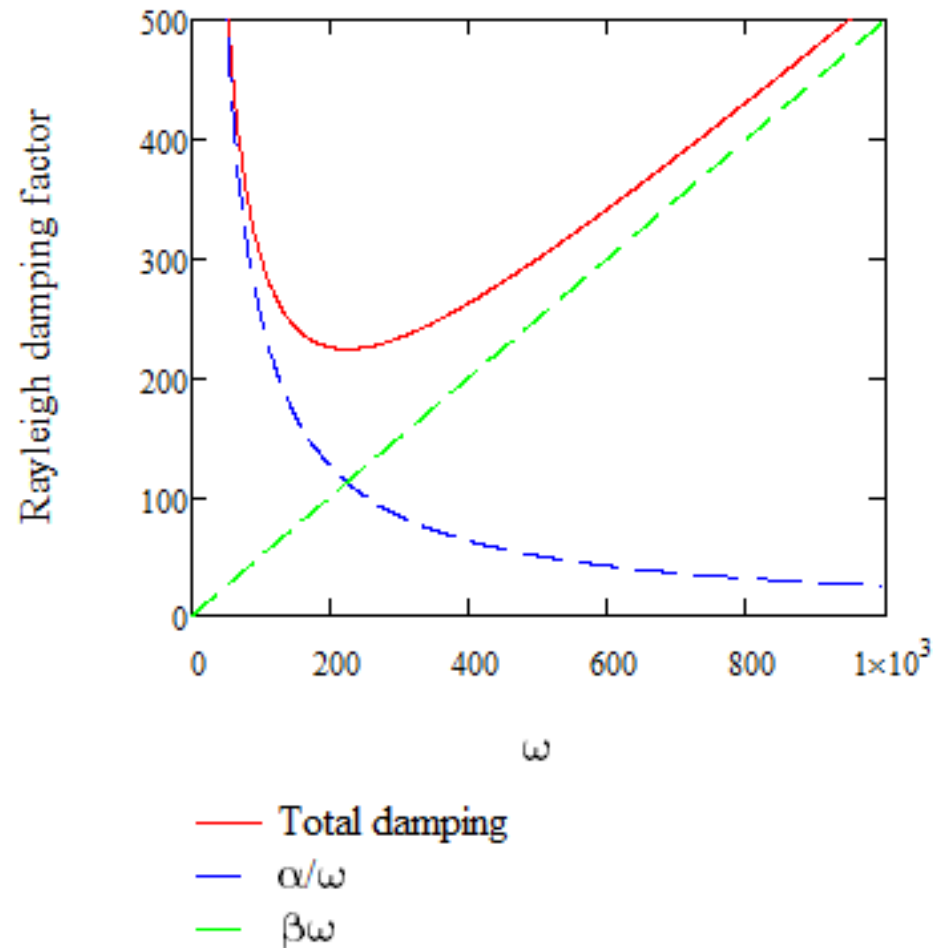
$$c_{rd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

Combinando con :  $c_{rd} = 2\xi_r\omega_r$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_r = \alpha + \beta\omega_r^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_r} + \beta\omega_r \right)$$



**SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
CLASSICAL DAMPING**

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q(t)\}$$

pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, qualora la matrice C sia diagonalizzabile, si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \xi_1 \omega_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \xi_2 \omega_2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n \omega_n \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \{q\} = [Y]^T \{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \{Y_j\}^T \{F\} e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$



**SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
CLASSICAL DAMPING**

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j \omega_j \Omega Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

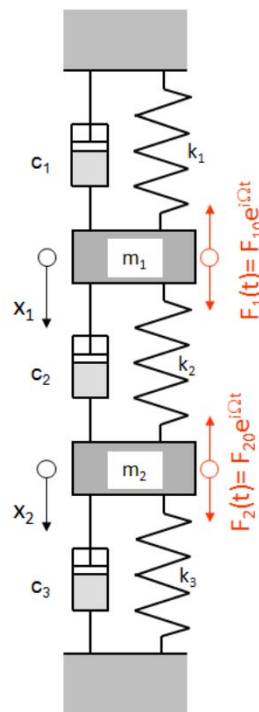
$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j \omega_j \Omega}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

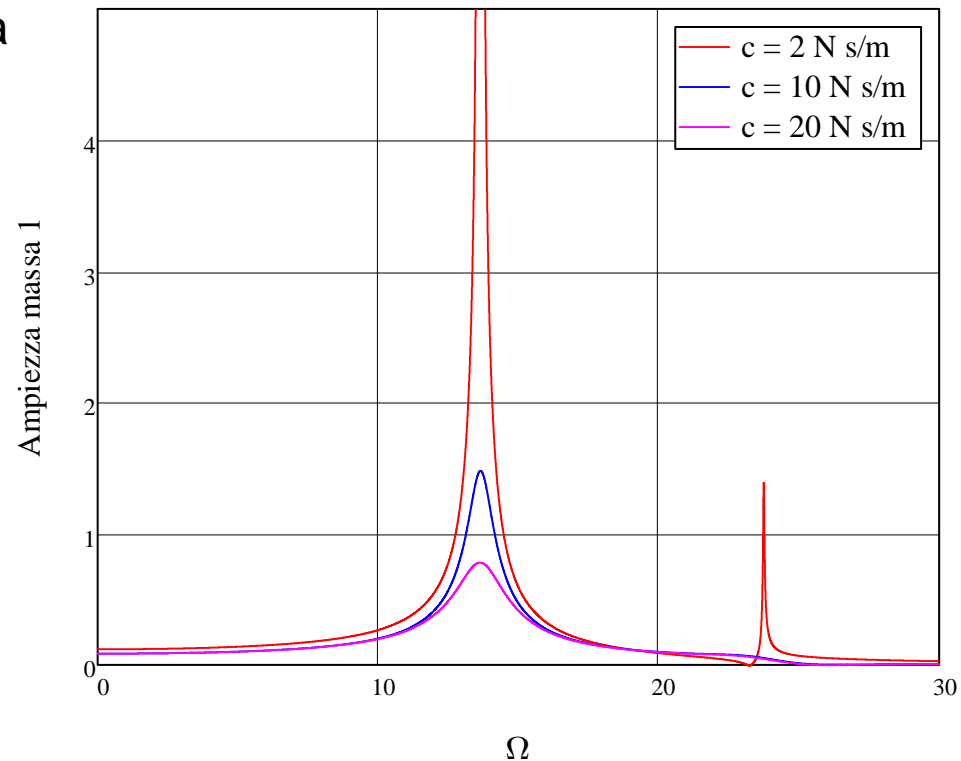
La soluzione completa assume quindi una forma del tipo:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j\omega_j\Omega} \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t}$$

ovvero la somma del contributo di N oscillatori ad 1 gdl, ognuno corrispondente ad uno dei modi propri.

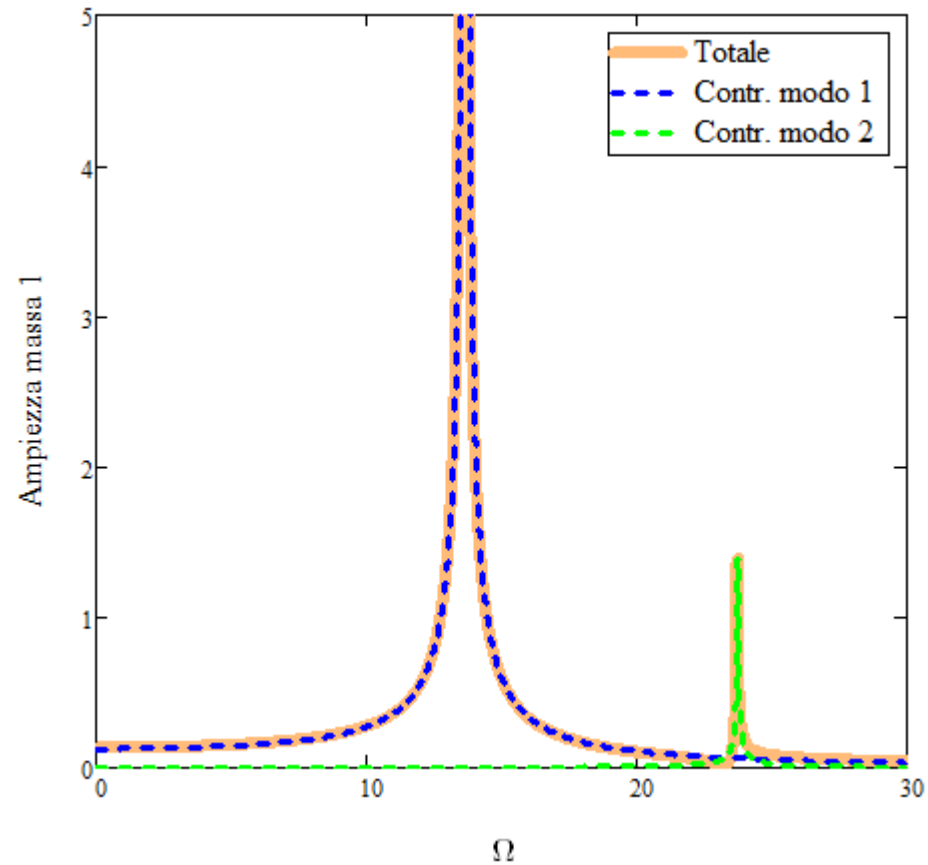
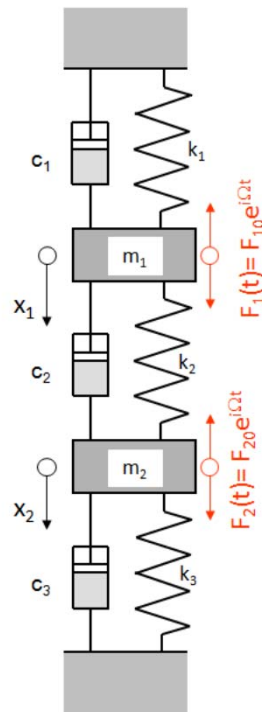


Sistema forzato a  
2 gdl – effetto  
smorzamento



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

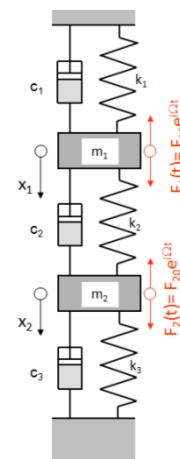
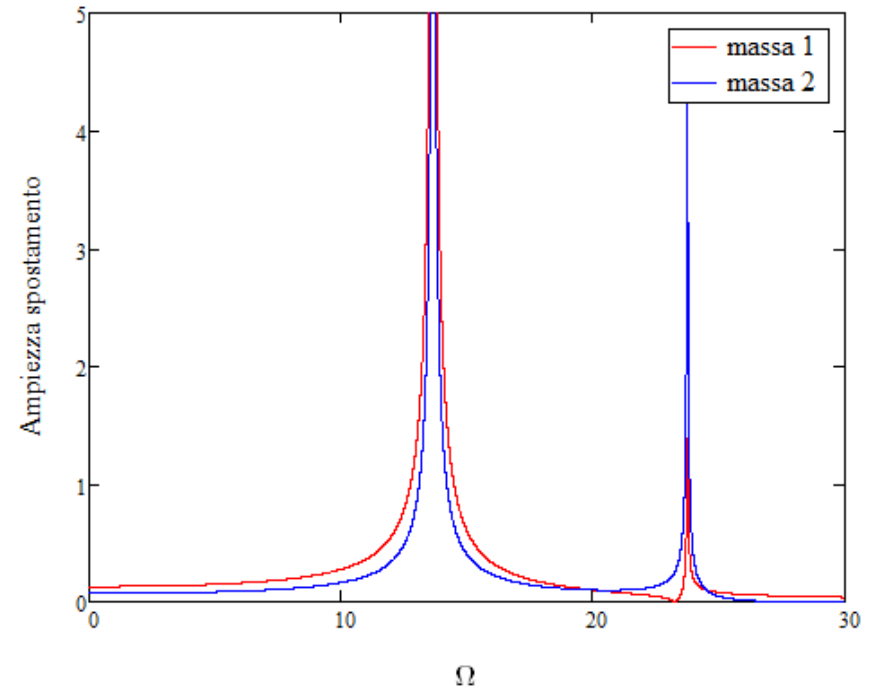
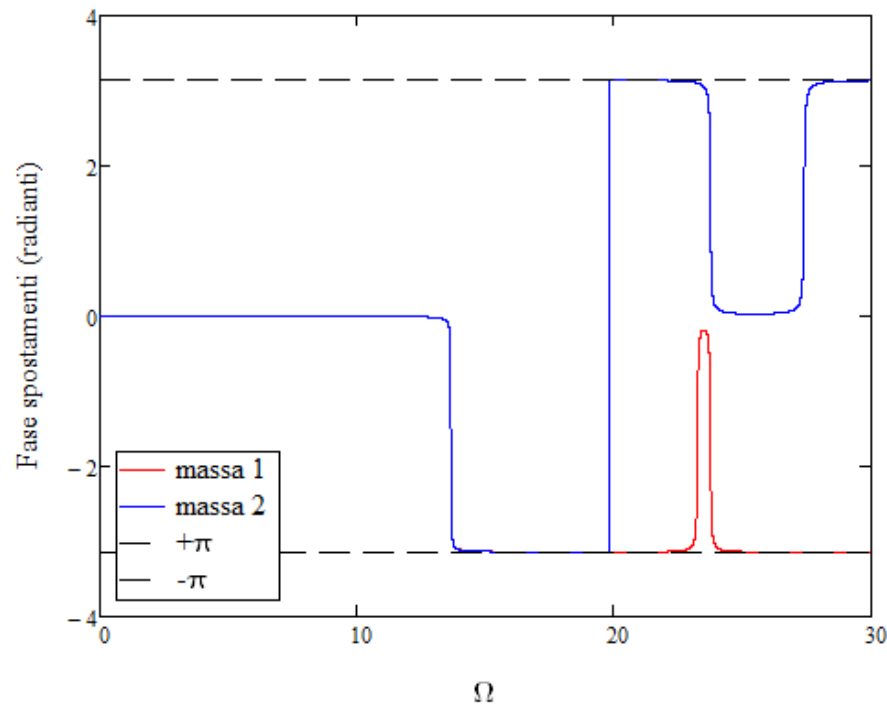
Contributo dei due modi propri

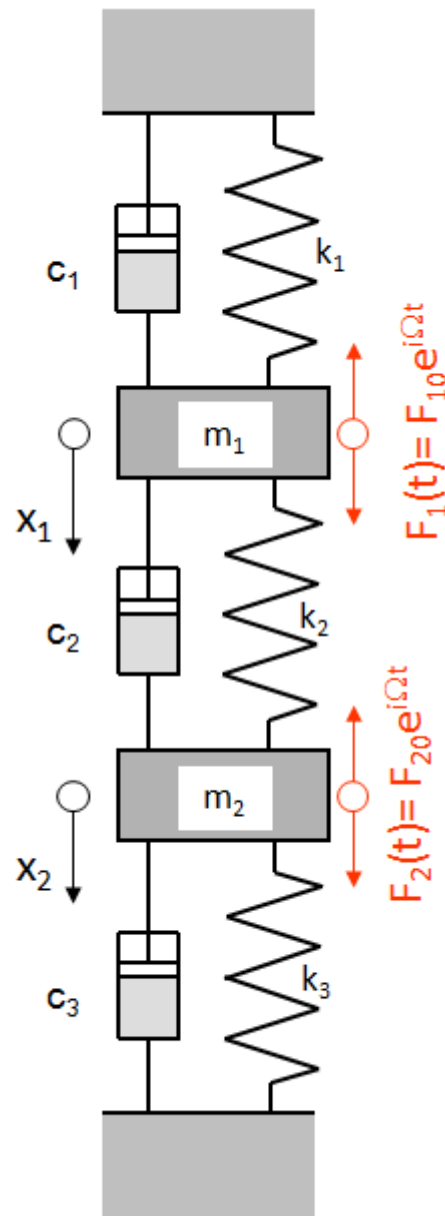




## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

Andamento modulo e fase spostamenti





### Esempio 1 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl smorzato

Soluzione con metodo diretto

#### Esempio applicativo

Calcolo dell'ampiezza di vibrazione del sistema di Fig. 10.1, in funzione della pulsazione della forzante.

$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 1000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad f_{\text{act}} := 0.1$$

$$m_1 := 10 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 5 \cdot \text{kg}$$

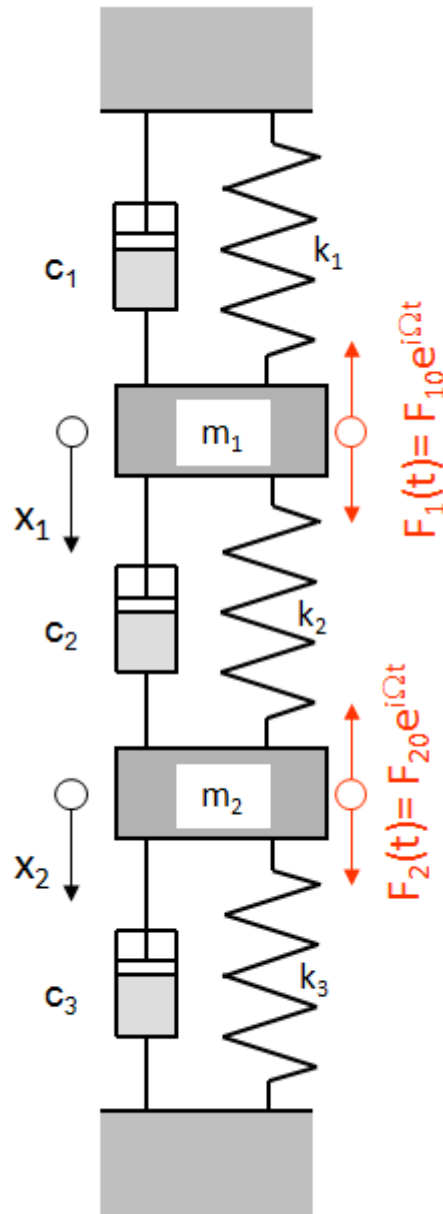
$$c_1 := 1.996 \cdot f_{\text{act}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad c_2 := 0.668 \cdot f_{\text{act}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad c_3 := 1.499 \cdot f_{\text{act}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$F_{10} := 250 \cdot \text{N} \quad F_{20} := 50 \cdot \text{N}$$

$$\underline{K} := \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \quad \underline{C} := \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \quad \underline{M} := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E10.1.6})$$

$$A_0(\Omega_0) := \underline{K} + j \cdot \Omega_0 \cdot \underline{C} - \Omega_0^2 \cdot \underline{M}$$

$$\Delta(\Omega_0) := A_0(\Omega_0)_{1,1} \cdot A_0(\Omega_0)_{2,2} - A_0(\Omega_0)_{1,2} \cdot A_0(\Omega_0)_{2,1}$$



$$X_{10}(\Omega_0) := \frac{A_0(\Omega_0)_{2,2}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{10} + \frac{-A_0(\Omega_0)_{1,2}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{20} \quad (\text{E10.1.7})$$

$$X_{20}(\Omega_0) := \frac{-A_0(\Omega_0)_{2,1}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{10} + \frac{(A_0(\Omega_0))_{1,1}}{\Delta(\Omega_0)} \cdot F_{20}$$

Calcolo di modulo e fase della soluzione

$$X_1(\Omega_0) := \sqrt{\text{Re}(X_{10}(\Omega_0))^2 + \text{Im}(X_{10}(\Omega_0))^2}$$

$$X_2(\Omega_0) := \sqrt{\text{Re}(X_{20}(\Omega_0))^2 + \text{Im}(X_{20}(\Omega_0))^2}$$

$$\Omega_0 := 0 \cdot \frac{1}{s}, 0.001 \cdot \frac{1}{s} \dots 30 \cdot \frac{1}{s}$$

$$\alpha(\Omega_0) := 0$$

(E10.1.8)

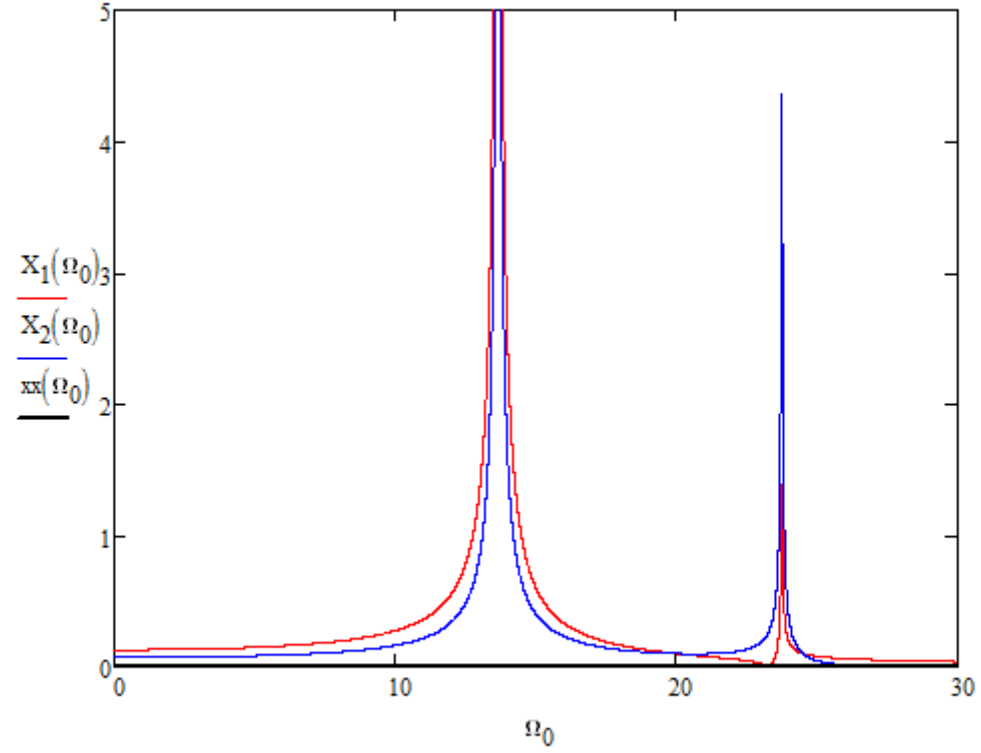
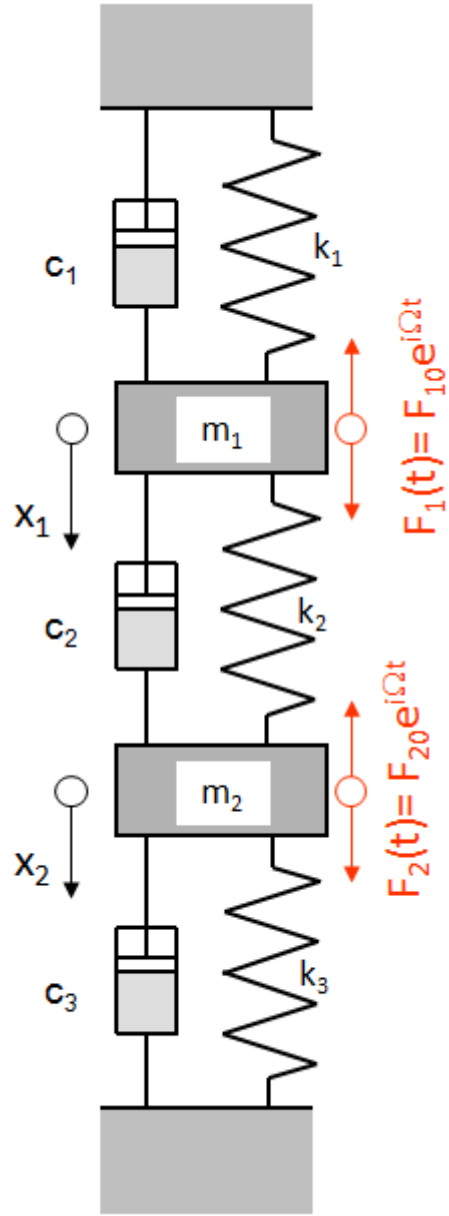
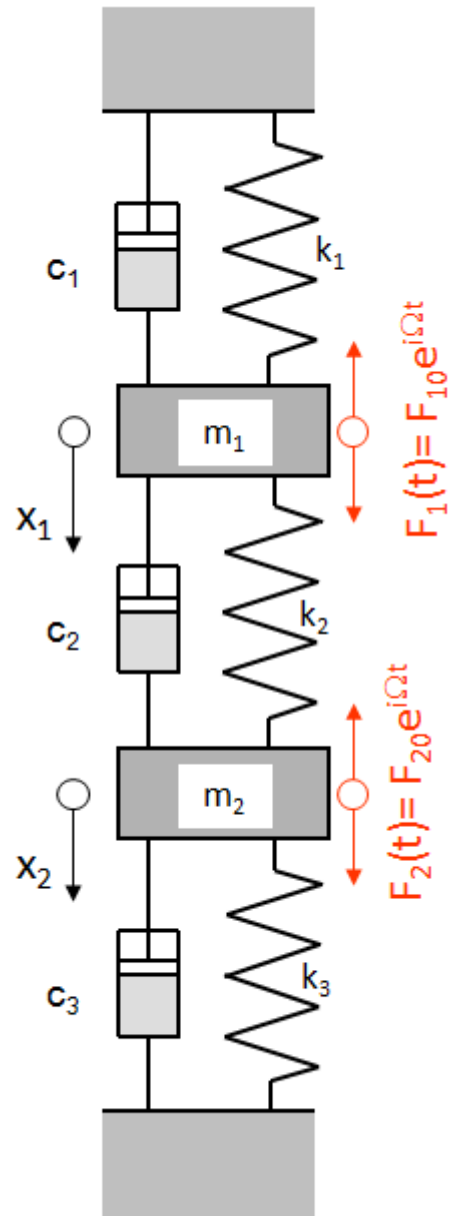


Fig. 10.2



$$\phi_1(\Omega_0) := \arg(X_{10}(\Omega_0))$$

$$\phi_2(\Omega_0) := \arg(X_{20}(\Omega_0))$$

$$xp_p(\Omega_0) := \pi$$

$$xm_p(\Omega_0) := -\pi$$

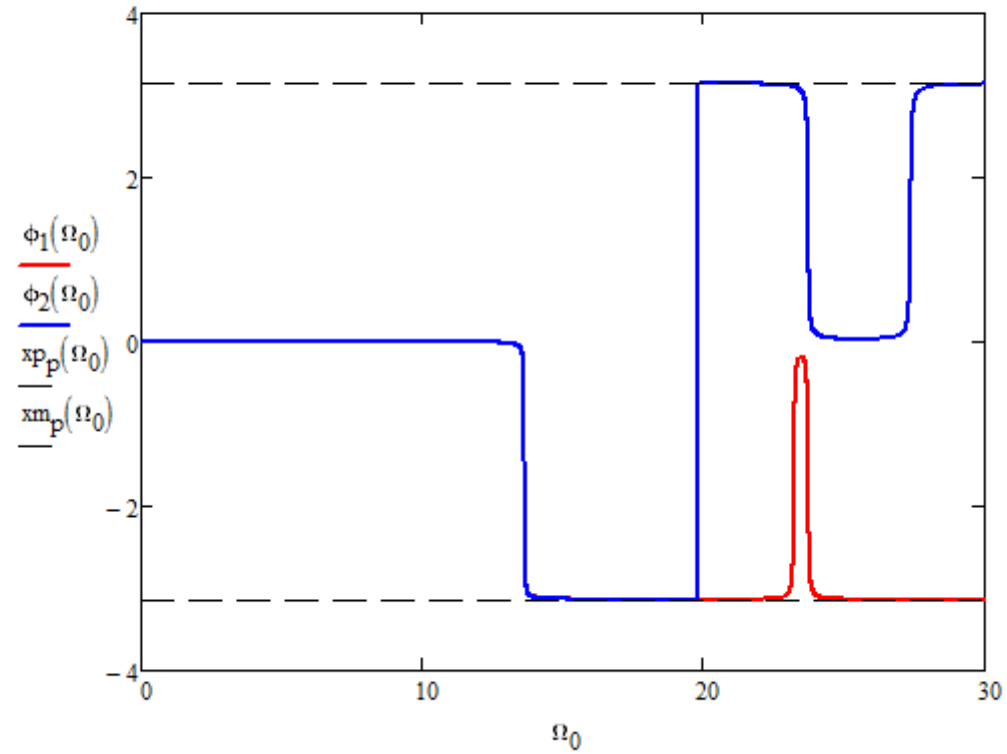
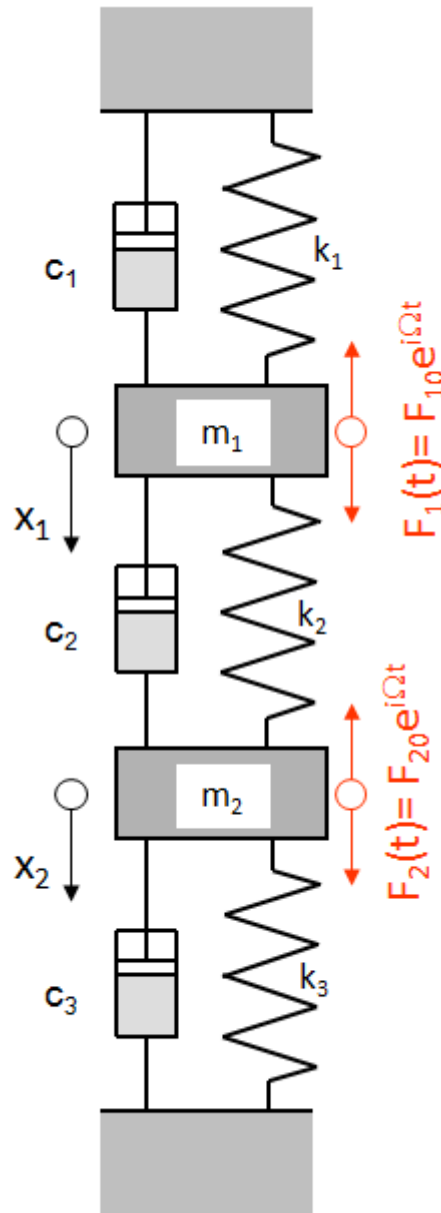


Fig. 10.3

### Esempio 2 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl smorzato con il metodo di sovrapposizione modale

Calcolare la risposta forzata del sistema di Fig., usano i dati dell'esercizio precedente



Vettore delle forzanti esterne

$$[V] := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{pmatrix}$$

Contributo del modo 1

$$f_1 := \left[ [Y^{(1)}] \right]^T \cdot [V] = 81.262 \frac{\text{m} \cdot \text{kg}^{0.5}}{\text{s}^2}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_1(\Omega) := \frac{f_1}{(\omega_1^2 - \Omega^2) + i \cdot C_{d_{1,1}} \cdot \Omega}$$

Contributo del modo 2

$$f_2 := \left[ [Y^{(2)}] \right]^T \cdot [V] = 12.102 \frac{\text{m} \cdot \text{kg}^{0.5}}{\text{s}^2}$$

Forza modale per il modo 1

$$Q_2(\Omega) := \frac{f_2}{(\omega_2^2 - \Omega^2) + i \cdot C_{d_{2,2}} \cdot \Omega}$$

Soluzione

$$X(\Omega) := Q_1(\Omega) \cdot [Y^{(1)}] + Q_2(\Omega) \cdot [Y^{(2)}] \tag{E10.2.3}$$

$$X_M(\Omega) := \sqrt{\text{Re}(X(\Omega))^2 + \text{Im}(X(\Omega))^2} \quad X_\Phi(\Omega) := \arg(X(\Omega)) \tag{E10.2}$$

### Esempio 2 - Oscillazione forzata di sistema a 2 gdl smorzato con il metodo di sovrapposizione modale

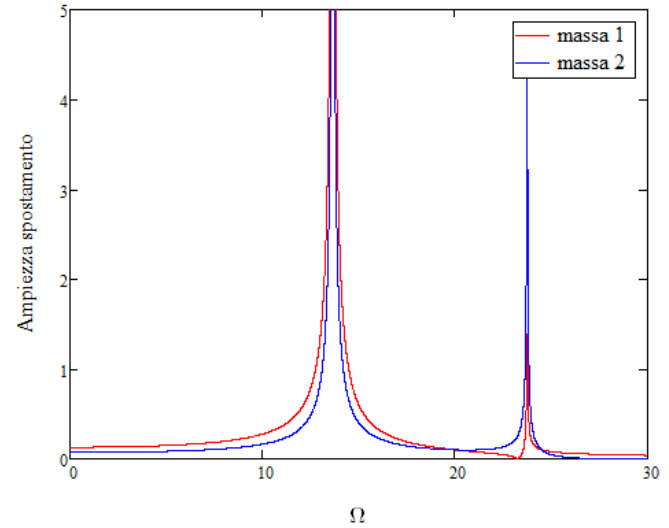
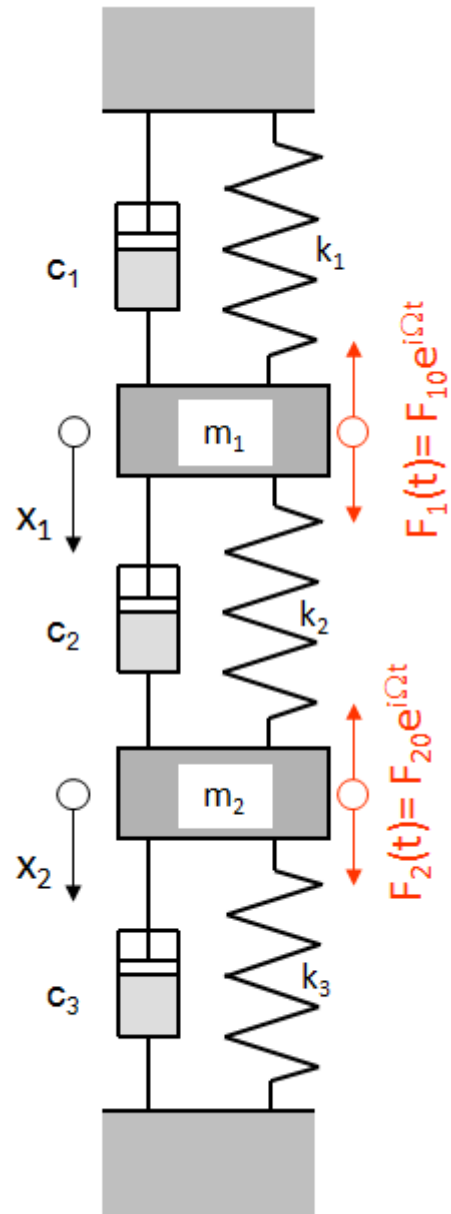
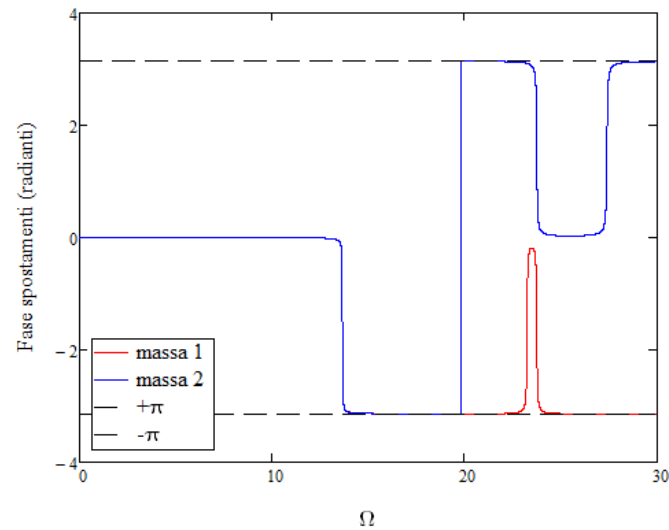


Fig. 9.3





**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE**

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$[C_d] = [Y]^T [C][Y]$$

sono trascurabili, si può assumere per essa una forma diagonale, nella quale lo smorzamento di ogni modo viene generalmente ottenuto direttamente per via sperimentale

$$[C_d] \approx \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad n \leq N$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Una quantificazione dell'importanza relativa dei termini fuori diagonale è data dal cosiddetto **Coefficiente di Accoppiamento**  $\Xi$ :

$$[C_d] = \begin{bmatrix} c_{11d} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{iid} & \dots & c_{ijd} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{jld} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{NNd} \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \max \left( \frac{c_{ijd}^2}{c_{iid} c_{jld}} \right)$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

È possibile verificare quantitativamente l'errore commesso nel trascurare i termini fuori diagonale, nel caso del sistema forzato a 2 gdl.

Si assume una matrice di smorzamento principale del tipo:

$$[C_d] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} \\ -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si calcola quindi la risposta del sistema, in termini di un vettore complesso di ampiezze di spostamento, tramite soluzione diretta (esatta) delle equazioni del moto:

$$\{X_{exact}(\xi, \Omega, \Xi)\} = ([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M])^{-1} \{F\}$$

$$[C] = ([Y]^T)^{-1} [C_d] [Y]^{-1}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si calcola quindi la risposta del sistema con il MSM, utilizzando la matrice di spostamento principale seguente (nella quale sono stati trascurati i termini fuori diagonale) :

$$[C_d^*] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si ottiene in tal modo un altro vettore complesso di ampiezze di spostamento

$$\{X_{MSM}(\xi, \Omega, \Xi)\} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j\omega_j\Omega} \{Y^{(j)}\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si definisce quindi un errore percentuale massimo della soluzione ottenuta trascurando i termini fuori diagonale, nella forma :

$$Err(\xi, \Omega, \Xi) = \max_{j=1, N} \left( \left| \frac{X_{exact, j}(\xi, \Omega, \Xi) - X_{MSM, j}(\xi, \Omega, \Xi)}{\max_{j=1, N} (X_{exact, j}(\xi, \Omega, \Xi))} \right| \cdot 100 \right)$$

nella quale l'errore assoluto viene rapportato al massimo valore di ampiezza che si verifica, tra tutti i gradi di libertà, per i valori dati di  $\Omega$ ,  $\Xi$  ed  $\xi$ .

Nel seguito si analizza l'andamento dell'errore, per un sistema a 2 gdl, in un "range" di valori di smorzamento  $0 < \xi < 0.5$  e di frequenza  $0 < \Omega < 30$  Hz.

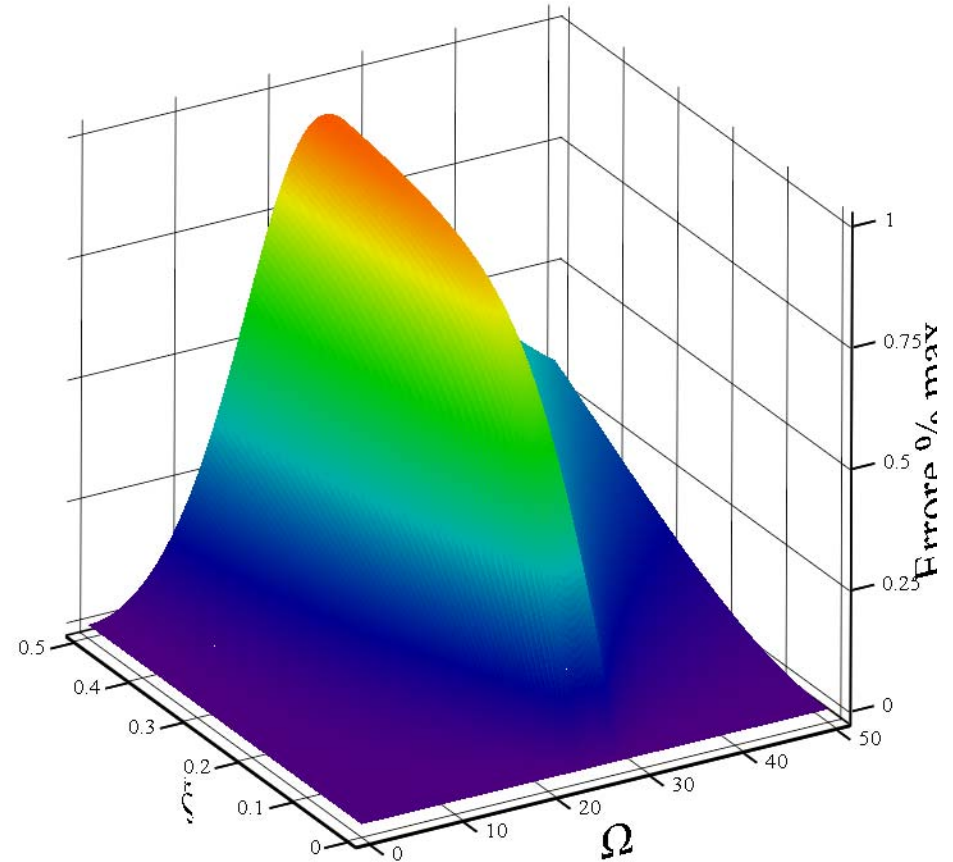
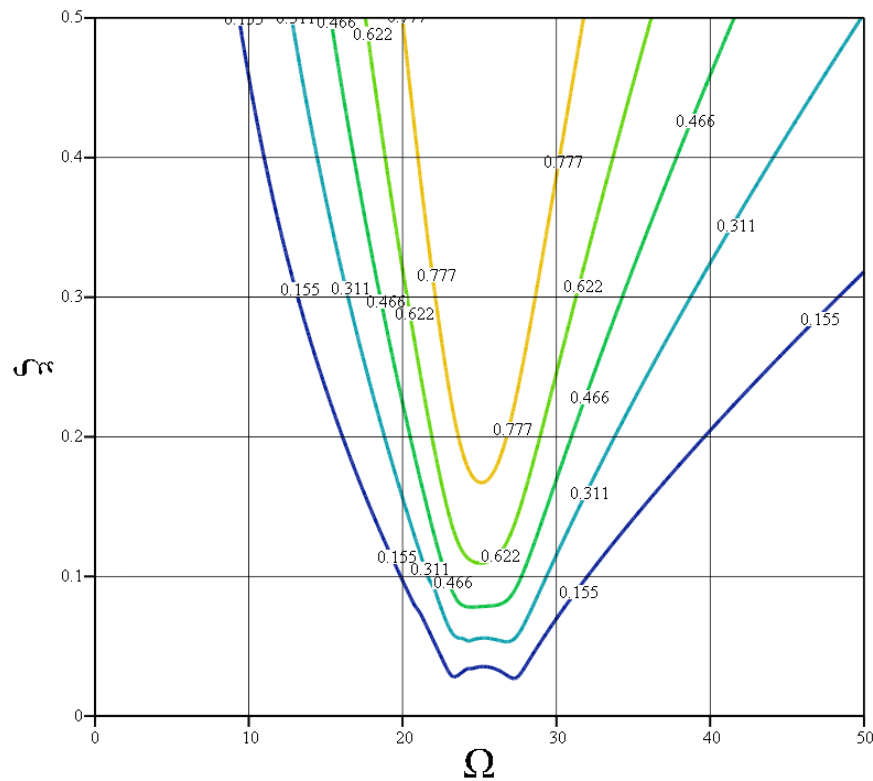
Le pulsazioni naturali del sistema sono:

- $\omega_{n1} = 13.6$  Hz
- $\omega_{n2} = 23.7$  Hz



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

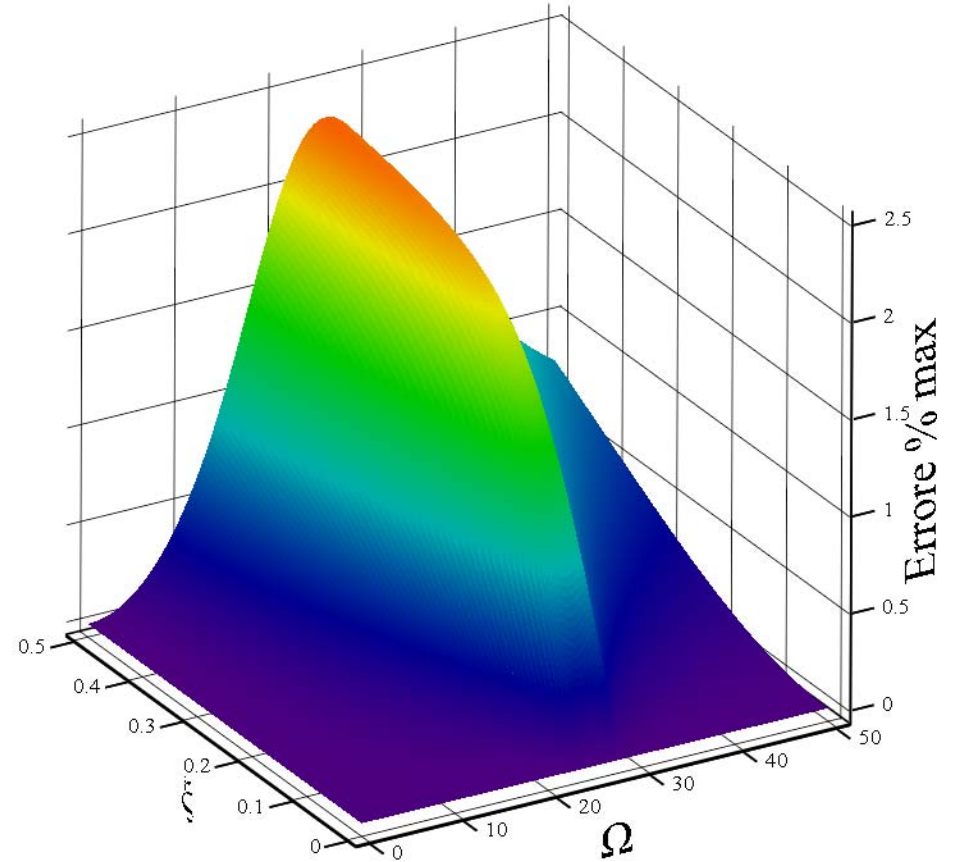
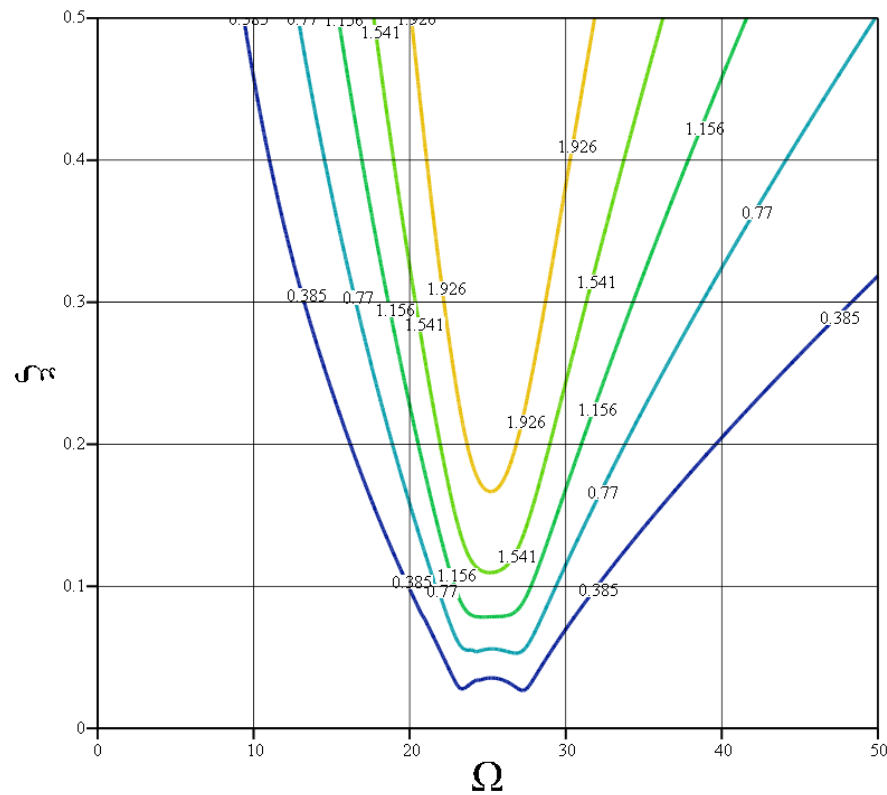
$$\Gamma = 0.01$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

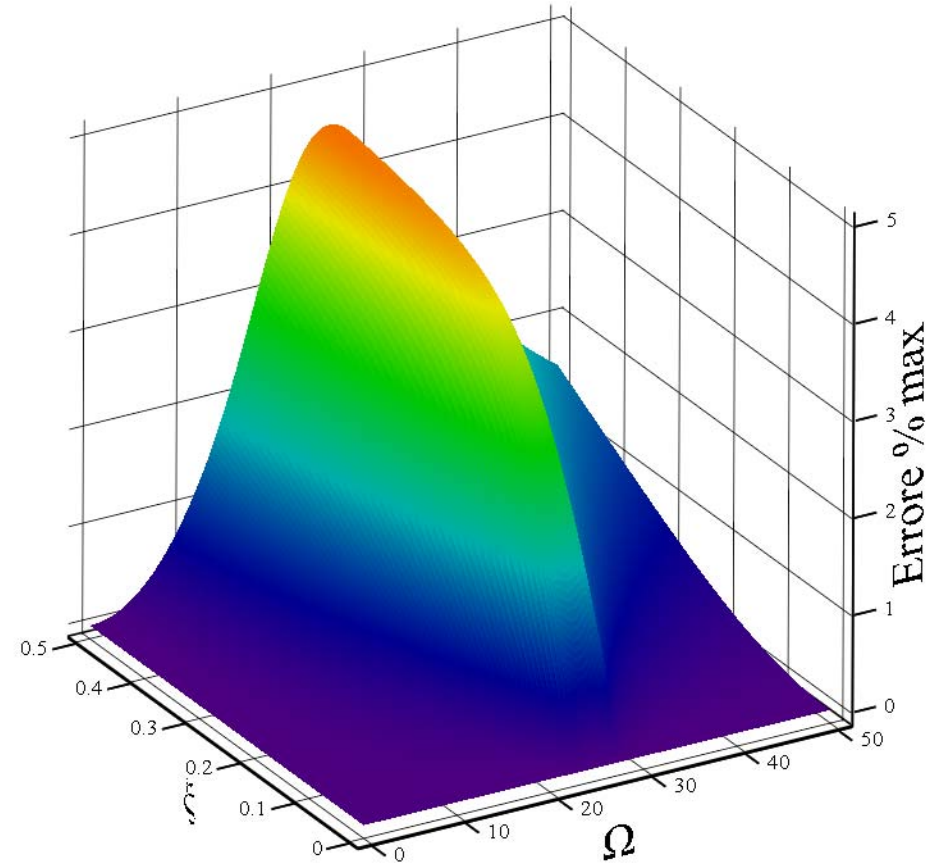
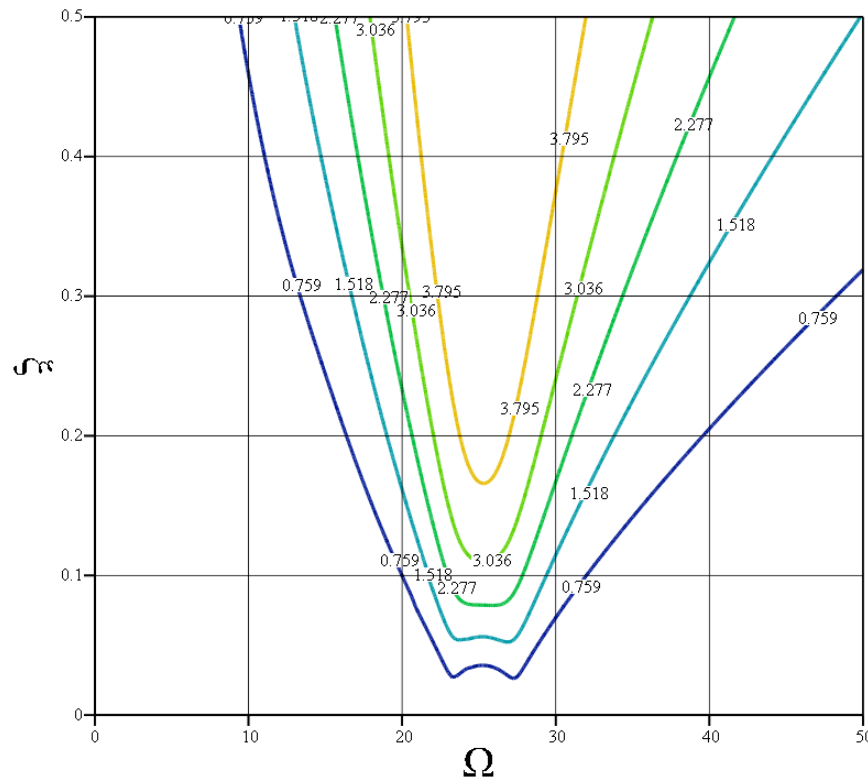
$$\xi = 0.025$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

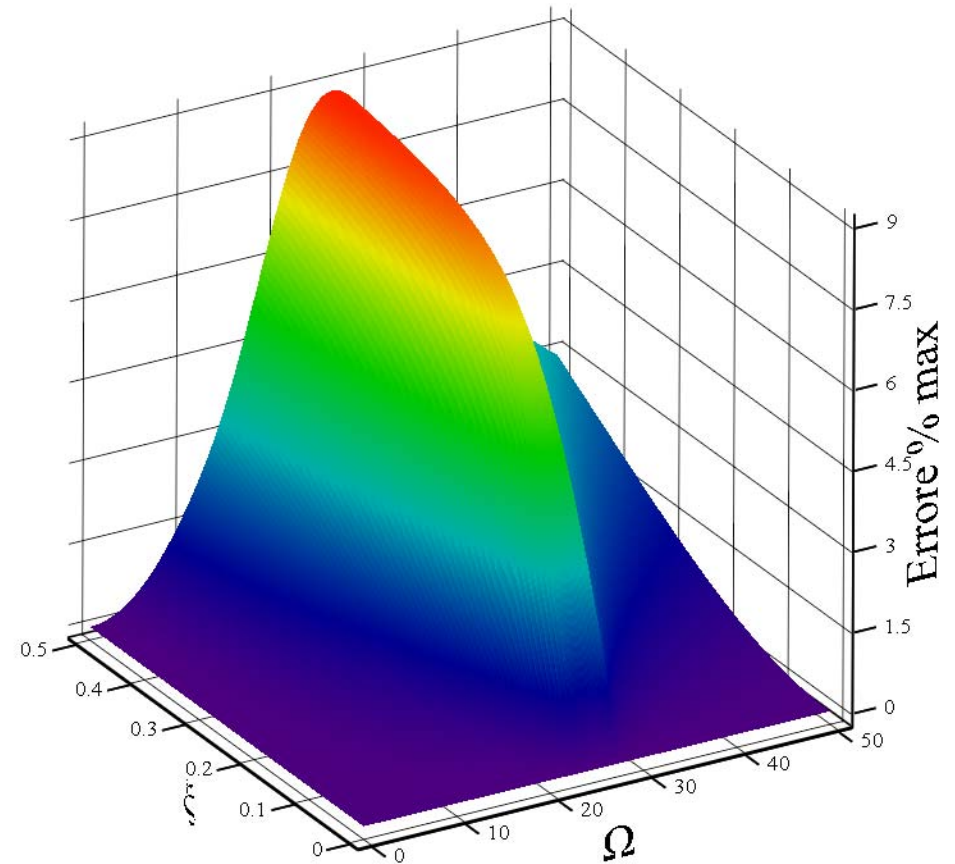
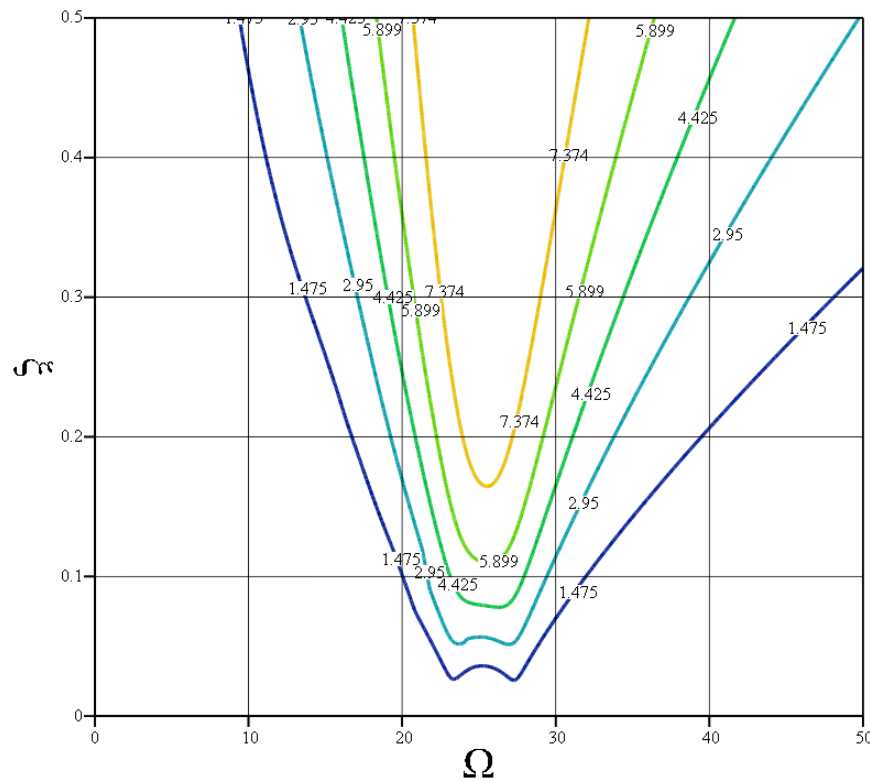
$$\Gamma = 0.05$$





# SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\Gamma = 0.1$$







## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Osservazioni:

- l'errore percentuale massimo commesso trascurando i termini fuori diagonale appare dipendere principalmente dal Coefficiente di accoppiamento  $\Xi$ , riducendosi a poche unità percentuali su tutto il campo di frequenze e smorzamenti analizzato per  $\Xi < 0.01$ .
- l'errore percentuale massimo appare dipendente anche dal livello generale di smorzamento  $\xi$ , assumendo generalmente valori inferiori a poche unità percentuali per  $\xi < 0.1$
- esistono tuttavia delle condizioni (Es: valori di  $\xi$  relativamente elevati  $>0.1-0.2$ ) nelle quali l'errore commesso trascurando i termini fuori diagonale può risultare inaccettabile; in tali condizioni, diventa necessario risolvere direttamente le equazioni del moto accoppiate, ricorrendo all'**Analisi Modale/Armonica Non Classica**, tramite la tecnica detta dello **Spazio delle Variabili di Stato** o dello **Spazio degli Stati**.