



# ANALISI DINAMICA

## Principali tipi di analisi

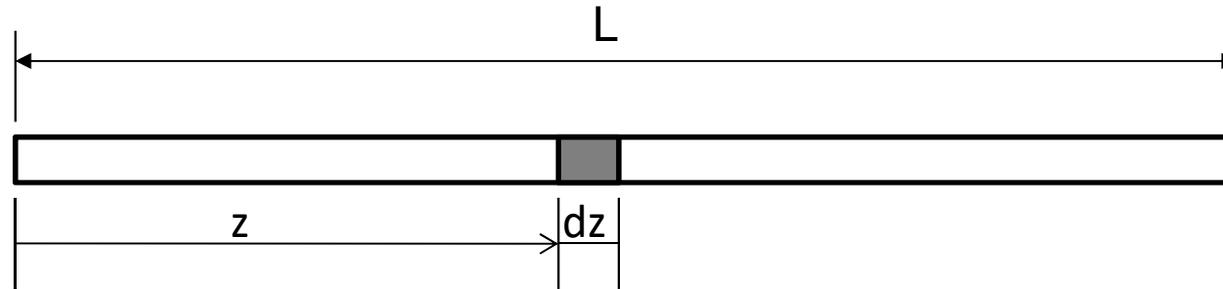
- analisi modale
- analisi della risposta armonica
- analisi di transitorio dinamico



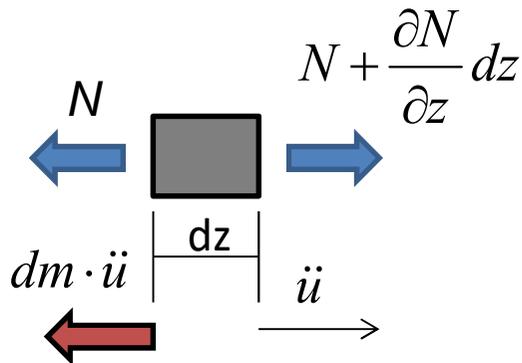
# VIBRAZIONI DI SISTEMI CONTINUI

- Un mezzo continuo ha **infiniti** gdl e, di conseguenza, **infiniti modi propri** di vibrare
- L'analisi delle vibrazioni di sistemi continui è molto complessa e sono disponibili soluzioni in forma chiusa (analitiche) solo per i casi più semplici
- Casi che saranno trattati
  - Trave
    - Vibrazioni estensionali (soluzione completa)
    - Vibrazioni flessionali (soluzione completa)
  - Piastra circolare
    - Vibrazioni flessionali (caratteristiche della soluzione)

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



Equazione di equilibrio:



$$\rho A dz \cdot \ddot{u} = N + \frac{\partial N}{\partial z} dz - N$$

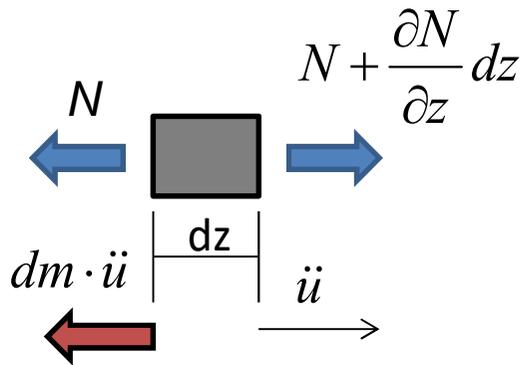
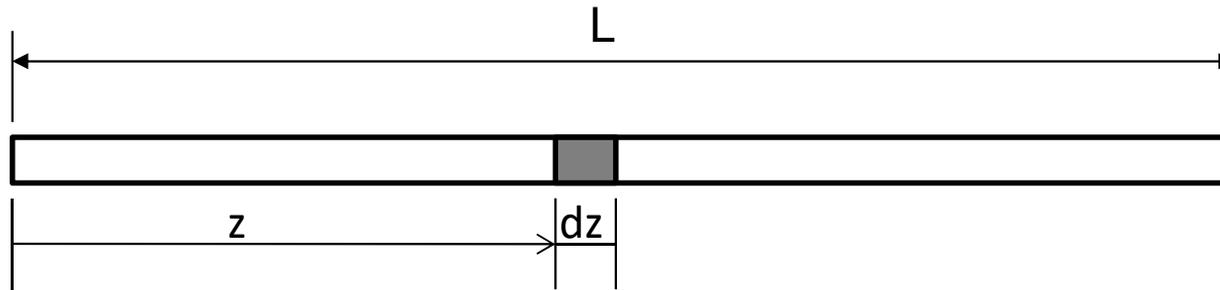
$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$N = EA \varepsilon = EA \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho A \ddot{u} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

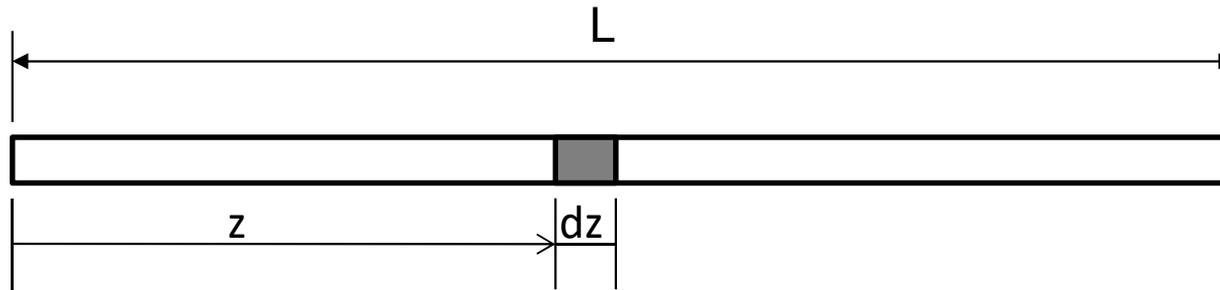


$$\rho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\ddot{u} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$\ddot{u} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

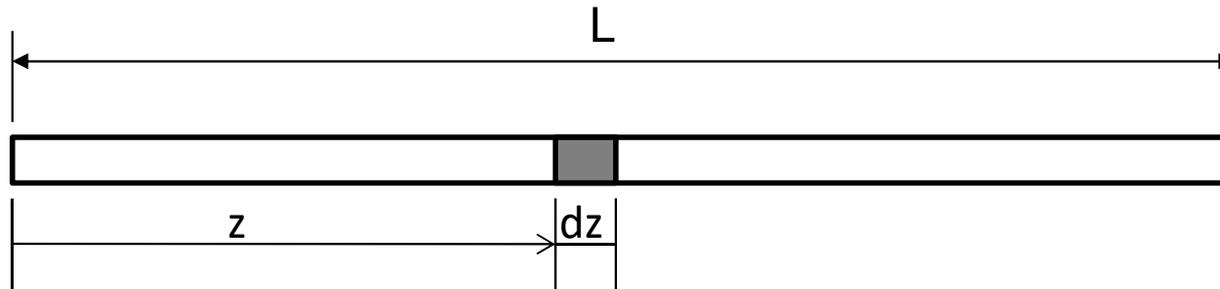
$$u(z, t) = Z(z)T(t)$$

$$\ddot{u}(z, t) = Z(z) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = T(t) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

$$Z(z) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 T(t) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$Z(z) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 T(t) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

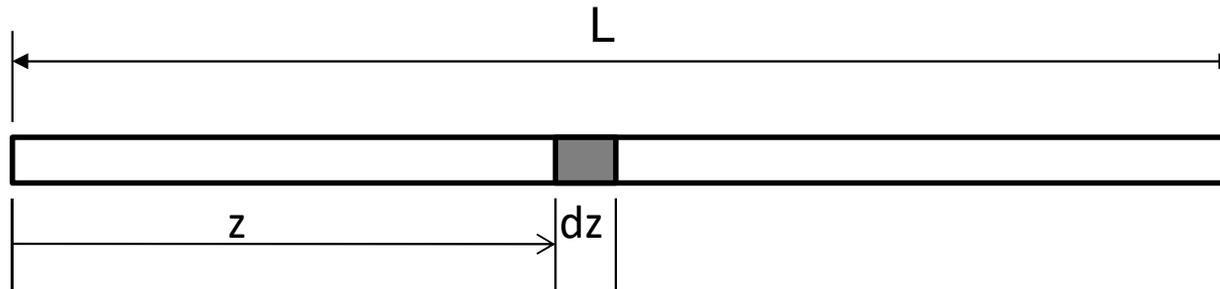


$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \frac{T(t)}{Z(z)}$$



$$\frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \frac{Z''}{Z}$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$\frac{\ddot{T}}{T} = a = v^2 \frac{Z''}{Z}$$



$$\begin{aligned} \ddot{T} - aT &= 0 \\ v^2 Z'' - aZ &= 0 \end{aligned}$$

$$a = -\omega^2$$



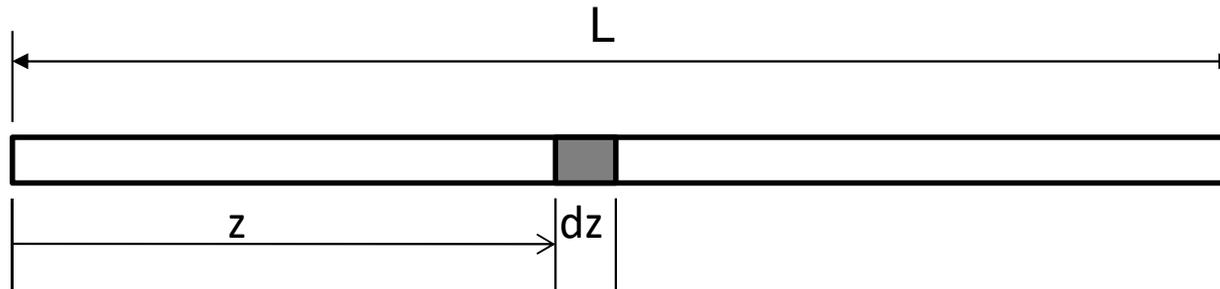
$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$Z'' + \frac{\omega^2}{v^2} Z = 0$$

$$Z(z) = C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} z\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} z\right)$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



Trave bloccata agli estremi

$$u(0, t) = Z(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = Z(L)T(t) = 0$$

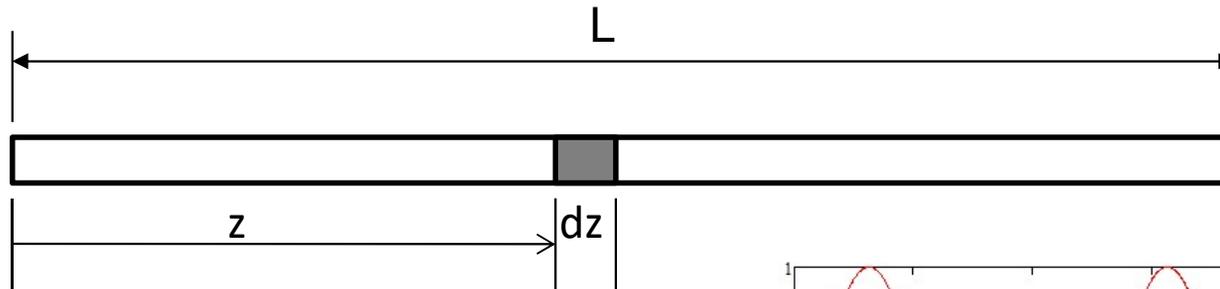
$$Z(0) = C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} 0\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} 0\right) = C = 0$$

$$Z(L) = D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} L\right) = 0$$

$$\frac{\omega}{v} L = k\pi$$

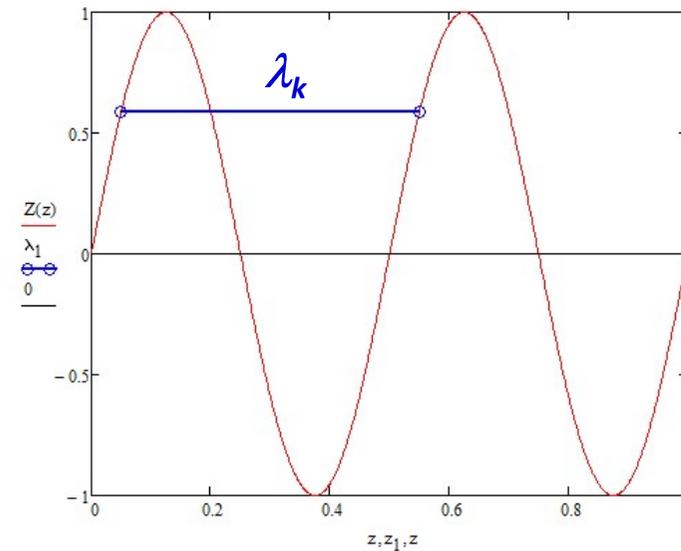
$$\omega = \frac{k\pi v}{L} = \frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$Z_k(z) = D_k \sin\left(k \frac{\pi}{L} z\right)$$

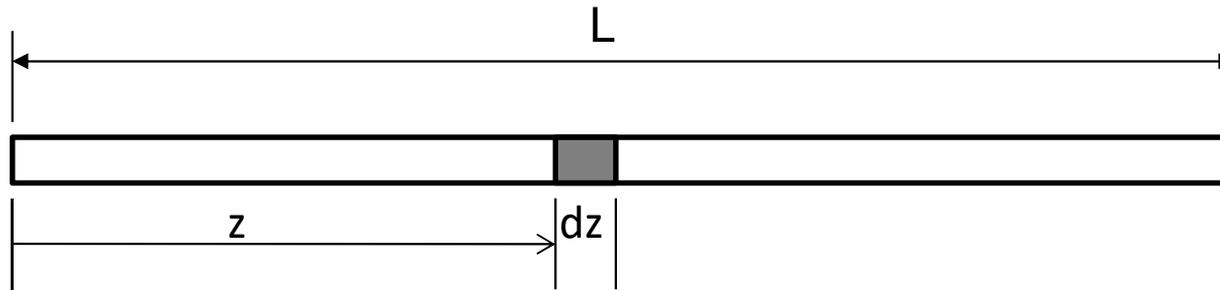
Si può introdurre il parametro:  $\lambda_k = \frac{2L}{k}$



che corrisponde alla distanza tra punti corrispondenti in onde successive (lunghezza d'onda), esprimendo la funzione normale come:

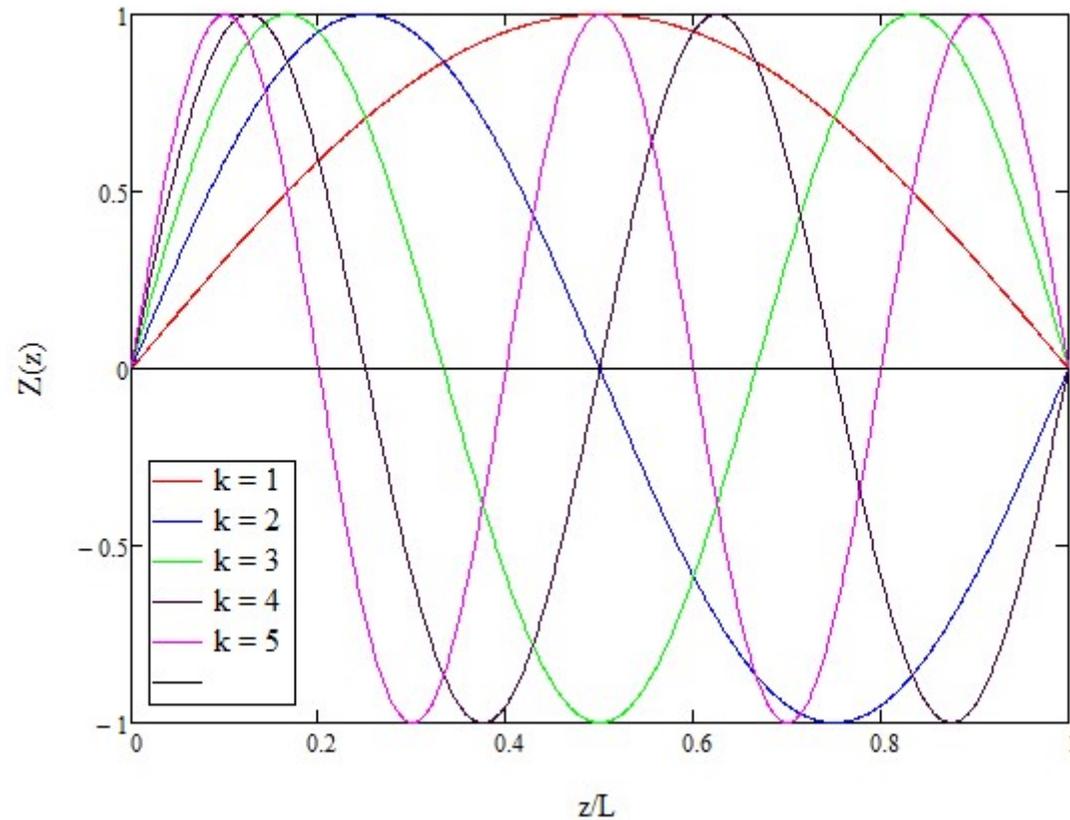
$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



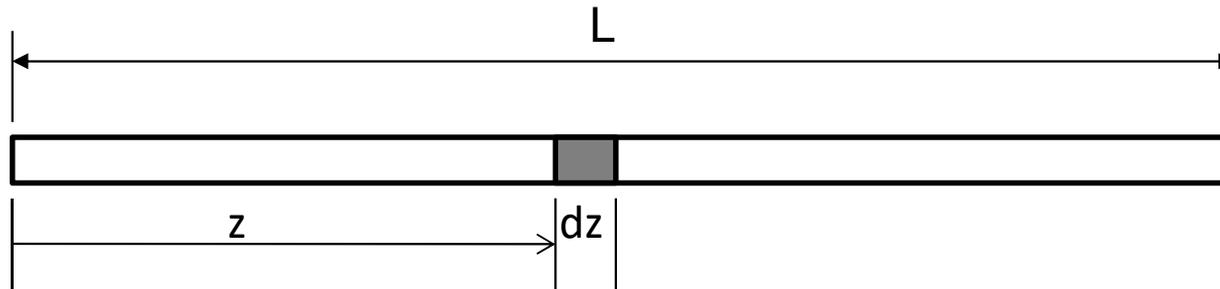
$$\lambda_k = \frac{2L}{k}$$

$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



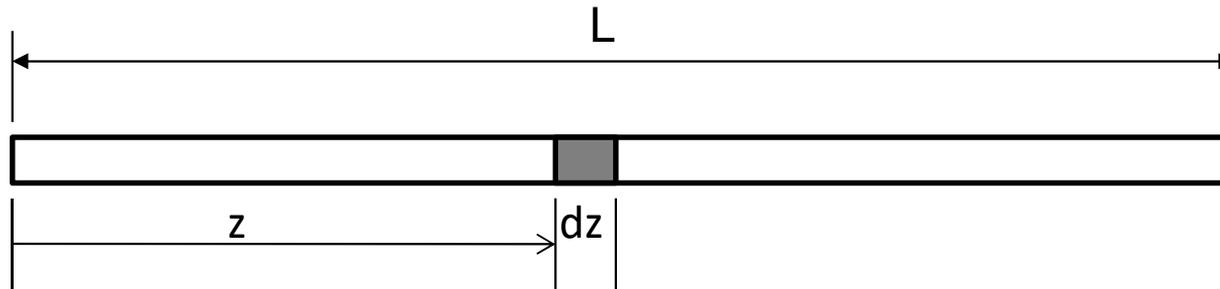
L'oscillazione libera secondo la generica forma modale sarà data da una funzione del tipo:

$$u_k(z, t) = \left[ A_k D_k \cdot \cos(\omega_k t) + B_k D_k \cdot \sin(\omega_k t) \right] \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

nella quale le due costanti  $A_k D_k$  e  $B_k D_k$  devono essere determinate in base alle condizioni iniziali. L'oscillazione libera generale sarà infine data da:

$$u(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k D_k \cdot \cos(\omega_k t) + B_k D_k \cdot \sin(\omega_k t) \right] \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



L'oscillazione libera secondo la generica forma modale sarà data da una funzione del tipo:

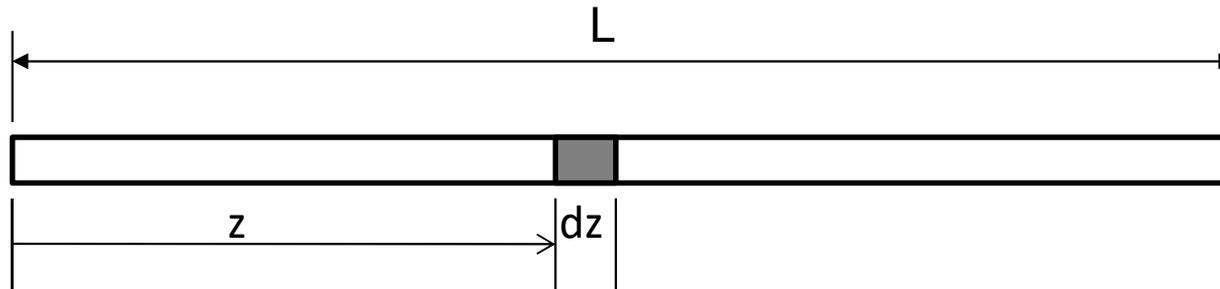
$$u_k(z, t) = E_k \cdot \cos(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) + F_k \cdot \sin(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

$$u_k(z, t) = \frac{E_k}{2} \cdot \left[ \cos(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) + \sin(\omega_k t) \cos\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) - \sin(\omega_k t) \cos\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) + \cos(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) \right]$$

$$+ \frac{F_k}{2} \cdot \left[ \sin(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) + \cos(\omega_k t) \cos\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) - \cos(\omega_k t) \cos\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) + \sin(\omega_k t) \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) \right]$$

$$u_k(z, t) = \frac{E_k}{2} \cdot \left[ \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z + \omega_k t\right) + \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z - \omega_k t\right) \right] + \frac{F_k}{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\omega_k}{v} z + \omega_k t\right) + \cos\left(\frac{\omega_k}{v} z - \omega_k t\right) \right]$$

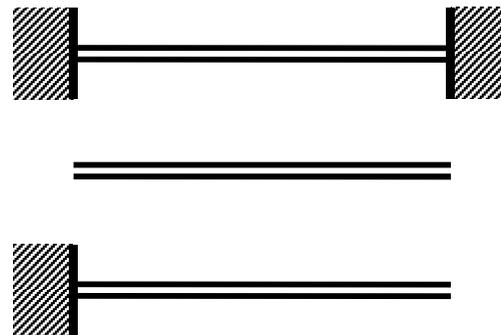
## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



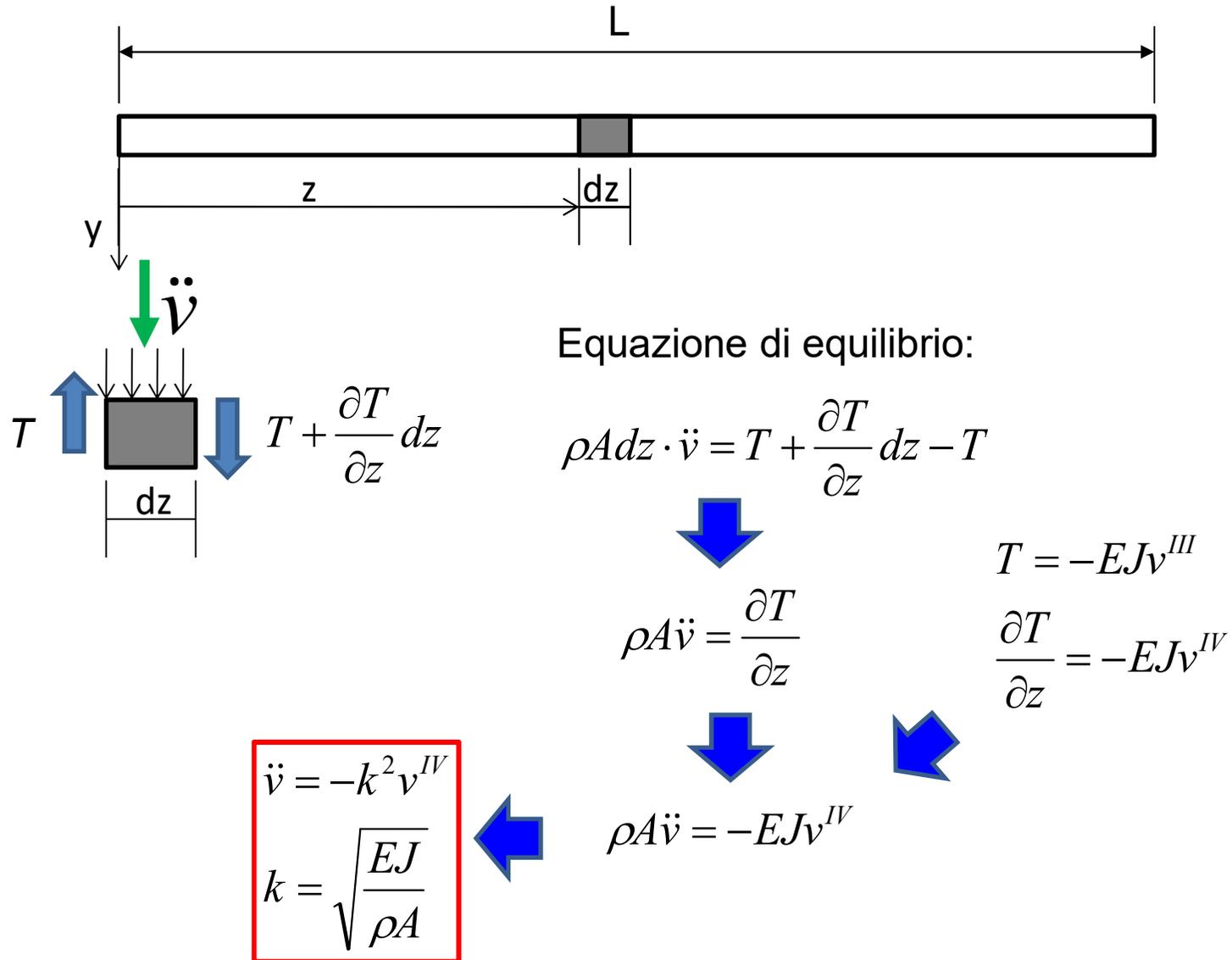
Le frequenze proprie, per altre modalità di vincolo, sono date dalla seguente relazione generale, nella quale il coefficiente  $K(k)$  dipende da queste ultime:

$$\omega_k = K(k) \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

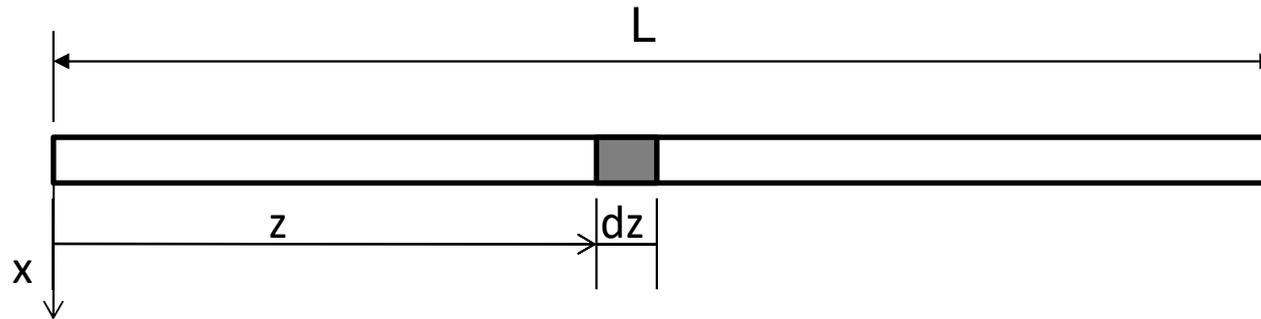
	$K(k)$
Incastrato-incastrato	$k$
Libero-libero	$k$
Incastrato-libero	$k+1/2$



## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$\ddot{v} = k^2 v^{IV}$$

$$v(z, t) = V(z)T(t)$$



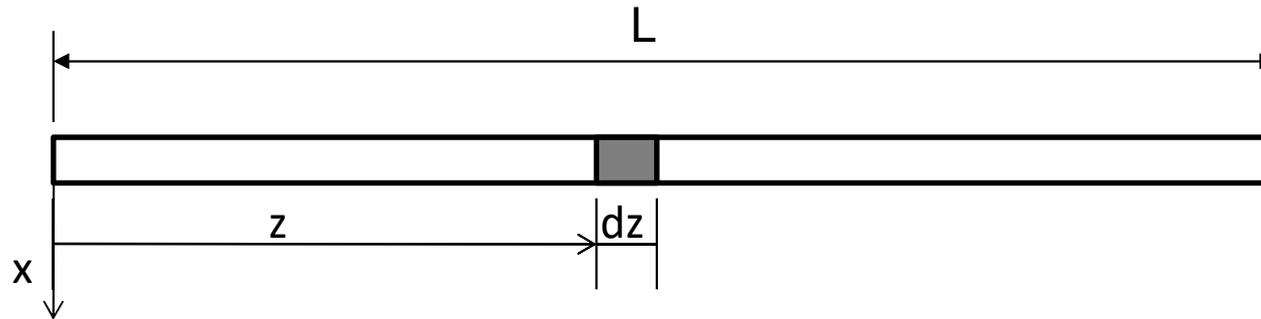
$$\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \frac{V^{IV}}{V} = -\omega^2$$



$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$V^{IV} - \frac{\omega^2}{k^2} V = 0$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI

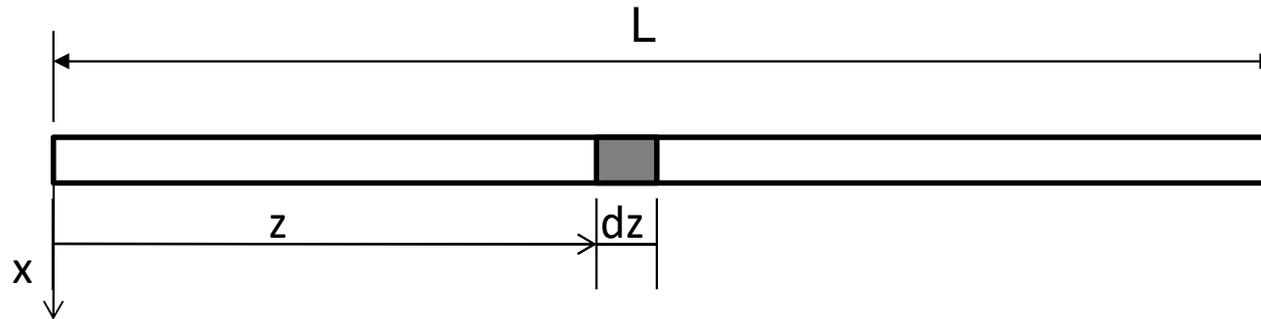


$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$



$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$V^{IV} - \frac{\omega^2}{k^2} V = 0$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\omega}{k}}$$



$$V^{IV} - \chi^4 V = 0$$

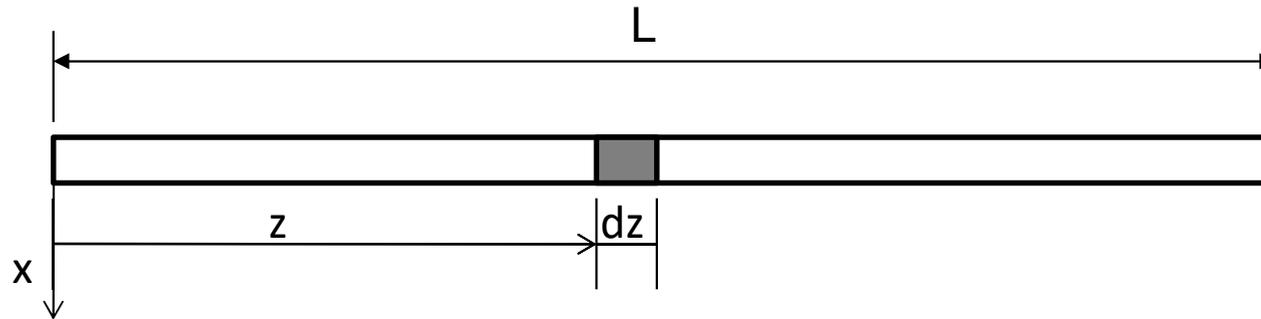


$$s^4 - \chi^4 = 0$$

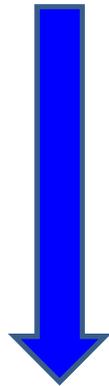
$$s = \pm \chi; \pm i\chi$$

$$V(z) = C_1 \cdot e^{\chi z} + D_1 \cdot e^{-\chi z} + E_1 \cdot e^{i\chi z} + F_1 \cdot e^{-i\chi z}$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$V(z) = C_1 \cdot e^{\chi z} + D_1 \cdot e^{-\chi z} + E_1 \cdot e^{i\chi z} + F_1 \cdot e^{-i\chi z}$$



$$\sin(\chi z) = \frac{e^{i\chi z} - e^{-i\chi z}}{2i}$$

$$\cos(\chi z) = \frac{e^{i\chi z} + e^{-i\chi z}}{2}$$

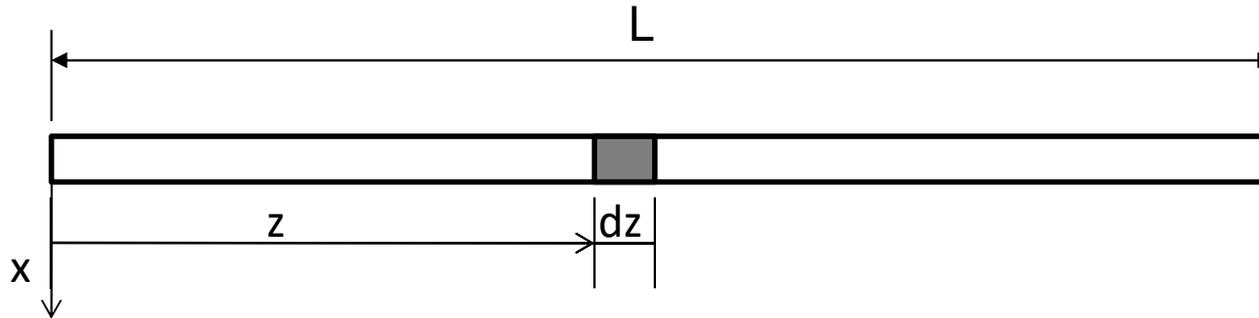
$$\sinh(\chi z) = \frac{e^{\chi z} - e^{-\chi z}}{2}$$

$$\cosh(\chi z) = \frac{e^{\chi z} + e^{-\chi z}}{2}$$



$$V(z) = C \cdot \sin(\chi z) + D \cdot \cos(\chi z) + E \cdot \sinh(\chi z) + F_1 \cdot \cosh(\chi z)$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$\sinh(0) = 0 \quad \frac{d}{dt} \sinh(t) = \cosh(t) \quad (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1$$

$$\cosh(0) = 1 \quad \frac{d}{dt} \cosh(t) = \sinh(t)$$

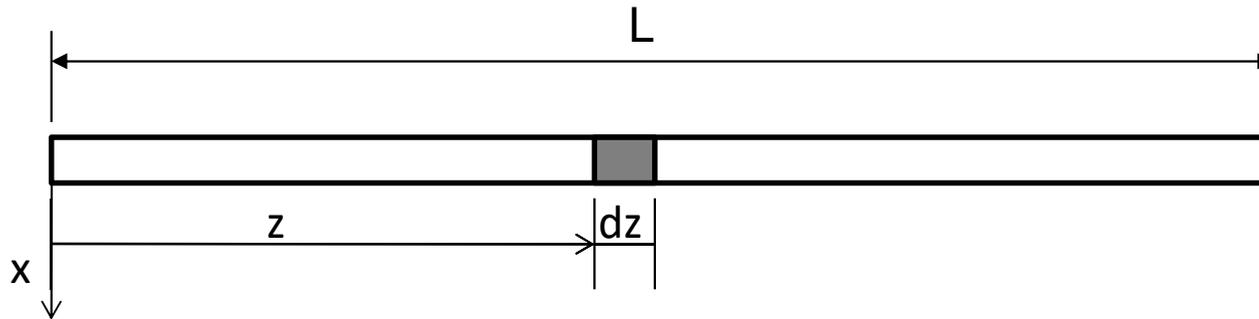
$$V^I(z) = C\chi \cos(\chi z) - D\chi \sin(\chi z) + E\chi \cosh(\chi z) + F\chi \sinh(\chi z)$$

$$V^{II}(z) = -C\chi^2 \sin(\chi z) - D\chi^2 \cos(\chi z) + E\chi^2 \sinh(\chi z) + F\chi^2 \cosh(\chi z)$$

$$V^{III}(z) = -C\chi^3 \cos(\chi z) + D\chi^3 \sin(\chi z) + E\chi^3 \cosh(\chi z) + F\chi^3 \sinh(\chi z)$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )

$$V^{II}(0) = V^{III}(0) = V^{II}(L) = V^{III}(L) = 0$$

$$V^{II}(0) = -C\chi^2 \sin(0) - D\chi^2 \cos(0) + E\chi^2 \sinh(0) + F\chi^2 \cosh(0) = F - D = 0$$

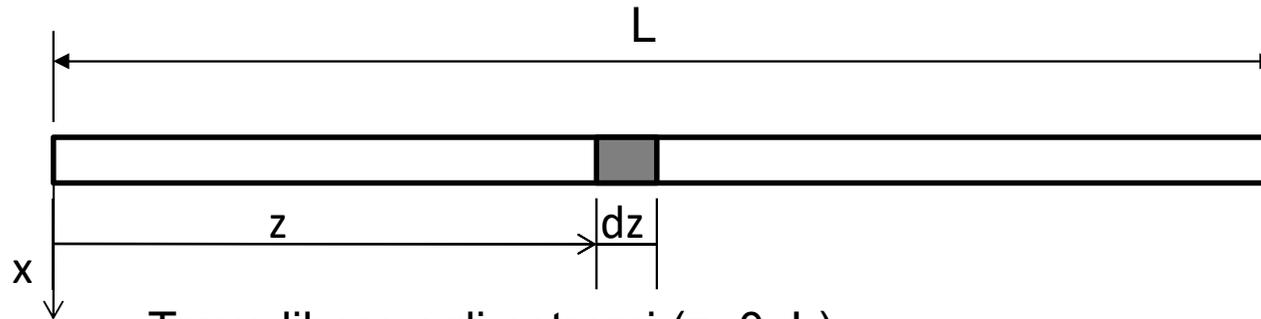
$$V^{III}(0) = -C\chi^3 \cos(0) + D\chi^3 \sin(0) + E\chi^3 \cosh(0) + F\chi^3 \sinh(0) = E - C = 0$$

$$V^{II}(L) = -C\chi^2 \sin(\chi L) - D\chi^2 \cos(\chi L) + E\chi^2 \sinh(\chi L) + F\chi^2 \cosh(\chi L) = 0$$

$$V^{III}(L) = -C\chi^3 \cos(\chi L) + D\chi^3 \sin(\chi L) + E\chi^3 \cosh(\chi L) + F\chi^3 \sinh(\chi L) = 0$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )

$$F - D = 0$$

$$E - C = 0$$

$$-C\chi^2 \sin(\chi L) - D\chi^2 \cos(\chi L) + E\chi^2 \sinh(\chi L) + F\chi^2 \cosh(\chi L) = 0$$

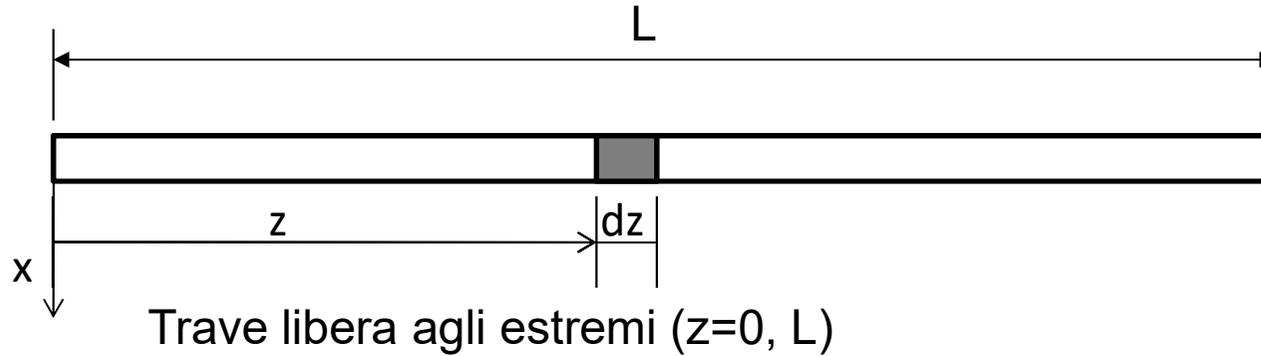
$$-C\chi^3 \cos(\chi L) + D\chi^3 \sin(\chi L) + E\chi^3 \cosh(\chi L) + F\chi^3 \sinh(\chi L) = 0$$

Per avere sln. non banale:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\chi^2 \sin(\chi L) & -\chi^2 \cos(\chi L) & \chi^2 \sinh(\chi L) & \chi^2 \cosh(\chi L) \\ -\chi^3 \cos(\chi L) & \chi^3 \sin(\chi L) & \chi^3 \cosh(\chi L) & \chi^3 \sinh(\chi L) \end{bmatrix} = 0$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



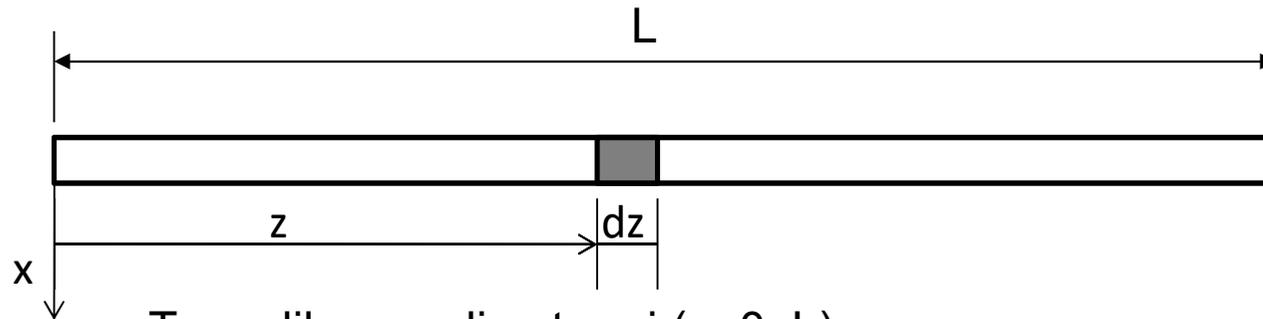
$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\chi^2 \sin(\chi L) & -\chi^2 \cos(\chi L) & \chi^2 \sinh(\chi L) & \chi^2 \cosh(\chi L) \\ -\chi^3 \cos(\chi L) & \chi^3 \sin(\chi L) & \chi^3 \cosh(\chi L) & \chi^3 \sinh(\chi L) \end{bmatrix} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left[ \chi^2 \sinh(\chi L) \chi^3 \sinh(\chi L) - \chi^2 \cosh(\chi L) \chi^3 \cosh(\chi L) \right] - \\ \left[ -\chi^2 \sin(\chi L) \chi^3 \sinh(\chi L) + \chi^2 \cosh(\chi L) \chi^3 \cos(\chi L) \right] \end{array} \right\} -$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} -\left[ -\chi^2 \cos(\chi L) \chi^3 \cosh(\chi L) - \chi^2 \sinh(\chi L) \chi^3 \sin(\chi L) \right] + \\ \left[ -\chi^2 \sin(\chi L) \chi^3 \sin(\chi L) - \chi^2 \cos(\chi L) \chi^3 \cos(\chi L) \right] \end{array} \right\} =$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )

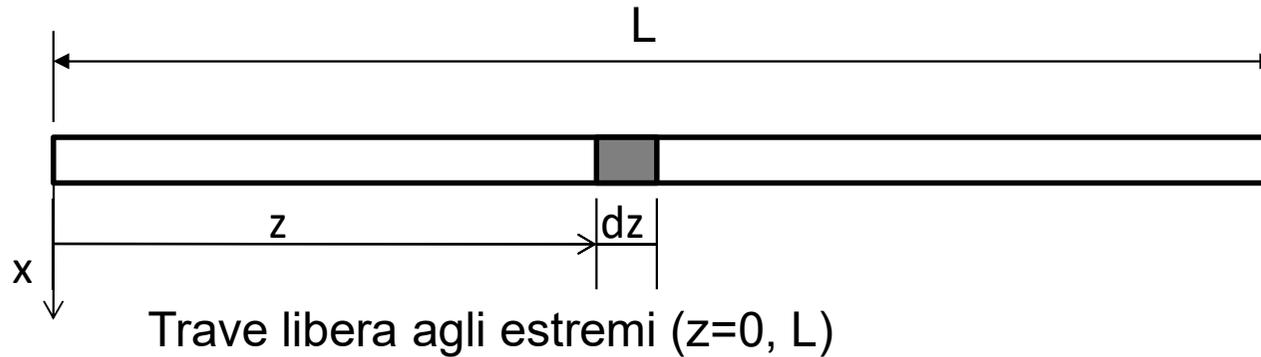
$$\left. \begin{aligned} & - \left[ \chi^5 \sinh^2(\chi L) - \chi^5 \cosh^2(\chi L) \right] - \\ & \left[ - \chi^5 \sin(\chi L) \sinh(\chi L) + \chi^5 \cosh(\chi L) \cos(\chi L) \right] \end{aligned} \right\}^-$$

$$= - \left. \begin{aligned} & \left[ \chi^5 \cos(\chi L) \cosh(\chi L) + \chi^5 \sinh(\chi L) \sin(\chi L) \right] + \\ & \left[ - \chi^5 \sin^2(\chi L) - \chi^5 \cos^2(\chi L) \right] \end{aligned} \right\} =$$

$$= \left. \begin{aligned} & \left[ \chi^5 \left[ \cosh^2(\chi L) - \sinh^2(\chi L) \right] + \right. \\ & \left. \left[ \chi^5 \left[ \sin(\chi L) \sinh(\chi L) - \cosh(\chi L) \cos(\chi L) \right] \right] \right\}^-$$

$$- \left. \begin{aligned} & \left[ \chi^5 \left[ \cos(\chi L) \cosh(\chi L) + \sinh(\chi L) \sin(\chi L) \right] - \right. \\ & \left. \left[ \chi^5 \left[ \sin^2(\chi L) + \cos^2(\chi L) \right] \right] \right\} =$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



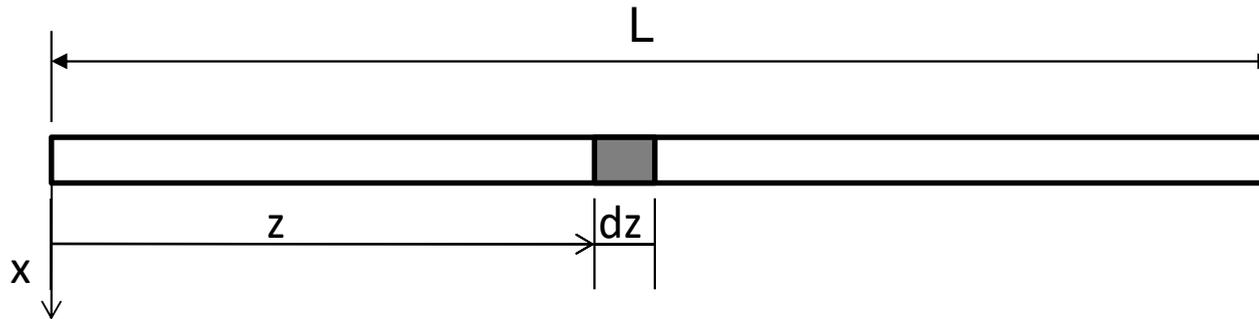
$$= \chi^5 \{1 + \sin(\chi L)\sinh(\chi L) - \cosh(\chi L)\cos(\chi L) - \cos(\chi L)\cosh(\chi L) - \sinh(\chi L)\sin(\chi L) + 1\} =$$

$$= 2\chi^5 \{1 - \cosh(\chi L)\cos(\chi L)\} = 0$$



$$\cosh(\chi L)\cos(\chi L) = 1$$

## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )

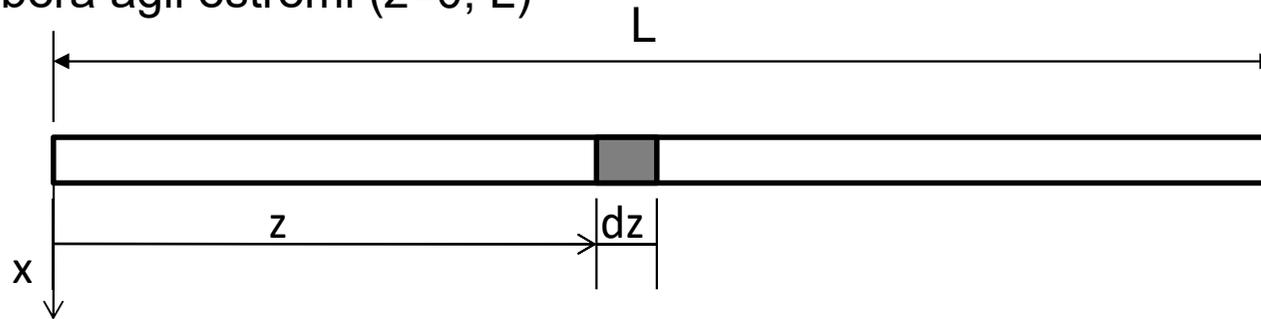
$$\cosh(\chi_n L) \cos(\chi_n L) = 1 \qquad \omega_n = \chi_n^2 k = \chi_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

<b>n</b>	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	4.730	7.853	10.996	14.137	$(n+1/2)\pi$

Valore asintotico  
(valido dopo i  
primi 3-4 termini)

## SISTEMI CONTINUI

## TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI

 Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )


$$F = D$$

$$E = C$$

$$-C \sin(\chi_n L) - D \cos(\chi_n L) + C \sinh(\chi_n L) + D \cosh(\chi_n L) = 0$$

$$C[\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)] - D[\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)] = 0$$

$$D = C \frac{[\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)]}{[\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)]}$$

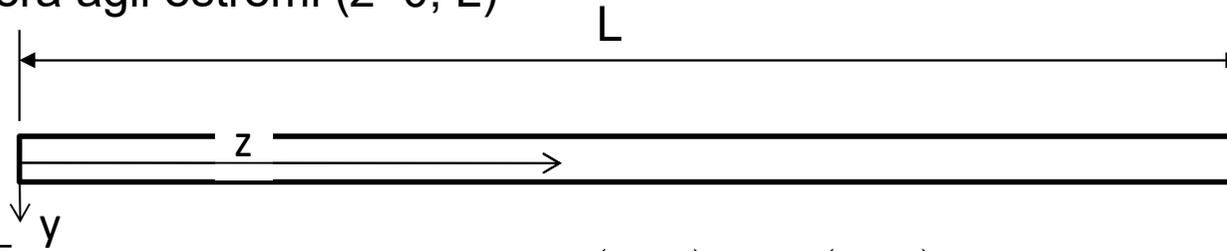
$$F = C \frac{[\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)]}{[\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)]}$$

$$E = C$$

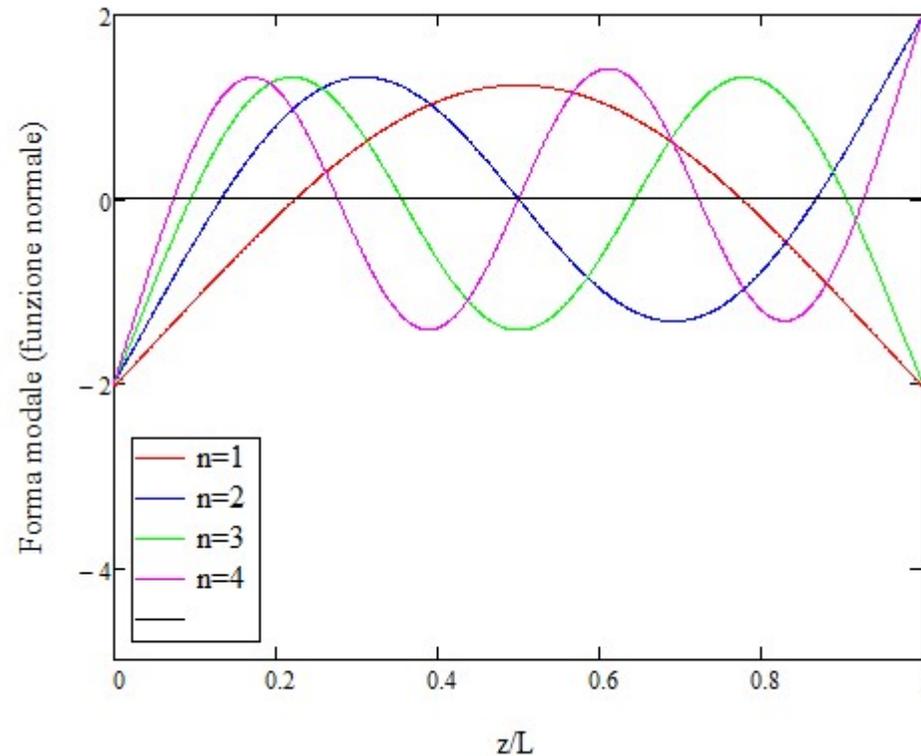
## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI

Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )

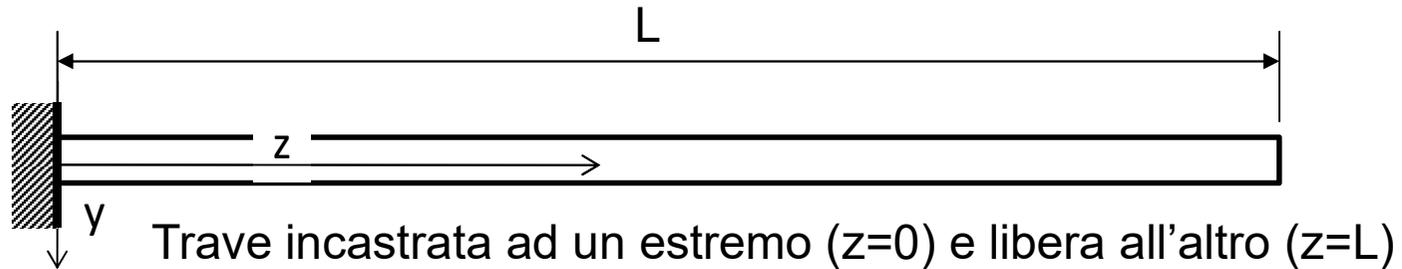


$$V_n(z) = C_n \left[ \sin(\chi_n z) + \sinh(\chi_n z) + \frac{\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)}{\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)} (\cos(\chi_n z) + \cosh(\chi_n z)) \right]$$



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



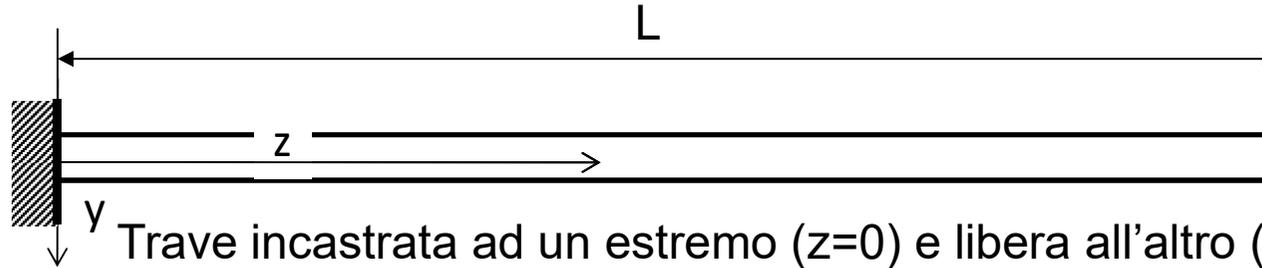
Condizioni al contorno  $V(0) = V'(0) = 0$        $V''(L) = V'''(L) = 0$

$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

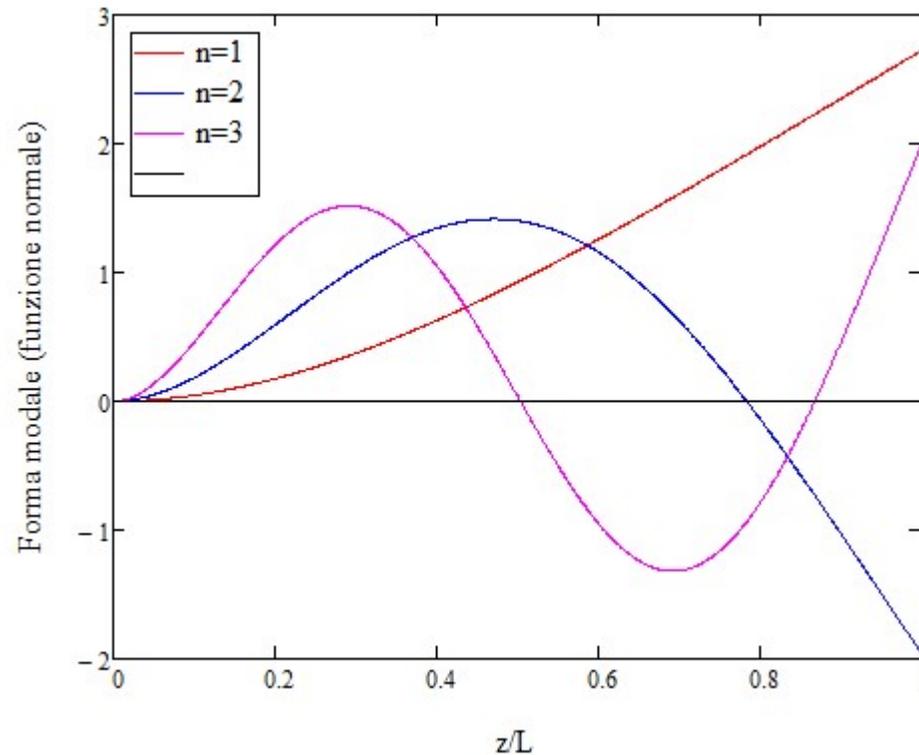
n	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	1.875	4.694	7.855	10.996	$(n-1/2)\pi$

## SISTEMI CONTINUI

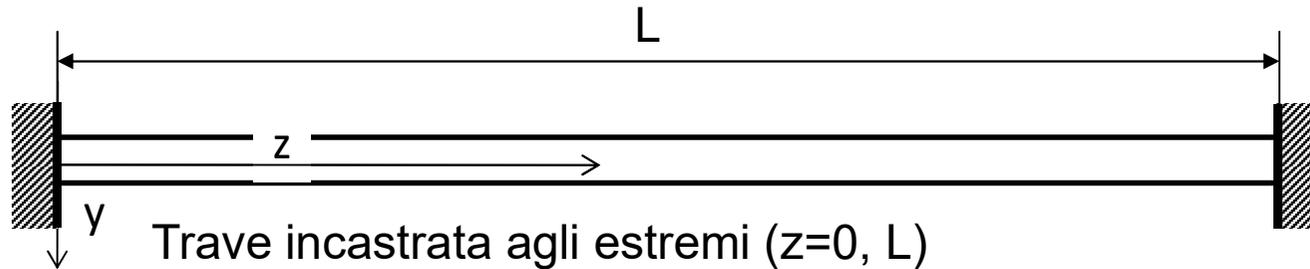
### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$V_n(z) = C_n \left[ \sin(\chi_n z) - \sinh(\chi_n z) - \frac{\sinh(\chi_n L) + \sin(\chi_n L)}{\cos(\chi_n L) + \cosh(\chi_n L)} (\cos(\chi_n z) - \cosh(\chi_n z)) \right]$$



## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI

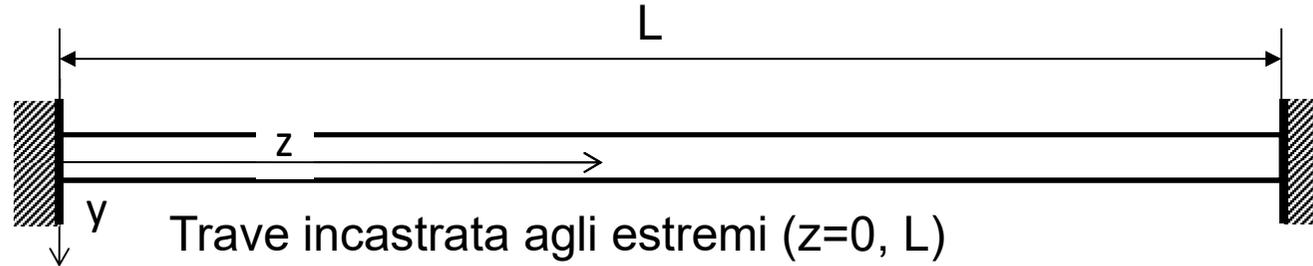


Condizioni al contorno  $V(0) = V^I(0) = 0$   $V^{II}(L) = V^{III}(L) = 0$

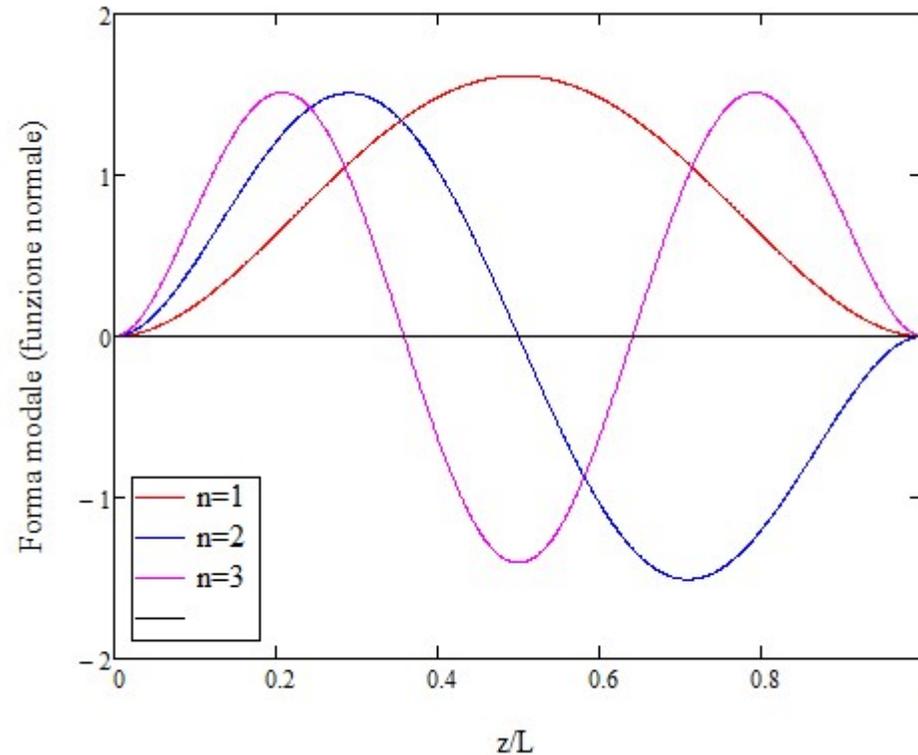
$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

n	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	4.730	7.853	10.996	14.137	$(n+1/2)\pi$

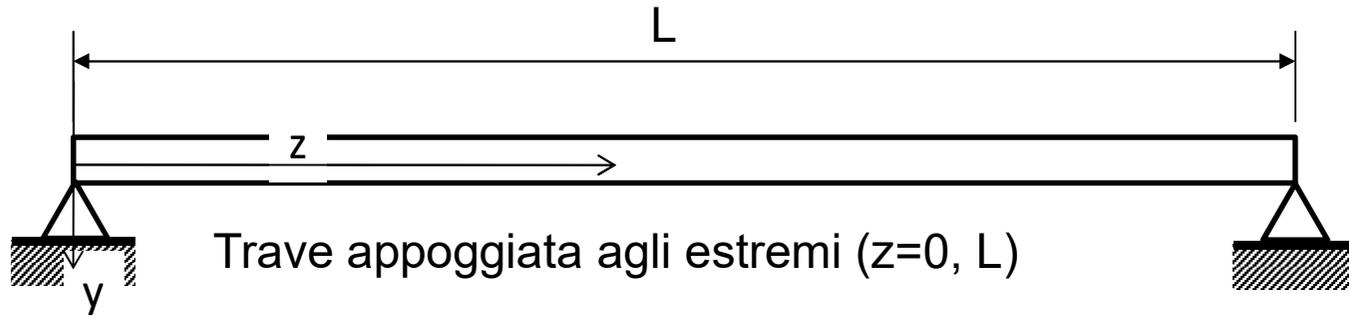
## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$V_n(z) = C_n \left[ \sinh(\chi_n z) - \sin(\chi_n z) + \frac{\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)}{\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)} (\cosh(\chi_n z) - \cos(\chi_n z)) \right]$$



## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



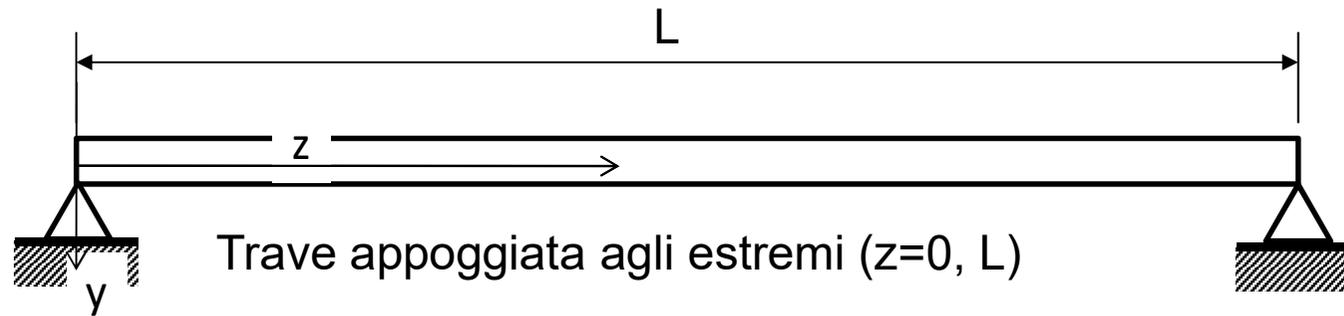
Condizioni al contorno  $V(0) = V''(0) = 0$        $V(L) = V''(L) = 0$

$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

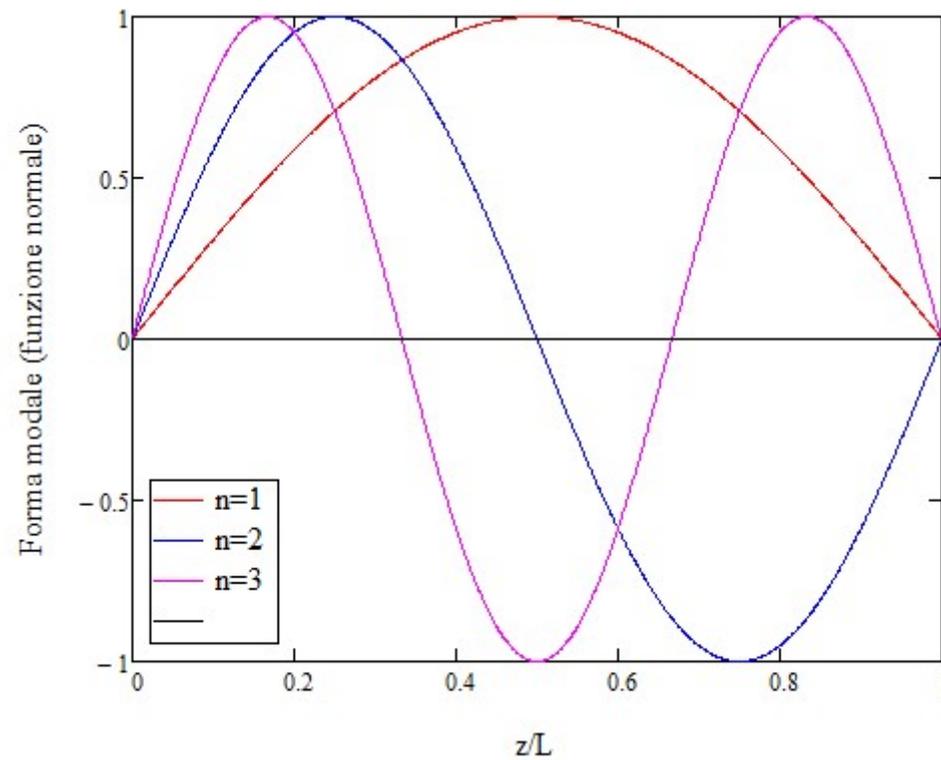
<b>n</b>	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$n\pi$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



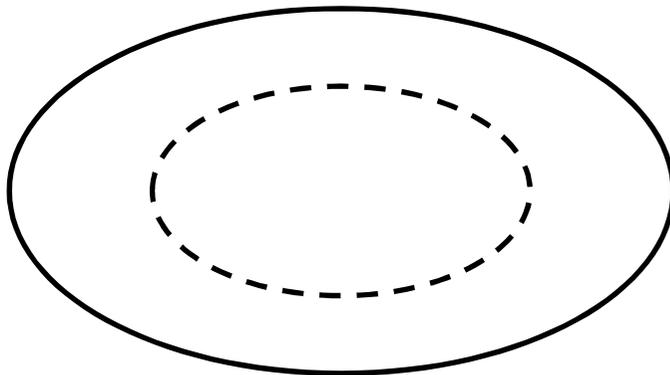
$$V_n(z) = C_n [\sin(\chi_n z)]$$



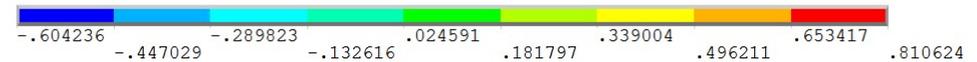
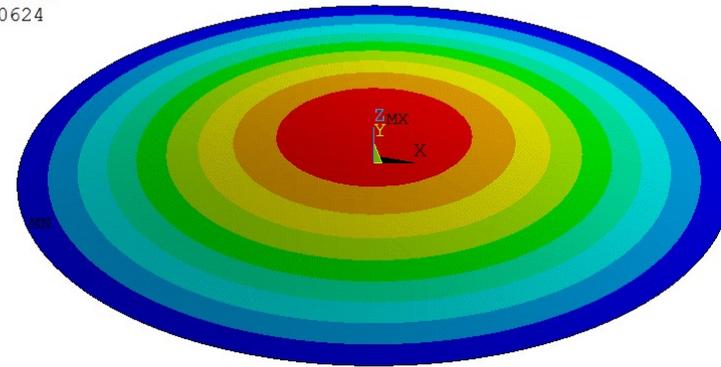
## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare possono prevedere:

- forme modali simmetriche, che presentano circonferenze nodali, i cui punti non si spostano durante la vibrazione



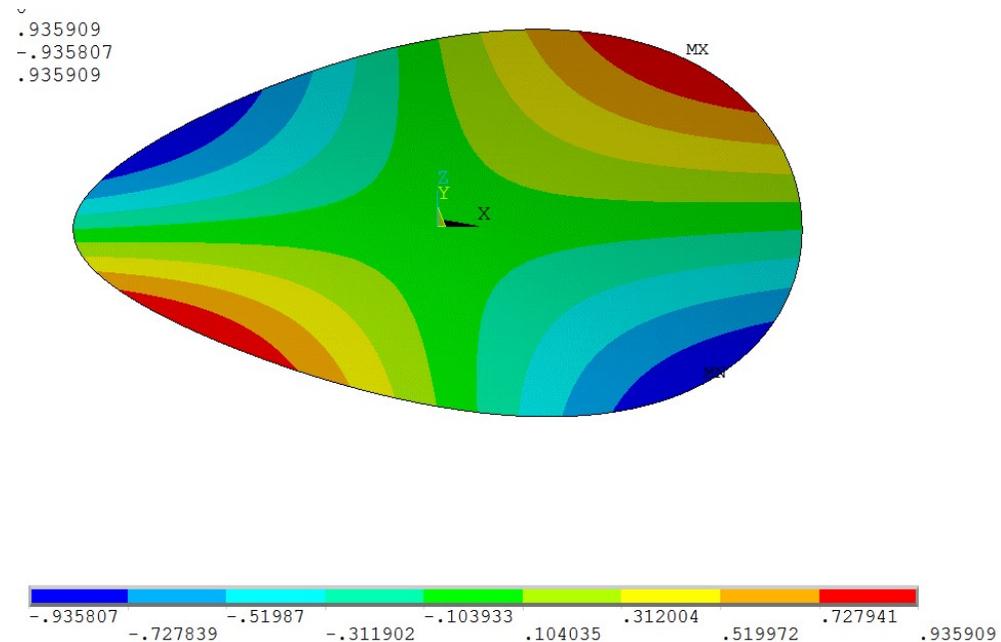
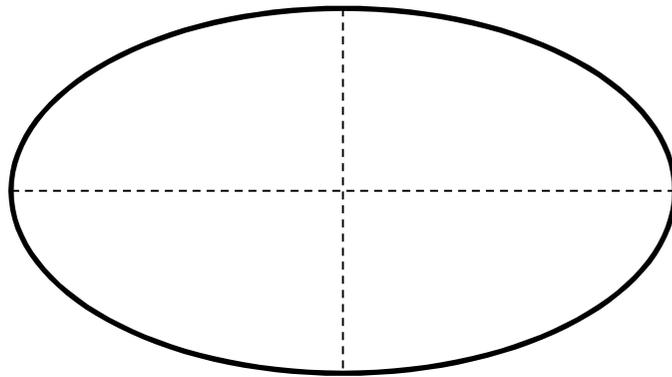
DMX = .810624  
SMN = -.604236  
SMX = .810624



## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare possono prevedere:

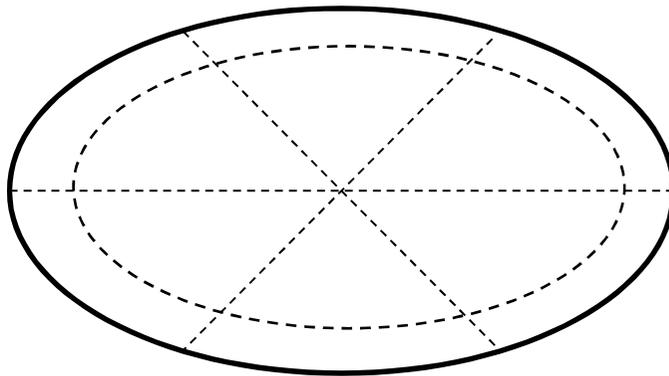
- **forme modali simmetriche**, che presentano **circonferenze nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione
- **forme modali anti-simmetriche**, che presentano **diametri nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione



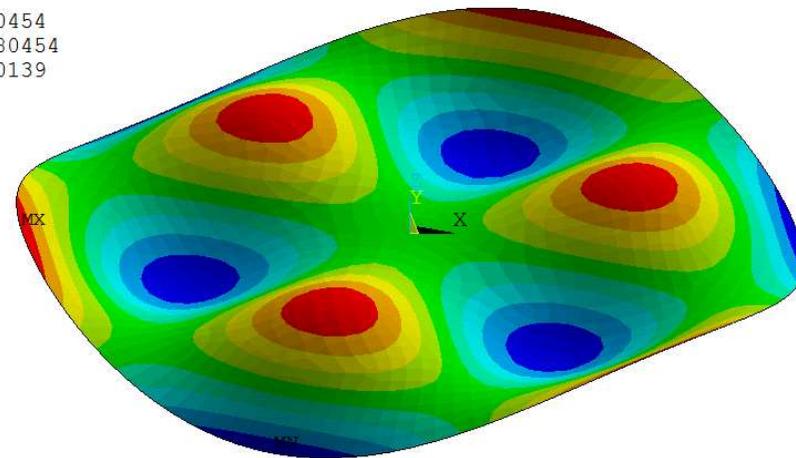
## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare possono prevedere:

- **forme modali simmetriche**, che presentano **circonferenze nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione
- **forme modali anti-simmetriche**, che presentano **diametri nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione
- **forme modali miste**, che presentano sia **circonferenze** che **diametri nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione



$\nu$   
 .880454  
 -.880454  
 .880139



## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare di raggio  $R$ , sono date dalla seguente relazione:

$$\omega_{n,m} = \frac{\alpha_{n,m}}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

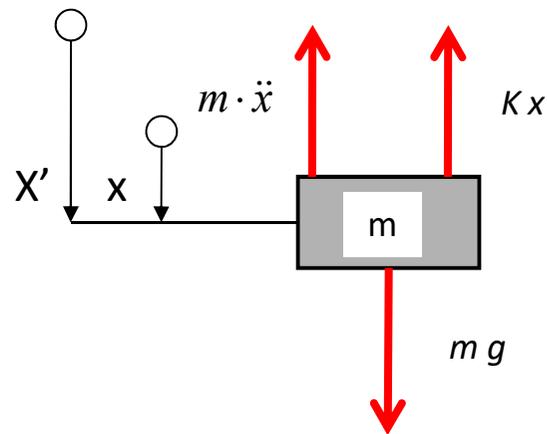
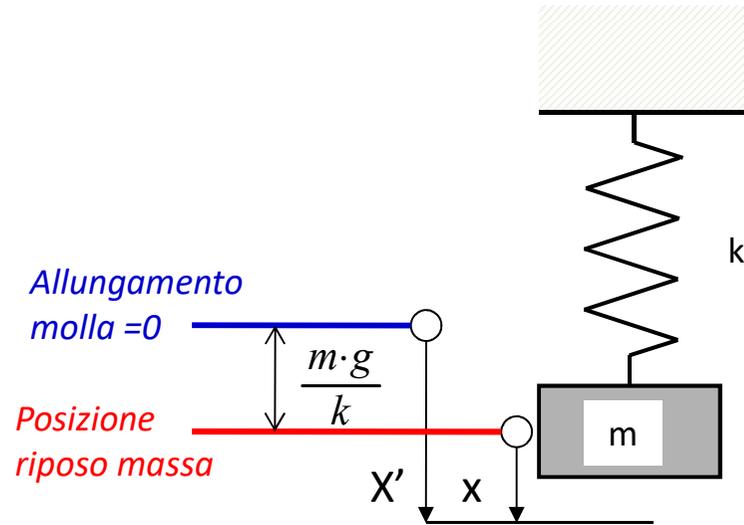
Libera al bordo esterno

$\alpha_{nm}$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=0$	0	0	5,251
$n=1$	9,076	20,52	35,24
$n=2$	38,52	59,86	–

Incastrata al bordo esterno

$\alpha_{nm}$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=0$	10,21	21,22	34,84
$n=1$	39,78	60,84	84,58
$n=2$	88,90	120,08	153,81

## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO



$$\ddot{X}' = \ddot{x}$$

$$-m\ddot{X}' - kX' + mg = 0$$

$$-m\ddot{x} - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) + mg = 0$$

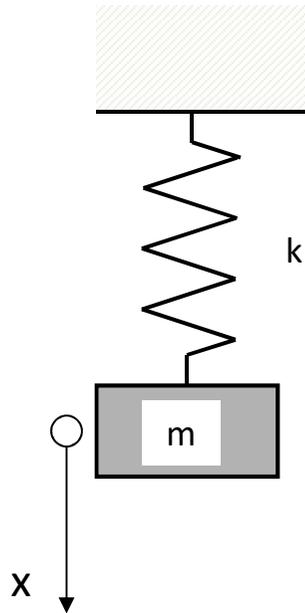
$$-m\ddot{x} - kx - mg + mg = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Equazione del moto non influenzata dalla forza peso

## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

$$z^2 + \omega_n^2 = 0 \qquad z_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

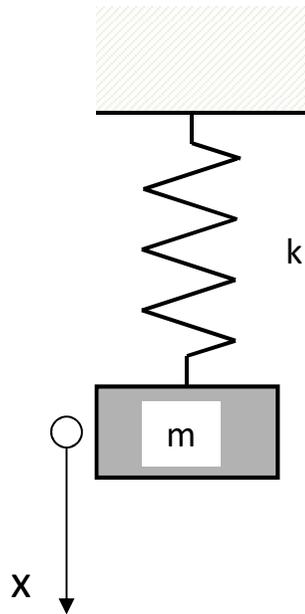
$$x(t) = C_3 \cos(\omega_n t) + C_4 \sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = C_5 \cos(\omega_n t + \varphi_6)$$

$$x(t) = C_7 \cos(\omega_n t + \varphi_8)$$

## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Energia totale

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Soluzione trovata

$$x(t) = A \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega_n \cos(\omega_n t)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \cdot (A \omega_n \cos(\omega_n t))^2 + \frac{1}{2} k \cdot (A \sin(\omega_n t))^2 = \\ &= \frac{A^2}{2} (m \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t) + k \sin^2(\omega_n t)) \end{aligned}$$

$$E = \text{cost} \rightarrow m \omega_n^2 = k$$

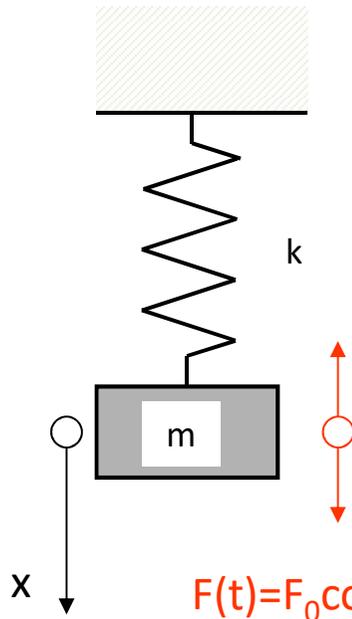
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{A^2}{2} \left( m \frac{k}{m} \cos^2(\omega_n t) + k \sin^2(\omega_n t) \right) = \\ &= \frac{A^2 k}{2} (\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)) = \frac{A^2 k}{2} = \text{cost} \end{aligned}$$

### OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} \quad (\Omega \neq \omega_n)$$



$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} + X e^{i\Omega t}$$

Integrale generale  
omogenea associata

Integrale particolare  
non omogenea

Verifica validità integrale particolare non omogenea:

$$x(t) = X e^{i\Omega t}$$

$$\dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

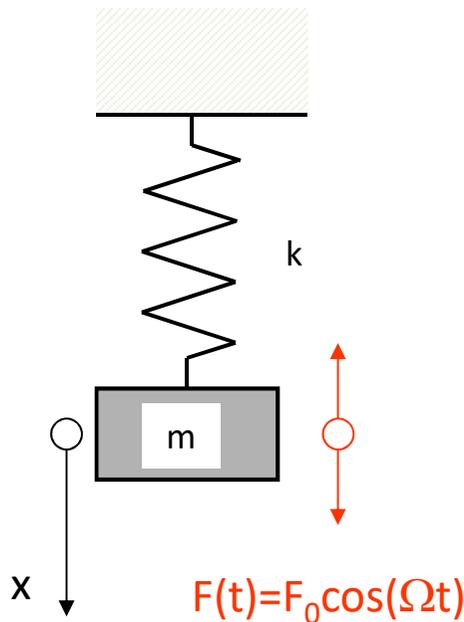
$$-m\Omega^2 X e^{i\Omega t} + kX e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{m\Omega^2}{k}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} = F_0 \cos(\Omega t) \quad (\Omega \neq \omega_n)$$



$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} + X e^{i\Omega t}$$

Integrale generale  
omogenea associata

Integrale particolare  
non omogenea

$C_1$  e  $C_2$  sono numeri complessi determinati dalle condizioni iniziali.

Se si adotta in particolare:

$$x(0) = X$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

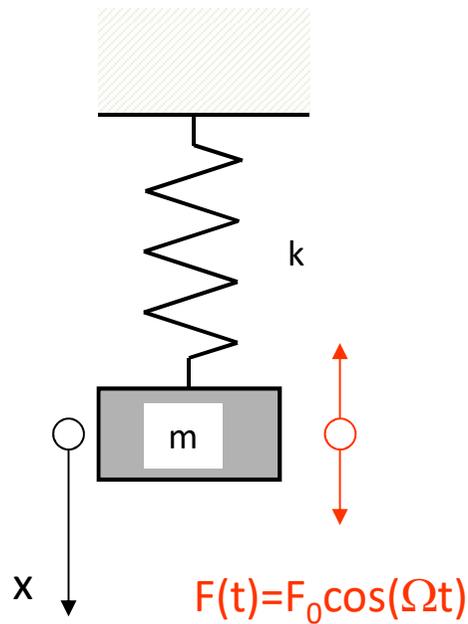
si ottiene:

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$x(t) = X e^{i\Omega t}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} + X e^{i\Omega t}$$

$$\dot{x}(t) = i\omega_n C_1 e^{i\omega_n t} - i\omega_n C_2 e^{-i\omega_n t} + i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} + X e^{i\Omega t}$$

$$\dot{x}(t) = i\omega_n C_1 e^{i\omega_n t} - i\omega_n C_2 e^{-i\omega_n t} + i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$x(0) = C_1 + C_2 + X = X$$

$$\dot{x}(0) = i\omega_n C_1 - i\omega_n C_2 + i\Omega X = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

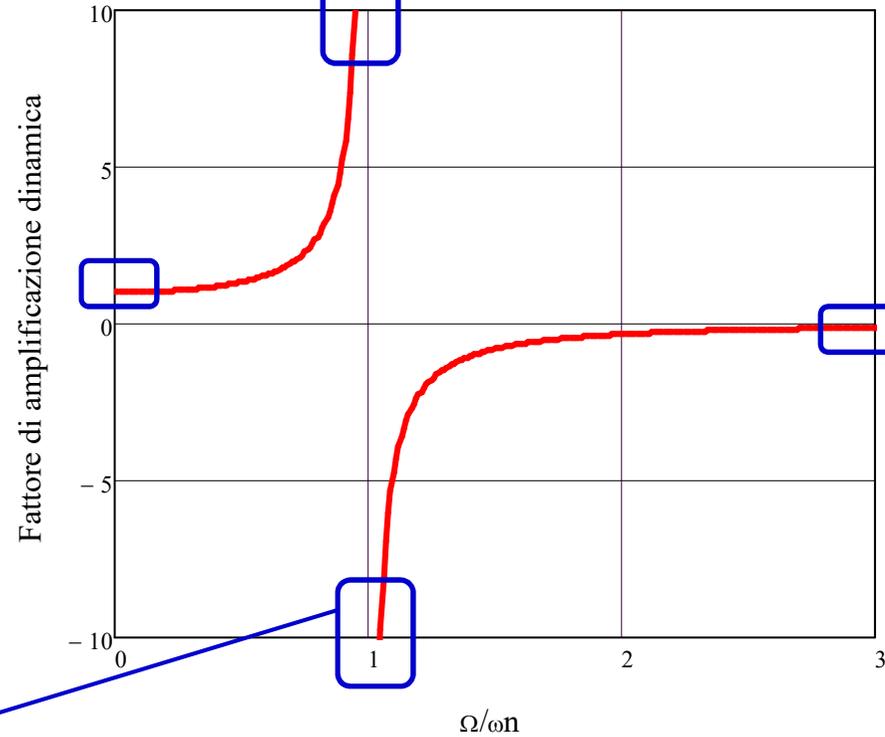
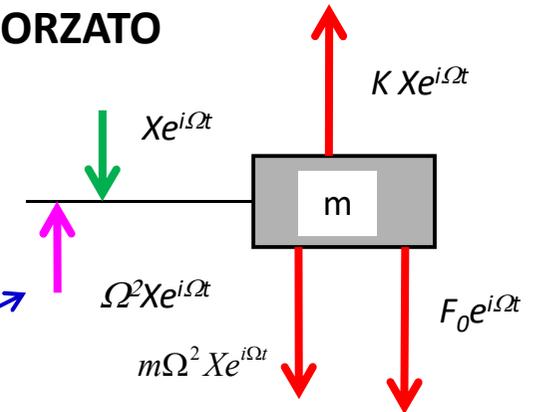
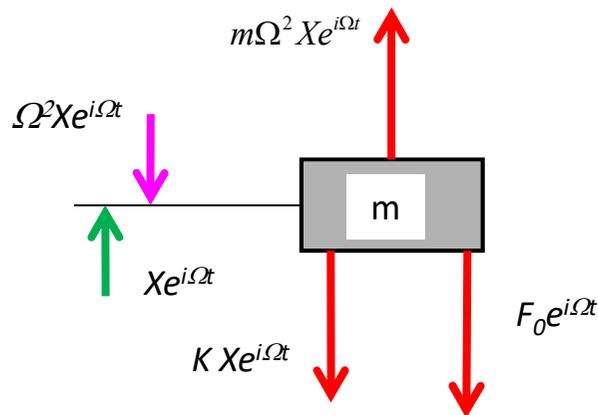
$$i\omega_n (C_1 - C_2) = 0 = (C_1 - C_2)$$

### OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Freccia statica

Fattore di amplificazione dinamica



OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_n t}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$

$$x(t) = Xte^{i\omega_n t}$$

Integrale particolare  
non omogenea

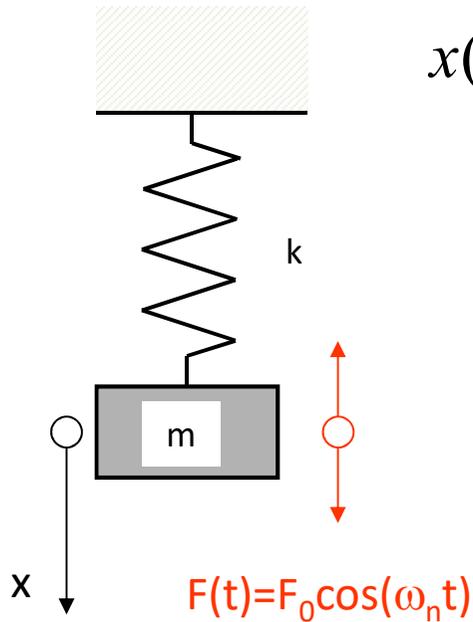
$$\dot{x}(t) = Xe^{i\omega_n t} (1 + i\omega_n t)$$

$$\ddot{x}(t) = \omega_n Xe^{i\omega_n t} (2i - \omega_n t)$$

$$\omega_n Xe^{i\omega_n t} (2i - \omega_n t) + \omega_n^2 Xte^{i\omega_n t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$

$$2i\omega_n X - \omega_n^2 Xt + \omega_n^2 Xt = \frac{F_0}{m}$$

$$X = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2i\omega_n} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_n}{2i}$$

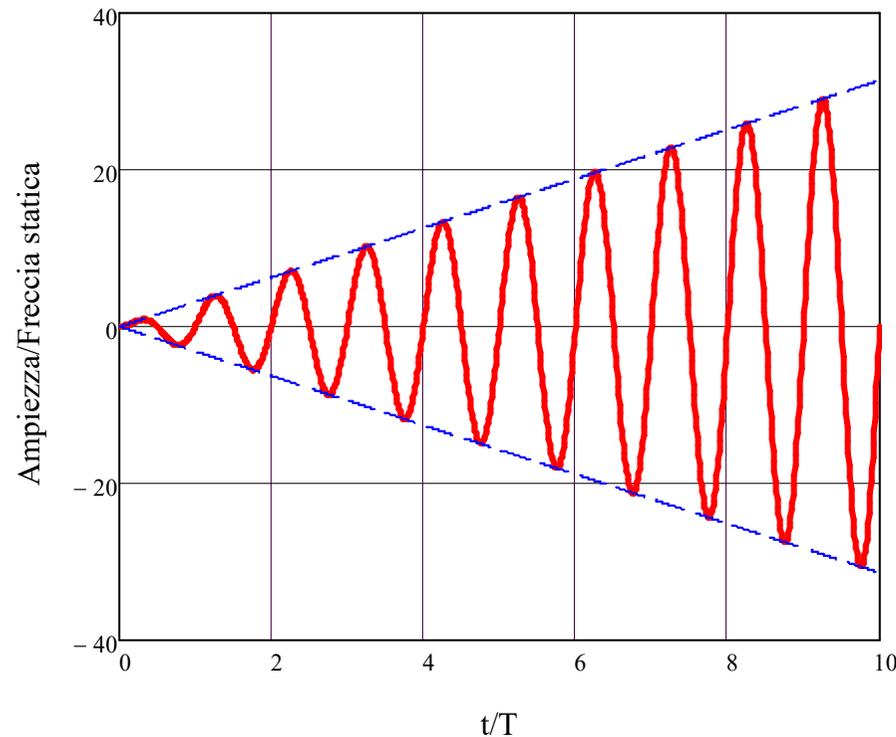


## OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_n}{2i} t e^{i\omega_n t} = -i\pi \frac{F_0}{k} \frac{t}{T} e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\frac{x(t)}{\frac{F_0}{k}} = -i\pi \frac{t}{T} e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$

Dato che, in corrispondenza di  $\omega_n$ , il sistema è in grado di oscillare senza cedere energia all'esterno, tutto il lavoro fatto dalla forza applicata si trasforma in aumento del suo contenuto energetico.



## Funzioni di risposta in frequenza (FRF)

Il comportamento dei sistemi dinamici viene solitamente rappresentato tramite particolari funzioni, dette **Funzioni di Risposta in Frequenza** (o **Frequency Response Functions**, acronimo **FRF** in entrambi i casi), che formalizzano il legame intercorrente, al variare della pulsazione della forzante, tra alcune grandezze meccaniche rappresentative del comportamento del sistema e la forzante stessa.

La più importante di tali funzioni, detta **Cedevolezza Dinamica** (o anche Ricettanza, o FRF per antonomasia), è definita come il rapporto tra lo spostamento e la forza (in modulo), e, per il sistema ad 1 gdl non smorzato, risulta data da:

$$\alpha(\Omega) = \frac{X}{F_0} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

## Funzioni di risposta in frequenza (FRF)

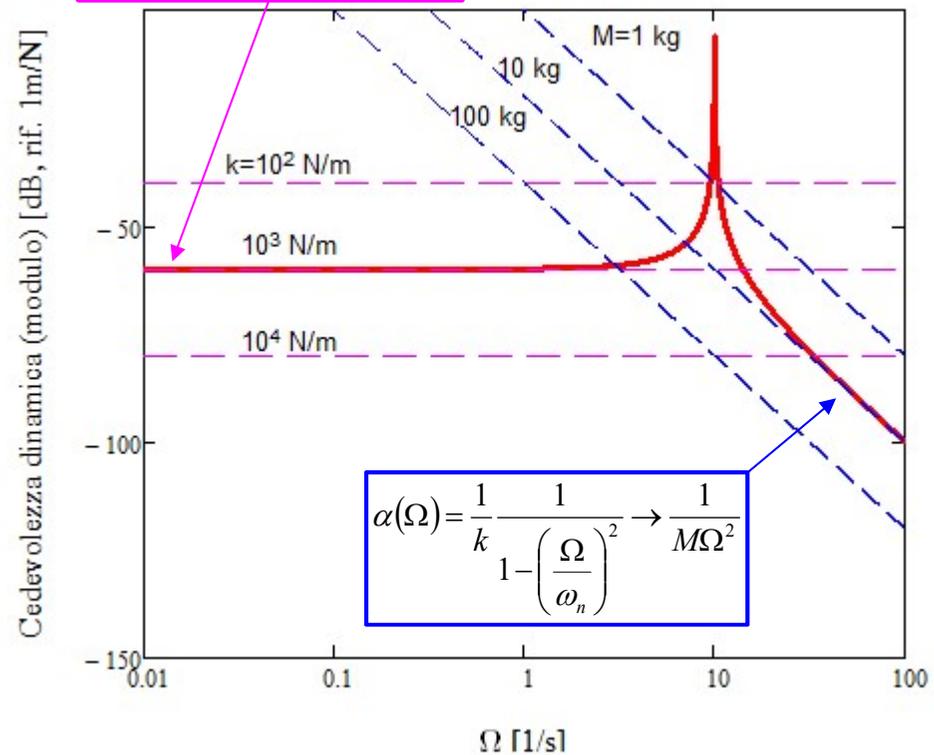
La rappresentazione è solitamente basata su di un diagramma nel quale la pulsazione  $\Omega$  è riportata sull'ascissa, in scala logaritmica, mentre la FRF è riportata sull'ordinata, in dB.

$$1 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{A}{A_{rif}} \right)$$

Un raddoppio di A corrisponde ad un incremento di circa 6 dB, un aumento di 10 volte ad un incremento di 20 dB

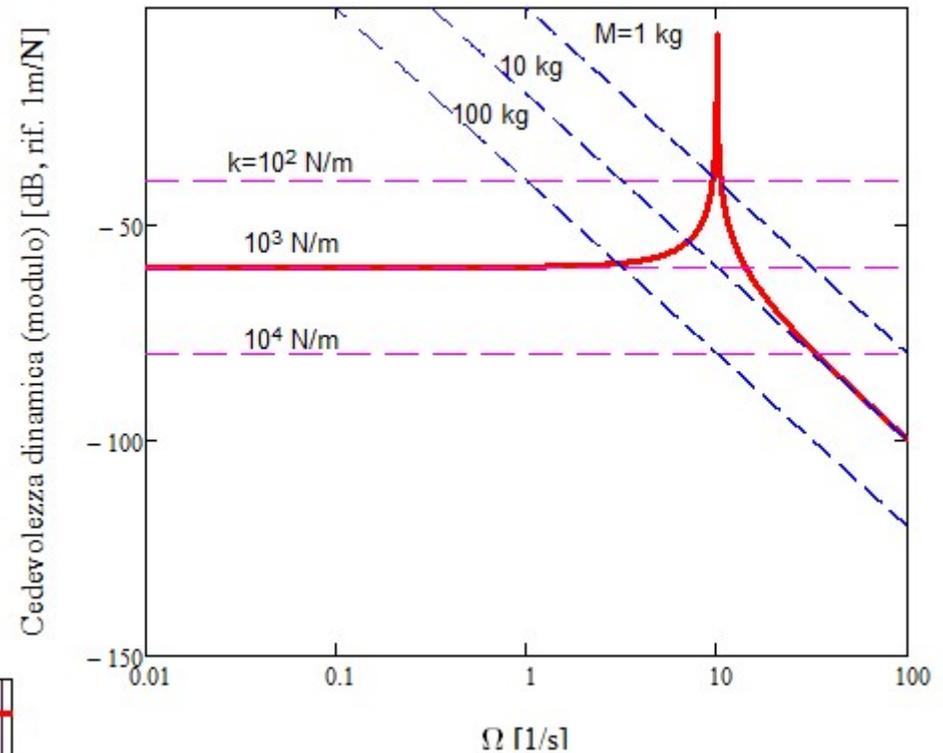
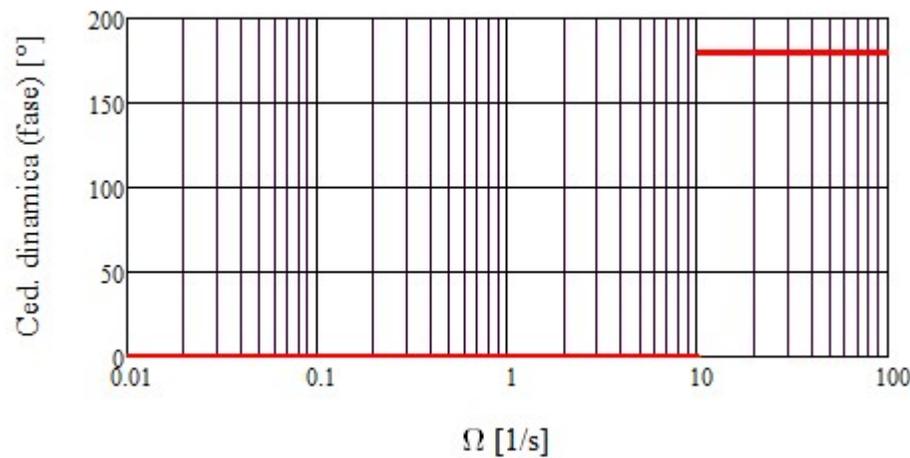
$$1 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{A}{A_{rif}} \right)$$

$$\alpha(\Omega) = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \left( \frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2} \rightarrow \frac{1}{k}$$



## Funzioni di risposta in frequenza (FRF)

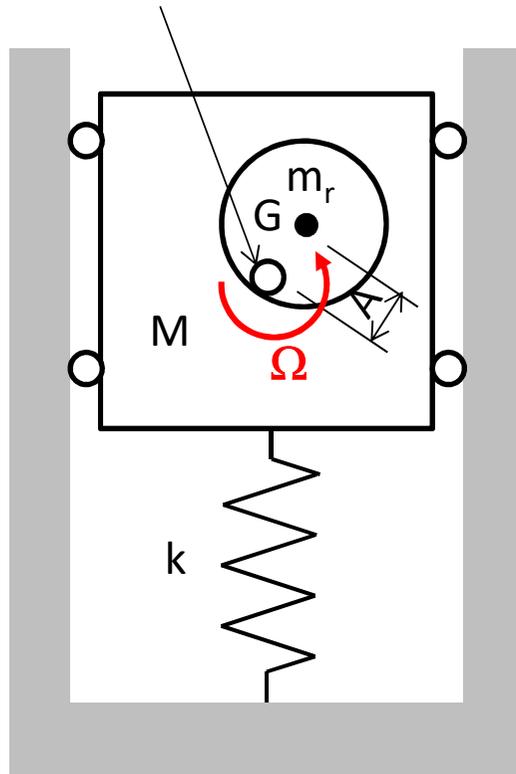
Al diagramma del modulo della FRF si abbina anche il diagramma della fase, ottenendo il noto diagramma di Bode



## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Forzante armonica di ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione

Asse di rotazione



$$M\ddot{x} + kx = m_r A \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{m_r A}{M} \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = X e^{i\Omega t} \quad \dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

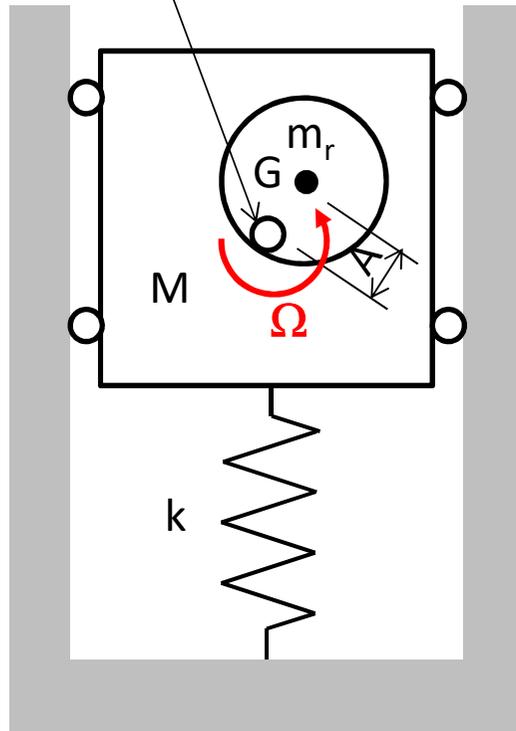
$$-\Omega^2 X e^{i\Omega t} + \omega_n^2 X e^{i\Omega t} = \frac{m_r A}{M} \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{\frac{m_r A}{M} \Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{\frac{m_r A}{k} \Omega^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

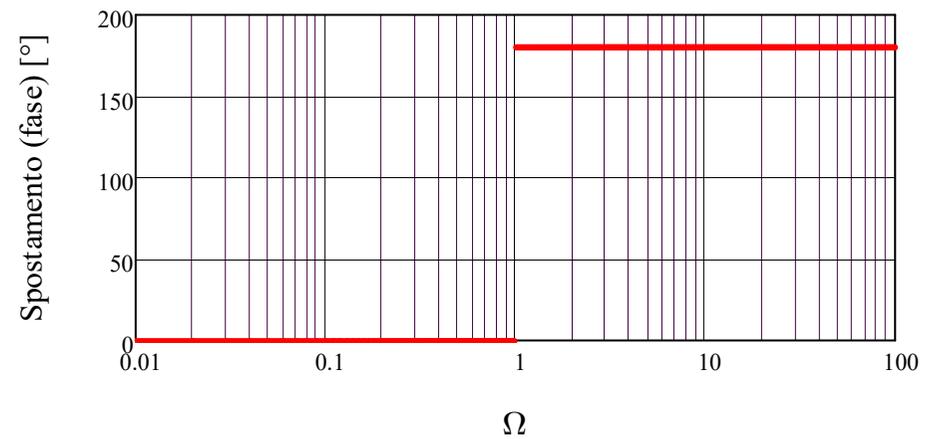
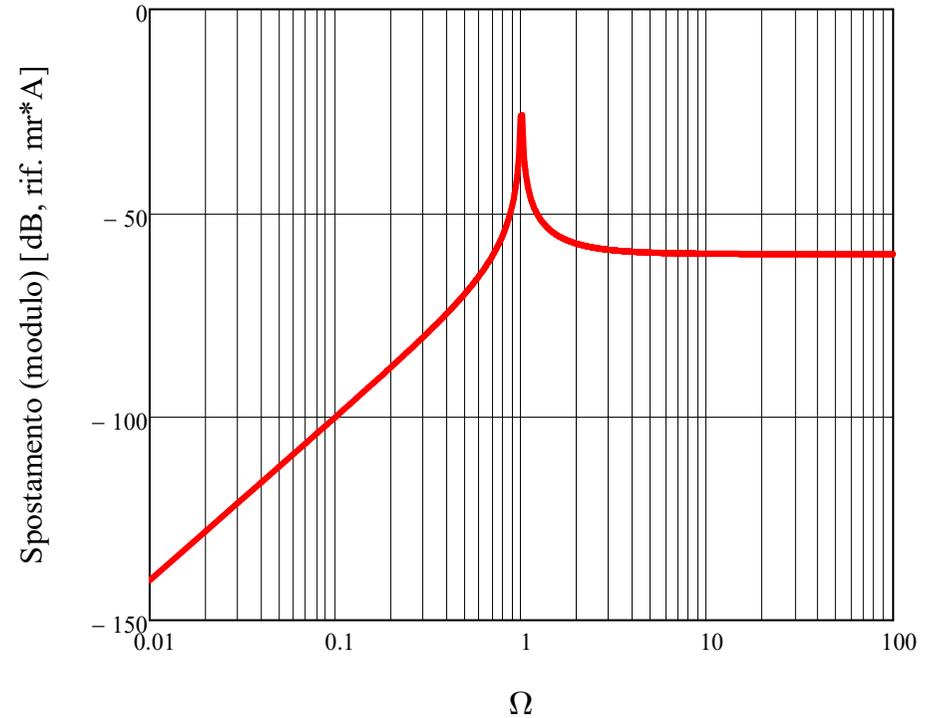
## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Forzante armonica di ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione

Asse di rotazione

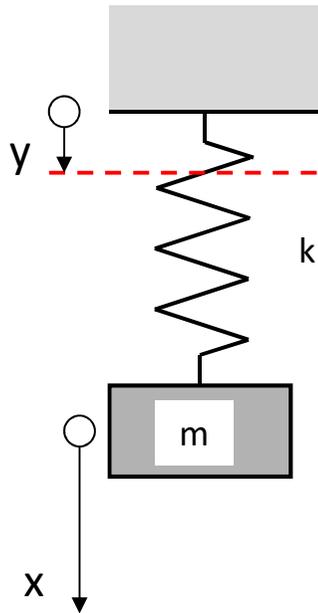


$$\frac{X}{m_r A} = \frac{1}{k} \frac{\Omega^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$



## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

### Eccitazione per moto del supporto



$$m\ddot{x} + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = ky = kYe^{i\Omega t} \quad \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{k}{m} Ye^{i\Omega t} = \omega_n^2 Ye^{i\Omega t}$$

$$x(t) = Xe^{i\Omega t} \quad \dot{x}(t) = i\Omega Xe^{i\Omega t}$$

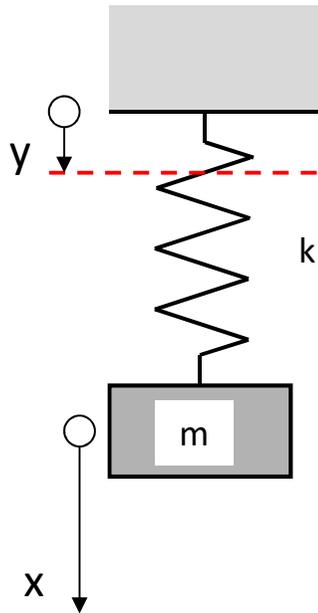
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 Xe^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Xe^{i\Omega t} + \omega_n^2 Xe^{i\Omega t} = \omega_n^2 Ye^{i\Omega t}$$

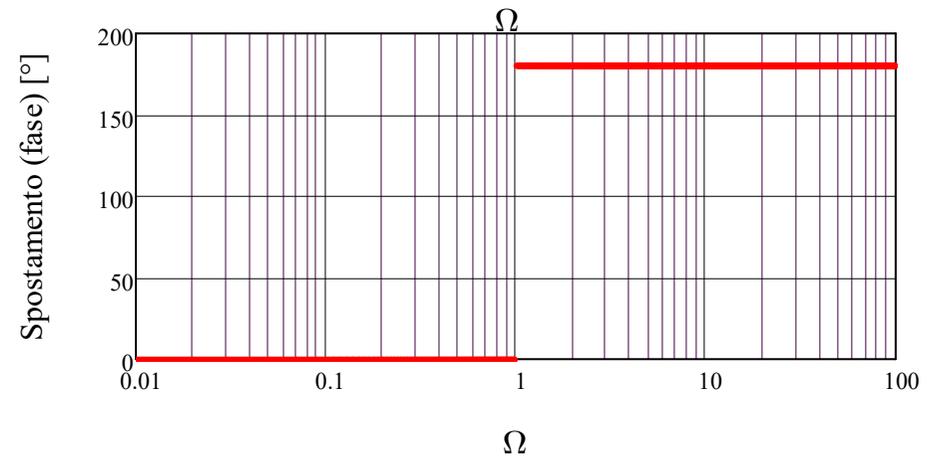
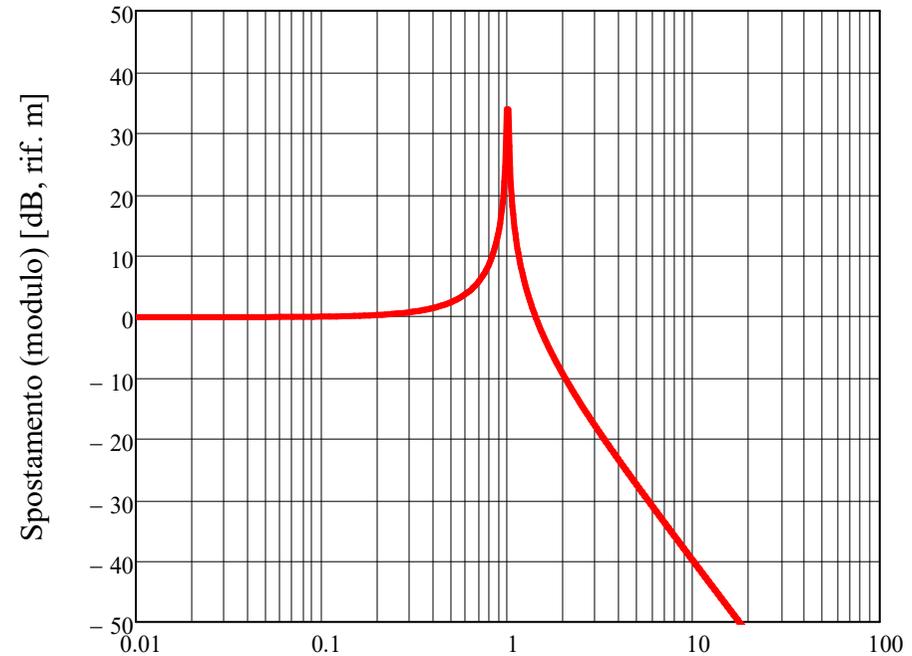
$$X = \frac{\omega_n^2 Y}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{Y}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

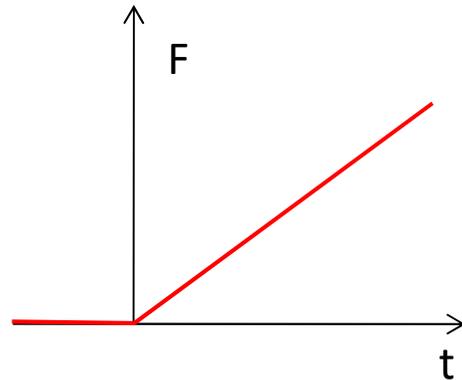
### Eccitazione per moto del supporto



$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$



## OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO Sollecitazione con forza variabile “a rampa”



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t} + \frac{B}{k} t$$

Integrale generale  
omogenea associata

Integrale  
particolare non  
omogenea

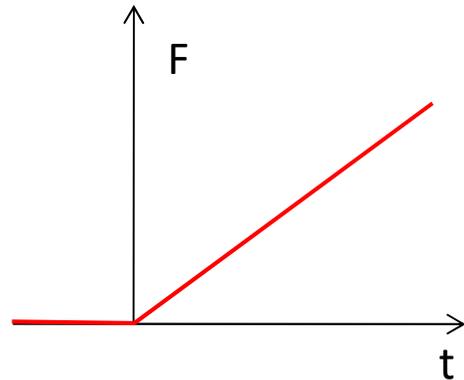
$$x(t) = Xt \quad \dot{x}(t) = X$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$kXt = Bt \quad \Rightarrow \quad X = \frac{B}{k}$$

## OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

### Sollecitazione con forza variabile “a rampa”



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t} + \frac{B}{k} t$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x(0) = A_1 + B_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = i\omega_n A_1 - i\omega_n B_1 + \frac{B}{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = i \frac{B}{2k\omega_n} \\ B_1 = -i \frac{B}{2k\omega_n} \end{cases}$$

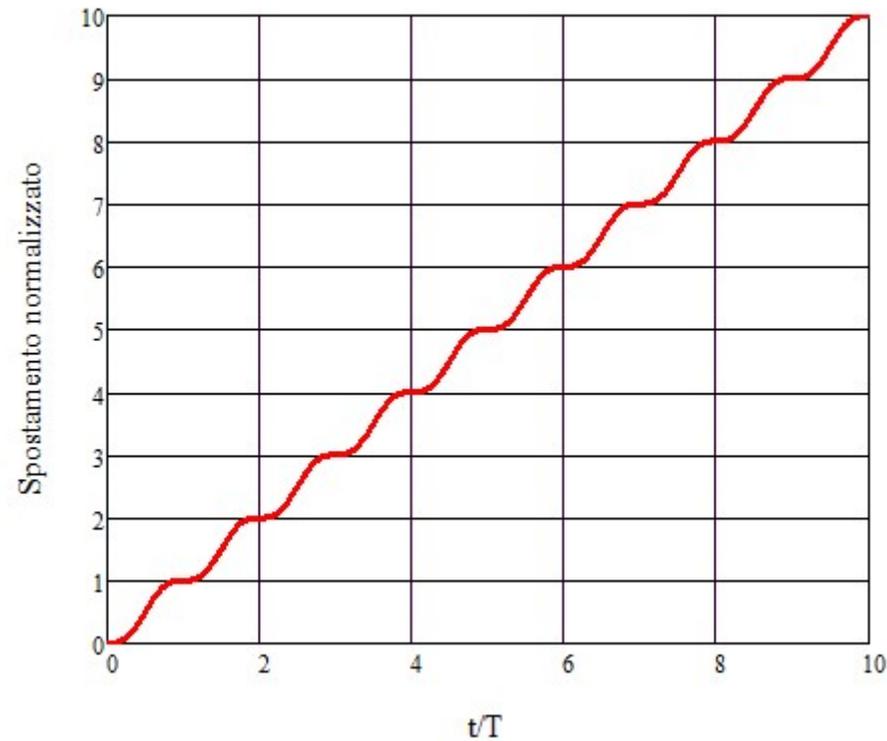
$$x(t) = \frac{B}{k} \left( i \frac{e^{i\omega_n t}}{2\omega_n} - i \frac{e^{-i\omega_n t}}{2\omega_n} + t \right) = \frac{B}{k} \left( \frac{i}{2\omega_n} 2i \text{Sin}(\omega_n t) + t \right) = \frac{B}{k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right)$$

## OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO Sollecitazione con forza variabile “a rampa”

$$x(t) = \frac{B}{k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right) = \frac{BT}{k} \left( \frac{t}{T} - \frac{\text{Sin}(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right)$$

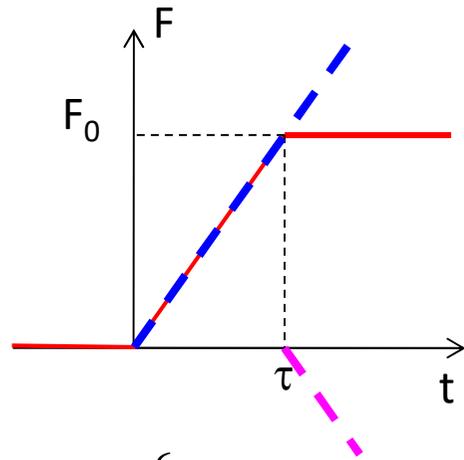
Spostamento normalizzato

$$\frac{x(t)}{\frac{BT}{k}} = \left( \frac{t}{T} - \frac{\text{Sin}(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right)$$



## OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

### Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



$$F = \frac{F_0}{\tau} t = Bt \quad 0 \leq t \leq \tau$$

$$0 \leq t \leq \tau$$

$$F = Bt - B(t - \tau) = F_0 \quad \tau < t$$

$$\tau < t$$

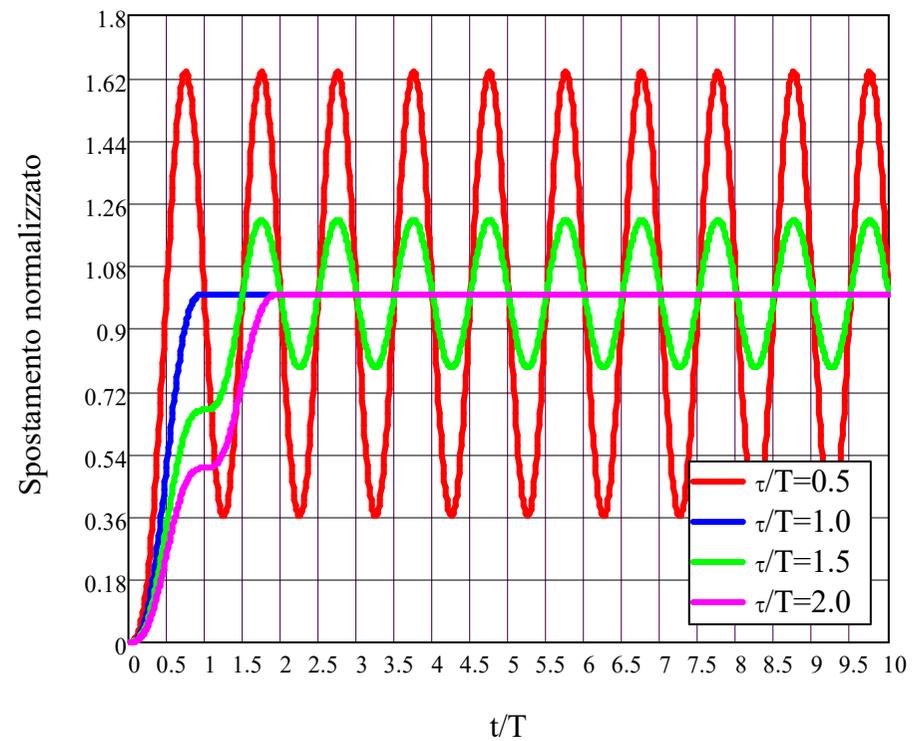
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq \tau \\ \tau < t \end{array} \right. \quad \begin{aligned} x(t) &= \frac{B}{k} \left( t - \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right) \\ x(t) &= \frac{B}{k} \left( t - \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right) - \frac{B}{k} \left( (t - \tau) - \frac{\sin(\omega_n (t - \tau))}{\omega_n} \right) = \\ &= \frac{B}{k} \left( \tau - \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{\sin(\omega_n (t - \tau))}{\omega_n} \right) \end{aligned}$$

**OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO**  
**Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 \leq t \leq \tau \quad \frac{x(t)k}{F_0} = \frac{T}{\tau} \cdot \left( \frac{t}{T} - \frac{\text{Sin}(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right) \\
 \tau < t \quad \frac{x(t)k}{F_0} = 1 - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\tau \omega_n} + \frac{\text{Sin}(\omega_n (t - \tau))}{\tau \omega_n} = \\
 \quad \quad \quad = 1 + \frac{T}{\tau} \left( \frac{\text{Sin}(\omega_n (t - \tau))}{2\pi} - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{2\pi} \right)
 \end{array} \right.$$

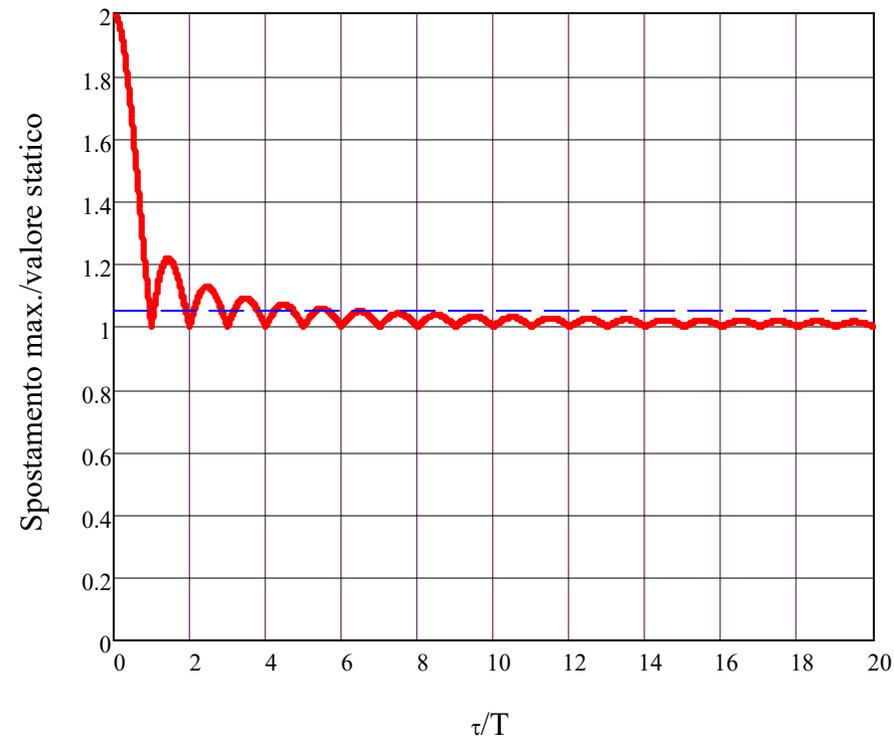
## OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

### Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



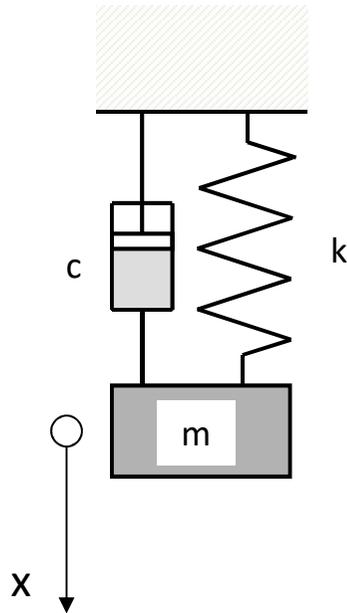
## OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

### Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = A_1 \cdot e^{a_1 t} + A_2 \cdot e^{a_2 t}$$

$$a^2 + \frac{c}{m}a + \frac{k}{m} = 0$$

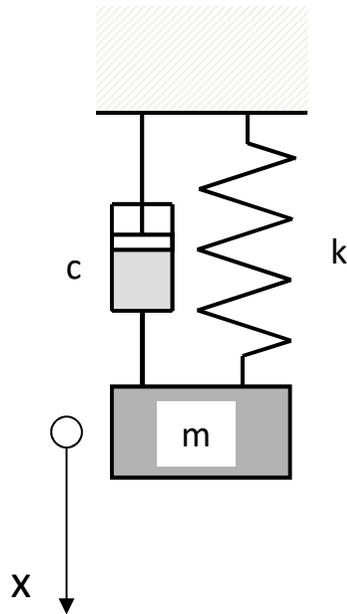
$$\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad c = c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

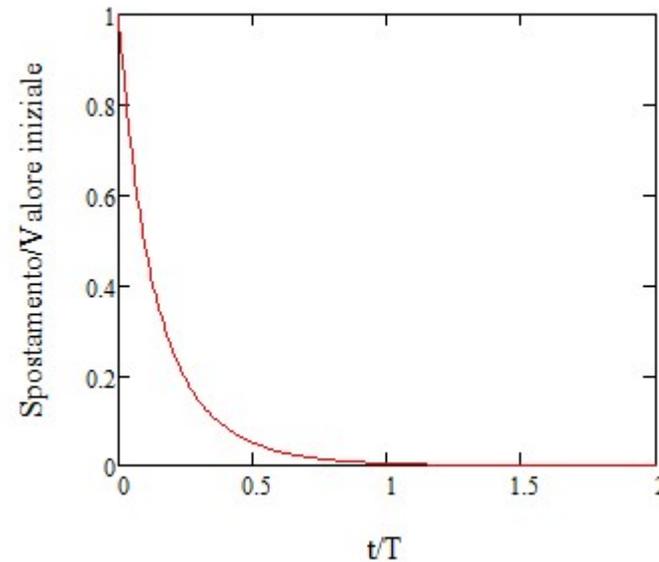
Sistema ad 1 g.d.l.

$$c > c_{cr} \rightarrow \Delta > 0$$

$$a_1, a_2 \text{ reali} < 0$$



$$a_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}$$



## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

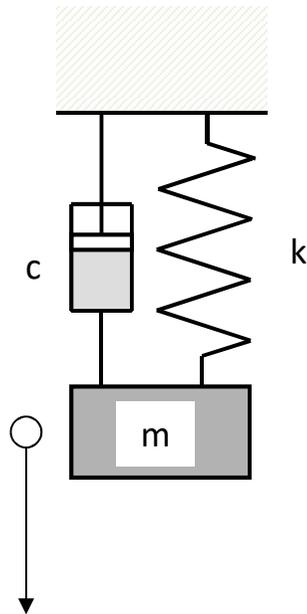
Sistema ad 1 g.d.l.  $c < c_{cr} \rightarrow \Delta < 0$

$$a_1, a_2 \text{ complesse coniugate} = -\frac{c}{2m} \pm i \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

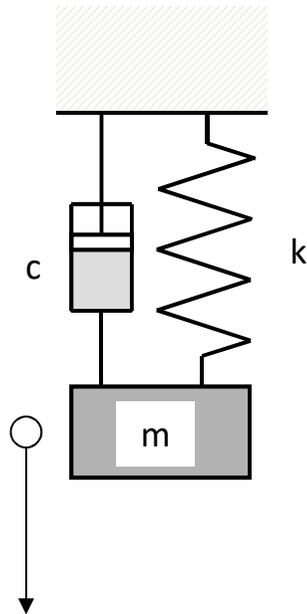
$$\frac{c}{2m} = \frac{c\sqrt{k}}{2m\sqrt{k}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{c_{cr}} \omega_n = \xi \omega_n$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{cr}^2}} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega_s$$



## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

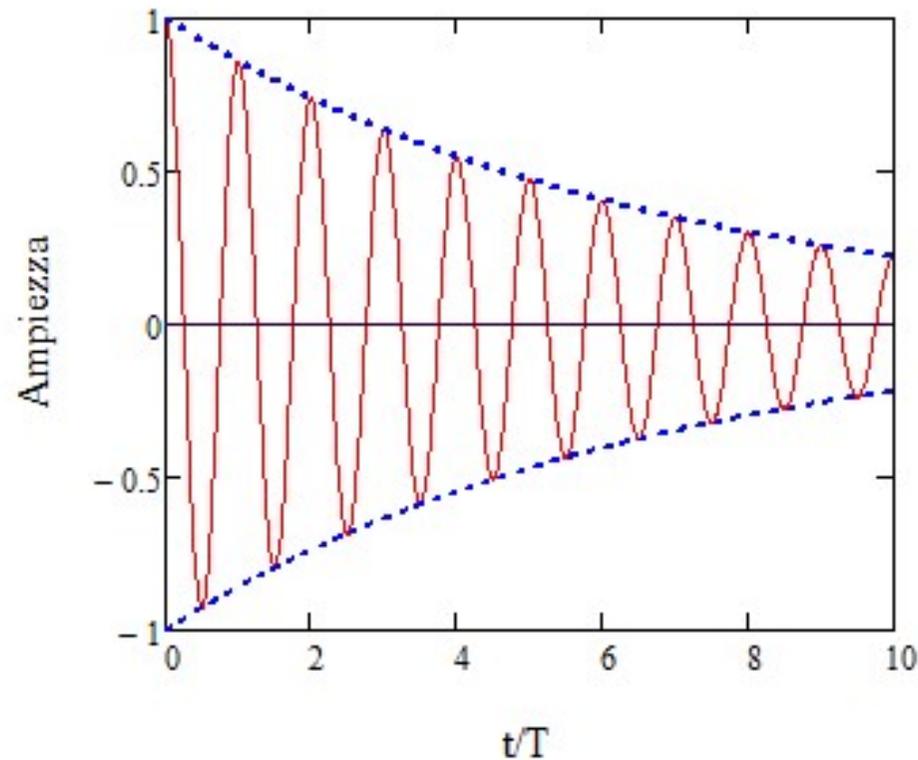
Sistema ad 1 g.d.l.



$$a_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_s$$

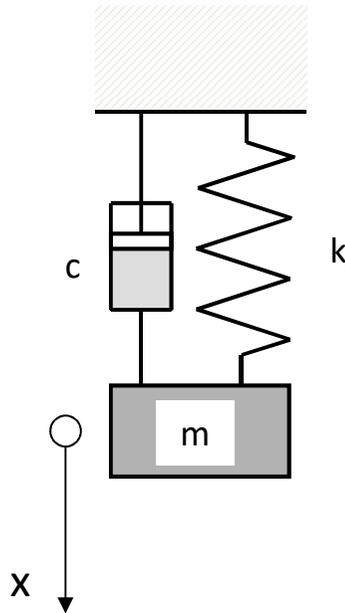
$$x(t) = A_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_s)t} + B_1 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_s)t} = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 e^{i\omega_s t} + B_1 e^{-i\omega_s t})$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t))$$



## OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

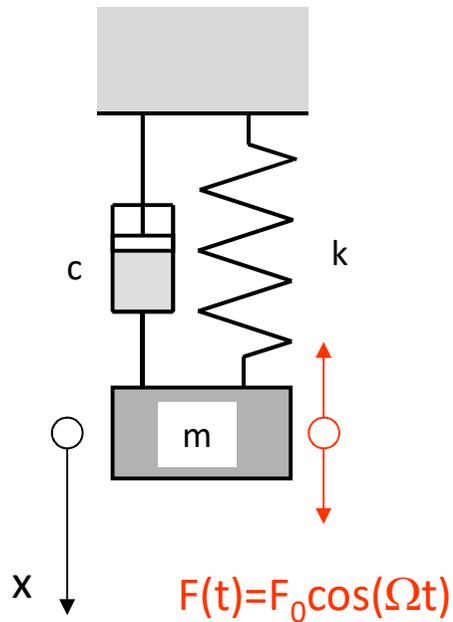
Per la maggior parte dei sistemi meccanici è piuttosto piccolo ( $< 0.1$ )

$$\left. \begin{array}{l} \omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \xi = 0.1 \end{array} \right\} \omega_s = \omega_n \sqrt{1 - 0.1^2} = 0.99\omega_n$$

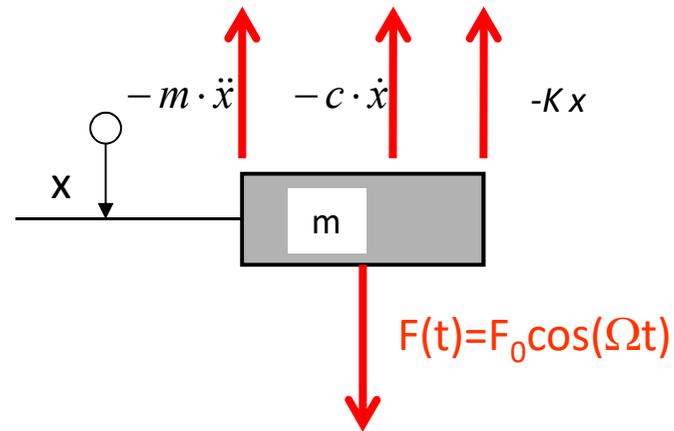
Per questo è solitamente possibile trascurare l'effetto dello smorzamento **sul valore dei modi propri**

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



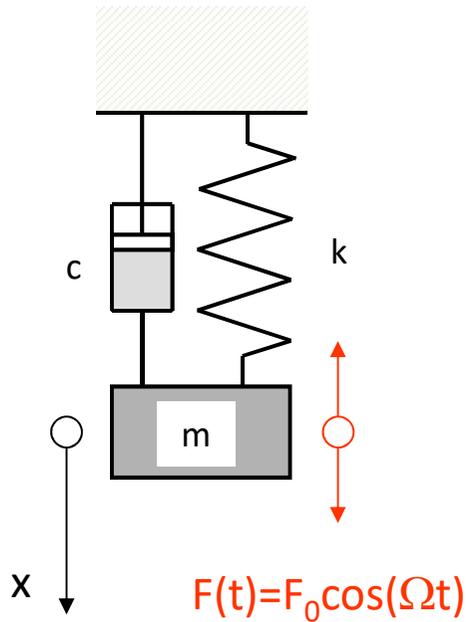
Analisi delle forze agenti



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

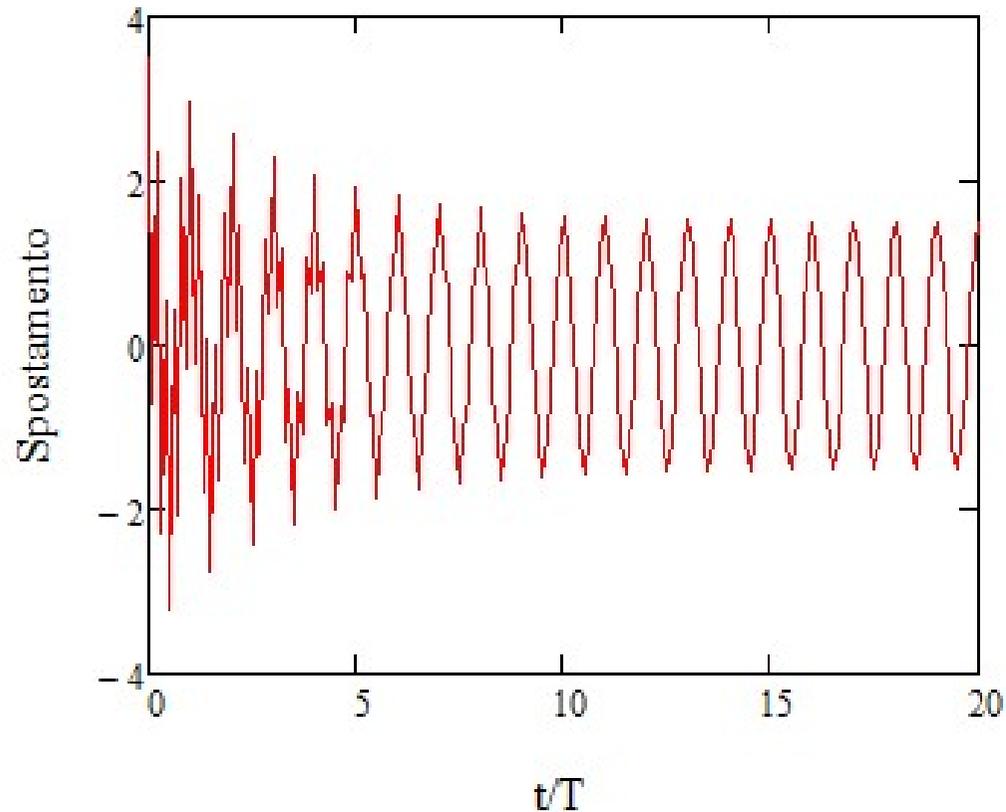


$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

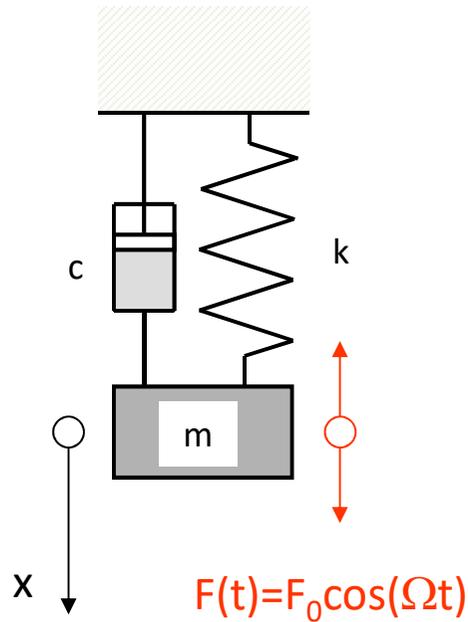


$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) + e^{-\xi\omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)$$



## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

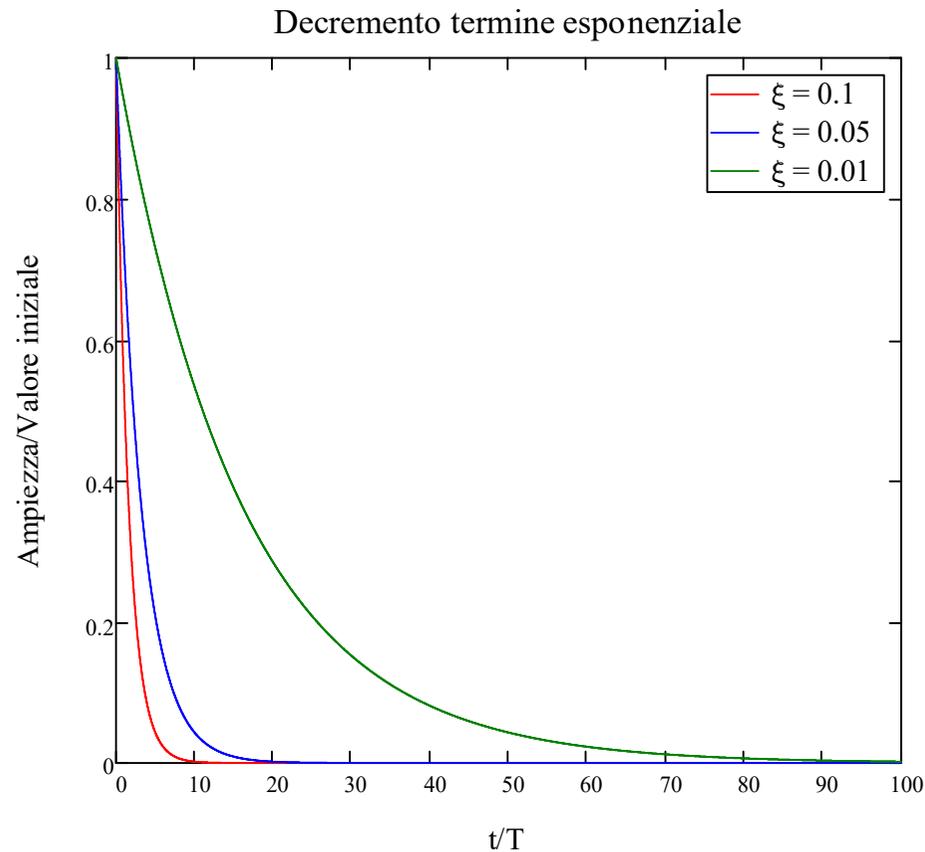


$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

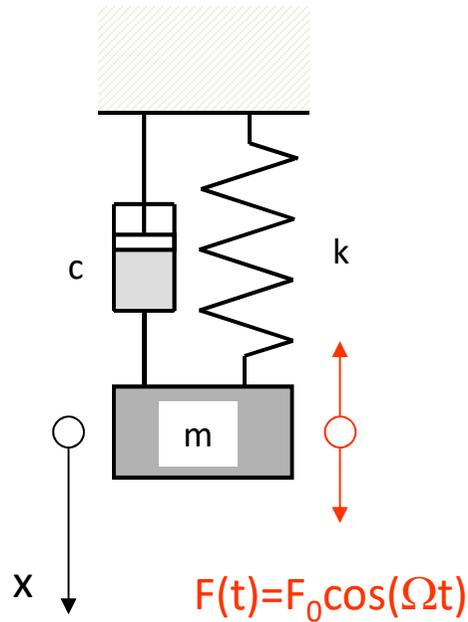


$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) + e^{-\xi \omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)$$



## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$



$$\frac{c}{m} = 2\xi\omega_n$$

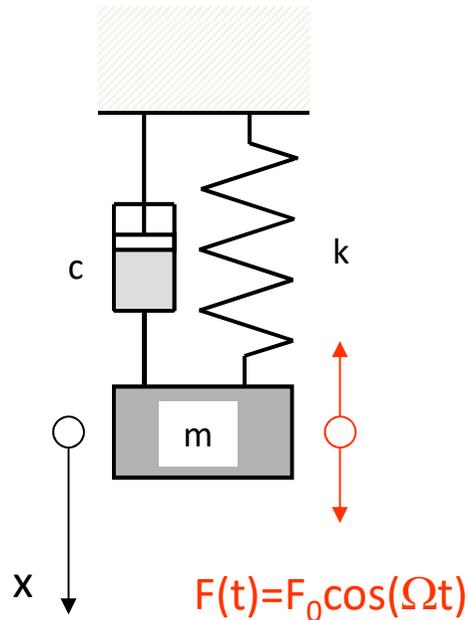
$$\frac{k}{m} = \omega_n^2$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) + e^{-\xi\omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)$$

$$x(t) \cong X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \quad \text{per } t > t_{trans}$$

$$\dot{x}(t) \cong -\Omega X \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) \cong -\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$-\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) - 2\xi\omega_n\Omega X \cdot \sin(\Omega t - \varphi) + \omega_n^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

**OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO**

$$-\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) - 2\xi\omega_n\Omega X \cdot \sin(\Omega t - \varphi) + \omega_n^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

$$\begin{aligned} &\omega_n^2 X \cdot \cos(\Omega t) \cos(\varphi) + \omega_n^2 X \cdot \sin(\Omega t) \sin(\varphi) - \\ &-\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t) \cos \varphi - \Omega^2 X \cdot \sin(\Omega t) \sin \varphi + \\ &+ 2\xi\omega_n\Omega X \cdot \cos(\Omega t) \sin(\varphi) - 2\xi\omega_n\Omega X \cdot \sin(\Omega t) \cos(\varphi) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[ \omega_n^2 \cos(\varphi) - \Omega^2 \cos \varphi + 2\xi\omega_n\Omega \sin(\varphi) \right] \cdot X \cos(\Omega t) + \\ &+ \left[ \omega_n^2 \sin(\varphi) - \Omega^2 \sin \varphi - 2\xi\omega_n\Omega \cos(\varphi) \right] \sin(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

$$\begin{cases} [\omega_n^2 \cos(\varphi) - \Omega^2 \cos \varphi + 2\xi\omega_n\Omega \sin(\varphi)]X = \frac{F_0}{m} \\ \omega_n^2 \sin(\varphi) - \Omega^2 \sin \varphi - 2\xi\omega_n\Omega \cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \Omega^2)^2 \cos^2(\varphi) + 4\xi^2 \omega_n^2 \Omega^2 \sin^2(\varphi) + 4\xi\omega_n\Omega \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \left(\frac{F_0}{Xm}\right)^2 \\ (\omega_n^2 - \Omega^2)^2 \sin^2(\varphi) + 4\xi^2 \omega_n^2 \Omega^2 \cos^2(\varphi) - 4\xi\omega_n\Omega \sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

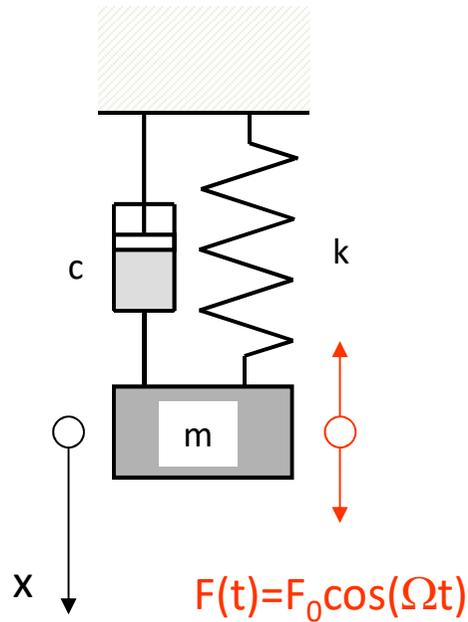
$$\begin{cases} (\omega_n^2 - \Omega^2)^2 \cos^2(\varphi) + 4\xi^2 \omega_n^2 \Omega^2 \sin^2(\varphi) + 4\xi \omega_n \Omega \sin(\varphi) \cos(\varphi) = \left(\frac{F_0}{Xm}\right)^2 \\ (\omega_n^2 - \Omega^2)^2 \sin^2(\varphi) + 4\xi^2 \omega_n^2 \Omega^2 \cos^2(\varphi) - 4\xi \omega_n \Omega \sin(\varphi) \cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \Omega^2 = \left(\frac{F_0}{Xm}\right)^2$$

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2 \Omega^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) + e^{-\xi \omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)$$

$$x(t) \cong X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \quad \text{per } t > t_{trans}$$

$$X = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

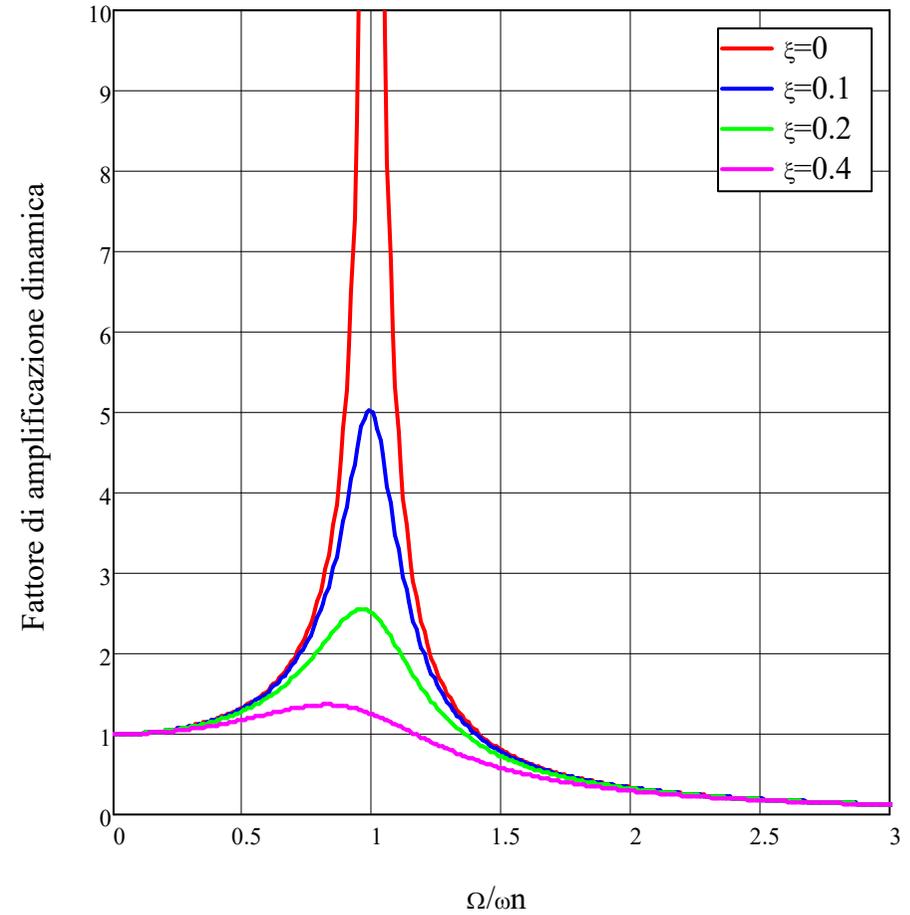
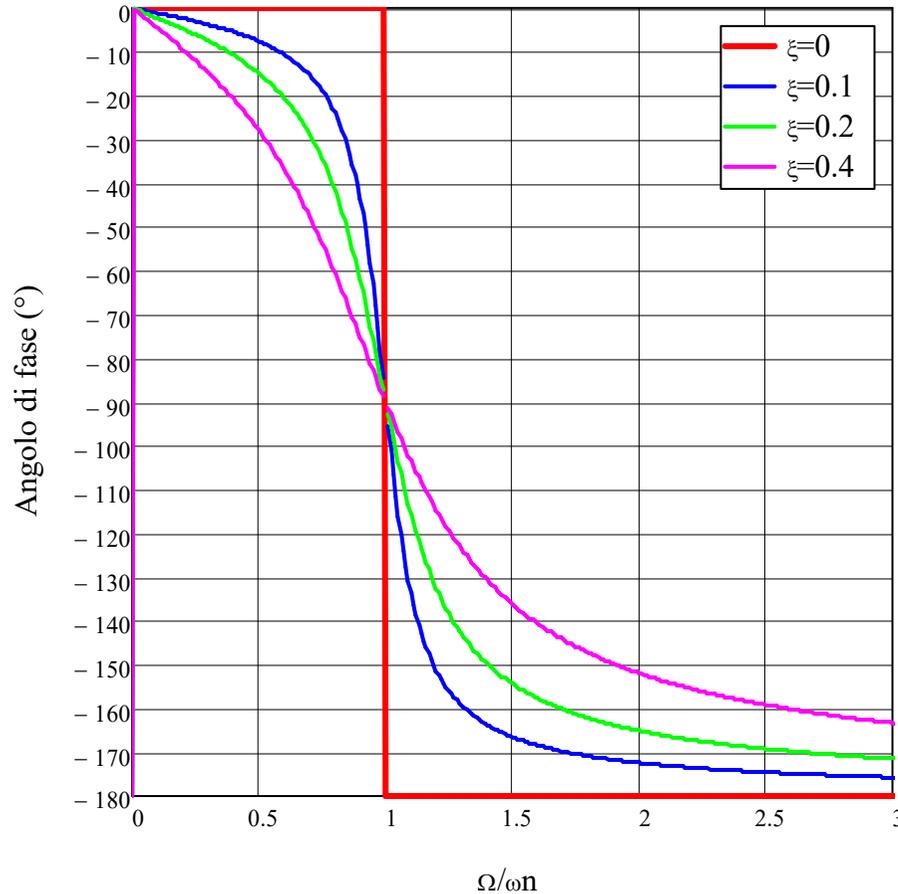
$$\varphi = \arctan \left( \frac{\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

$$X = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



$$\varphi = \arctan \left( \frac{-2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

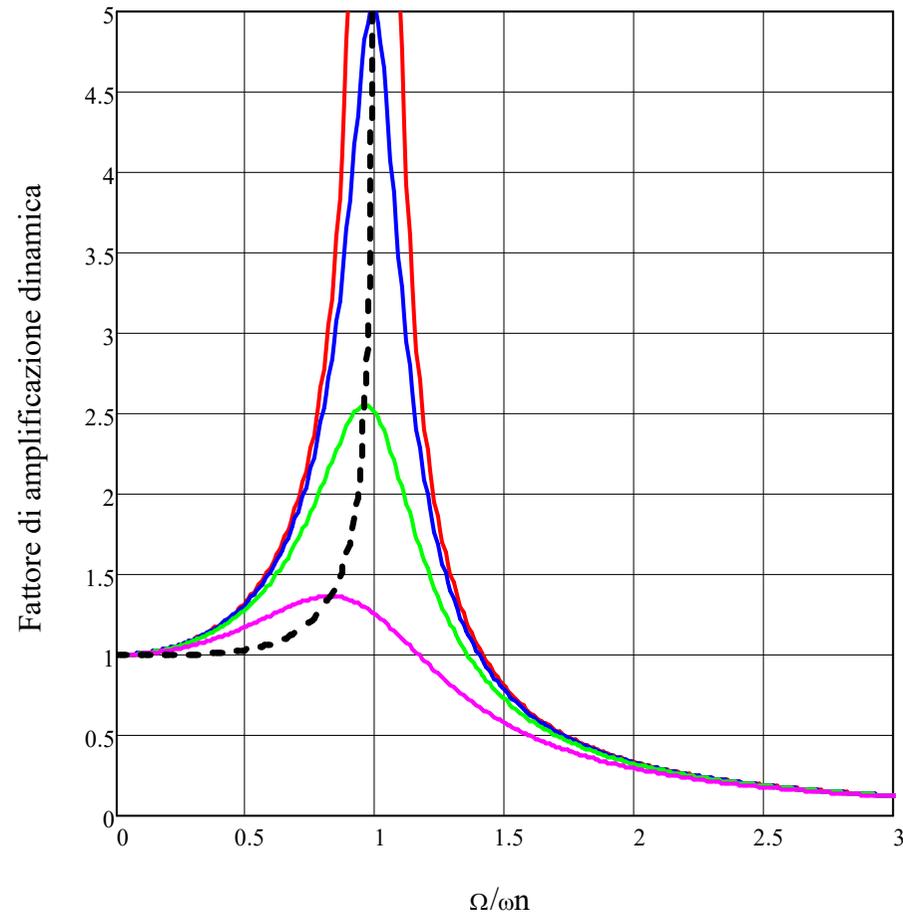
## OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Rapporto di frequenza per il quale si ha il massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)_{\max} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

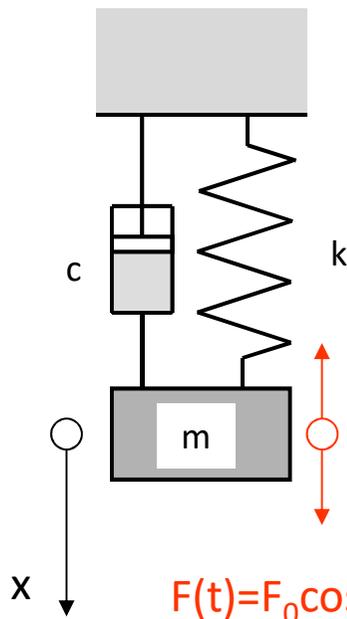
Massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$



OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.  $\ddot{x} + \xi \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_n t)$



$$x(t) = X \sin(\omega_n t)$$

Integrale particolare  
non omogenea

$$\dot{x}(t) = \omega_n X \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 X \sin(\omega_n t)$$

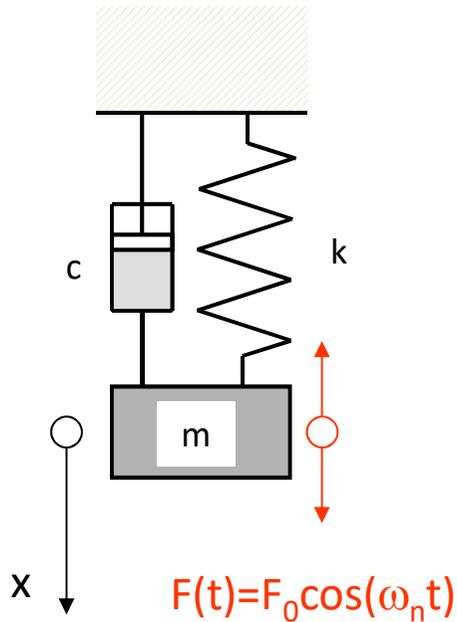
$$-\omega_n^2 X \sin(\omega_n t) + 2\xi \omega_n^2 X \cos(\omega_n t) + \omega_n^2 X \sin(\omega_n t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_n t)$$

$$2\xi \omega_n^2 X \cos(\omega_n t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_n t)$$

$$X = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\xi \omega_n^2} = \frac{F_0}{km} \frac{k}{2\xi \omega_n^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi}$$

## OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_s t) + B_1 \sin(\omega_s t)) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_n t)$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(0) = A_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A_1 + \omega_s B_1 + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \omega_n = 0$$

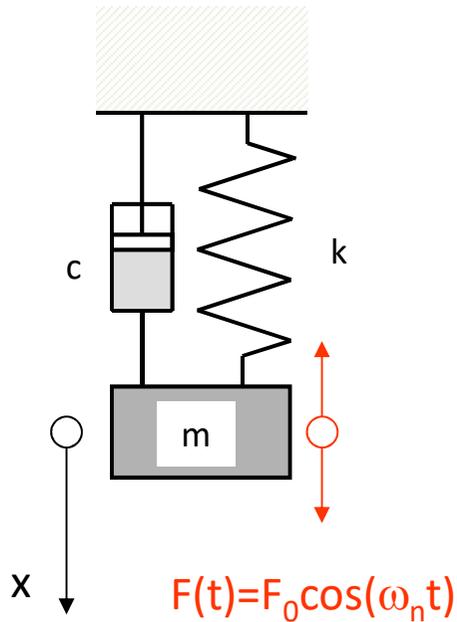
$$B_1 = \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$A_1 = 0$$

$$x(t) = -e^{-\xi\omega_n t} \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_s t) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_n t)$$

## OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l. 
$$x(t) = -e^{-\xi\omega_n t} \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_s t) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_n t)$$

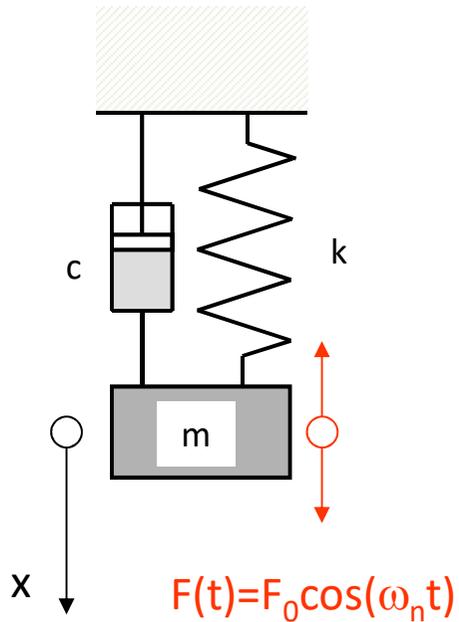


$$x(t) = \frac{F_0}{2k\xi} \left( \sin(\omega_n t) - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_s t) \right)$$

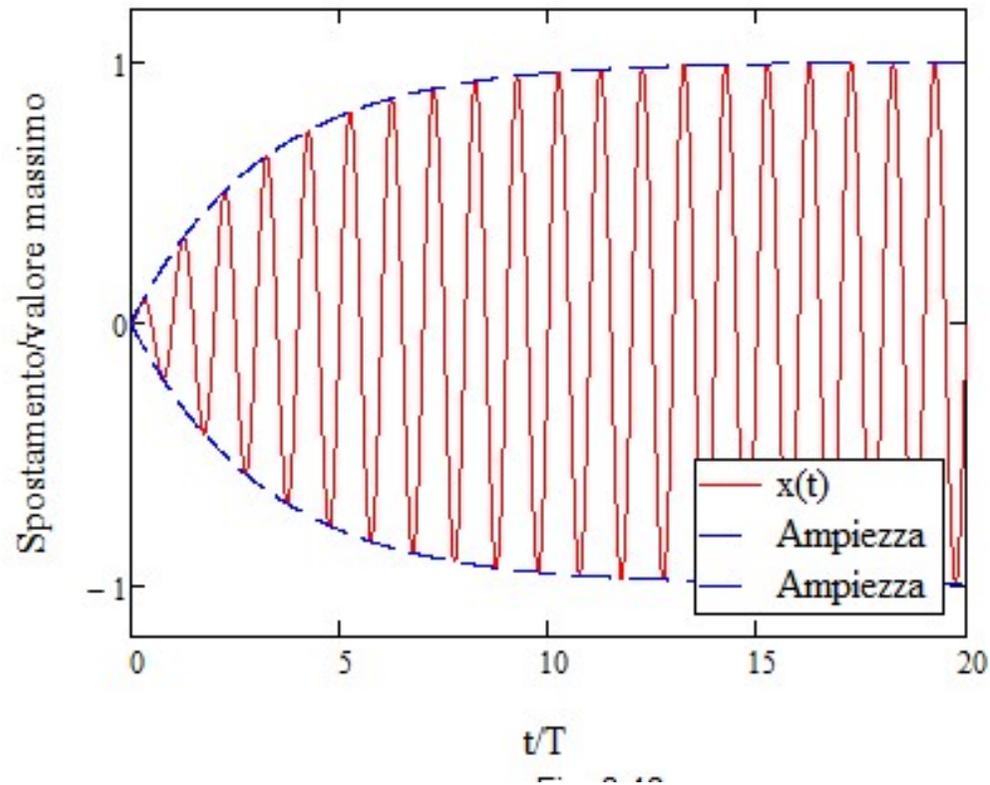
$$x(t) \approx \frac{F_0}{2k\xi} \sin(\omega_n t) \left( 1 - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

## OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

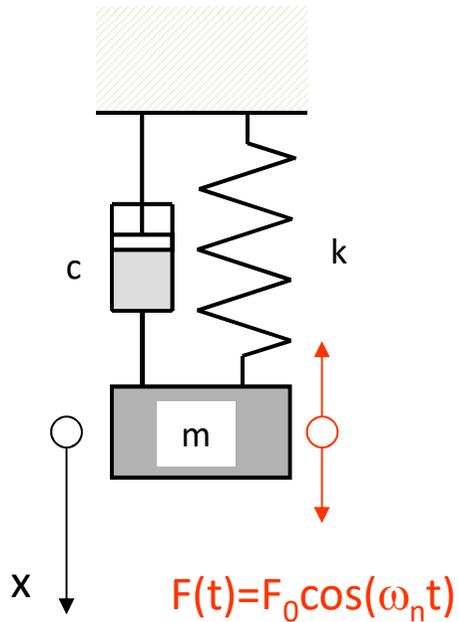


$$\frac{x(t)}{\frac{F_0}{2k\xi}} \approx \sin(\omega_n t) \left( 1 - e^{-\xi \omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

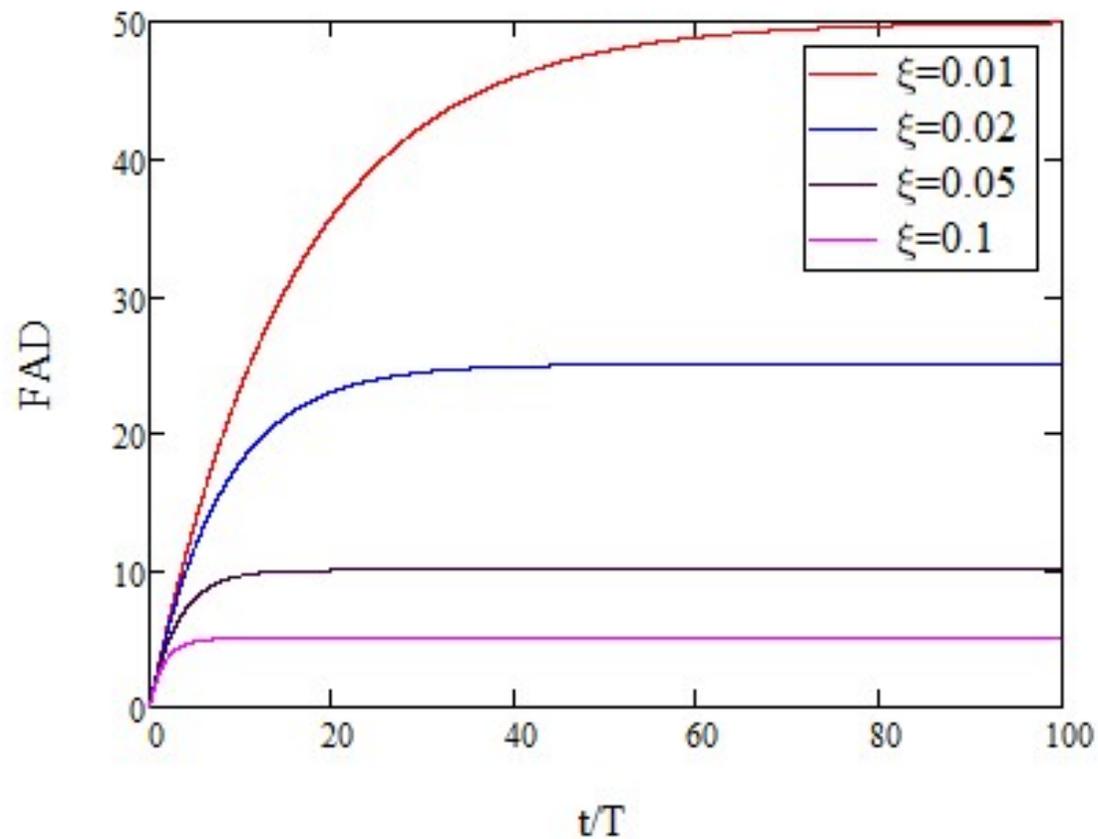


## OSCILLAZIONE FORZATA **IN RISONANZA** SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



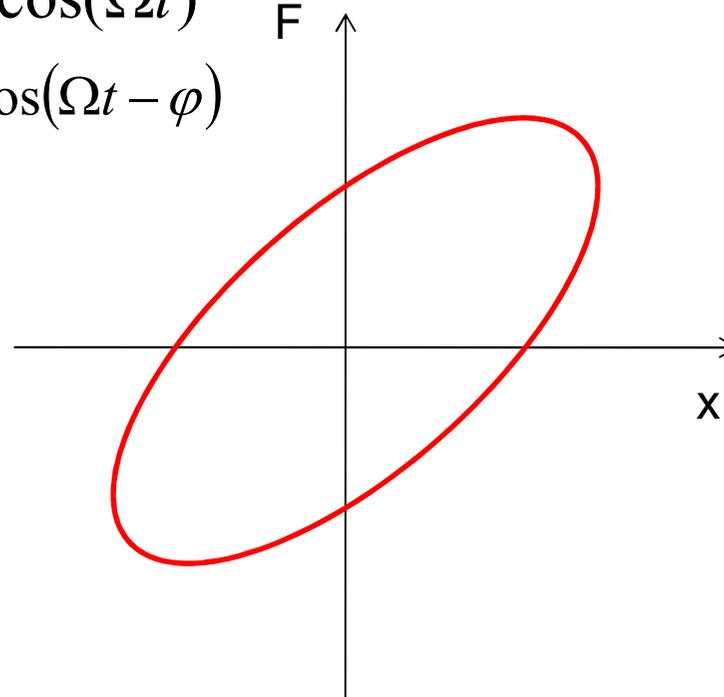
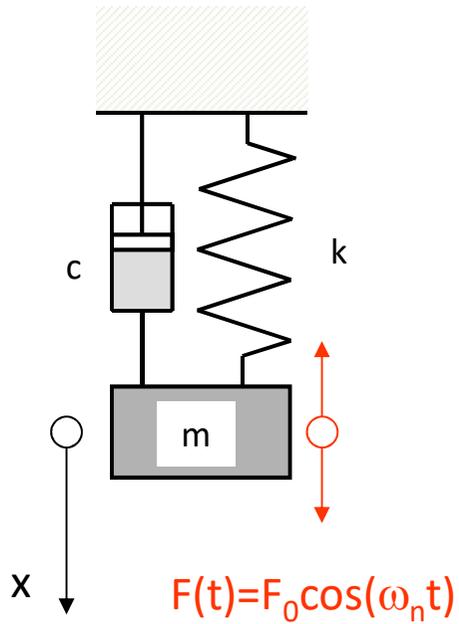
$$FAD = \frac{x(t)}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{2\xi} \left( 1 - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$



### LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

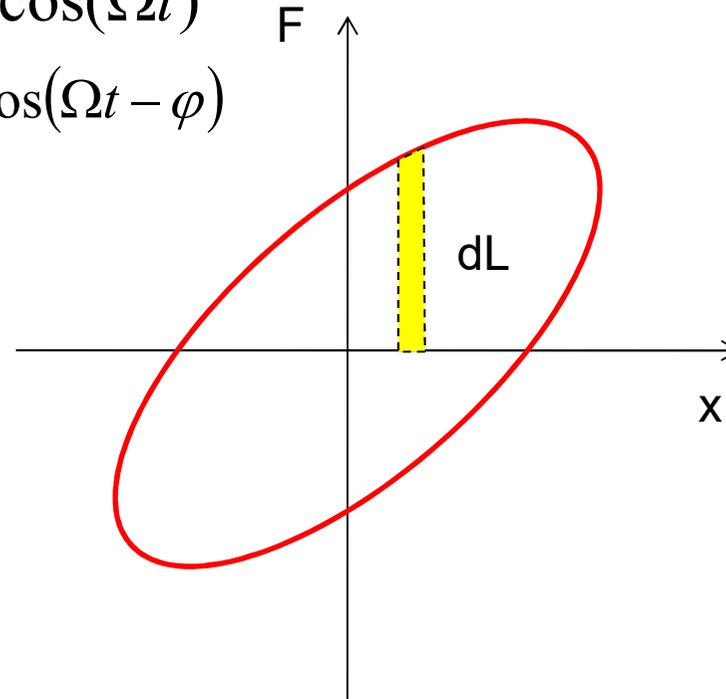
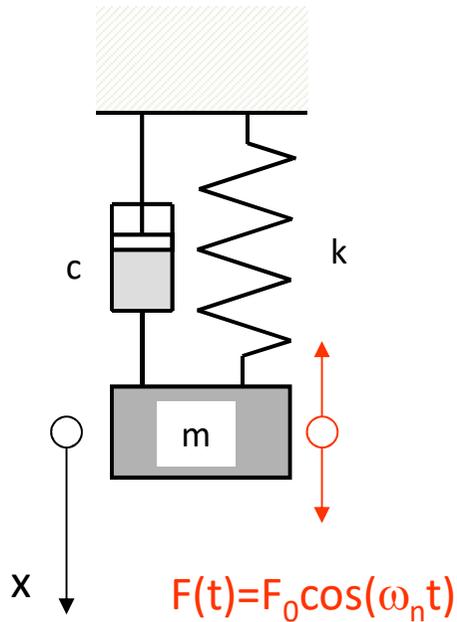
$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$



### LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

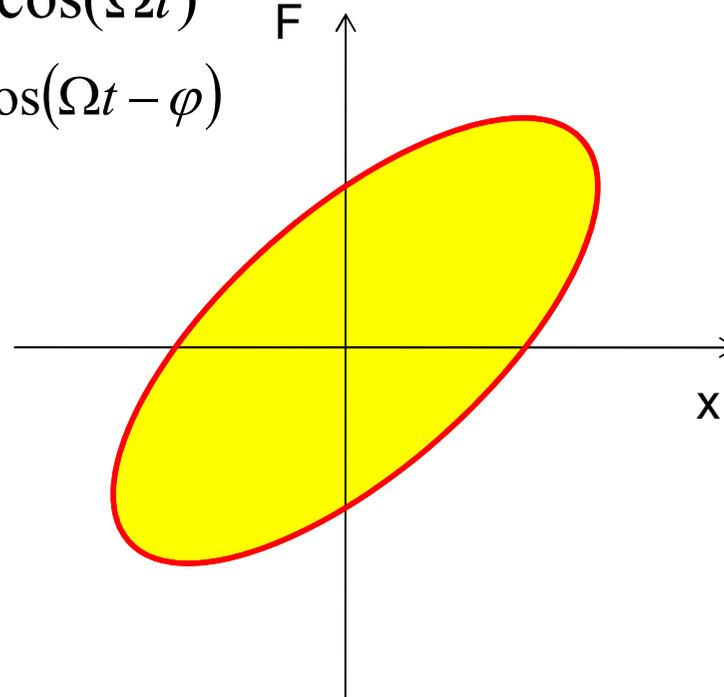
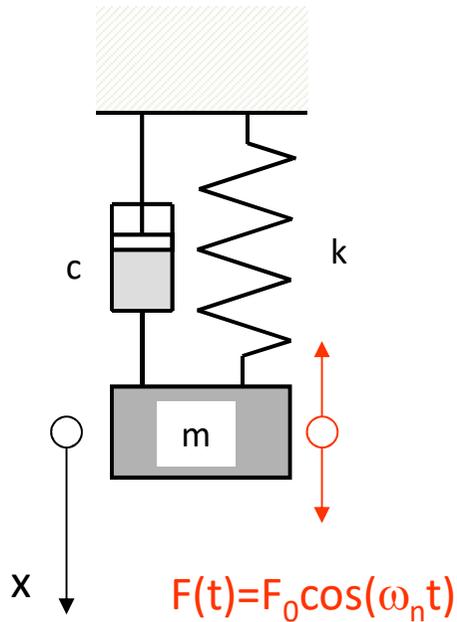


$$dL = F(t)dx = F(t)\dot{x} \cdot dt$$

### LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

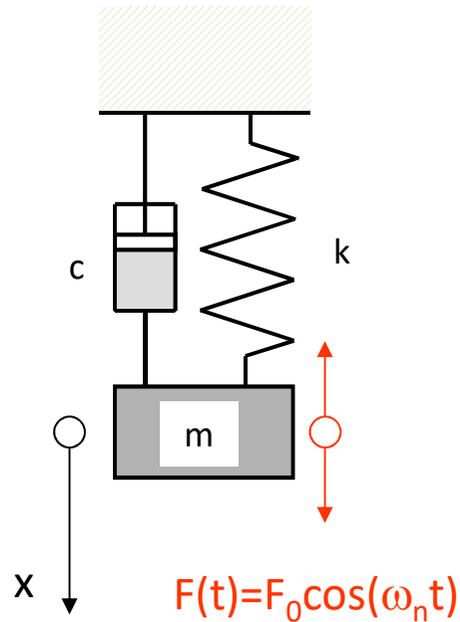
$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$



$$dL = F(t)dx = F(t)\dot{x} \cdot dt$$

$$L = \int_0^T F(t)\dot{x} \cdot dt$$

### LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



$$L = \int_0^T F(t) \dot{x} \cdot dt = \int_0^T F_0 \cos(\Omega t) \Omega X \sin(\Omega t - \varphi) \cdot dt$$

$$= F_0 \Omega X \int_0^T \cos(\Omega t) \sin(\Omega t - \varphi) \cdot dt$$

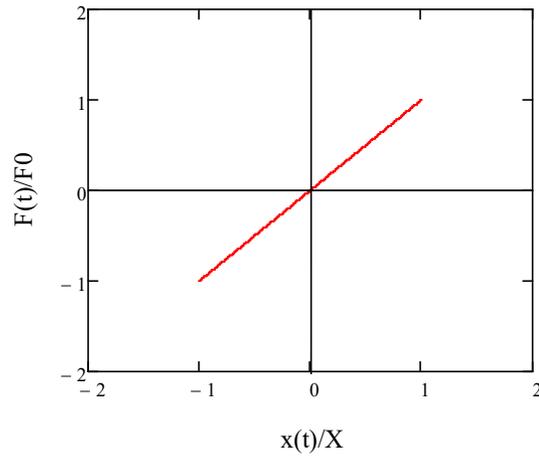
$$= F_0 \Omega X \int_0^T \frac{1}{2} [\sin(2\Omega t - \varphi) + \sin(-\varphi)] \cdot dt$$

$$= \frac{F_0 \Omega X}{2} \sin(\varphi) \int_0^T dt = \frac{F_0 \Omega X}{2} \sin(\varphi) \frac{2\pi}{\Omega} =$$

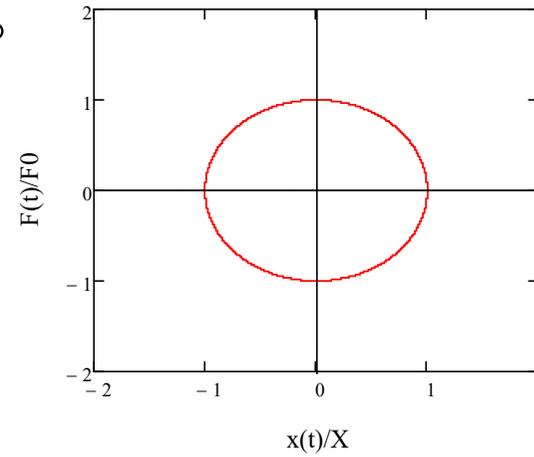
$$= \pi F_0 X \sin(\varphi)$$



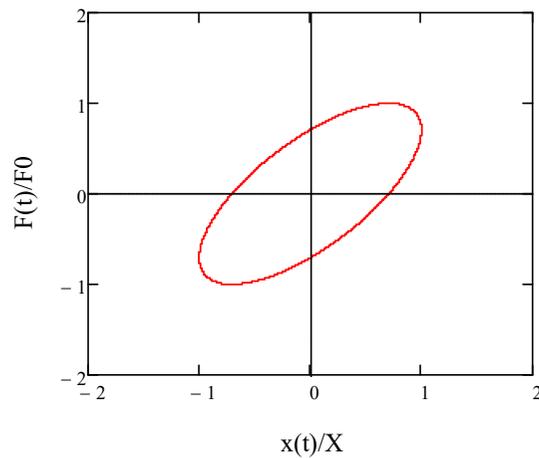
## LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



$$\varphi = 0^\circ \text{ o } 180^\circ$$
$$L = 0$$

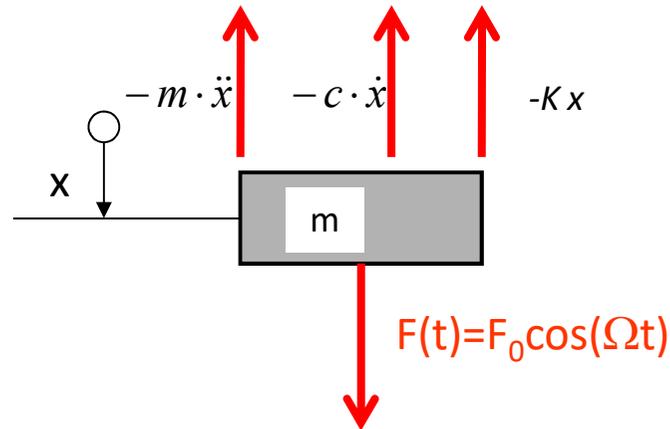


$$\varphi = 90^\circ$$
$$L = \pi F_0 X$$



$$\varphi = 45^\circ$$
$$L = \pi F_0 X \frac{\sqrt{2}}{2}$$

### LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega X \cdot \sin(\Omega t - \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

*Forza elastica molla* =  $-kx \rightarrow$  fase con  $x(t) = 180^\circ \rightarrow L_k = 0$

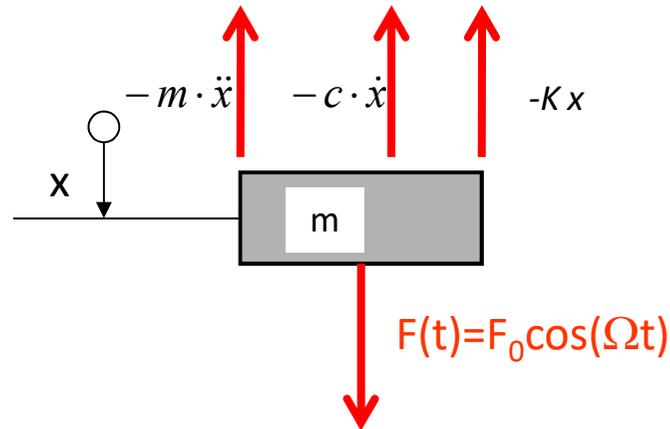
*Forza smorzatore* =  $-c\dot{x} \rightarrow$  fase con  $x(t) = 270^\circ \rightarrow L_c = \pi c \Omega X^2$

*Forza inerzia* =  $-m\ddot{x} \rightarrow$  fase con  $x(t) = 0^\circ \rightarrow L_i = 0$



$$Lavoro F esterna = \pi F_0 X \sin(\varphi) = L_c$$

## LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



$$\pi F_0 X \sin(\varphi) = \pi c \Omega X^2$$



$$X = \frac{F_0}{c\Omega} \sin(\varphi)$$

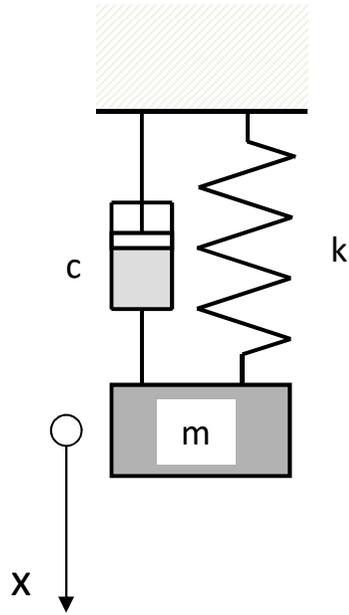
Se  $\Omega = \omega_n \rightarrow \varphi = 90^\circ$

$$X = \frac{F_0}{c\omega_n} = \frac{F_0}{c\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{F_0}{\frac{c \cdot 2 \cdot k}{2\sqrt{km}}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi}$$

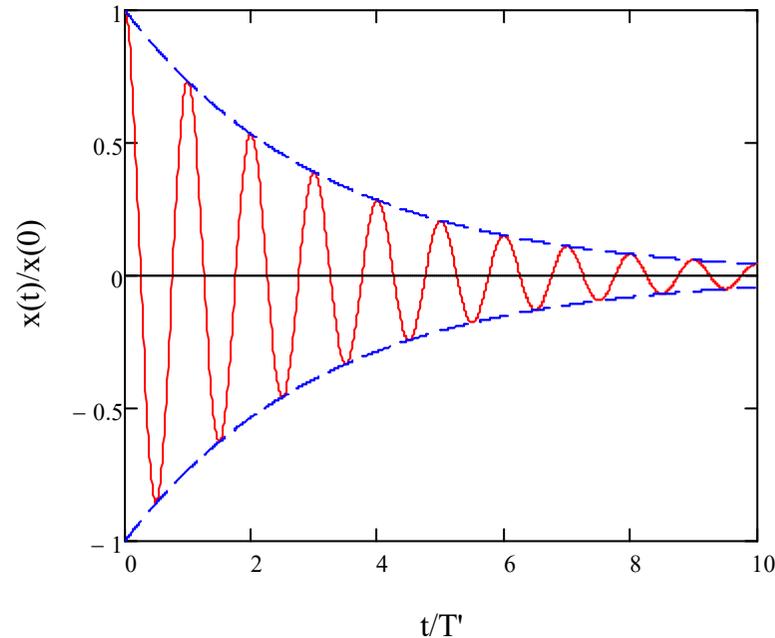
Da soluzione generale

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi}$$

## DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO



Si basa sull'andamento delle ampiezze di oscillazione rilevate sulla struttura, in seguito ad una perturbazione iniziale.



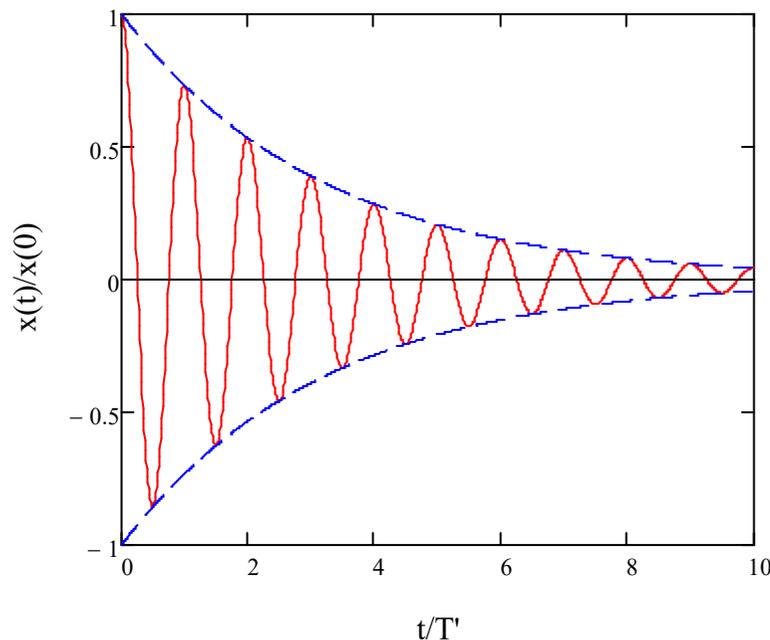
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t))$$

## DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO

Rapporto di ampiezza tra due picchi successivi

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$R = \frac{e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t))}{e^{-\xi\omega_n (t+T')} (A \cos(\omega_s (t+T')) + B \sin(\omega_s (t+T')))} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}} = e^{-\xi\omega_n T'}$$



Decremento Logaritmico

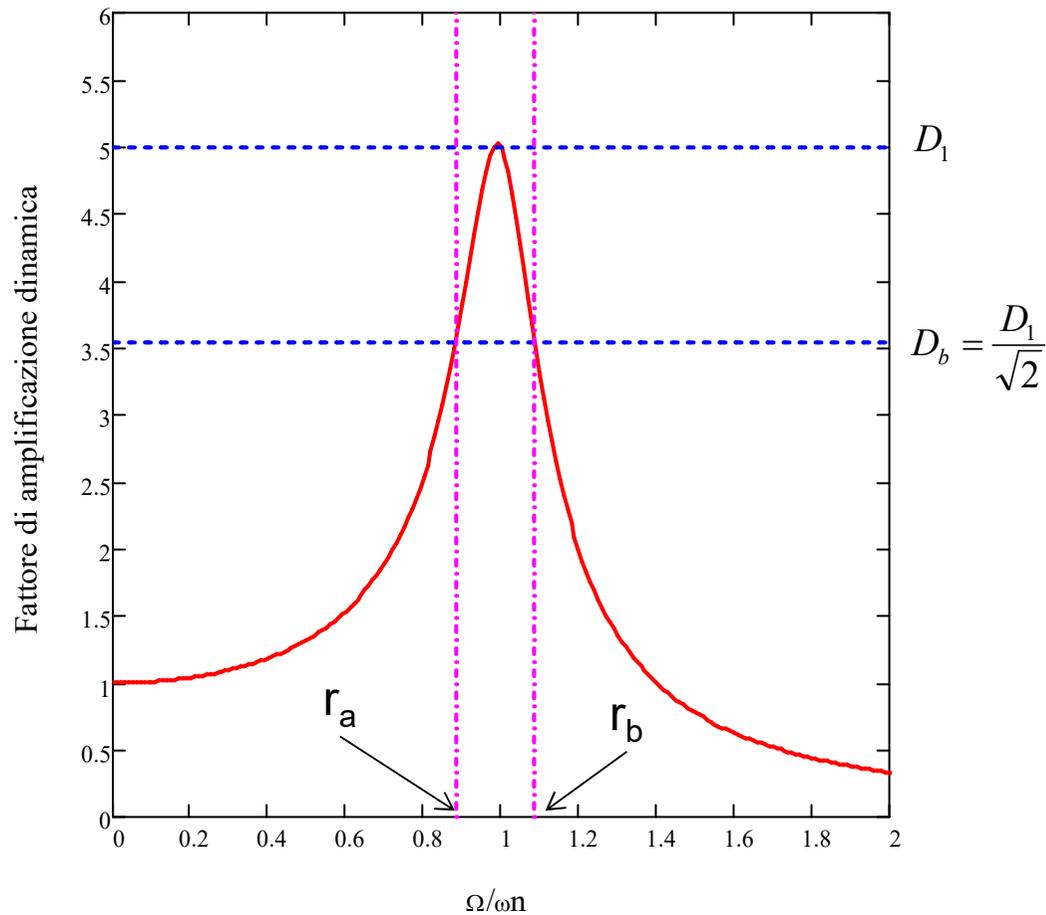
$$\begin{aligned} \delta &= \ln \left( \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}} \right) = \xi\omega_n T' = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_s} \\ &= \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}$$



$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

## DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

Si basa sull'andamento del coefficiente di amplificazione dinamica del sistema al variare della frequenza della forzante.



## DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

Calcolo di  $r_a$  ed  $r_b$

$$D_1 = \frac{1}{2\xi}$$

$$D_b = \frac{D_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$



$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



Elevando al quadrato

$$\frac{1}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2} = \frac{1}{8\xi^2}$$

$$r^4 + 2r^2(2\xi^2 - 1) + (1 - 8\xi^2) = 0$$

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 - (1 - 8\xi^2)} = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{(4\xi^4 - 4\xi^2 + 1) - (1 - 8\xi^2)} = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

## DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

Per  $\xi \ll 1$

$$r_{a,b}^2 \approx 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi$$

$$r_{a,b} = \sqrt{1 - 2\xi^2 \pm 2\xi}$$

Per  $x \ll 1$  si può porre

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \dots$$



$$r_{a,b} \approx 1 - \xi^2 \pm \xi$$



$$r_a = 1 - \xi^2 - \xi$$

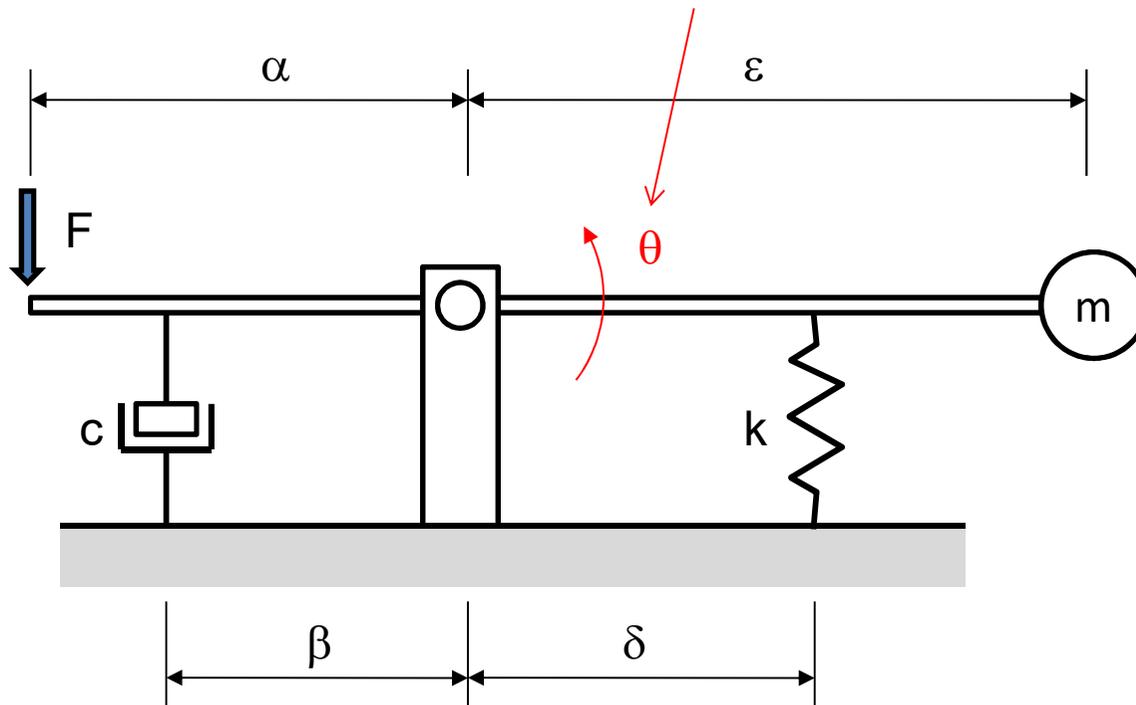
$$r_b = 1 - \xi^2 + \xi$$

$$\xi \approx \frac{r_b - r_a}{2}$$

## RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Dato un sistema meccanico formato da corpi rigidi, uniti a masse concentrate, molle e smorzatori, il cui moto sia rappresentabile con il valore di una sola grandezza.

Coordinata generalizzata  
o "Lagrangiana"



## RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

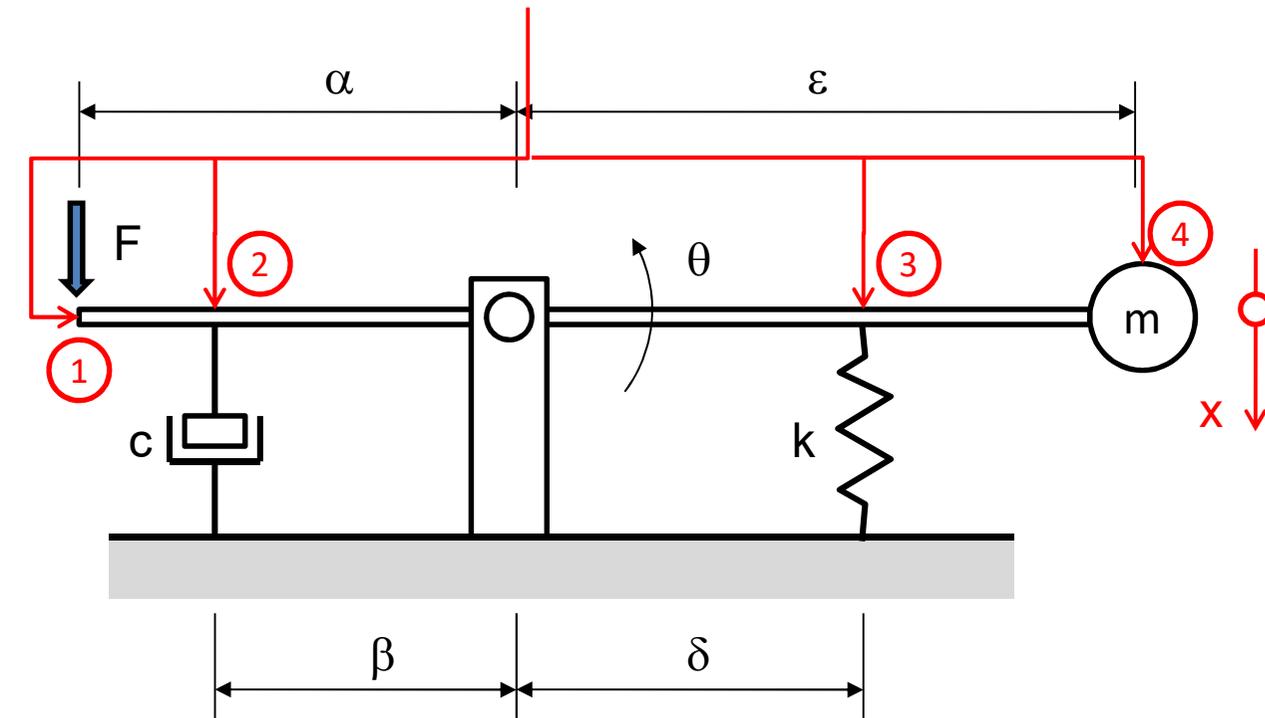
Punti "significativi" del sistema

Rappresentazione degli spostamenti

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} \Leftrightarrow \mathcal{G} ?$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \cdot \mathcal{G} \\ x_2 = \beta \cdot \mathcal{G} \\ x_3 = -\delta \cdot \mathcal{G} \\ x_4 = -\varepsilon \cdot \mathcal{G} \end{cases}$$



$$\{x\} = [d]\mathcal{G}$$

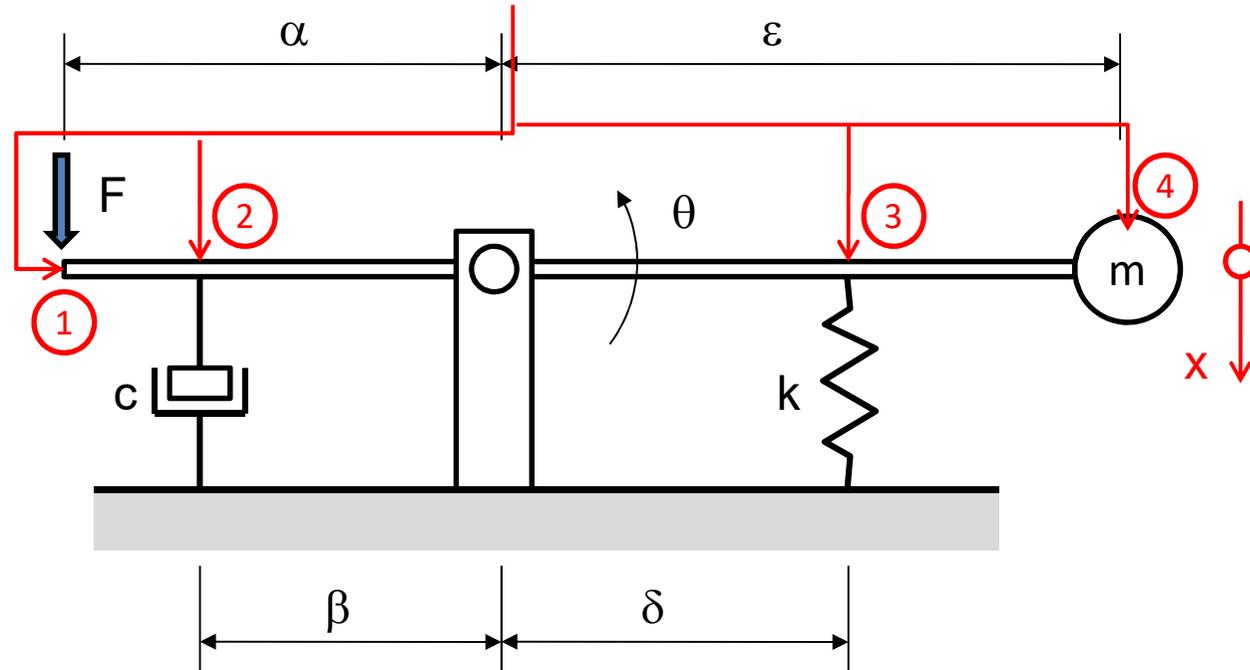
$$[d] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\delta \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$$

## RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti "significativi" del sistema

"Riduzione"  
delle forze

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Lavoro forze effettive x spost. effettivi = Lavoro forza ridotta x coord. lagrangiana

$$Q \cdot \vartheta = \{x\}^T \{f\} \quad \{x\} = [d] \vartheta$$

$$Q \cdot \vartheta = \vartheta [d]^T \{f\}$$

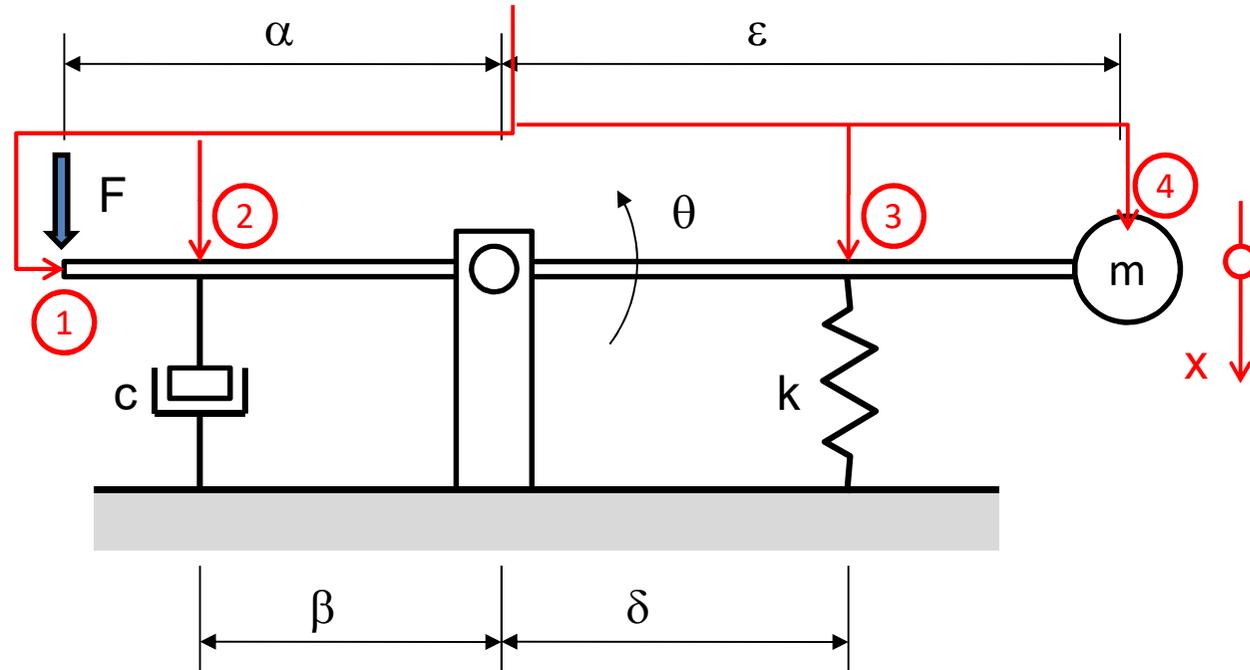
$$Q = [d]^T \{f\}$$

## RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti “significativi” del sistema

“Riduzione”  
delle rigidezze

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Lavoro forze effettive x spost. effettivi = Lavoro forza ridotta x coord. lagrangiana

$$k^* \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{G} = \{x\}^T [k] \{x\} \quad \{x\} = \{d\} \mathcal{G}$$

$$k^* \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{G} \{d\}^T [K] \{d\} \mathcal{G}$$

$$k^* = \{d\}^T [K] \{d\}$$

$$k^* = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & -\delta & -\epsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\delta \\ -\epsilon \end{bmatrix} = \delta^2 k$$

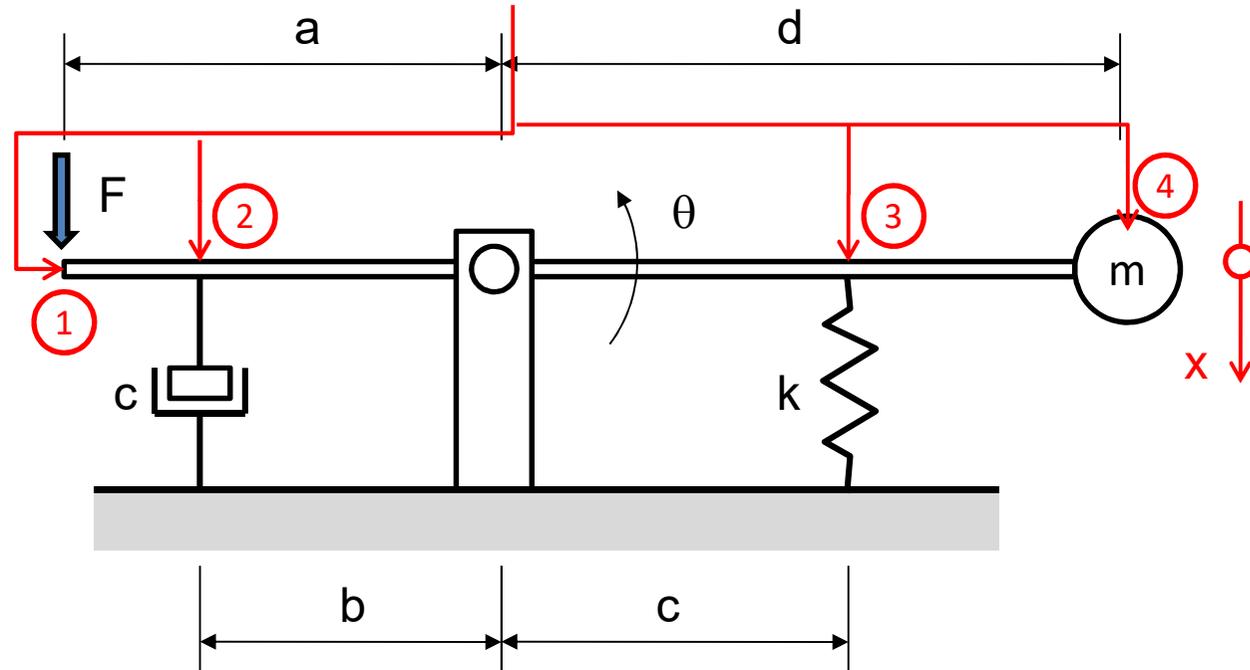
## RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti “significativi” del sistema

“Riduzione”  
delle masse e  
degli smorzamenti

$$m^* = \{d\}^T [M] \{d\}$$

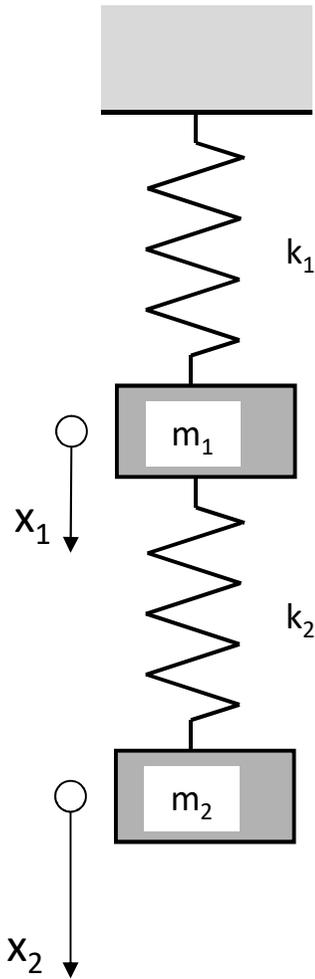
$$c^* = \{d\}^T [C] \{d\}$$



Equazione di equilibrio dinamico del sistema ridotto

$$m^* \ddot{\vartheta} + c^* \dot{\vartheta} + k^* \vartheta = Q$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Matrice di massa:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

Struttura diagonale qualora si usino come gdl gli spostamenti delle singole masse rispetto ad un punto fisso (**sistema di riferimento principale**)

Matrice di rigidità:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & k_{n-1,n} \\ 0 & \dots & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Struttura simmetrica ( $k_{ij}=k_{ji}$ ) solitamente «a banda», più o meno stretta attorno alla diagonale principale



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Costruzione della matrice di rigidità:

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

La generica componente di forza applicata secondo il gdl «j» è data da:

$$f_j = \sum_l k_{jl} u_l$$

Imponendo uno stato di spostamento:

$$\{u_l\} = \begin{cases} 0 & \text{per } l \neq i \\ 1 & \text{per } l = i \end{cases}$$

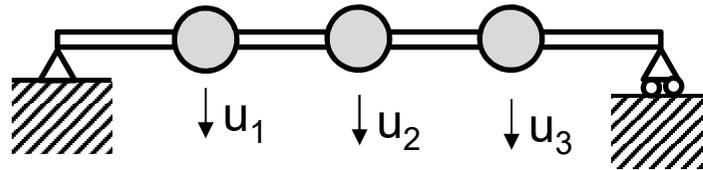
si ottiene :

$$f_j = k_{ji}$$

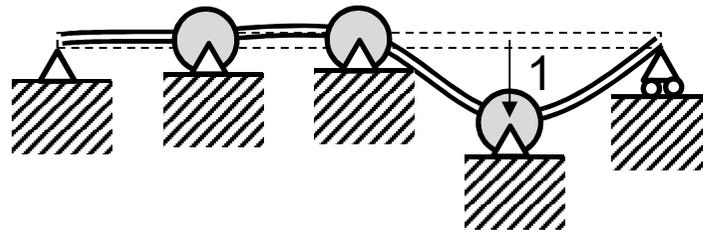
$k_{ji}$  = forza agente secondo il gdl «j» in presenza di uno stato di spostamento in cui tutti i gdl di spostamento sono nulli tranne il gdl «i» che risulta uguale ad 1.

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Le  $k_{ji}$  risultano, in pratica, onerose da calcolare direttamente dato che richiedono la soluzione di sistemi spesso fortemente iperstatici



Sistema originale (isostatico)

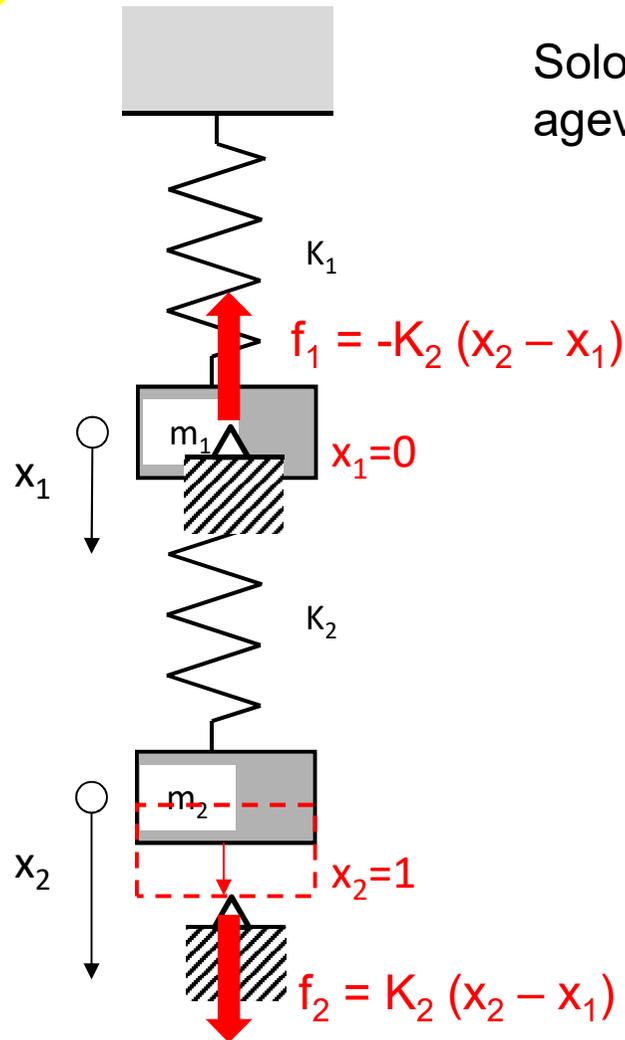


Sistema con imposto  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = 1$  (iperstatico). Calcolo delle reazioni vincolari oneroso.

### SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Solo in alcuni casi semplici è possibile calcolare agevolmente in modo diretto le  $k_{ij}$ .

Dato il sistema in figura, per calcolare le  $k_{12}$  e la  $k_{22}$ , si può imporre  $x_1=0$  ed  $x_2=1$ , ottenendo:



$$k_{12} = f_1 = -K_2 \cdot (x_2 - x_1) = -K_2 \cdot (1 - 0) = -K_2$$

$$k_{22} = f_2 = K_2 \cdot (x_2 - x_1) = K_2 \cdot (1 - 0) = K_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Molto più agevole, solitamente, risulta la costruzione della matrice di cedevolezza:

$$[C] = [K]^{-1}$$
$$\{U\} = [C]\{F\}$$

La generica componente di spostamento secondo il gdl «j» è data da:

$$u_j = \sum_l c_{jl} f_l$$

Imponendo una distribuzione di carichi applicati:

$$\{f_l\} = \begin{cases} 0 & \text{per } l \neq i \\ 1 & \text{per } l = i \end{cases}$$

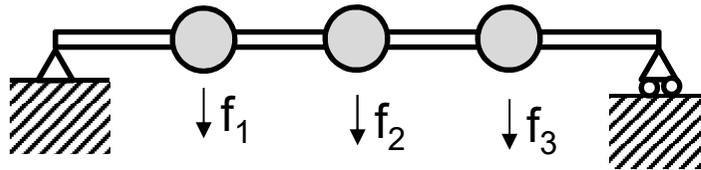
si ottiene :

$$u_j = c_{ji}$$

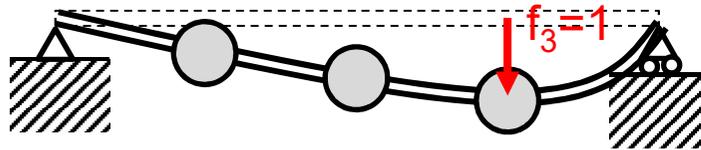
$c_{ji}$  = spostamento prodotto secondo il gdl «j» in presenza di una distribuzione di carichi applicati tutti nulli tranne quello agente secondo il gdl «i» che risulta uguale ad 1.

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Le  $c_{ji}$  risultano, in pratica, piuttosto semplici da calcolare direttamente dato che richiedono la soluzione della sola struttura originale, spesso isostatica.



Sistema originale (isostatico)



Sistema con imposto  $f_1 = f_2 = 0$ ,  $f_3 = 1$  (isostatico). Calcolo delle componenti di spostamento semplice.

Una volta costruita la  $[C]$  si ottiene facilmente la  $[K]$ :

$$[K] = [C]^{-1}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{X\}e^{i\omega t}$$

Sostituendo

$$-\omega^2 [M]\{X\}e^{i\omega t} + [K]\{X\}e^{i\omega t} = 0$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\} = 0$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Condizione per avere una soluzione non banale

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

$$(\omega^2)^n + a_{n-1}(\omega^2)^{n-1} + \dots + a_1(\omega^2) + a_n = 0 \quad \text{“Polinomio caratteristico”}$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \quad n \text{ radici (autovalori) tutte reali (K ed M simmetriche)}$$

Sostituendo un autovalore  $\omega_j$  è possibile determinare il relativo autovettore  $y^{(j)}$  (forma modale), soluzione di:

$$([K] - \omega_j^2 [M]) \{y^{(j)}\} = 0$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Normalizzazione rispetto alla matrice di massa:

Dato che il determinante è uguale a 0, la soluzione (forma modale) è nota a meno di una costante. Si è soliti normalizzarla convenzionalmente, ad esempio rispetto alla matrice di massa, in modo che risulti ( $\{Y^{(j)}\}$  autovettore normalizzato):

$$\{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} = 1$$

L'autovettore normalizzato è dato da:

$$\{y^{(j)}\}^T [M] \{y^{(j)}\} = a^2$$

$$\{Y^{(j)}\} = \frac{1}{a} \{y^{(j)}\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Problema agli autovalori in forma standard:

$$[K]\{Y_j\} = \omega_j^2 [M]\{Y_j\}$$

$$[M]^{-1}[K]\{Y_j\} = \omega_j^2 \{Y_j\}$$

$$[A] = [M]^{-1}[K]$$

$$\lambda_j = \omega_j^2$$

$$[A]\{Y_j\} = \lambda_j \{Y_j\}$$

$$[A]\{Y_j\} = \omega_j^2 \{Y_j\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Gli autovalori  $\omega_j^2$  ed i relativi autovettori  $Y_j$  sono solitamente organizzati in due matrici  $n \times n$

$$\text{diag}[\omega_j^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$[Y] = [\{Y_1\} \quad \{Y_2\} \quad - \quad \{Y_n\}]$$

“Matrice modale”

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Presi due modi propri qualsiasi:

$$([K] - \omega_r^2 [M])\{Y^{(r)}\} = 0$$

$$([K] - \omega_s^2 [M])\{Y^{(s)}\} = 0$$

Premoltiplicando la prima per  $\{Y^{(s)}\}^T$

$$\{Y^{(s)}\}^T ([K] - \omega_r^2 [M])\{Y^{(r)}\} = 0$$

Trasponendo la seconda e postmoltiplicando per  $\{Y^{(r)}\}$

$$\{Y^{(s)}\}^T ([K]^T - \omega_s^2 [M]^T)\{Y^{(r)}\} = 0$$

Dato che M e K sono simmetriche

$$\{Y^{(s)}\}^T ([K]^T - \omega_s^2 [M]^T)\{Y^{(r)}\} = \{Y^{(s)}\}^T ([K] - \omega_s^2 [M])\{Y^{(r)}\}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Si ha:

$$\{Y^{(s)}\}^T ([K] - \omega_r^2 [M]) \{Y^{(r)}\} = 0$$

$$\{Y^{(s)}\}^T ([K] - \omega_s^2 [M]) \{Y^{(r)}\} = 0$$

Sottraendo

$$(\omega_s^2 - \omega_r^2) \{Y^{(s)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} = 0 \quad \begin{cases} \{Y^{(s)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} = 0 & \text{se } \omega_s \neq \omega_r \\ \{Y^{(s)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} \neq 0 & \text{se } \omega_s = \omega_r \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\{Y^{(s)}\}^T [K] \{Y^{(r)}\} = \omega_r^2 \{Y^{(s)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} \quad \begin{cases} \{Y^{(s)}\}^T [K] \{Y^{(r)}\} = 0 & \text{se } \omega_s \neq \omega_r \\ \{Y^{(s)}\}^T [K] \{Y^{(r)}\} \neq 0 & \text{se } \omega_s = \omega_r \end{cases}$$

Infine:

$$\omega_r^2 = \frac{\{Y^{(r)}\}^T [K] \{Y^{(r)}\}}{\{Y^{(r)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\}} = \boxed{\frac{k_r}{m_r}}$$

**Rapporto di Rayleigh**

( $k_r$ ,  $m_r$  rigidezza e massa “modali” per il modo  $r$ )

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa :

$$[Y]^T [M] [Y] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

masse modali  
Matrice di massa principale

$$[Y]^T [K] [Y] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

rigidezze modali  
Matrice di rigidezza principale

NB: Il rapporto  $k_r/m_r$  è una proprietà del sistema, i valori di  $k_r$  ed  $m_r$ , invece, dipendono dal tipo di normalizzazione adottato per le forme modali.



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Se, in particolare, si normalizzano le forme modali in modo che risulti:

$$\{Y^{(r)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} = 1$$

Il prodotto della matrice modale per le matrici di massa e rigidità diviene:

$$[Y]^T [M] [Y] = [I]$$

$$[Y]^T [K] [Y] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \text{diag}[\omega_j^2]$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

### Autovalori nulli

Dato che risulta :

$$[Y]^T [K] [Y] = \text{diag}[\omega_i^2]$$

si ha:

$$\det([Y]^T [K] [Y]) = \det[Y]^T \det[K] \det[Y] = \det(\text{diag}[\omega_i^2]) = \prod_i \omega_i^2$$

Se la struttura è labile, si ha:

$$\det[K] = 0$$

il che implica che alcuni degli autovalori siano nulli. Il numero di autovalori nulli è pari al grado di labilità della struttura



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

### Indipendenza lineare

Un sistema di vettori è linearmente indipendente se la condizione:

$$\sum_i a_i \{Y^{(i)}\} = 0$$

implica che tutti gli  $a_i$  siano uguali a 0.

Si osserva che la condizione è equivalente al sistema lineare, omogeneo:

$$[Y]\{a_i\} = 0$$

Dato che si ha:

$$[Y]^T [M] [Y] = [I]$$

$$\det([Y]^T [M] [Y]) = \det[Y]^T \det[M] \det[Y] = \det[I] = 1$$

Per cui:

$$\det[Y] \neq 0$$

e di conseguenza si ha la sola soluzione banale  $\{a_i\} = 0$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

### Forme modali come base

Date le proprietà di indipendenza lineare, le forme modali costituiscono una “base”, per cui qualsiasi vettore appartenente allo stesso spazio vettoriale può essere espresso come combinazione lineare di essi:

$$V = \sum_i b_i \{Y^{(i)}\} = [Y] \{b_i\}$$

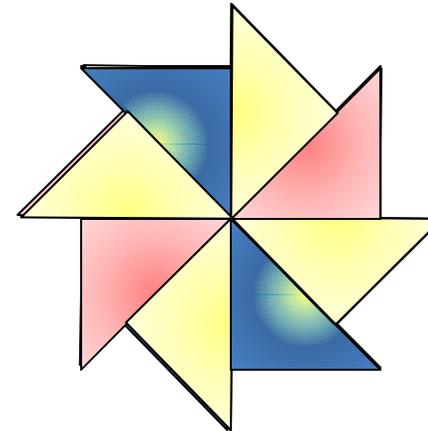
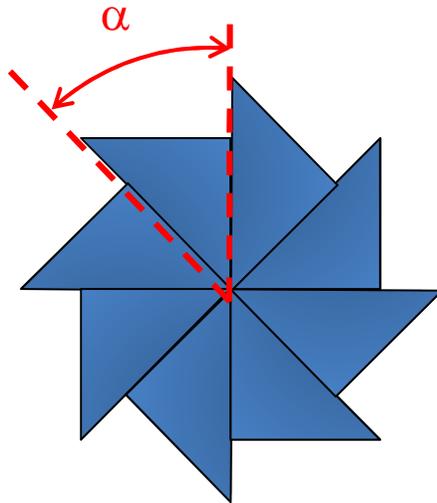
con i coefficienti  $b_i$ , scalari univocamente determinati

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

### Autovalori coincidenti

In alcuni casi è possibile ottenere degli autovalori coincidenti (aventi quindi molteplicità maggiore di 1).

Un primo caso in cui questo può verificarsi, si ha quando la struttura presenta una simmetria di rotazione, con angolo caratteristico  $< 180^\circ$ .

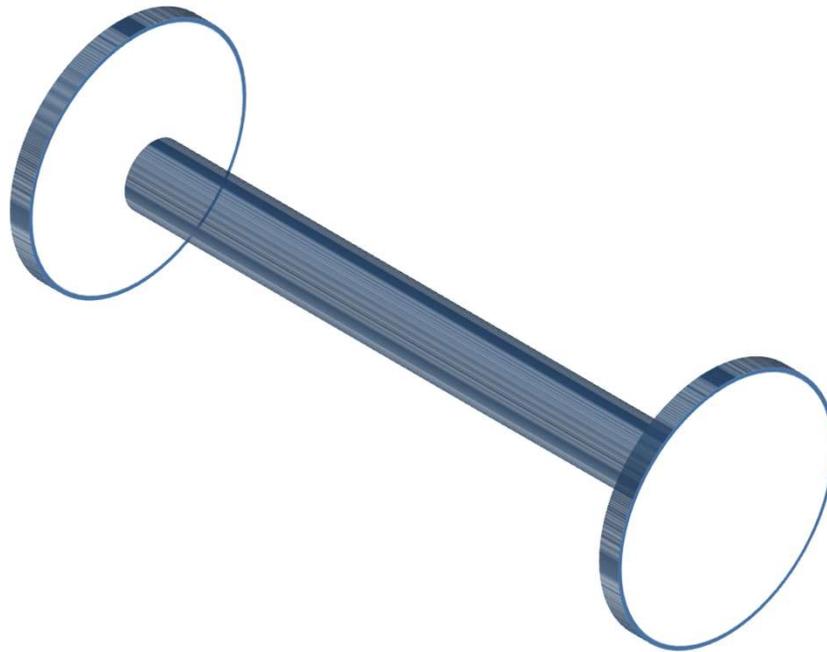


## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

### Autovalori coincidenti

La coincidenza degli autovalori può inoltre verificarsi, anche tra modi di vibrare indipendenti.

Ad esempio, è possibile fare in modo che, in un albero con due volani, la prima pulsazione flessionale e la prima torsionale coincidano.





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODI DI SOLUZIONE

Si ipotizza che le forzanti applicate ai diversi gdl siano ad andamento sinusoidale e tutte con la stessa pulsazione  $\Omega$ . Esse possono invece differire per ampiezza e fase. La relativa equazione di equilibrio dinamico diviene :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

Le principali tecniche di soluzione sono:

- Metodo diretto
- Metodo di Sovrapposizione Modale o Modal Superposition Method (MSM)

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE SOLUZIONE DIRETTA

Si ipotizza una espressione dello spostamento del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\Omega^2 \{X\}e^{i\Omega t}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$-\Omega^2 [M] \{X\}e^{i\Omega t} + [K] \{X\}e^{i\Omega t} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

da cui:

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{X\} = \{F\}$$

che fornisce la soluzione:

$$\{X\} = ([K] - \Omega^2 [M])^{-1} \{F\}$$

La soluzione ottenuta può risultare molto onerosa in termini computazionali al crescere del numero di gdl, anche perché si richiede una nuova inversione della matrice per ogni diverso valore di  $\Omega$ .



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Equazione di equilibrio dinamico :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

Le proprietà delle forme modali consentono di esprimere il vettore spostamento come una loro combinazione lineare:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i\}$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [K][Y]\{q\} = \{F(t)\}$$

e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T [M][Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = [Y]^T \{F(t)\}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Dalla:

$$[Y]^T [M] [Y] \{\ddot{q}\} + [Y]^T [K] [Y] \{q\} = [Y]^T \{F\} e^{i\Omega t}$$

ricordando le proprietà della matrice modale, si ottiene:

$$[I] \{\ddot{q}_i\} + \text{diag}[\omega_i^2] \{q_i\} = [Y]^T \{F\} e^{i\Omega t}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \{Y^{(j)}\}^T \{F\} e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Si osserva che la forzante esterna ha andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Q_j + \omega_j^2 Q_j = f_j$$

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)}$$

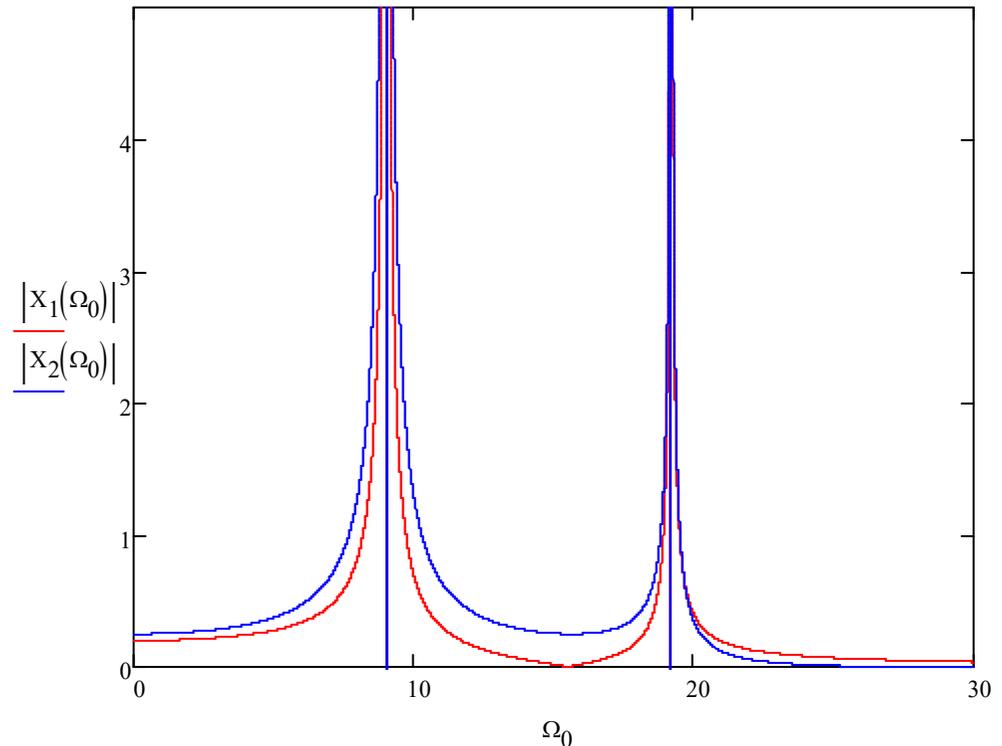
**SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE  
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)}$$

La soluzione generale risulta quindi data da:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N Q_j \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2)} \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t} =$$

che può essere vista come  
sovrapposizione di N  
oscillatori elementari ad 1 gdl.





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

La procedura di soluzione, come è lecito attendersi, è fortemente influenzata dalla natura della matrice [C].

In particolare è opportuno distinguere due casi:

- la matrice [C] viene diagonalizzata dalla matrice modale [Y] **del sistema non smorzato (“Smorzamento Classico” o “Classical Damping”)**
- la matrice [C] **non** viene diagonalizzata dalla matrice modale [Y] **(“Smorzamento Non Classico” o “Non Classical Damping”)**

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

In generale

$$[Y]^T [C] [Y]$$

Matrice modale sistema non smorzato

non è una matrice diagonale, per cui le equazioni del moto non possono essere disaccoppiate .

Se lo smorzamento è molto piccolo, diviene lecito assumere forme diagonalizzabili della matrice di smorzamento. In tal caso si ha (**Smorzamento Classico o “Classical Damping”**):

$$[Y]^T [C] [Y] = [C_d] = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix} = \text{diag}[c_{jd}]$$

$$c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

Ponendo:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q(t)\} \quad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}\} \quad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}\} + [C][Y]\{\dot{q}\} + [K][Y]\{q\} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$[Y]^T [M][Y]\{\ddot{q}\} + [Y]^T [C][Y]\{\dot{q}\} + [Y]^T [K][Y]\{q\} = 0$$

da cui:

$$[I]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[2\xi_j \omega_j]\{\dot{q}\} + \text{diag}[\omega_j^2]\{q\} = 0$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

$$[I]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[2\xi_j\omega_j]\{\dot{q}\} + \text{diag}[\omega_j^2]\{q\} = 0$$

Sistema di N equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = 0$$

cui corrispondono autovalori

$$\lambda_j = -\xi_j\omega_j \pm i\omega_j\sqrt{1-\xi_j^2} = -\xi_j\omega_j \pm i\omega_{sj}$$

e soluzioni del tipo:

$$q_j(t) = e^{-\xi_j\omega_j t} \left[ A_{j1}e^{i\omega_{sj}t} + A_{j2}e^{-i\omega_{sj}t} \right]$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

Per quanto riguarda gli autovettori (forme modali) si dimostra che, **nel caso di smorzamento classico, coincidono con quelli del sistema non smorzato.**

$$([K] - \omega_{nj}^2 [M]) \{Y^{(j)}\} = 0 \quad \text{Sistema non smorzato}$$

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Z^{(j)}\} = 0 \quad \text{Sistema smorzato}$$

Ipotizzando che valga la:  $\{Z^{(j)}\} = \{Y^{(j)}\}$  si ottiene:

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Y^{(j)}\} = ([K] - \omega_{nj}^2 [M]) \{Y^{(j)}\}$$

$$\lambda_j^2 [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 [M] \{Y^{(j)}\}$$

Premoltiplicando per la trasposta della forma modale  $\{Y^{(j)}\}^T$ :

$$\lambda_j^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j \{Y^{(j)}\}^T [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO CLASSICAL DAMPING

$$\lambda_j^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\} + \lambda_j \{Y^{(j)}\}^T [C] \{Y^{(j)}\} = -\omega_{nj}^2 \{Y^{(j)}\}^T [M] \{Y^{(j)}\}$$

$$\lambda_j^2 + 2\xi_j \omega_j \lambda_j + \omega_{nj}^2 = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_{nj} \pm \sqrt{(\xi_j \omega_{nj})^2 - \omega_{nj}^2} = -\xi_j \omega_{nj} \pm \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

Si dimostra quindi che il problema agli autovalori del sistema smorzato è soddisfatto dagli autovettori del sistema non smorzato e da autovalori dati dalla relazione precedente.

$$(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{Y^{(j)}\} = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_{nj} \pm \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Si dimostra che la matrice di smorzamento è diagonalizzabile se:

$$[C] = [M] \sum_{l=0}^m \alpha_l ([M]^{-1} [K])^l$$

Se si pone  $m=1$ , si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

**SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO  
UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE**

Combinando:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

con:

$$\begin{cases} \{Y^{(s)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} = 0 & \text{per } "s" \neq "r" \\ \{Y^{(s)}\}^T [M] \{Y^{(r)}\} = 1 & \text{per } "s" = "r" \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Y^{(s)}\}^T [K] \{Y^{(r)}\} = 0 & \text{per } "s" \neq "r" \\ \{Y^{(s)}\}^T [K] \{Y^{(r)}\} = \omega_r^2 & \text{per } "s" = "r" \end{cases}$$

si ottiene:

$$[C_d] = [Y]^T [C] [Y] = \alpha [Y]^T [M] [Y] + \beta [Y]^T [K] [Y] = \alpha [I] + \beta \cdot \text{diag}[\omega_{nj}^2]$$

$$c_{rd} = \alpha + \beta \omega_{nr}^2$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

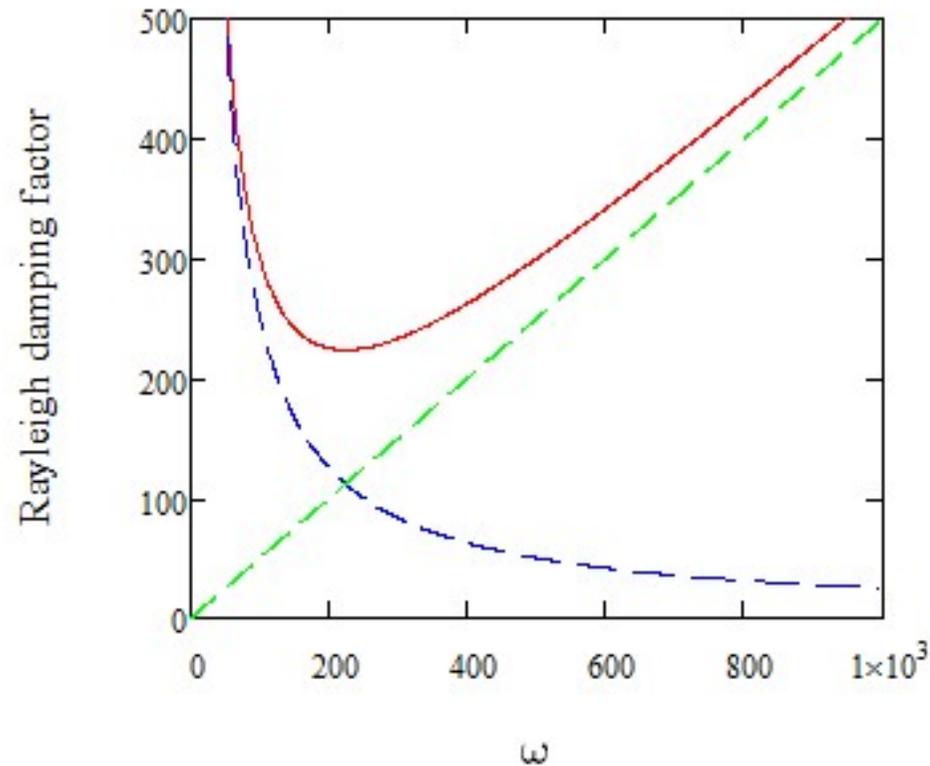
$$c_{rd} = \alpha + \beta\omega_{nr}^2$$

Combinando con :  $c_{rd} = 2\xi_r\omega_{nr}$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_{nr} = \alpha + \beta\omega_{nr}^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_{nr}} + \beta\omega_{nr} \right)$$



- Total damping
- -  $\alpha/\omega$
- -  $\beta\omega$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING – METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q(t)\}$$

con le sue derivate e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, come nel caso di sistema non smorzato, in caso di Classical Damping (matrice C diagonalizzabile), si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}_i\} + \text{diag}[2\xi_i \omega_{ni}]\{\dot{q}_i\} + \text{diag}[\omega_{ni}^2]\{q_i\} = [Y]^T \{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_{nj} \dot{q}_j + \omega_{nj}^2 q_j = \{Y_j\}^T \{F\} e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_{nj} \dot{q}_j + \omega_{nj}^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j \omega_{nj} \Omega Q_j e^{i\Omega t} + \omega_{nj}^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

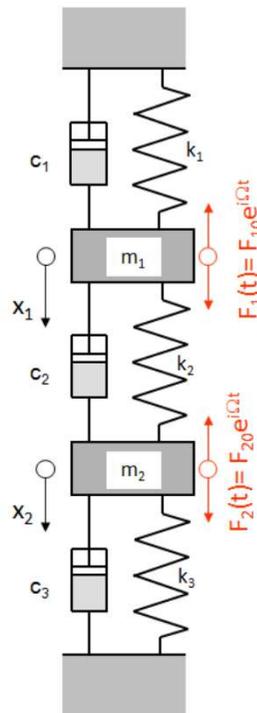
$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_{nj}^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j \omega_{nj} \Omega}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

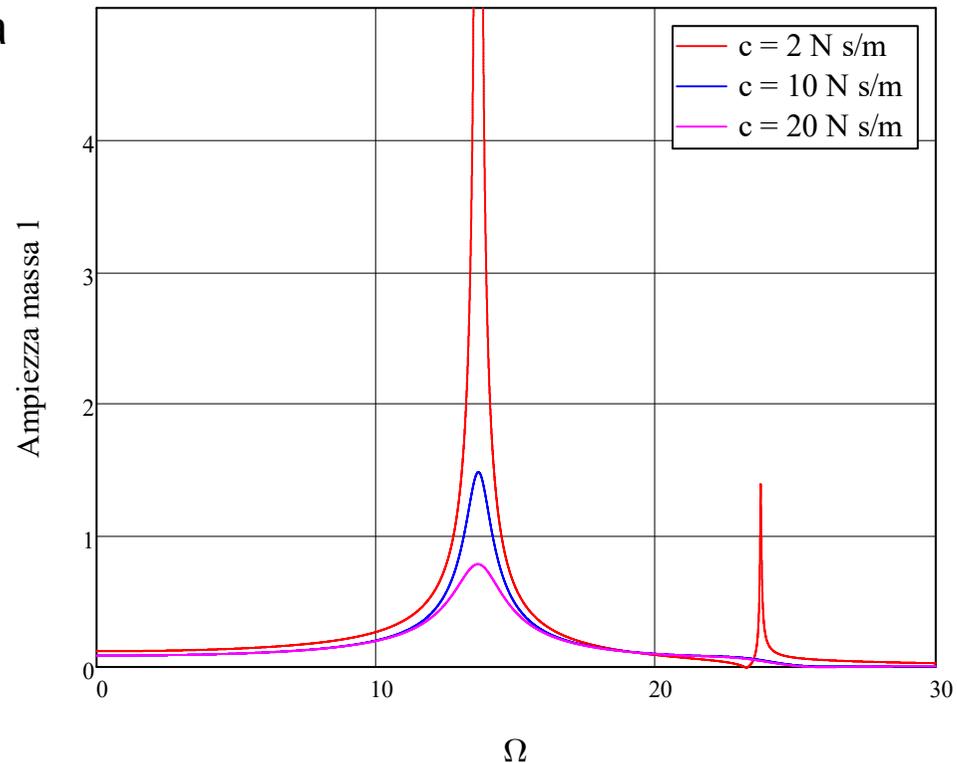
La soluzione completa assume quindi una forma del tipo:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_{nj}^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j \omega_{nj} \Omega} \{Y^{(j)}\} e^{i\Omega t}$$

ovvero la somma del contributo di N oscillatori ad 1 gdl, ognuno corrispondente ad uno dei modi propri.

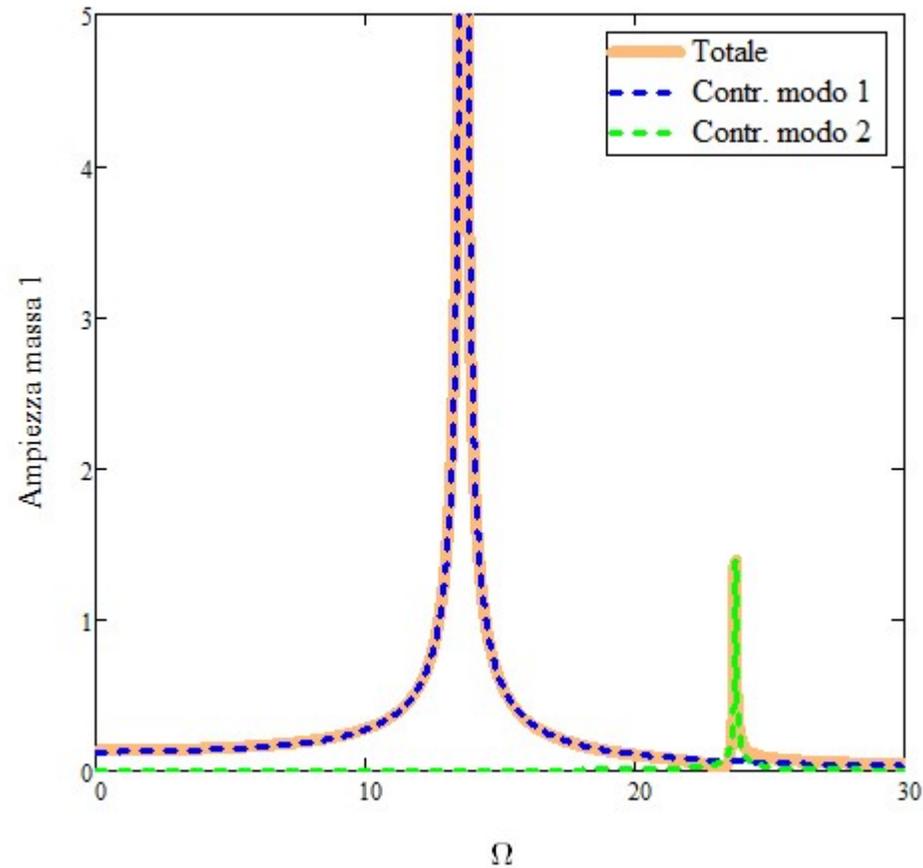
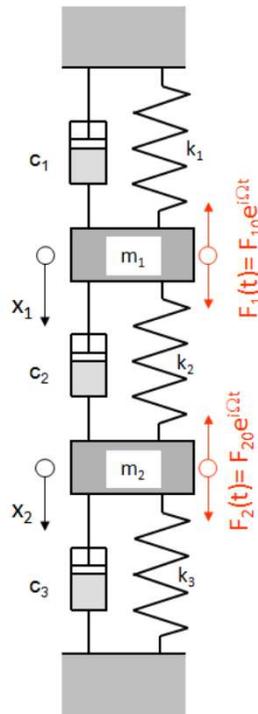


Sistema forzato a 2 gdl – effetto smorzamento



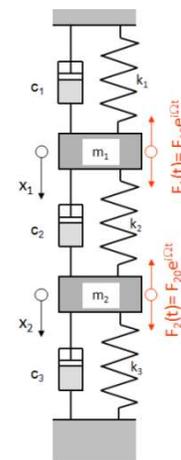
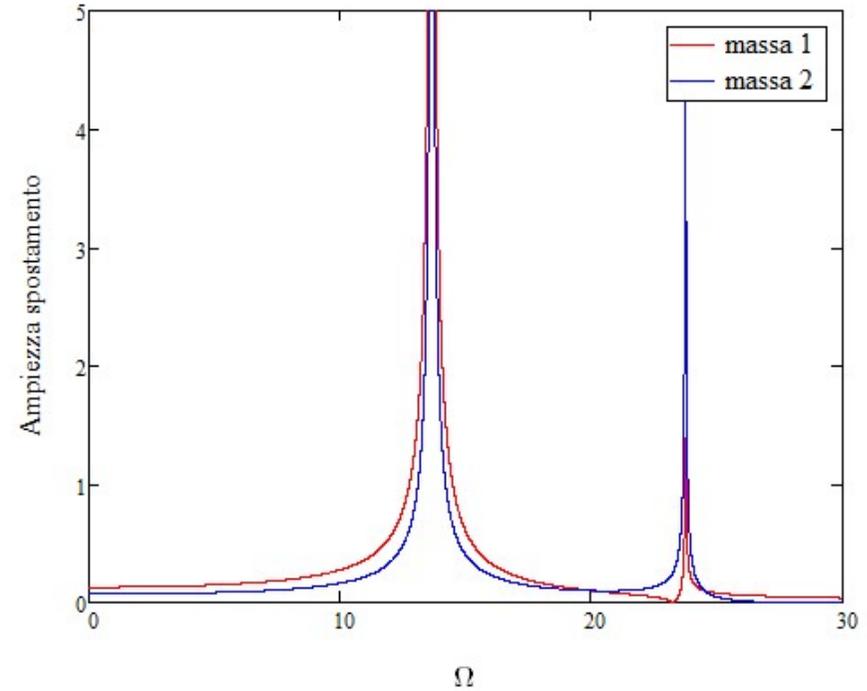
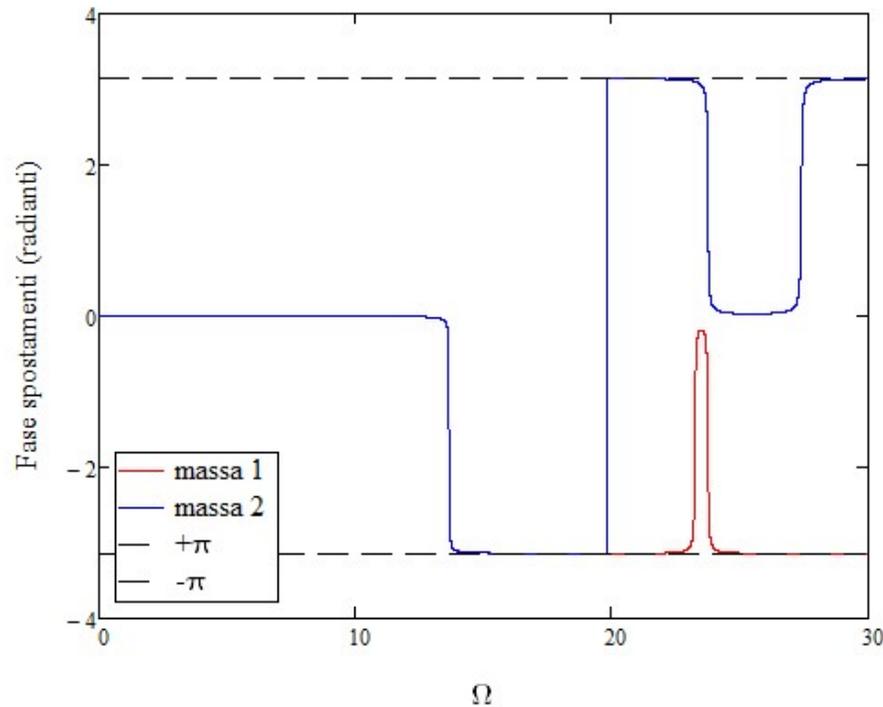
## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

Contributo dei due modi propri



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE CLASSICAL DAMPING

Andamento modulo e fase spostamenti





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING - METODI DI SOLUZIONE

Nel caso di Non Classical Damping la matrice:

$$[C_d] = [Y]^T [C] [Y]$$

non risulta diagonale. In questo caso, la soluzione del problema, sia dell'analisi modale che della risposta forzata, può essere affrontato in due modi diversi:

- Metodo di soluzione diretta del sistema completo in campo complesso
- Riduzione alla forma diagonale della matrice  $[C_d]$ , trascurando i termini fuori diagonale



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – SOLUZIONE DIRETTA ANALISI MODALE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\{x\} = \{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\dot{x}\} = \lambda\{Z\}e^{\lambda t}$$

$$\{\ddot{x}\} = \lambda^2\{Z\}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2[M]\{Z\}e^{\lambda t} + \lambda[C]\{Z\}e^{\lambda t} + [K]\{Z\}e^{\lambda t} = 0$$

da cui:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{Z\} = 0$$



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – SOLUZIONE DIRETTA ANALISI MODALE

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{Z\} = 0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]) = 0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2N} + a_1\lambda^{2N-1} + \dots + a_{2N-1}\lambda^1 + a_{2N} = 0$$

N coppie di radici (autovalori)  $\lambda_j$  complesse coniugate, che sostituite, forniscono N coppie di autovettori complessi  $\{Z_j\}$ .

Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente per piccoli N, o con metodi numerici per N grandi.

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – SOLUZIONE DIRETTA RISPOSTA FORZATA

Si ipotizza una espressione dello spostamento del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\Omega t}$$

$$\{\dot{x}(t)\} = i\Omega\{X\}e^{i\Omega t}$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\Omega^2\{X\}e^{i\Omega t}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$-\Omega^2[M]\{X\}e^{i\Omega t} + i\Omega[C]\{X\}e^{i\Omega t} + [K]\{X\}e^{i\Omega t} = \{F\}e^{i\Omega t}$$

da cui:

$$([K] - \Omega^2[M] + i\Omega[C])\{X\} = \{F\}$$

che fornisce la soluzione:

$$\{X\} = ([K] - \Omega^2[M] + i\Omega[C])^{-1} \{F\}$$

La soluzione ottenuta può risultare molto onerosa in termini computazionali al crescere del numero di gdl, anche perché si richiede una nuova inversione della matrice per ogni diverso valore di  $\Omega$ .

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – RIDUZIONE ALLA FORMA DIAGONALE DI $[C_d]$

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$[C_d] = [Y]^T [C] [Y]$$

sono «trascurabili», si può assumere per essa una forma diagonale:

$$[C_d] \approx \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad n \leq N$$

In questo caso risultano direttamente applicabili, sia nel caso dell'analisi modale che in quello della risposta forzata, le tecniche di soluzione adottate per il Classical Damping.

Nel seguito si cercherà di fornire indicazioni circa l'effettiva importanza quantitativa dei termini fuori diagonale tramite un esempio diretto.

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Una quantificazione dell'importanza relativa dei termini fuori diagonale può essere data dal cosiddetto **Coefficiente di Accoppiamento**  $\Xi$ :

$$[C_d] = \begin{bmatrix} c_{11d} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{iid} & \dots & c_{ijd} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{jld} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{NNd} \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \max \left( \frac{c_{ijd}^2}{c_{iid}c_{jld}} \right)$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

È possibile verificare quantitativamente l'errore commesso nel trascurare i termini fuori diagonale, nel caso del sistema forzato a 2 gdl.

Si assume una matrice di smorzamento principale del tipo:

$$[C_d] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} \\ -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si calcola quindi la risposta del sistema, in termini di un vettore complesso di ampiezze di spostamento, tramite soluzione diretta (esatta) delle equazioni del moto:

$$\{X_{exact}(\xi, \Omega, \Xi)\} = ([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M])^{-1} \{F\}$$

$$[C] = ([Y]^T)^{-1} [C_d] [Y]^{-1}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si calcola quindi la risposta del sistema con il MSM, utilizzando la matrice di spostamento principale seguente (nella quale sono stati trascurati i termini fuori diagonale) :

$$[C_d^*] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si ottiene in tal modo un altro vettore complesso di ampiezze di spostamento

$$\{X_{MSM}(\xi, \Omega, \Xi)\} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + 2i\xi_j\omega_j\Omega} \{Y^{(j)}\}$$

## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si definisce quindi un errore percentuale massimo della soluzione ottenuta trascurando i termini fuori diagonale, nella forma :

$$Err(\xi, \Omega, \Xi) = \max_{j=1, N} \left( \left| \frac{X_{exact, j}(\xi, \Omega, \Xi) - X_{MSM, j}(\xi, \Omega, \Xi)}{\max_{j=1, N} (X_{exact, j}(\xi, \Omega, \Xi))} \right| \cdot 100 \right)$$

nella quale l'errore assoluto viene rapportato al massimo valore di ampiezza che si verifica, tra tutti i gradi di libertà, per i valori dati di  $\Omega$ ,  $\Xi$  ed  $\xi$ .

Nel seguito si analizza l'andamento dell'errore, per un sistema a 2 gdl, in un "range" di valori di smorzamento  $0 < \xi < 0.5$  e di frequenza  $0 < \Omega < 30$  Hz.

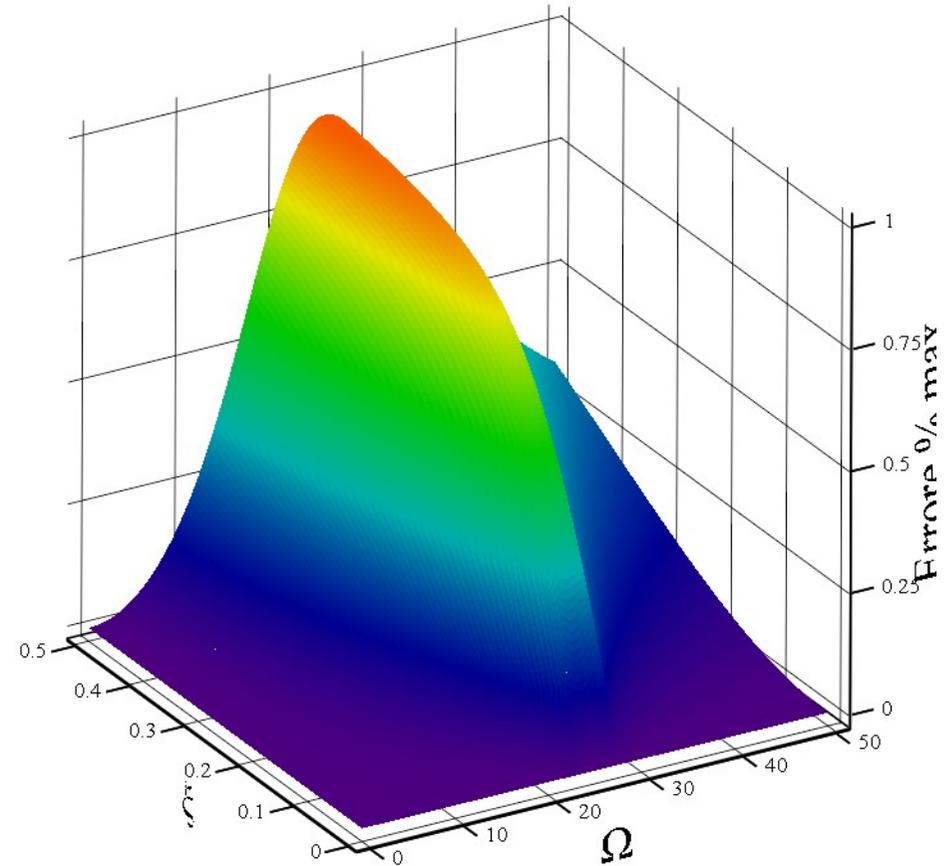
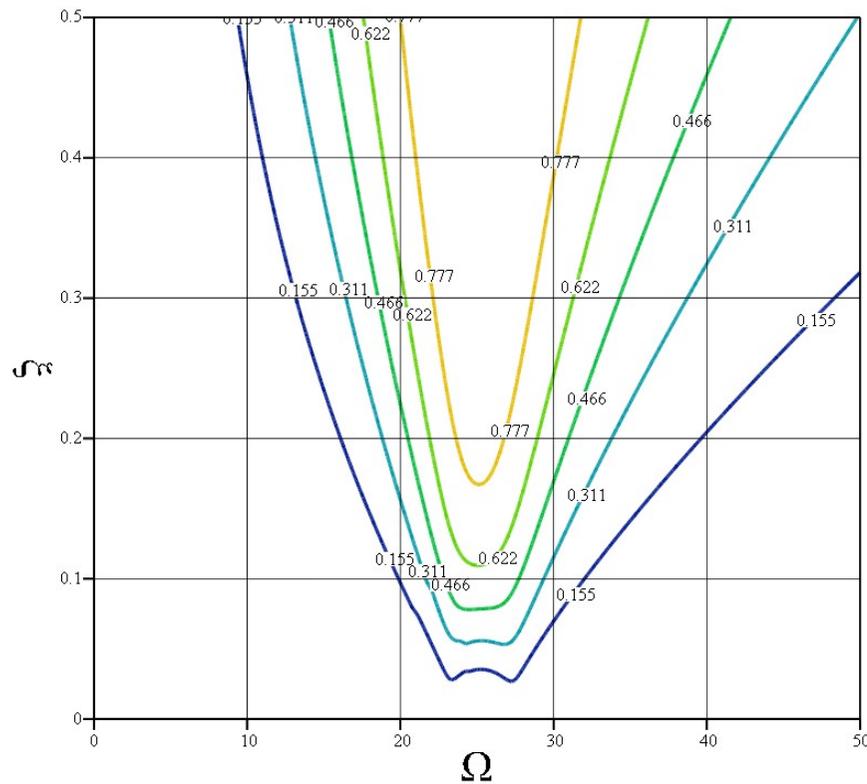
Le pulsazioni naturali del sistema sono:

- $\omega_{n1} = 13.6$  Hz
- $\omega_{n2} = 23.7$  Hz



## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

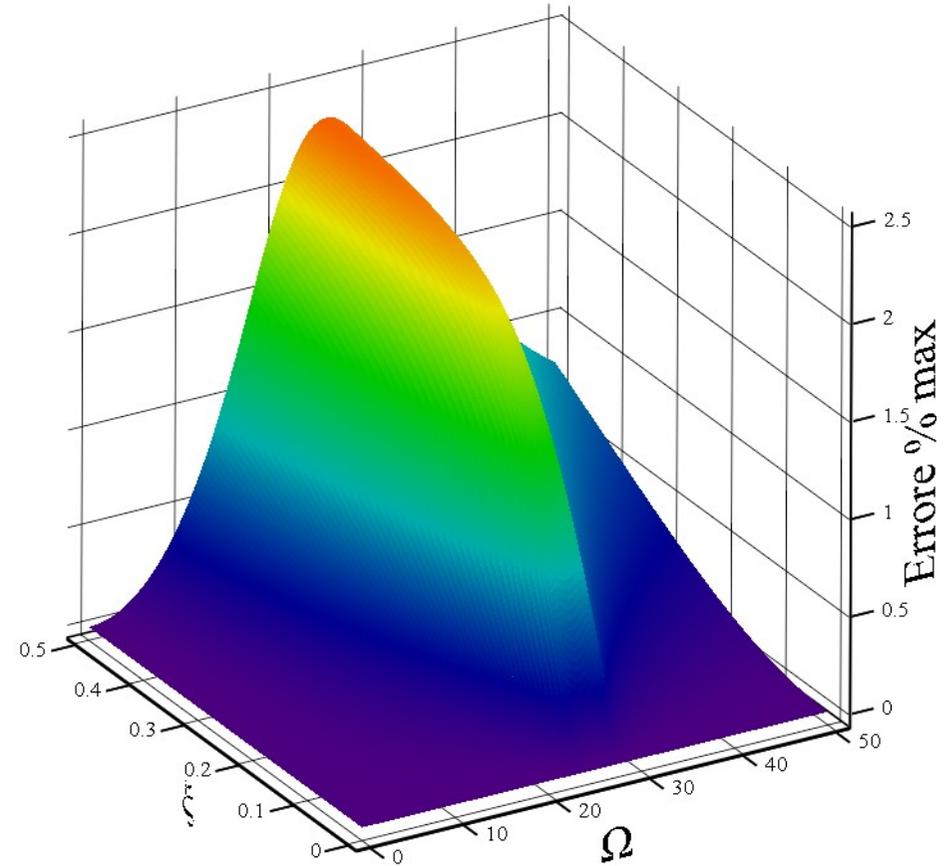
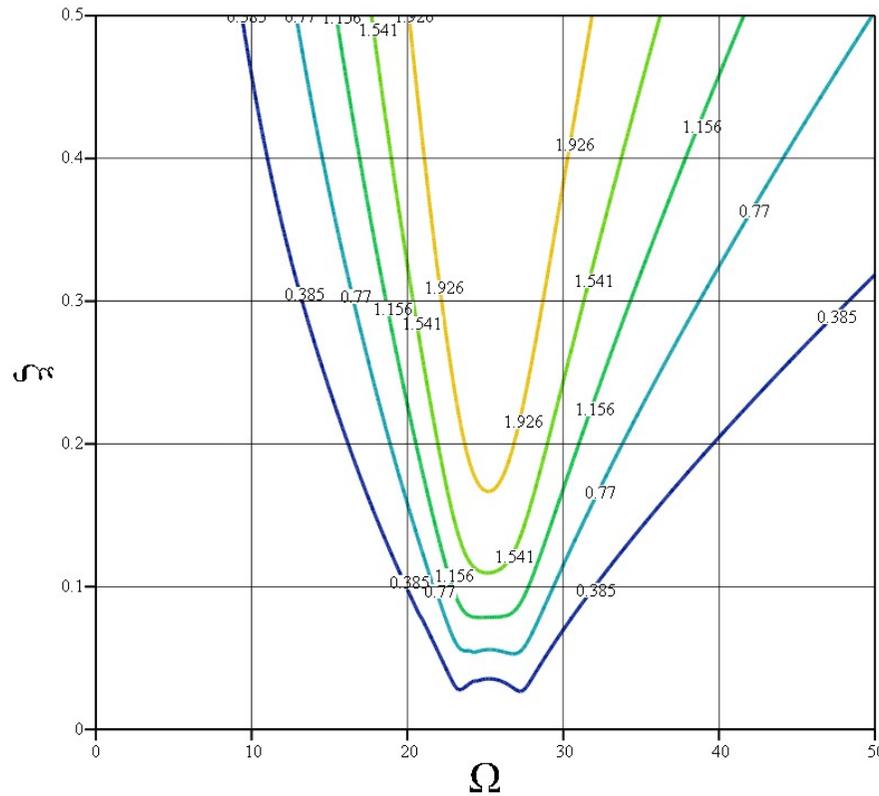
$$\Gamma = 0.01$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

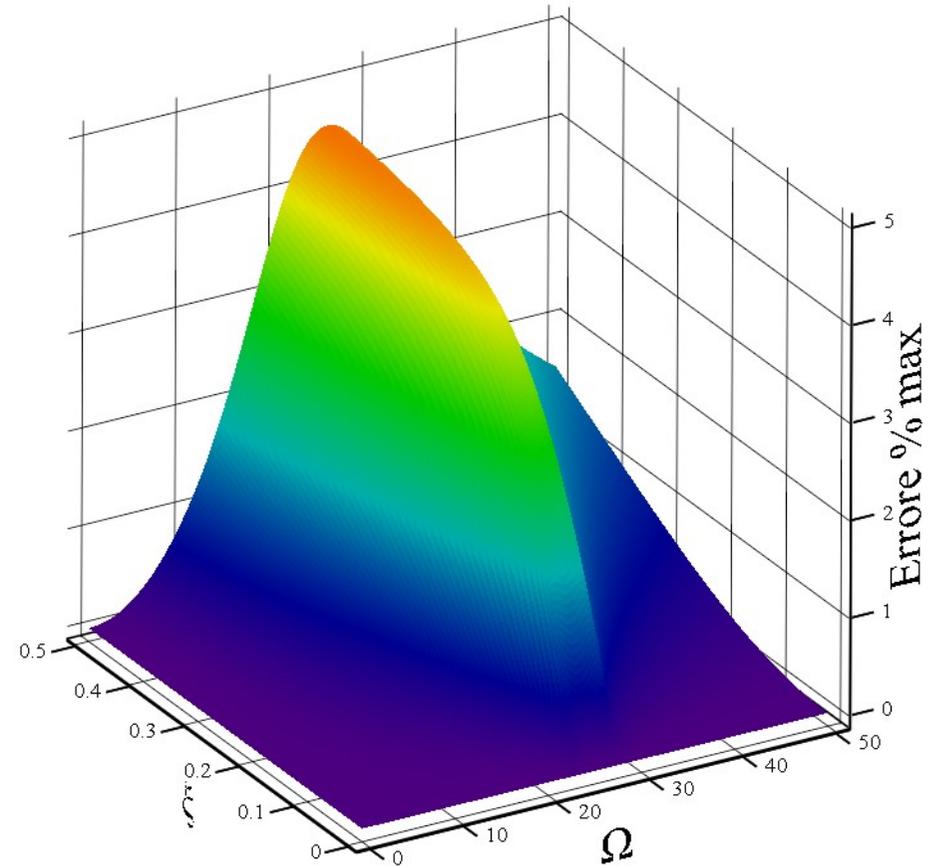
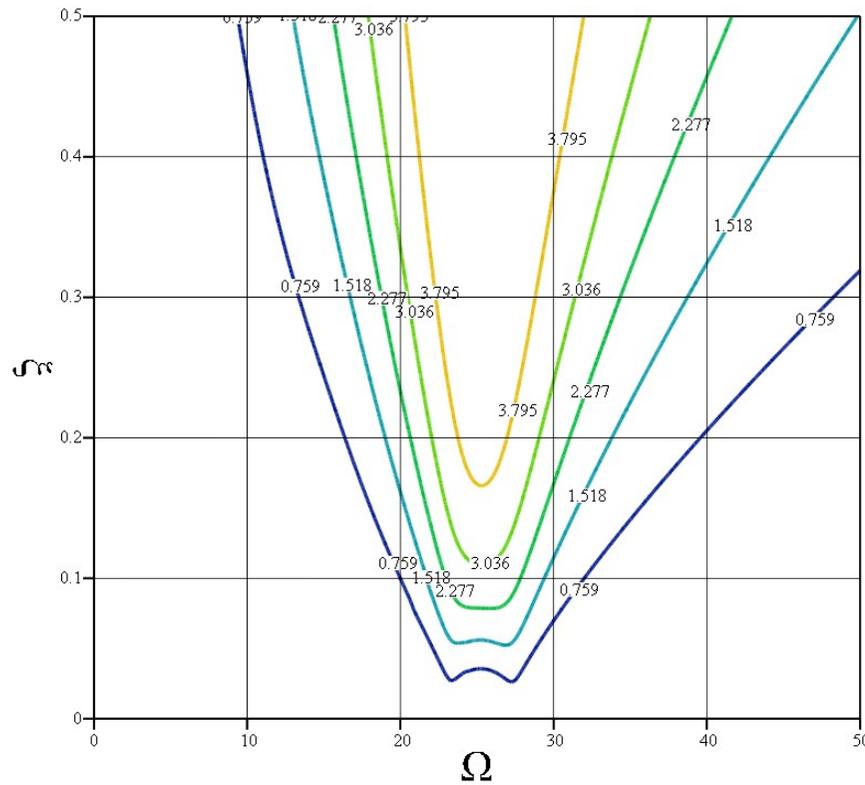
$$\xi = 0.025$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

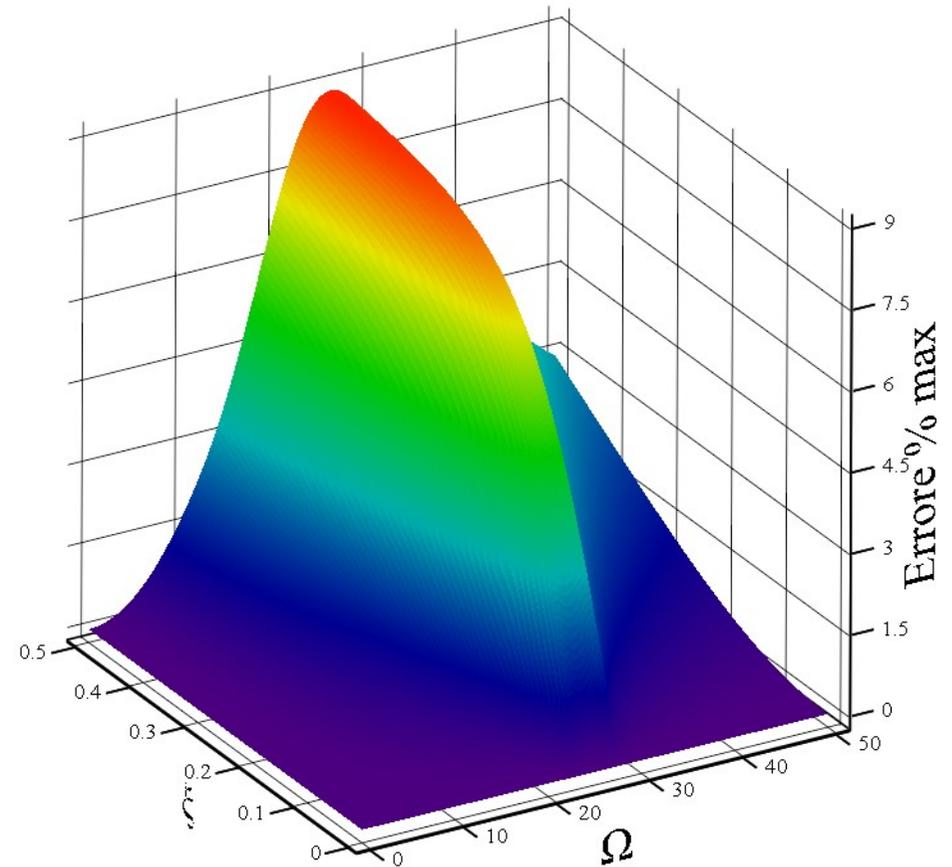
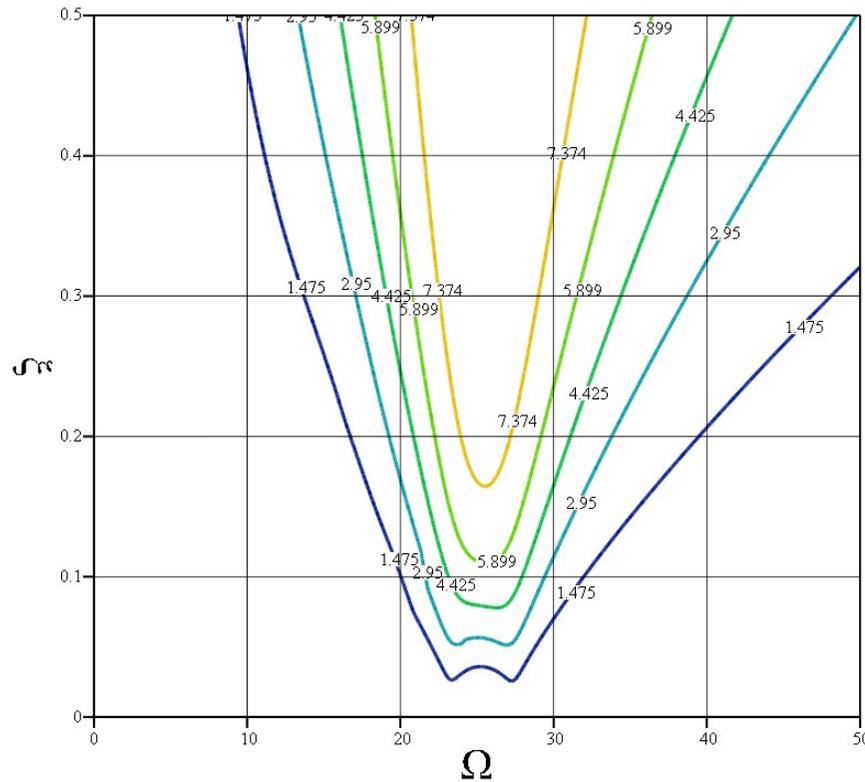
$$\Gamma = 0.05$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\Gamma = 0.1$$





## SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Osservazioni:

- l'errore percentuale massimo commesso trascurando i termini fuori diagonale appare dipendere principalmente dal Coefficiente di accoppiamento  $\Xi$ , riducendosi a poche unità percentuali su tutto il campo di frequenze e smorzamenti analizzato per  $\Xi < 0.01$ .
- l'errore percentuale massimo appare dipendente anche dal livello generale di smorzamento  $\xi$ , assumendo generalmente valori inferiori a poche unità percentuali per  $\xi < 0.1$
- esistono tuttavia delle condizioni (Es: valori di  $\xi$  relativamente elevati  $>0.1-0.2$ ) nelle quali l'errore commesso trascurando i termini fuori diagonale può risultare inaccettabile.



# ANALISI DINAMICA TRAMITE FINITE ELEMENT METHOD (FEM)

- Il FEM costituisce un metodo molto versatile per condurre la maggior parte delle analisi dinamiche
- Il modello FEM è finalizzato ad una soluzione approssimata, tramite discretizzazione, del problema dinamico definito nel continuo
- Il modello FEM, dato che possiede un numero finito di gdl, è sostanzialmente un modello a parametri concentrati
- Il classico modello a parametri concentrati implica la riduzione della struttura ad un insieme di masse, molle e smorzatori semplici
- Il modello FEM, invece, permette di ottenere direttamente matrici di massa, rigidezza e smorzamento rappresentativi di strutture complesse e anche di problemi definiti nel continuo.
- Temi che saranno trattati
  - Basi teoriche e considerazioni generali
  - Analisi modale
  - Analisi della risposta armonica
  - Analisi di transitorio



## MODELLI FEM PER ANALISI DINAMICA

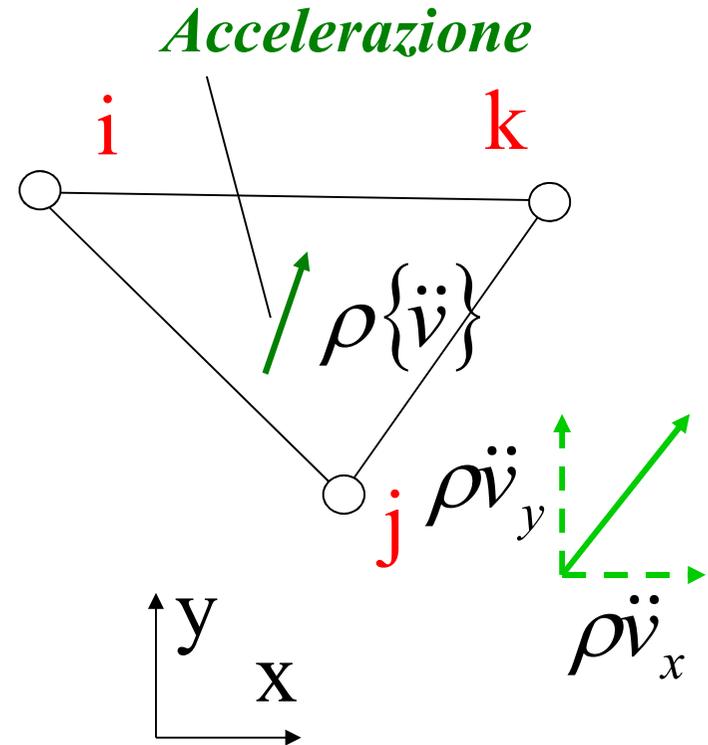
- Generalmente lo studio di una struttura in campo dinamico tende a prendere in considerazione soprattutto i modi propri di ordine più basso, le relative forme modali ed il loro contributo alle ampiezze di vibrazione.
- Per rappresentare solo i modi propri di ordine più basso è, in genere, sufficiente un numero piuttosto contenuto di gdl, nettamente inferiore a quello richiesto per una rappresentazione di dettaglio dello stato di tensione.
- Di conseguenza, il modello FEM per analisi dinamica può essere più semplice e grossolano di quelli usati per l'analisi tensionale (ad esempio, gli elementi possono essere decisamente più grandi e si possono trascurare particolari geometrici come fori, raccordi, etc.)

## ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/1

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



$$dL_i = -\{\delta v\}^T \rho \{\ddot{v}\} dV$$

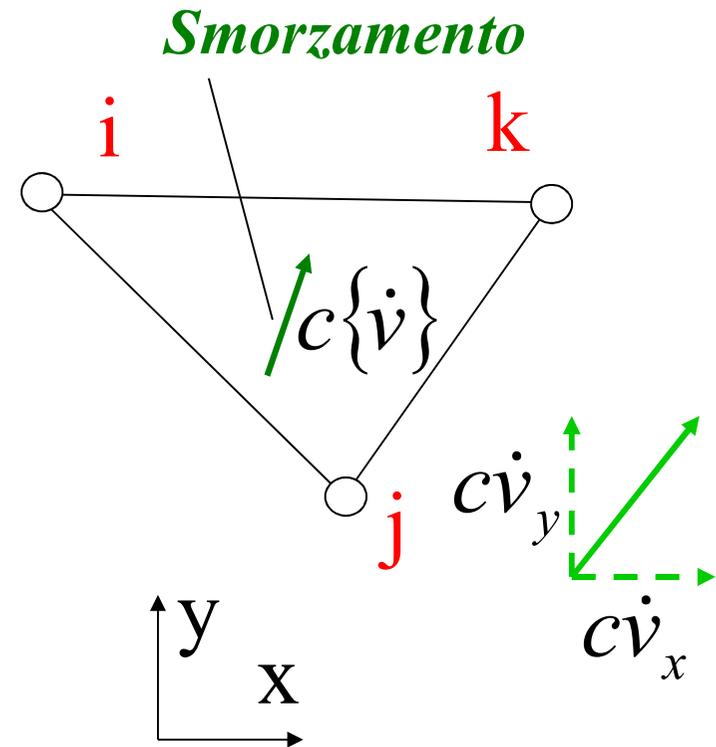
$$\begin{aligned} L_i &= -\int_V \{\delta v\}^T \rho \{\ddot{v}\} dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho [N] \{\ddot{U}^e\} dV = \\ &= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\ddot{U}^e\} \end{aligned}$$

## ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/2

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



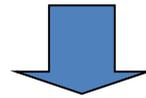
$$dL_s = -\{\delta v\}^T c\{\dot{v}\}dV$$

$$\begin{aligned} L_s &= -\int_V \{\delta v\}^T \rho\{\dot{v}\}dV = -\int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \rho[N]\{\dot{U}^e\}dV = \\ &= -\{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \rho[N]dV \{\dot{U}^e\} \end{aligned}$$

ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/3

$$\cancel{\{\delta U^e\}}^T \left( \{P^e\} - \int_V [N]^T c [N] dV \{\dot{U}^e\} - \int_V [N]^T \rho [N] dV \{\ddot{U}^e\} \right) =$$

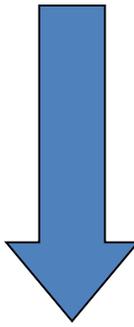
$$= \cancel{\{\delta U^e\}}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{U^e\}$$



$$[M^e] \{\ddot{U}^e\} + [C^e] \{\dot{U}^e\} + [K^e] \{U^e\} = \{P^e\}$$

$$\int_V [N]^T \rho [N] dV$$

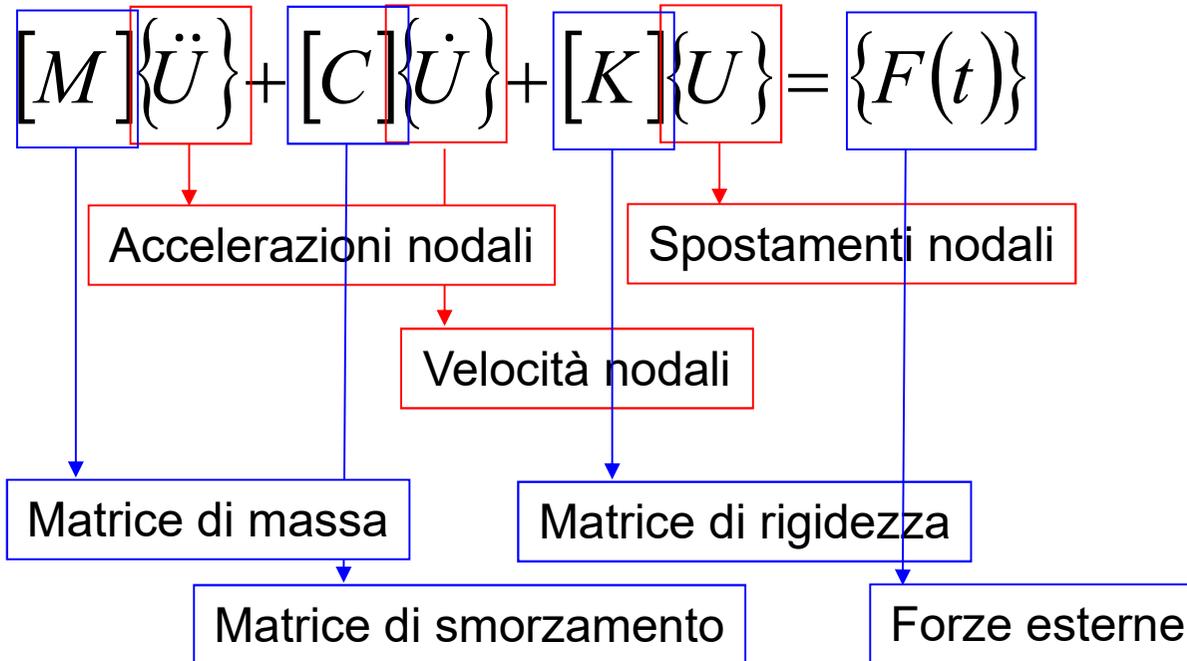
$$\int_V [N]^T c [N] dV$$



$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

## ESTENSIONE SISTEMA RISOLVENTE IN CAMPO DINAMICO/4

Equazione di equilibrio dinamico



## FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/1

Matrice di massa “consistent”:

$$[M^e] = \int [N]^T \rho [N] dV$$

- simmetrica
- sostanzialmente piena

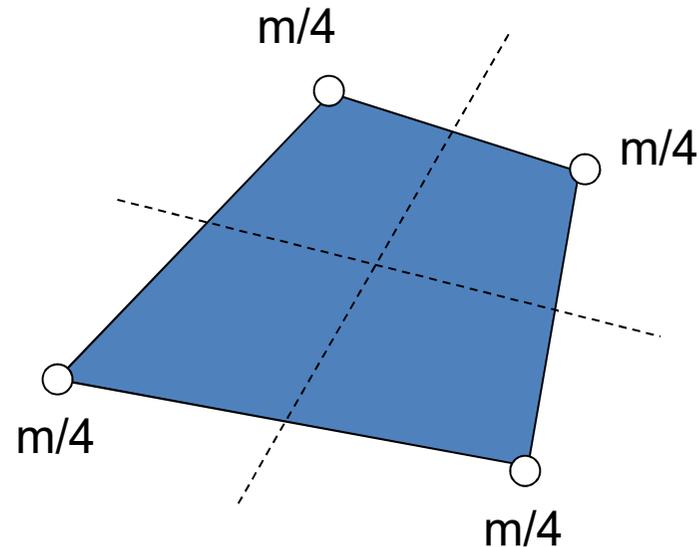
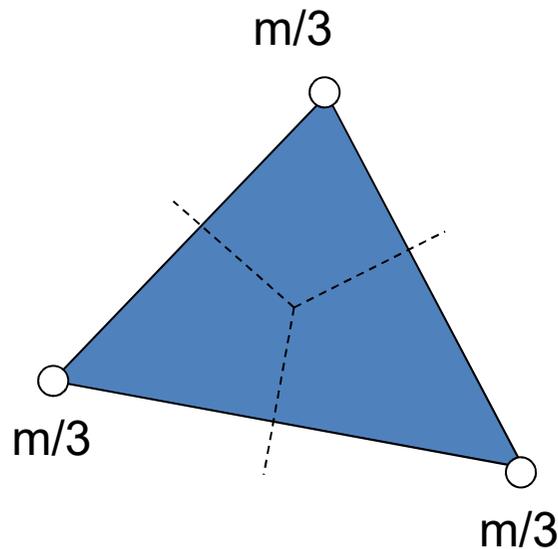
Elemento triangolare piano

$$\int [N]^T \rho [N] dV = \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix} dV =$$

$$= \rho \begin{bmatrix} \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV \end{bmatrix}$$

## FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/2

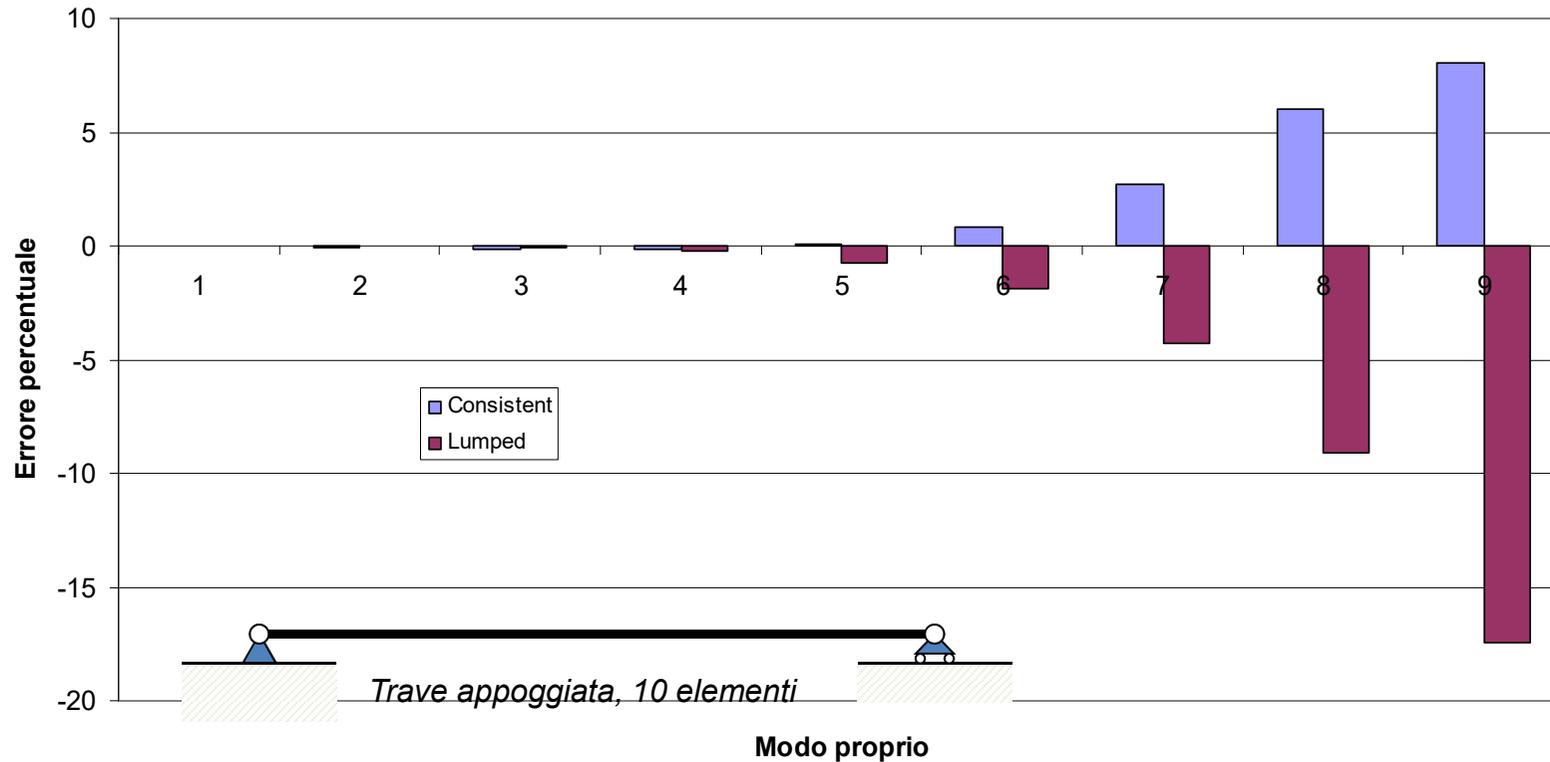
Matrice di massa “lumped”: la massa viene concentrata nei nodi in qualche modo fisicamente accettabile (di solito ovvio per gli elementi con nodi nei vertici, meno ovvio per quelli con nodi intermedi), in modo che risulti:  $\sum_j M_j = \int \rho dV$



- la struttura della matrice di massa è diagonale

$$[M] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

## FORMULAZIONE DELLA MATRICE DI MASSA/3



- La formulazione “consistent” produce errori minori in valore assoluto, anche se gli errori sono comunque piccoli, almeno per le prime frequenze proprie
- La struttura diagonale può risultare molto vantaggiosa in alcune soluzioni iterative (es. analisi di transitorio) in quanto non richiede inversione

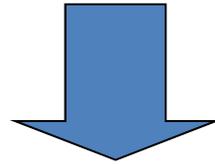
## ANALISI MODALE/1

Si propone di determinare le pulsazioni proprie di una struttura e le relative forme modali.

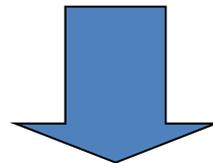
Analizza le oscillazioni libere della struttura, in assenza dei carichi esterni

Effetto dello smorzamento solitamente molto piccolo

$$[M]\{\ddot{U}\} + \cancel{[C]\{\dot{U}\}} + [K]\{U\} = \cancel{\{F(t)\}}$$

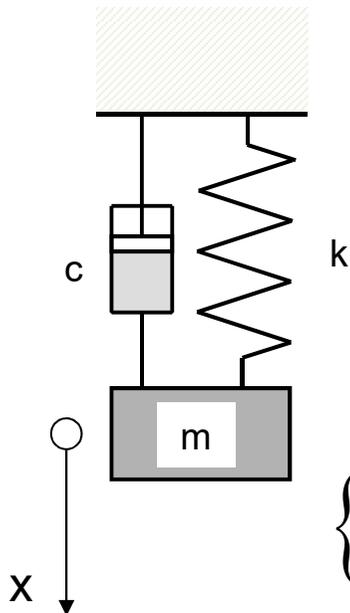


$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0$$

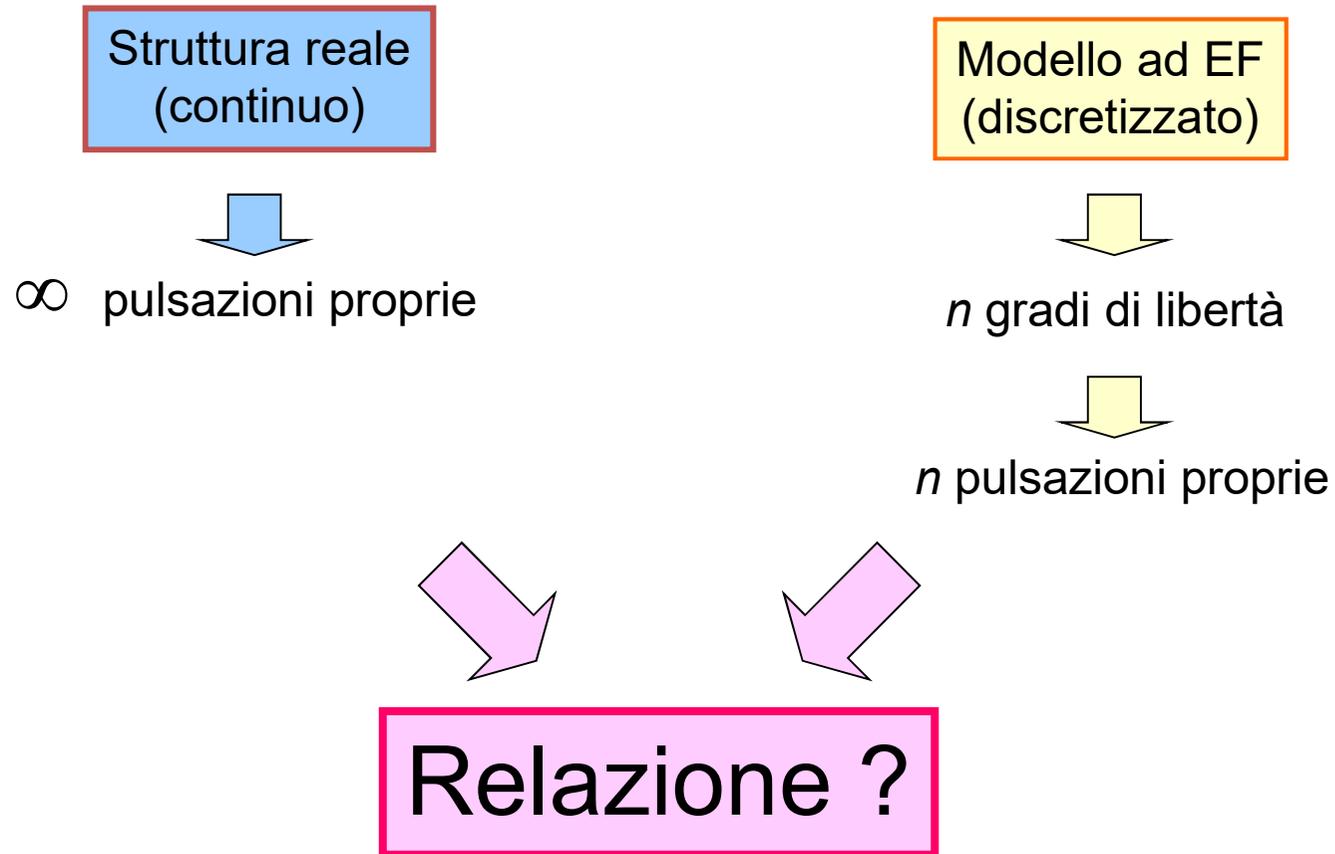


$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots \leq \omega_i \leq \dots \leq \omega_n$$

$$\{Y^{(1)}\} \quad \{Y^{(2)}\} \quad \{Y^{(3)}\} \dots \{Y^{(i)}\} \quad \dots \quad \{Y^{(n)}\} \quad \text{Forme modali}$$

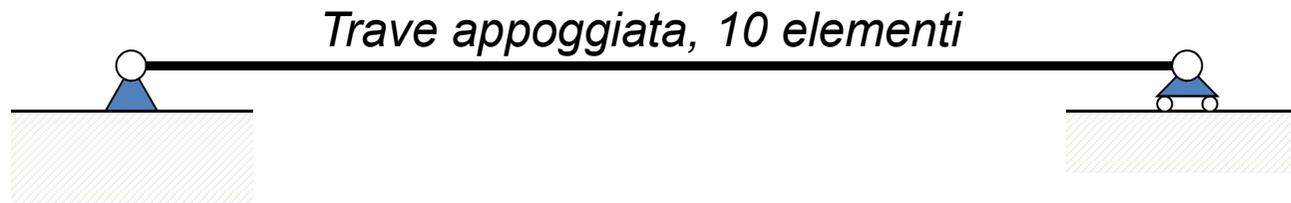


## ANALISI MODALE/7

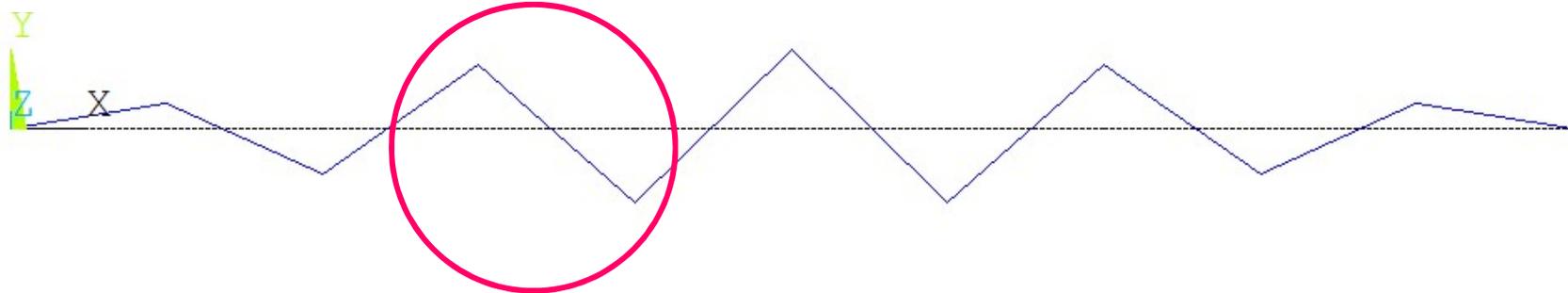


## ANALISI MODALE/8

Tipico andamento spaziale delle Forme modali



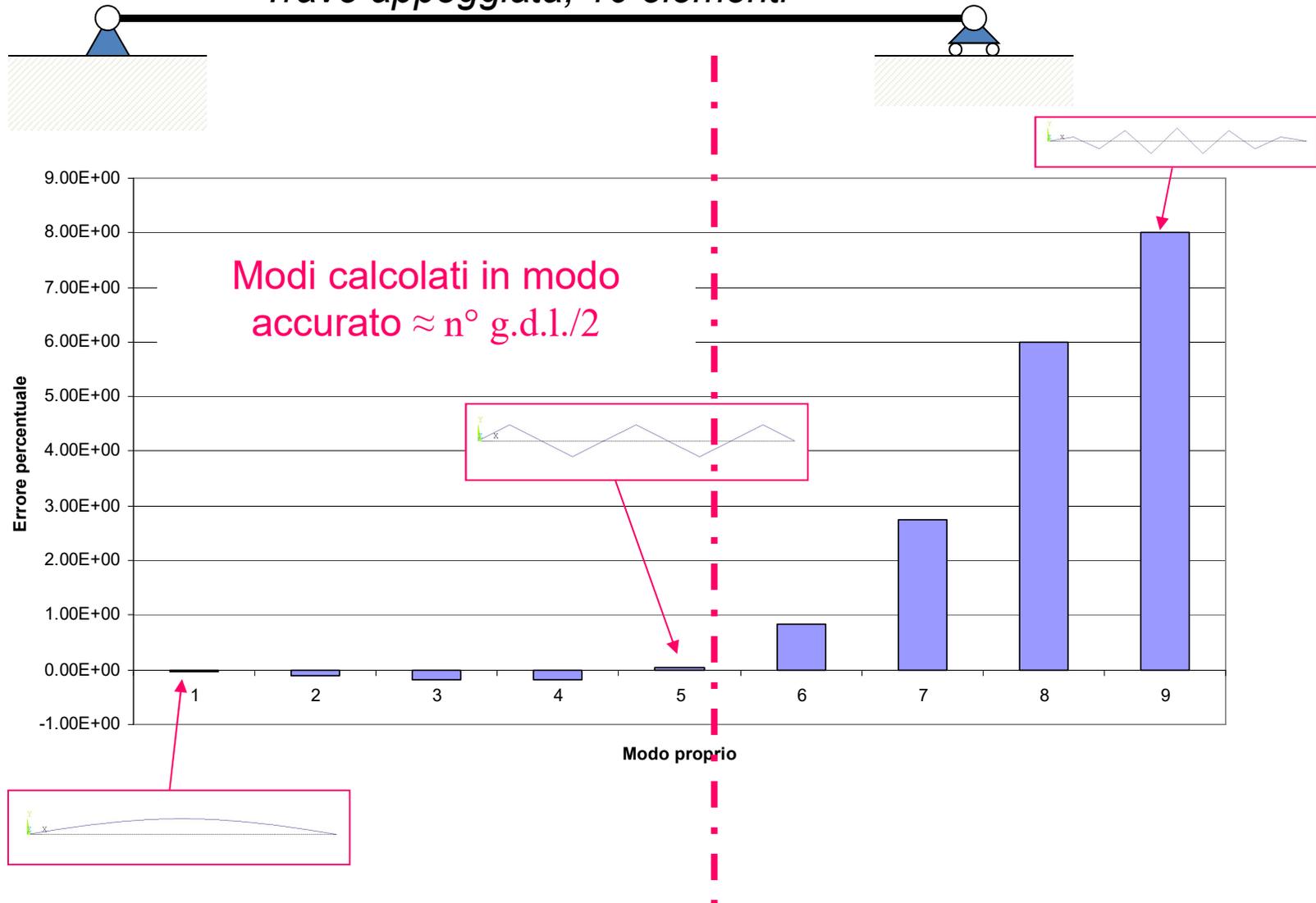
9° modo



1 solo elemento: rappresentazione poco accurata del campo di velocità ed accelerazione

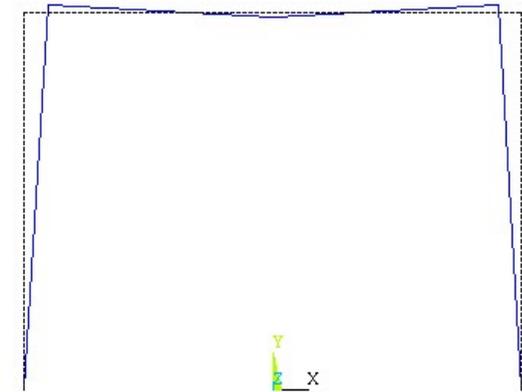
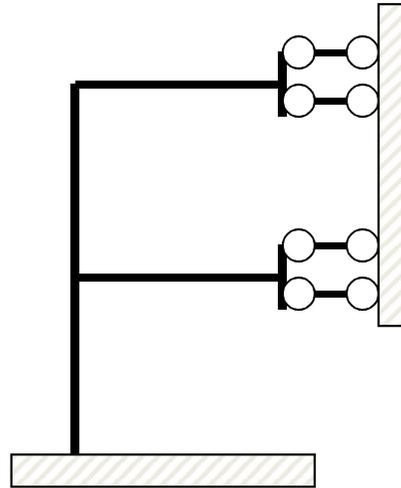
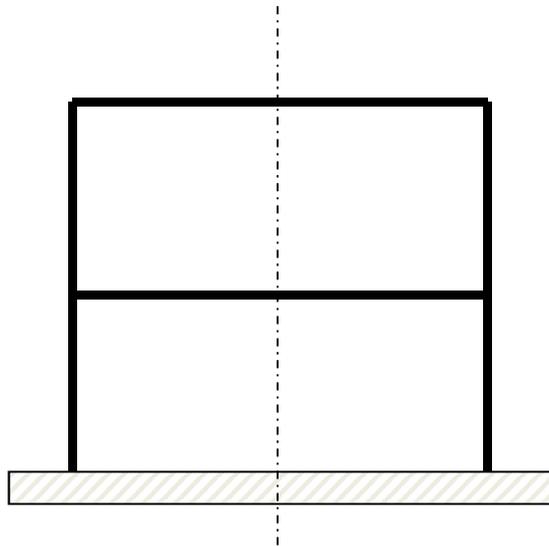
## ANALISI MODALE/9

*Trave appoggiata, 10 elementi*



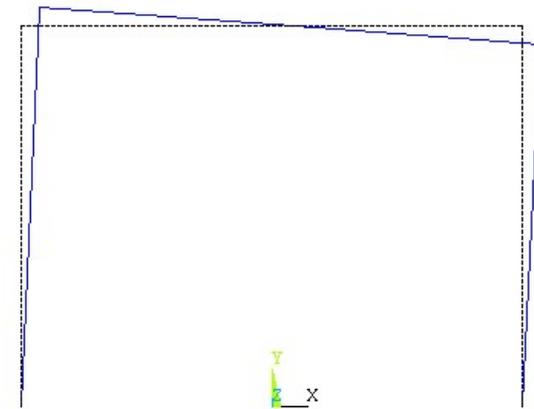
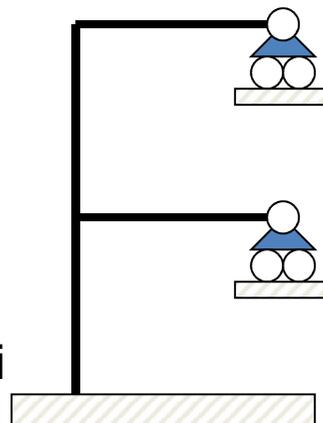
## SIMMETRIA STRUTTURALE/1

Se si usano considerazioni di simmetria per ridurre le dimensioni di un modello, si otterranno solo i modi propri le cui forme modali rispettano la stessa simmetria.



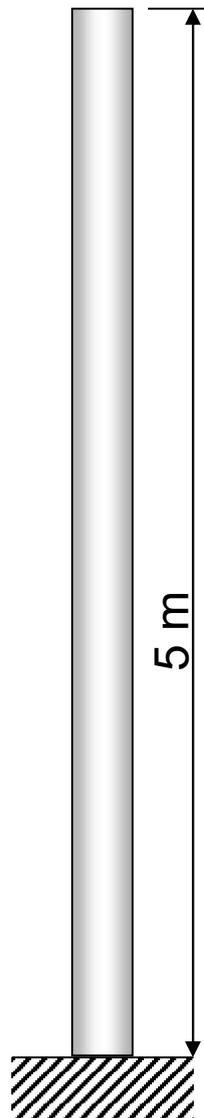
In una struttura simmetrica le forme modali sono simmetriche o anti-simmetriche.

Esse possono quindi essere ottenute tutte, combinando un'analisi con vincoli di simmetria con una con vincoli di antisimmetria



## SIMMETRIA STRUTTURALE/2

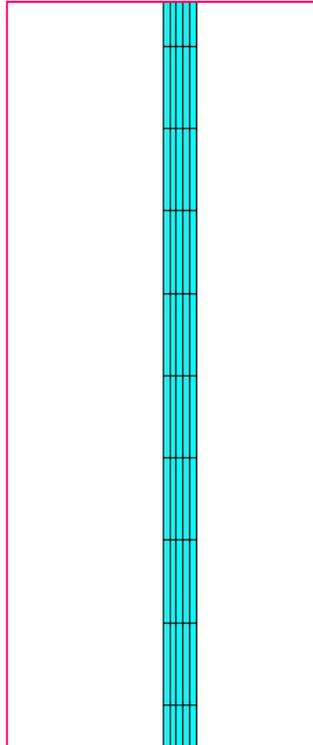
Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica



Modello con  
elementi piani  
assialsimmetrici

$$\phi = 0.5 \text{ m}$$

$$s = 0.01 \text{ m}$$

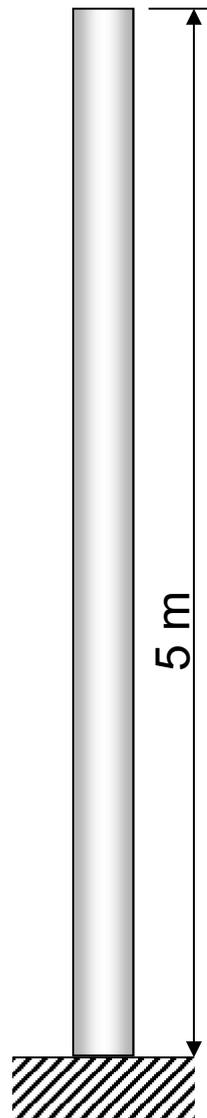


1° modo proprio  
Deformata assiale  
 $f = 260 \text{ Hz}$



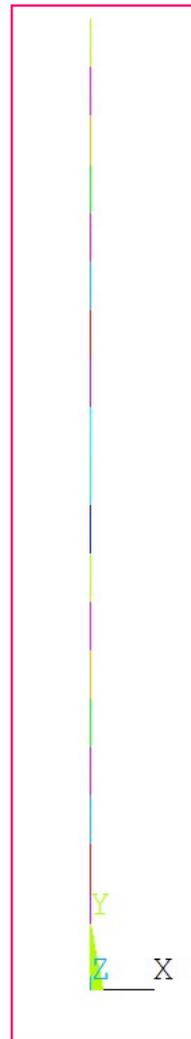
## SIMMETRIA STRUTTURALE/3

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma assialsimmetrica

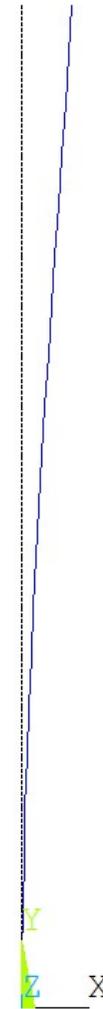


Modello con  
elementi trave

$\phi=0.5$  m  
 $s=0.01$  m



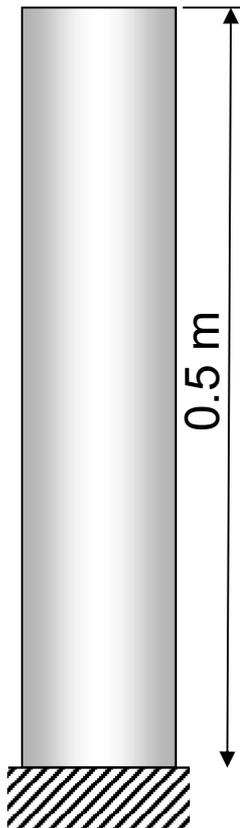
1° modo proprio  
Deformata flessionale  
 $f = 20$  Hz



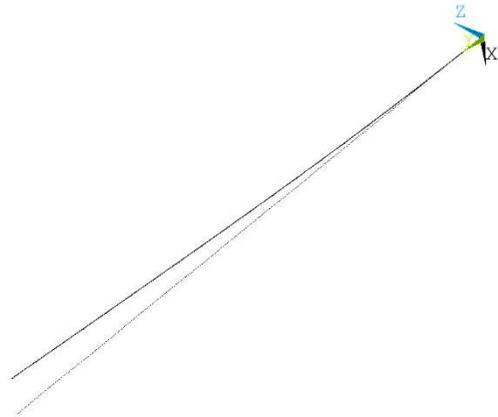
## EFFETTO SCELTA ELEMENTO/1

Selezionando un particolare tipo di elemento si vedono solo i modi propri la cui forma modale rispetta le ipotesi alla base dell'elemento stesso.

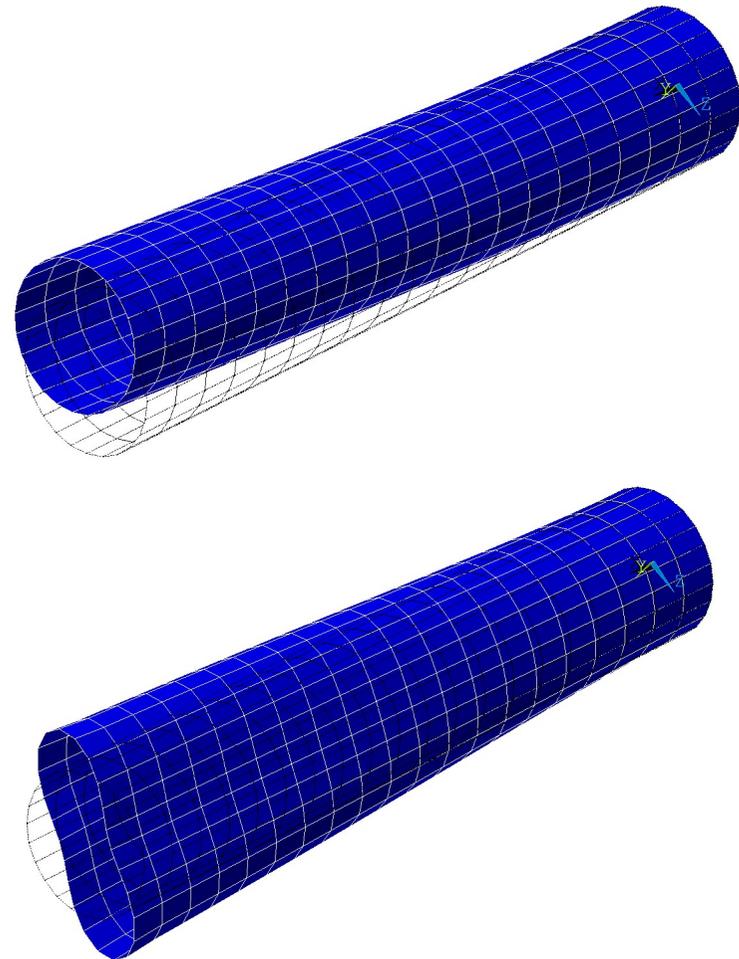
$\phi=0.1$  m  
 $s=0.01$  m



Modello con  
elementi trave



Modello con  
elementi shell





## UNITÀ DI MISURA/1

È preferibile usare il sistema m.k.s

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m}$$

kg

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1000}{s^2}} = \frac{1}{s} \sqrt{10^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{mm} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm}$$

kg



## COMANDI ANSYS/1 ANALISI MODALE

/SOLU  
ANTYPE, MODAL      Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *Method*, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Nrmkey*

- LANB
- SUBSP
- DAMP
- QRDAMP
- .....

Block-Lanczos (Default)  
Subspace  
smorzamento  
«    «

Frequenza iniziale e  
finale per la ricerca dei  
modi

N° modi da estrarre  
(per SUBSP, al massimo n° g.d.l./2)

- OFF: forme modali normalizzate su [M]
- ON: forme modali normalizzate al valore 1

Per Power Dynamics:

- MODOPT, SUBSP
- EQSLV, PCG



## COMANDI ANSYS/2 ANALISI NON RIDOTTA

LUMPM, **OPZ** Attiva la matrice di massa “Lumped”

OFF: matrice “consistent” (default)  
ON: matrice “lumped” (default per “Power Dynamics”)

SOLVE Effettua il calcolo

/POST1  
SET,LIST

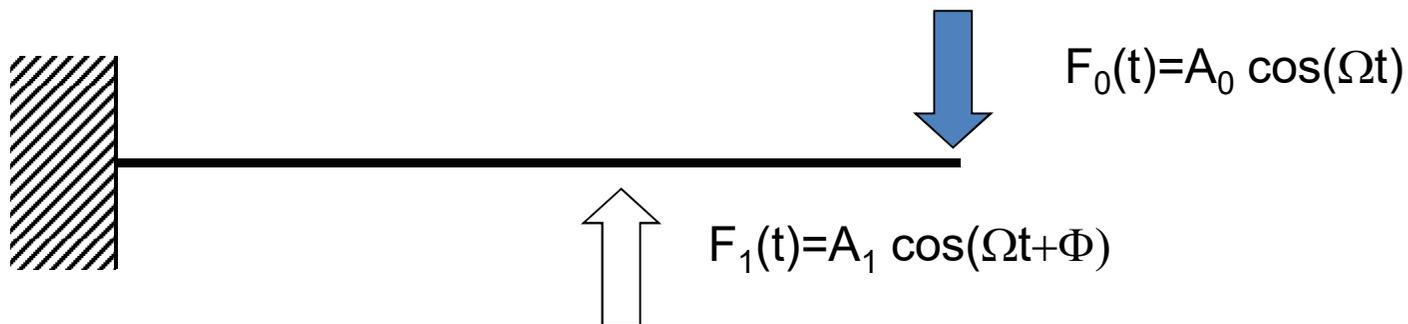
Gli “n” modi richiesti compaiono come “n” substep del Load step 1

SET,1,n Carica il modo “n”

PLDISP, PRDISP Rappresentano la deformata, sono possibili animazioni

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

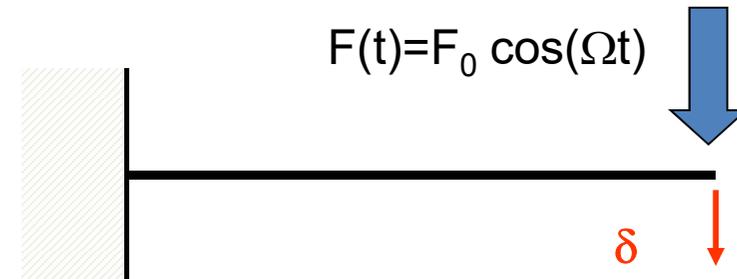
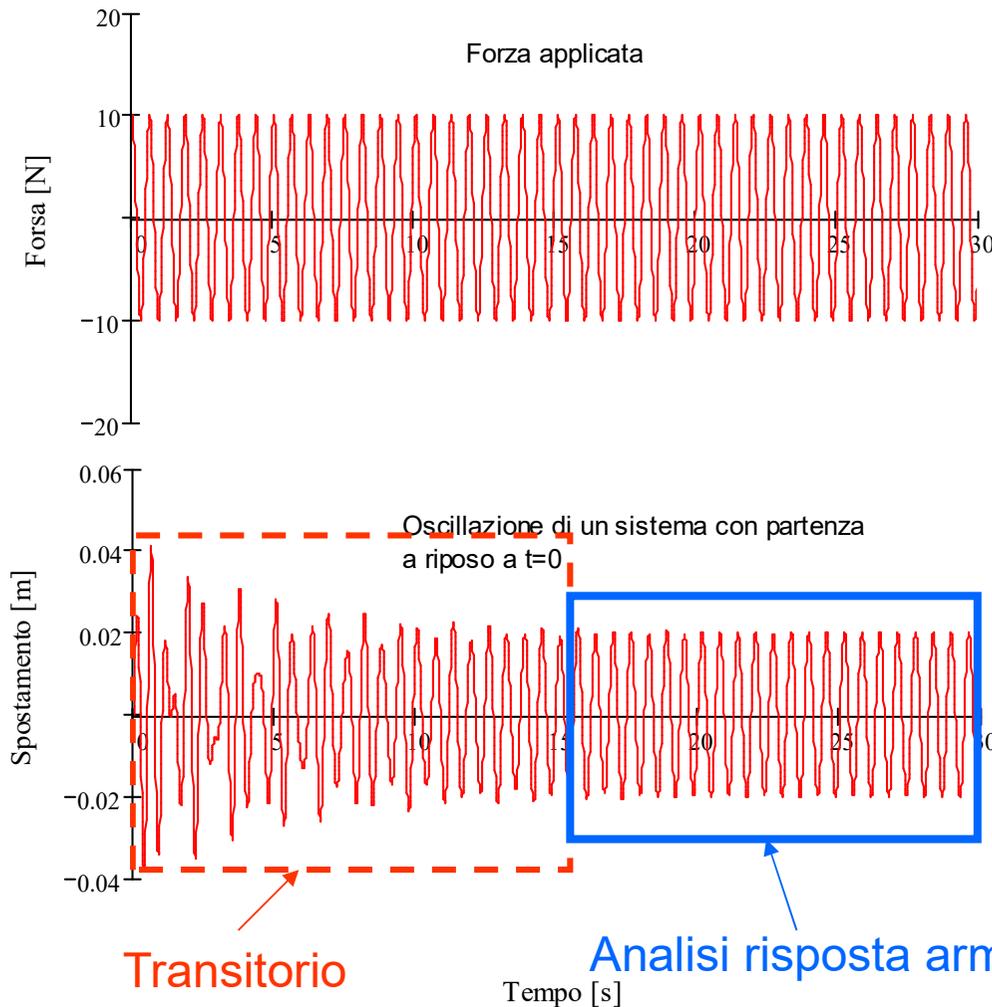
**SCOPO:** Valutare la risposta del sistema in presenza di una forzante esterna di tipo **sinusoidale** ed ampiezza **costante nel tempo**.



Su di una struttura, la “forzante” è in generale costituita da una o più forze esterne, aventi tutte la **stessa pulsazione**, ma **ampiezza e fase distinte**.

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

Se si applica la forzante a partire dall'istante  $t=0$ , con la struttura inizialmente a riposo, la risposta mostra un **transitorio** iniziale, che si esaurisce dopo un certo tempo, dopodiché la struttura oscilla con **ampiezza costante**.



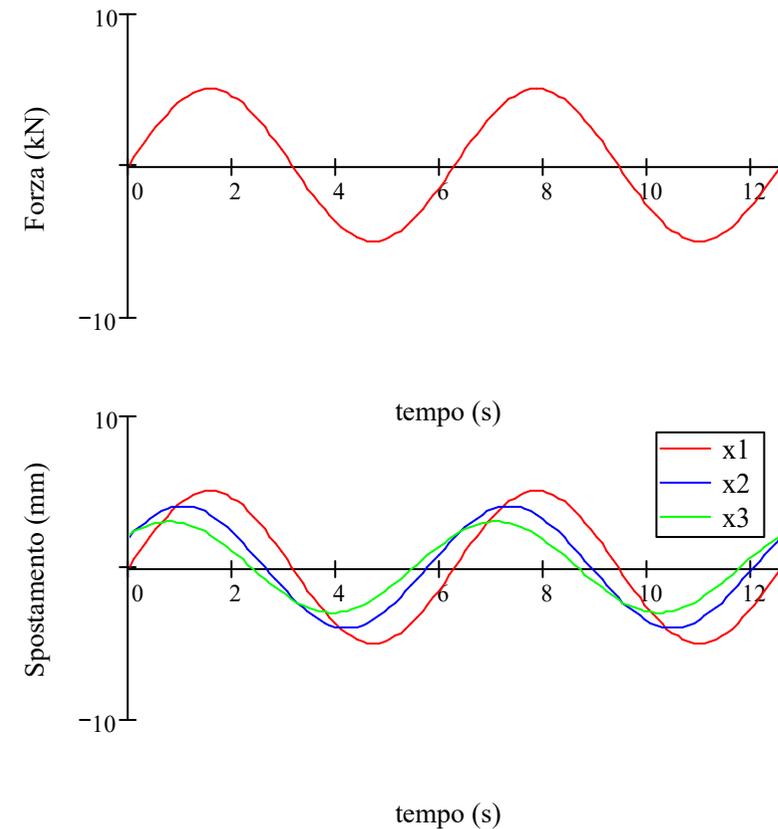
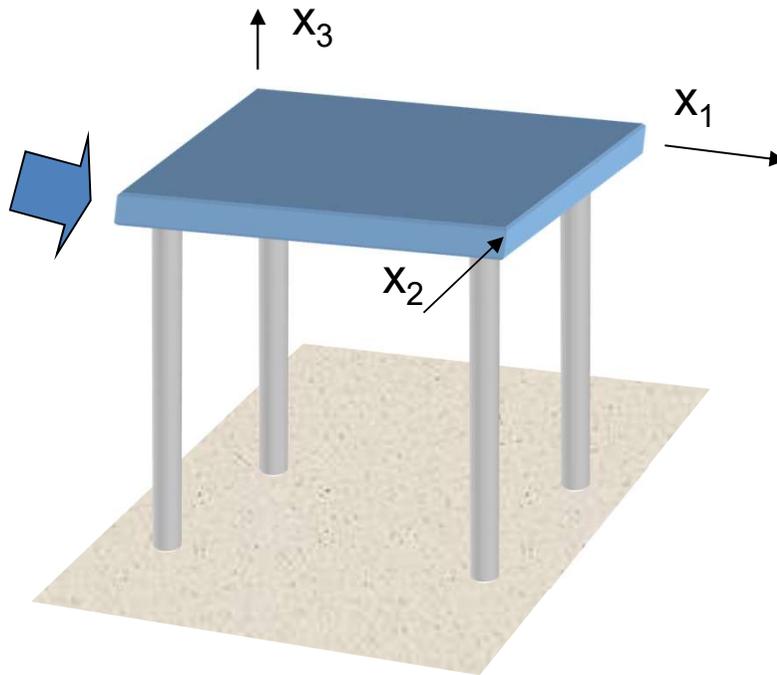
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

**Ipotesi:** comportamento lineare della struttura ( $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  costanti)



I vari g.d.l. della struttura vibrano con una legge del moto avente:

- andamento nel tempo di tipo **sinusoidale**
- **pulsazione** uguale a quella della forzante
- **ampiezza** e **fase** variabili da punto a punto



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MD

Tecniche di soluzione:

- Metodo diretto
- Metodo di sovrapposizione modale

Soluzione: **metodo diretto (MD) (smorzamento qualsiasi)**

$$\{U(t)\} = \{U\}e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2[M]\{U\} + i\Omega[C]\{U\} + [K]\{U\} = \{F\}$$



$$\{U\} = ([K] - \Omega^2[M] + i\Omega[C])^{-1} \{F\}$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

Soluzione: metodo di sovrapposizione modale (Classical Damping)

Si pone:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t)$$

Il sistema:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\}$$

si riduce ad «N» equazioni disaccoppiate, del tipo:

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \{Y^{(k)}\}^T \{F(t)\} = f_k$$

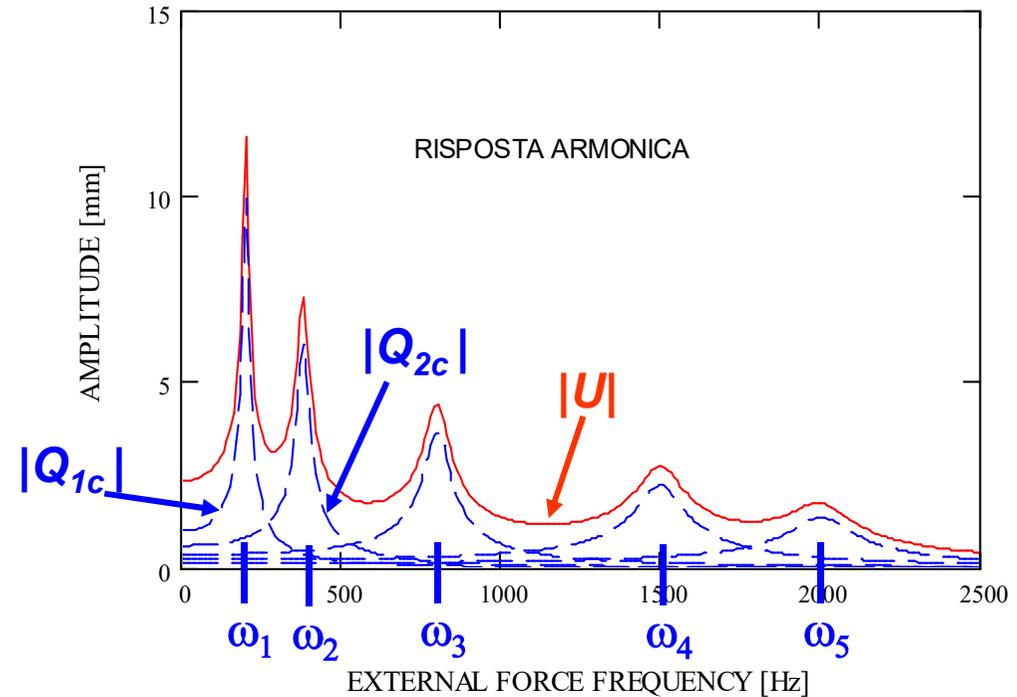
$$q_k = Q_{kc} e^{i\Omega t}$$

$$Q_{kc} = \frac{f_{kc}}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + 2i\xi_k \omega_k \Omega}$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM

$$Q_{kc} = \frac{f_{kc}}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + 2i\xi_k \omega_k \Omega} =$$

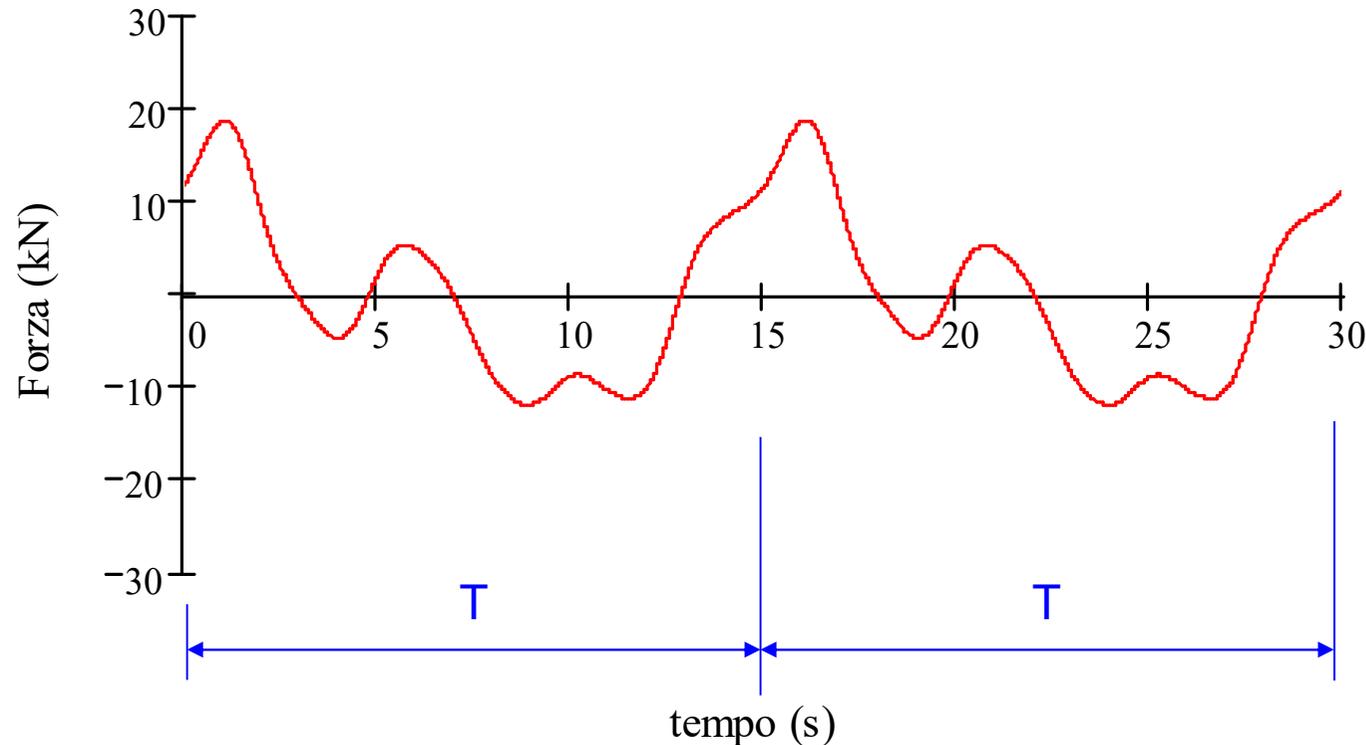
$$= \frac{\frac{f_{kc}}{\omega_k^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_k^2}\right)^2 + \left(2\xi_k \frac{\Omega}{\omega_k}\right)^2}}$$



$$\{U(t)\} = \sum_{k=1}^{n_{MP}} \{Y^{(k)}\} Q_{kc} e^{i\Omega t} = \left( \sum_{k=1}^{n_{MP}} \{Y^{(k)}\} Q_{kc} \right) e^{i\Omega t}$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

**Forzanti:** le forzanti esterne agenti sulla struttura hanno generalmente un andamento nel tempo di tipo **periodico**, ma non **armonico**.



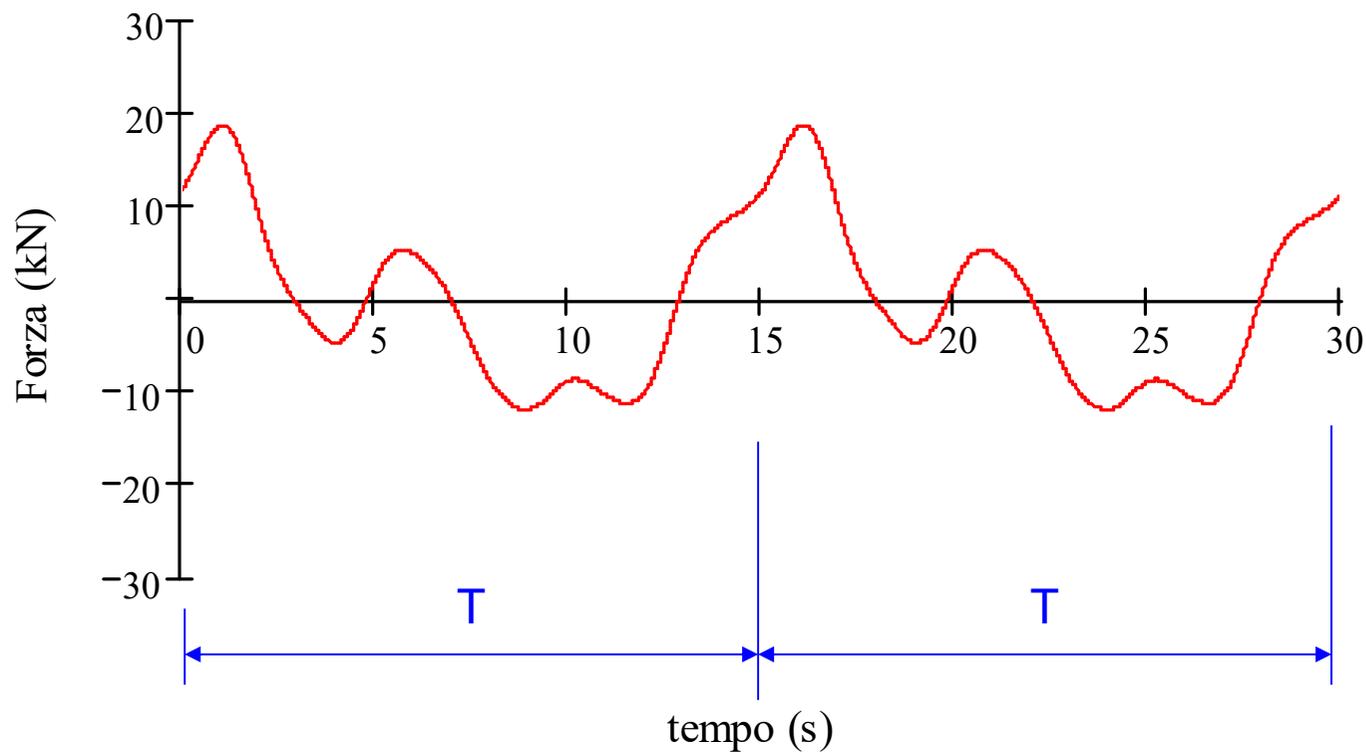
Per determinare il loro effetto sulla struttura è quindi necessario:

- scomporre la forzante in una somma di funzioni armoniche (serie di Fourier)
- ottenere la risposta complessiva tramite la sovrapposizione degli effetti

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

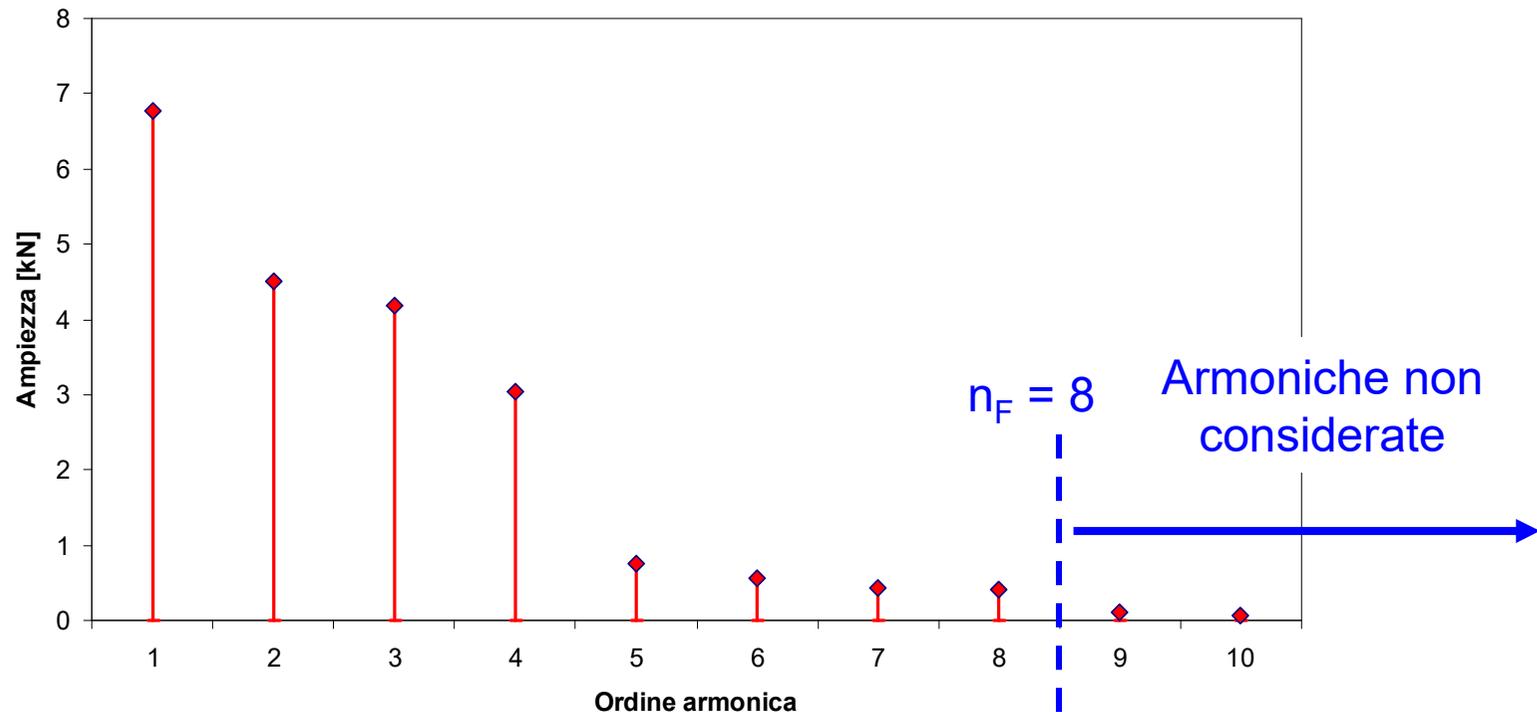
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h) \cong A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$



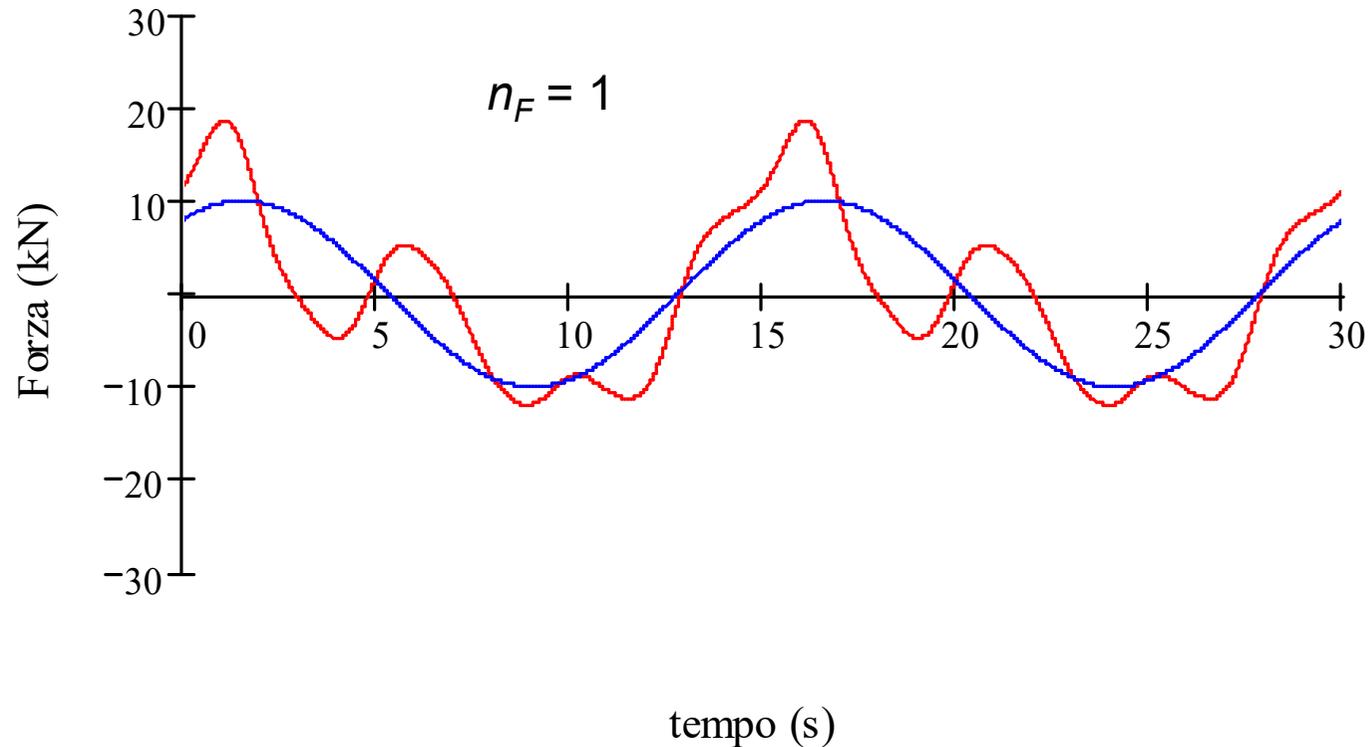
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI

Andamento tipico delle ampiezze delle diverse armoniche eccitatrici con il relativo ordine  $h$



**Oss:** al di sopra di un certo numero d'ordine l'ampiezza  $A_h$  diviene usualmente trascurabile.

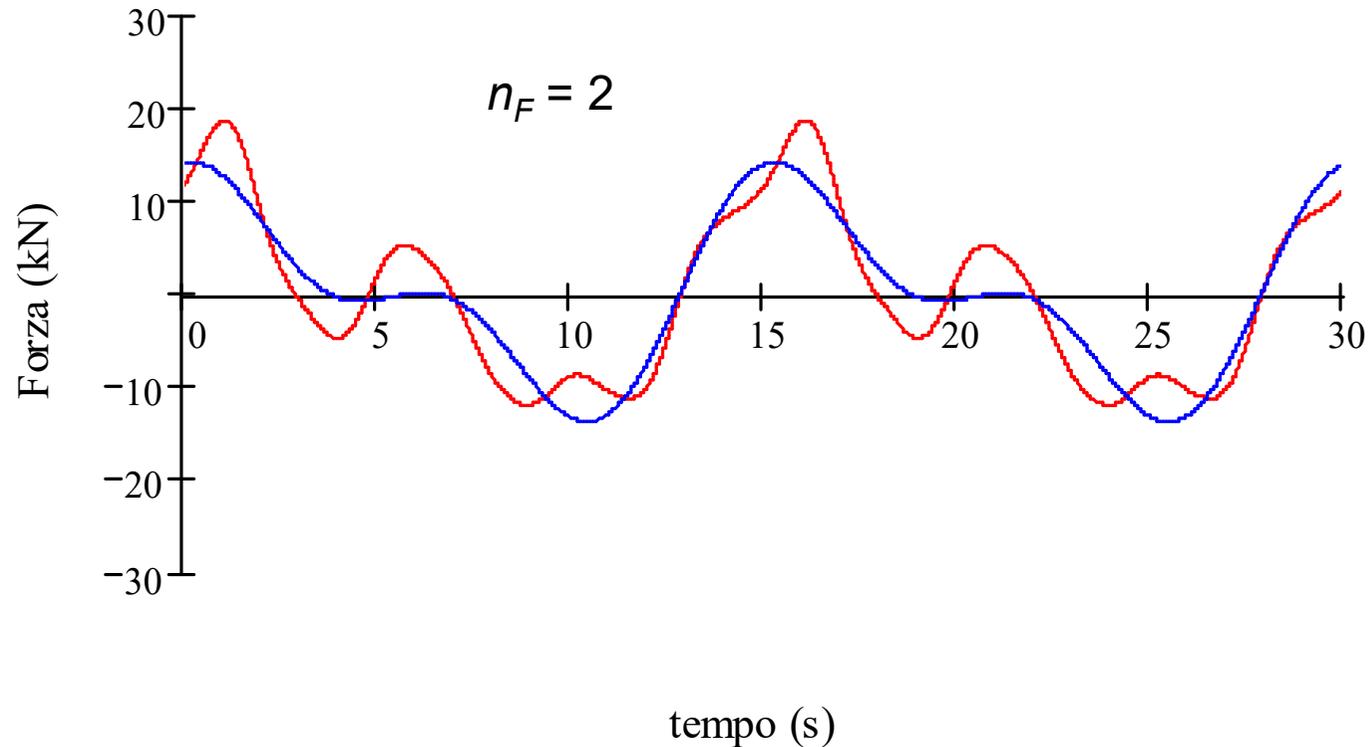
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

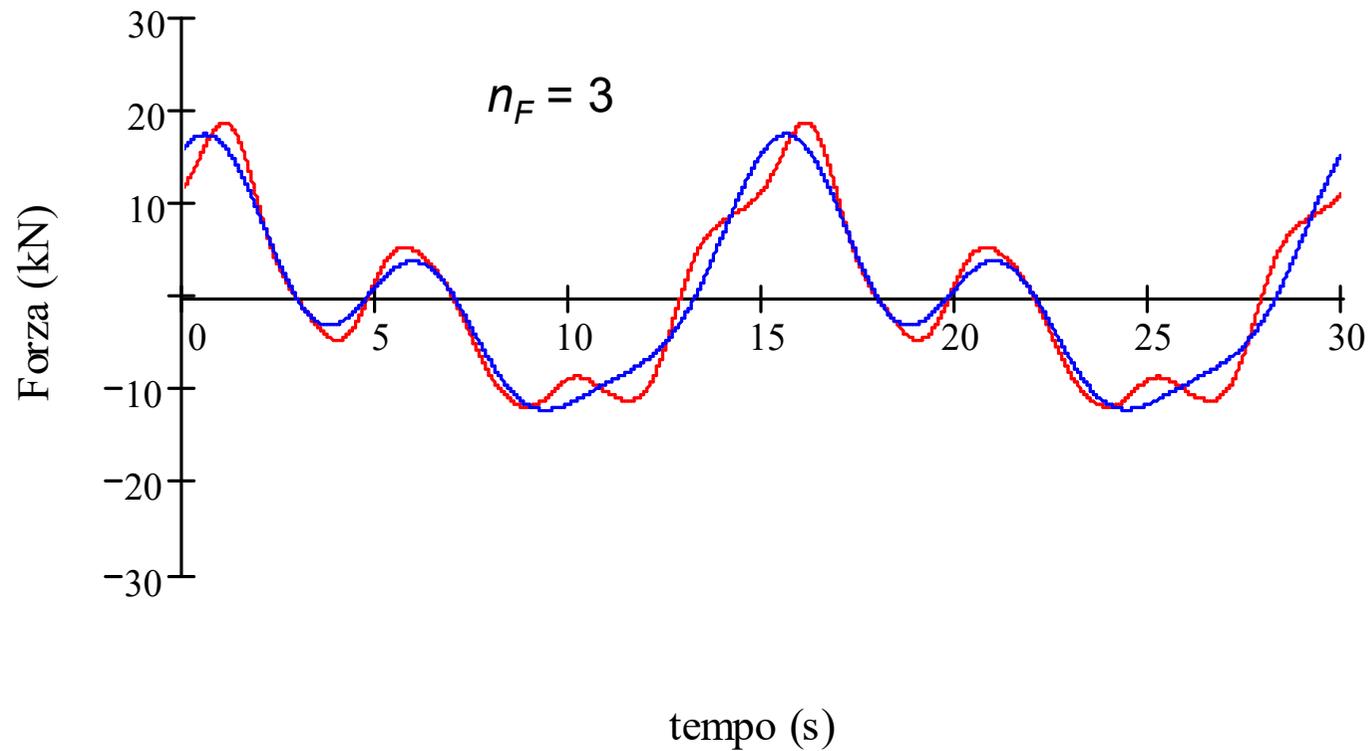
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

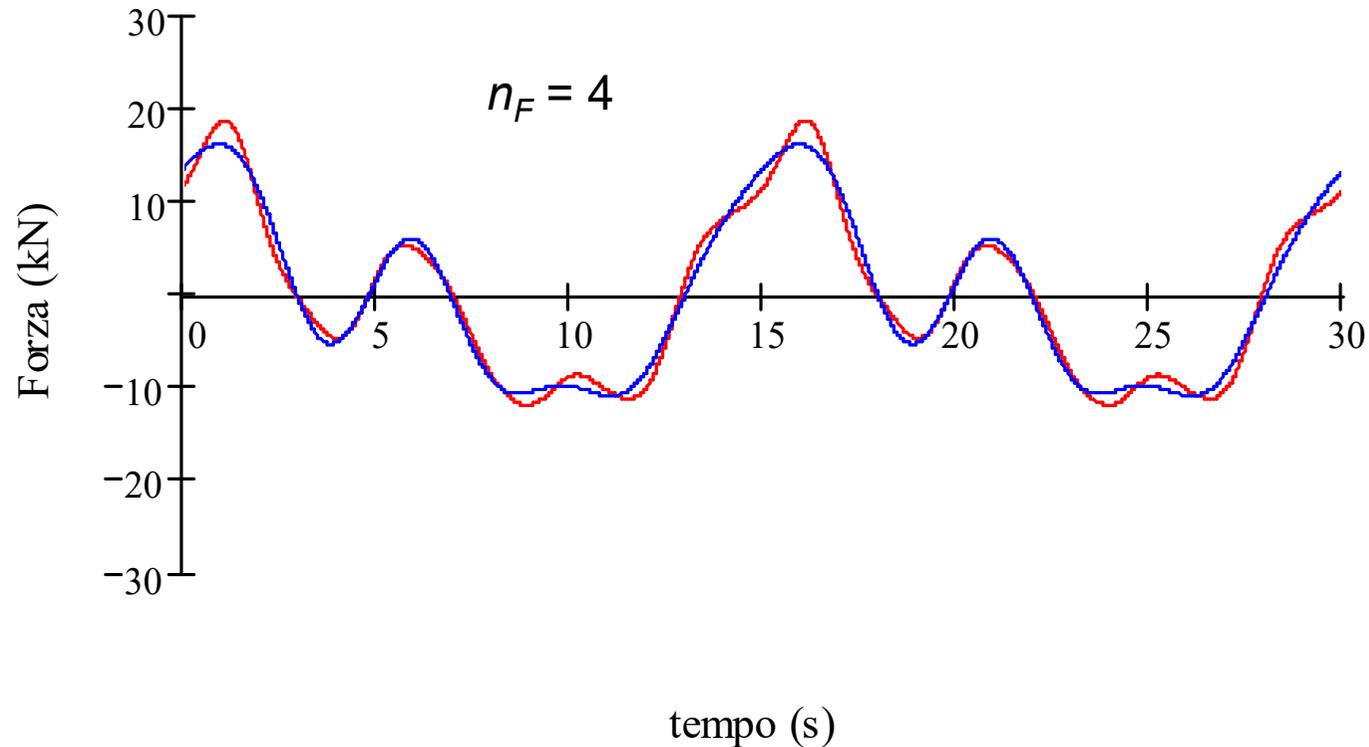
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

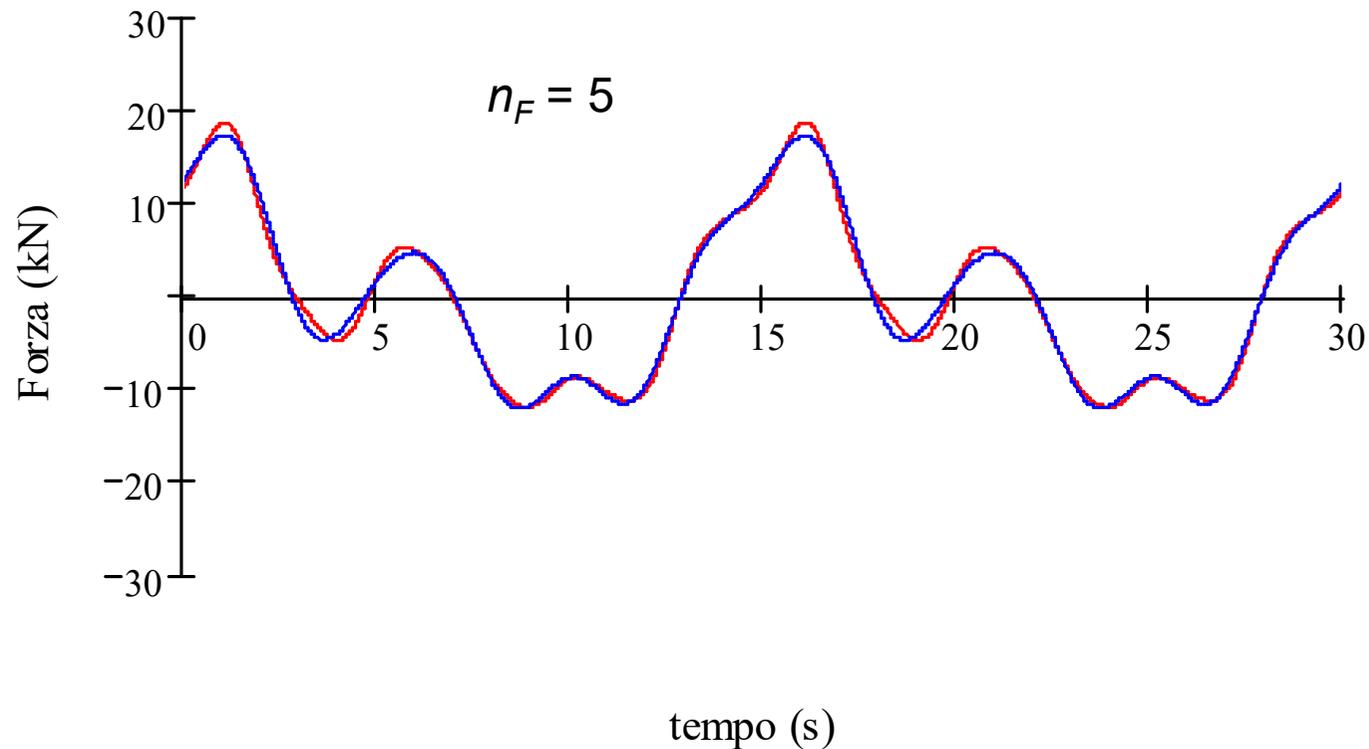
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

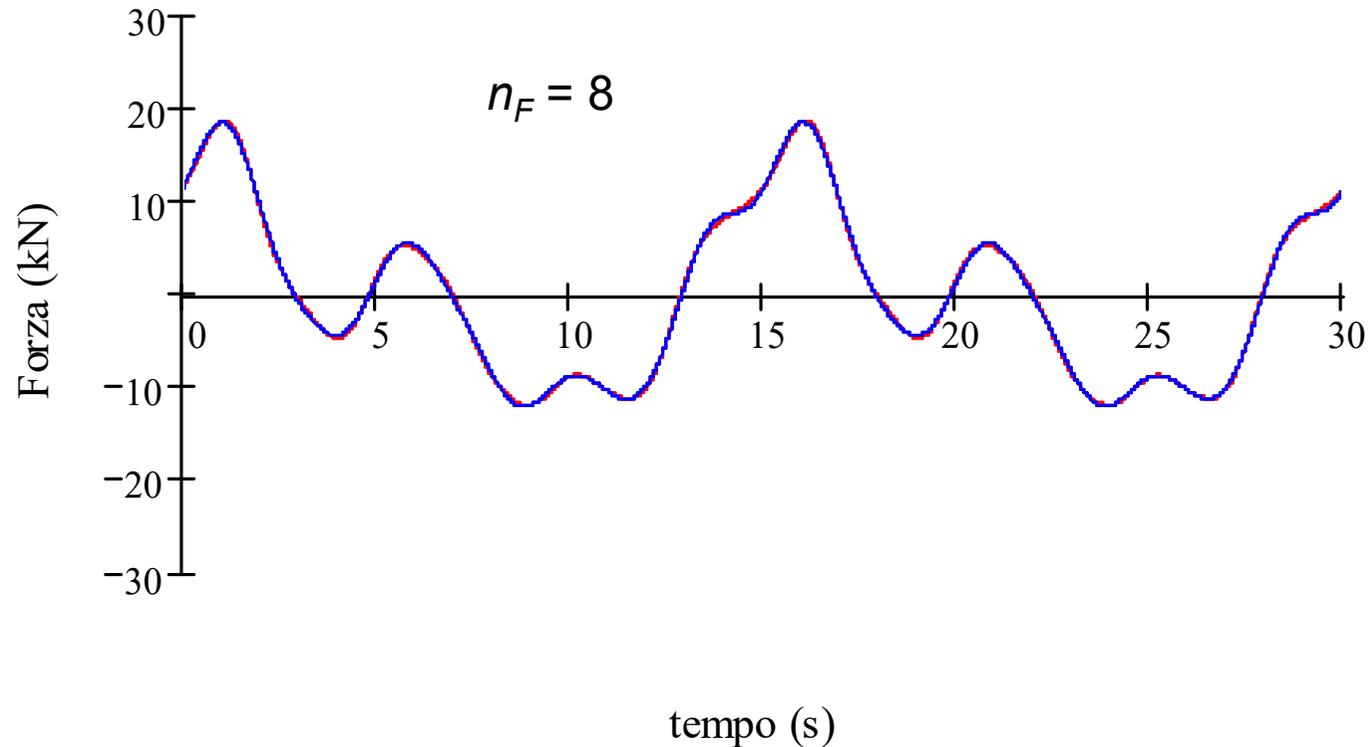
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - APPLICAZIONI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

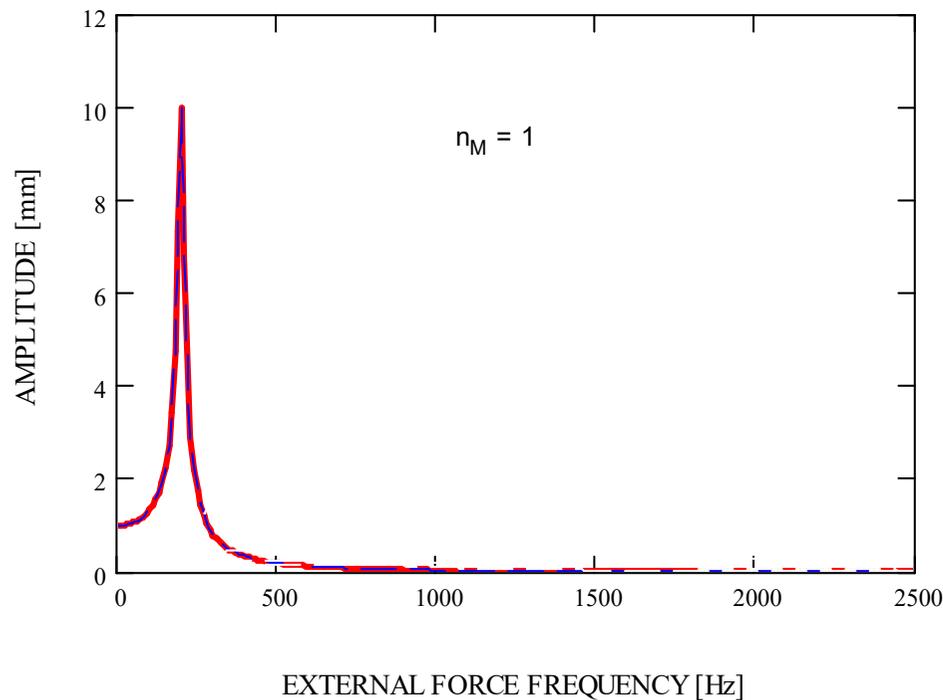
$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$

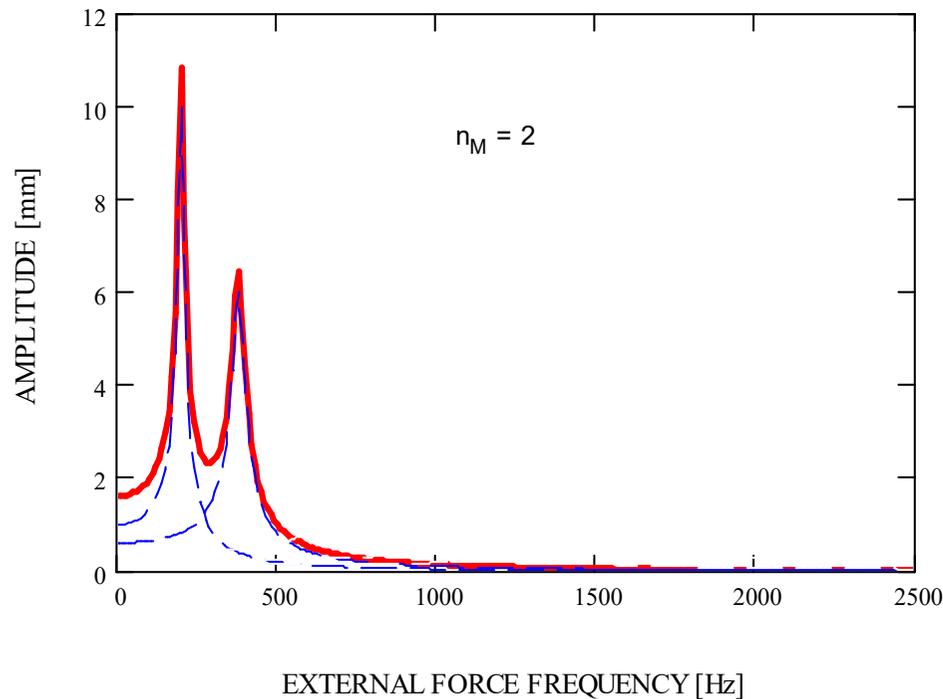


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$

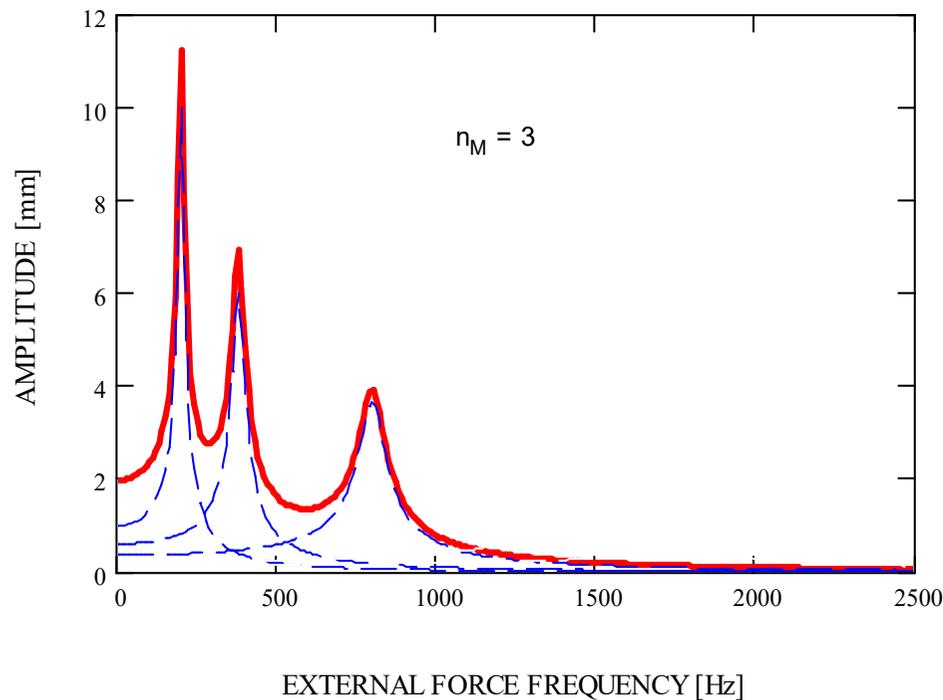


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$

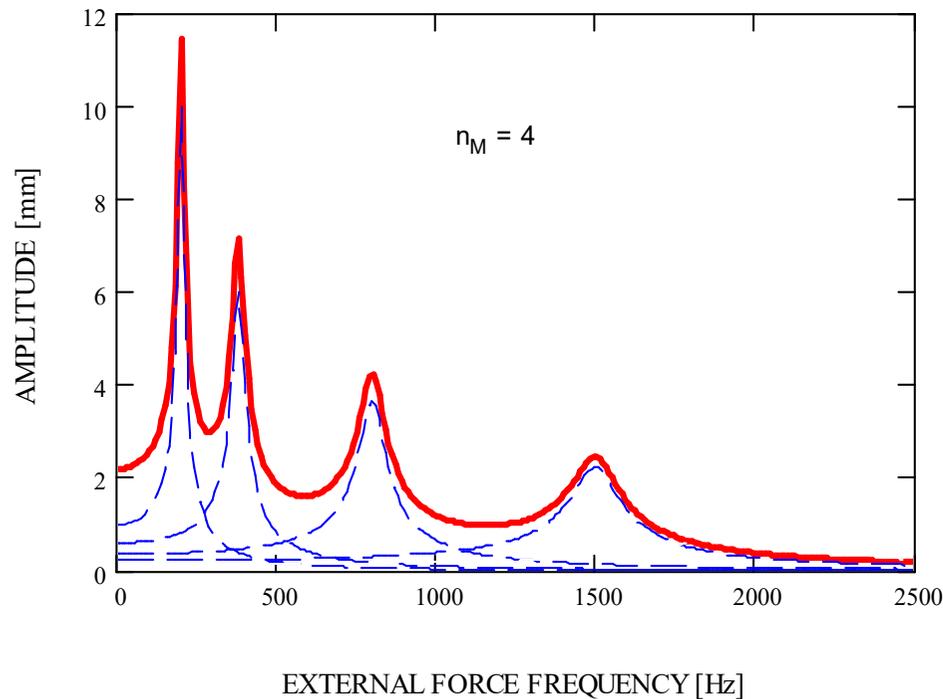


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$

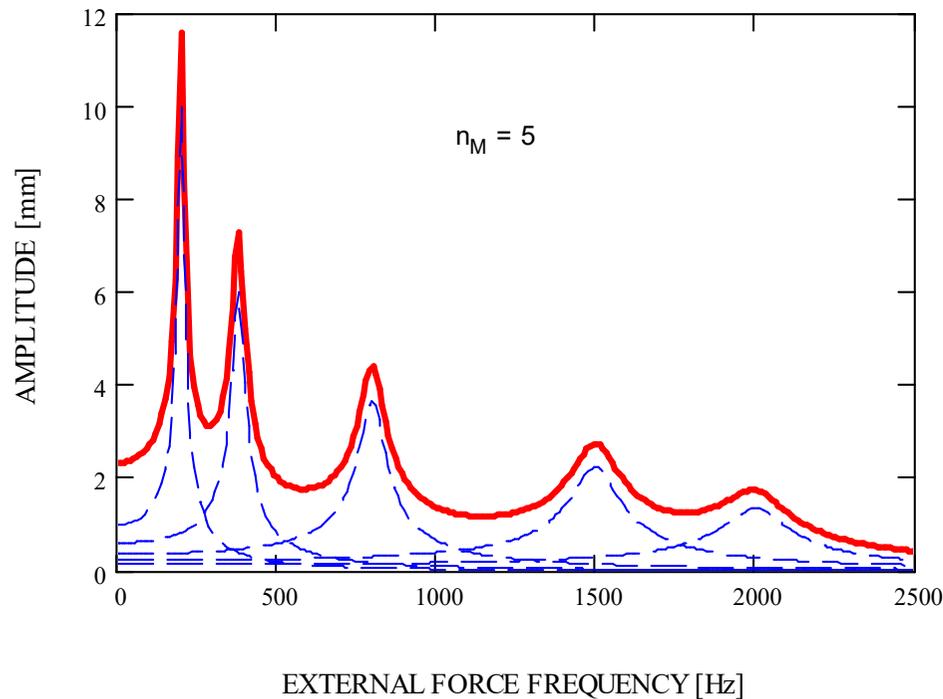


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \cong \sum_{j=1}^{n_M} \{Y^{(j)}\} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

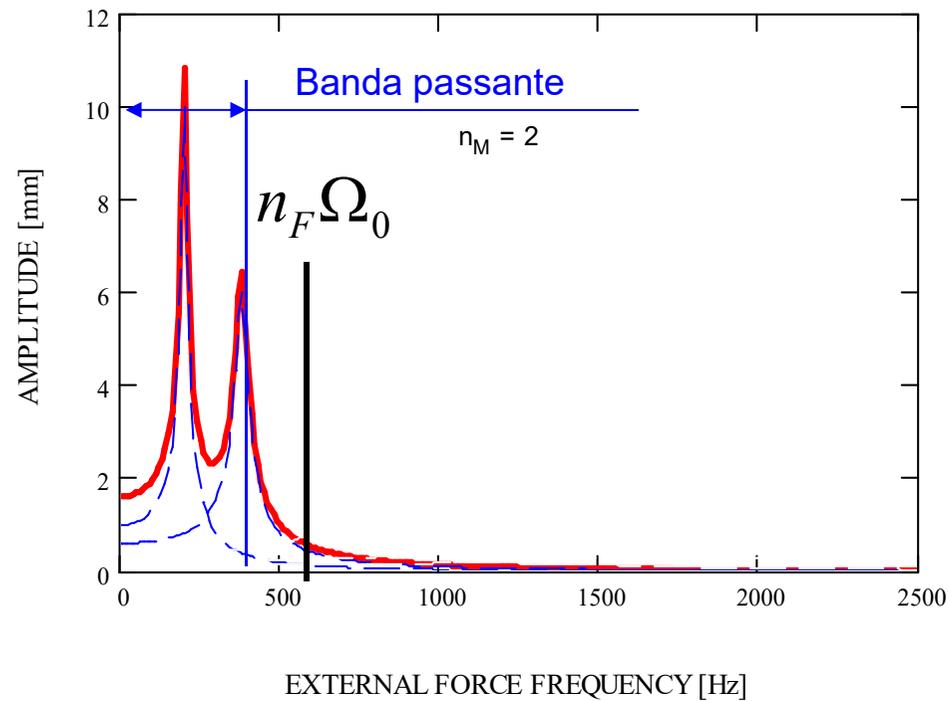
Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello

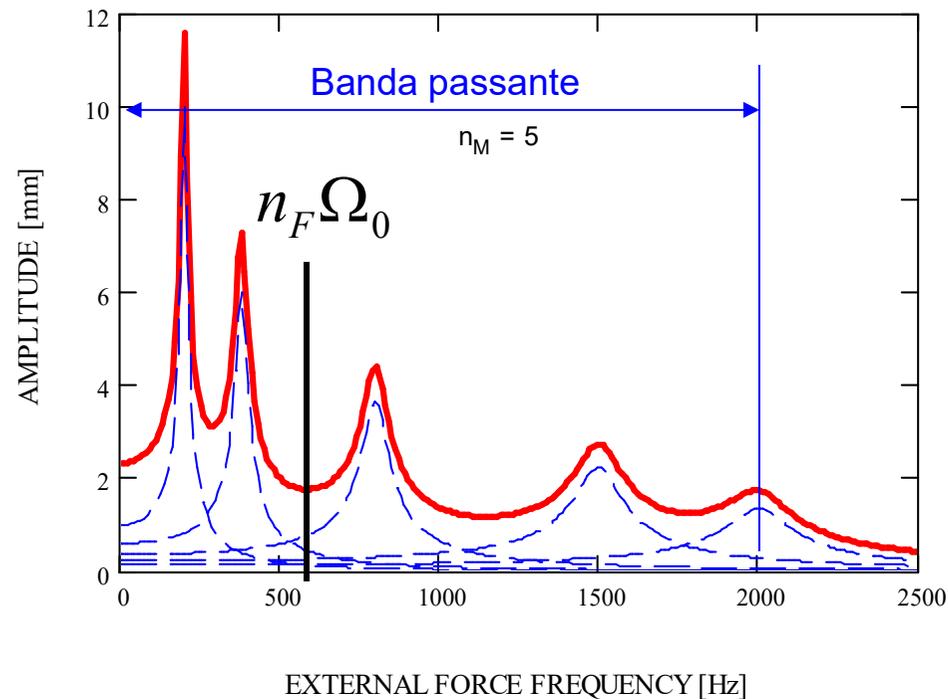


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello

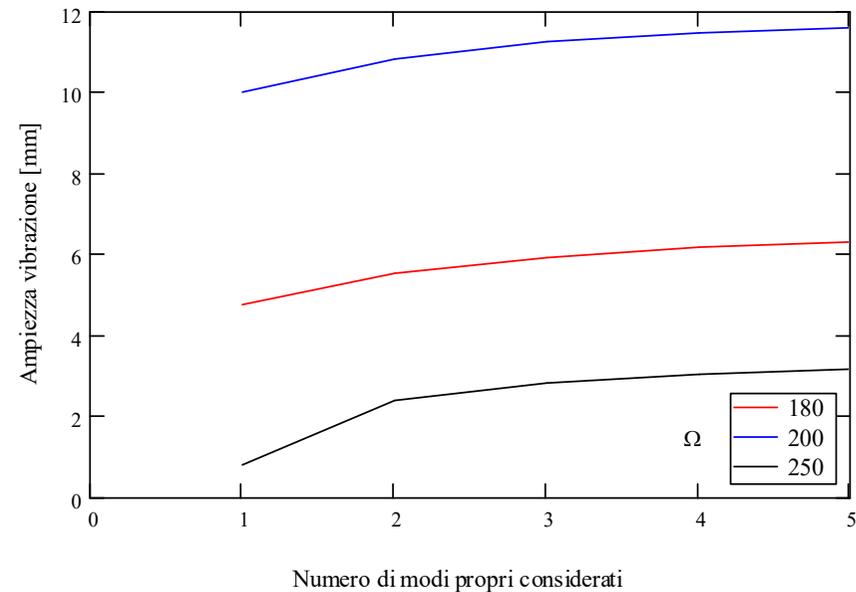
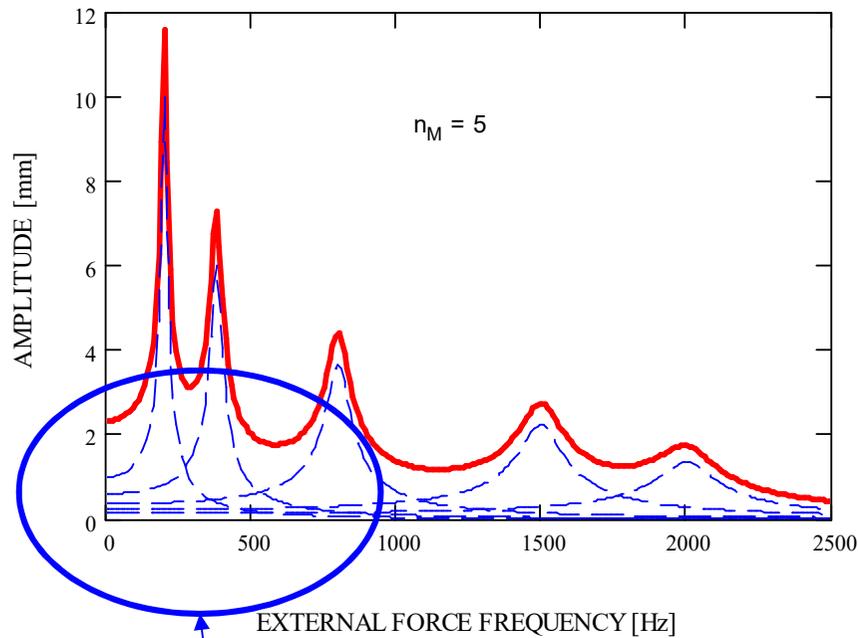
$$\omega_{n_M} > n_F \Omega_0$$



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza

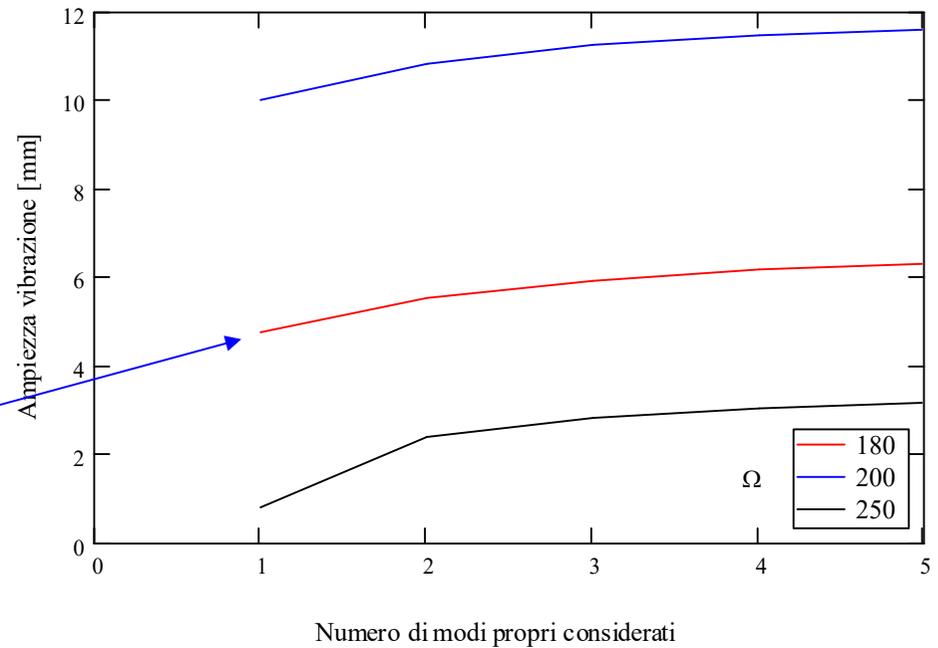
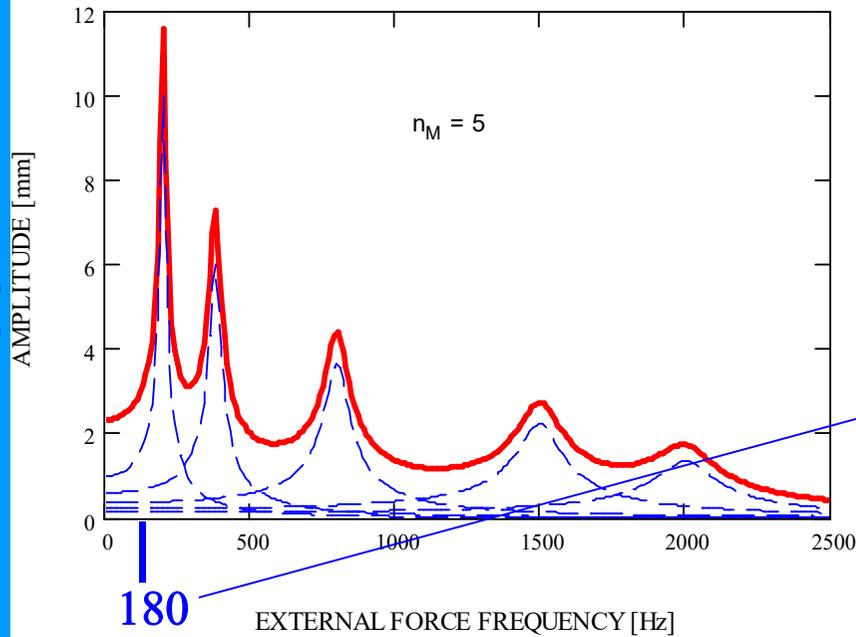


I modi propri di alta frequenza mantengono un contributo anche alle basse frequenze

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

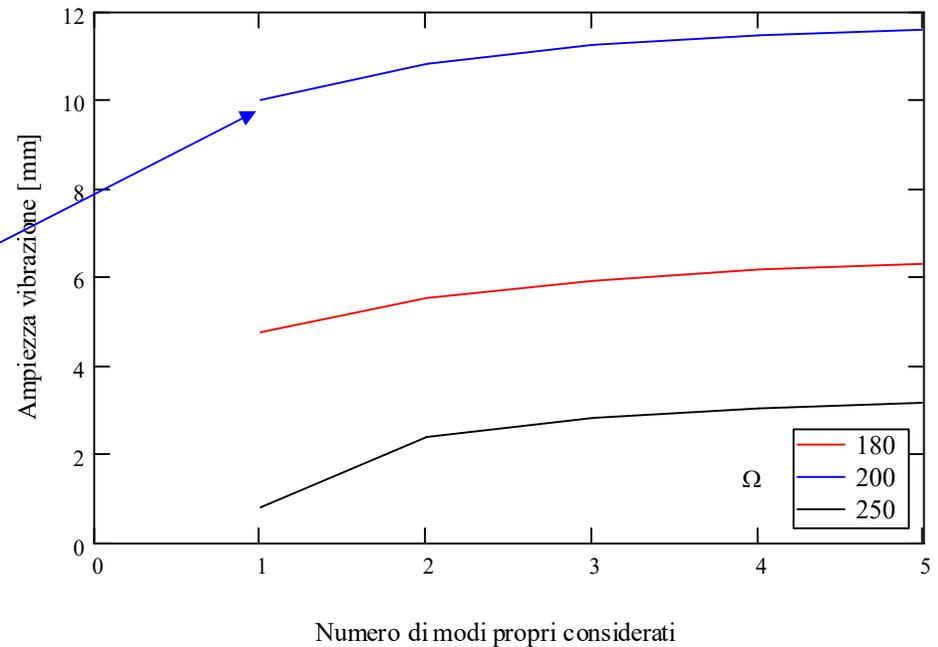
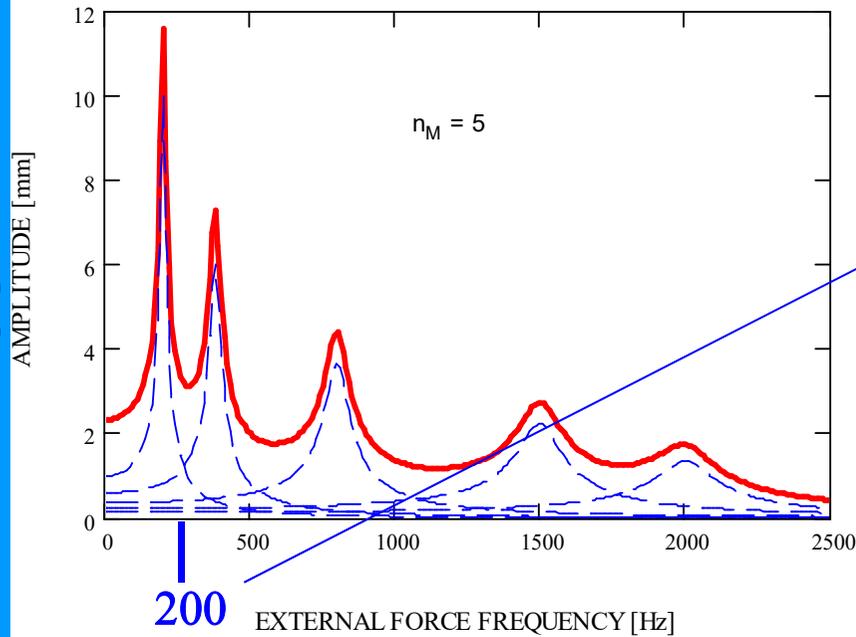
- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



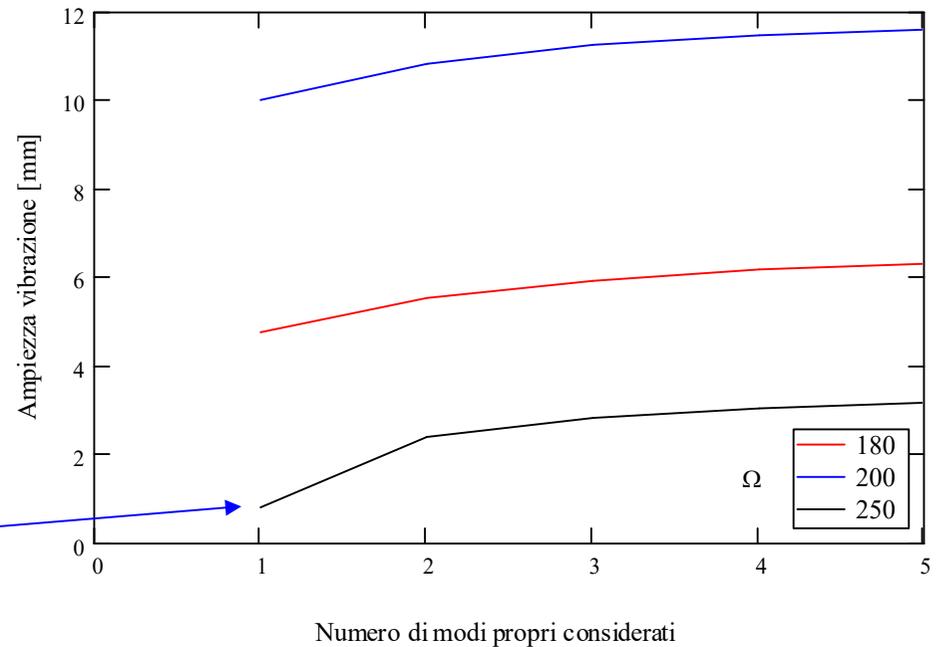
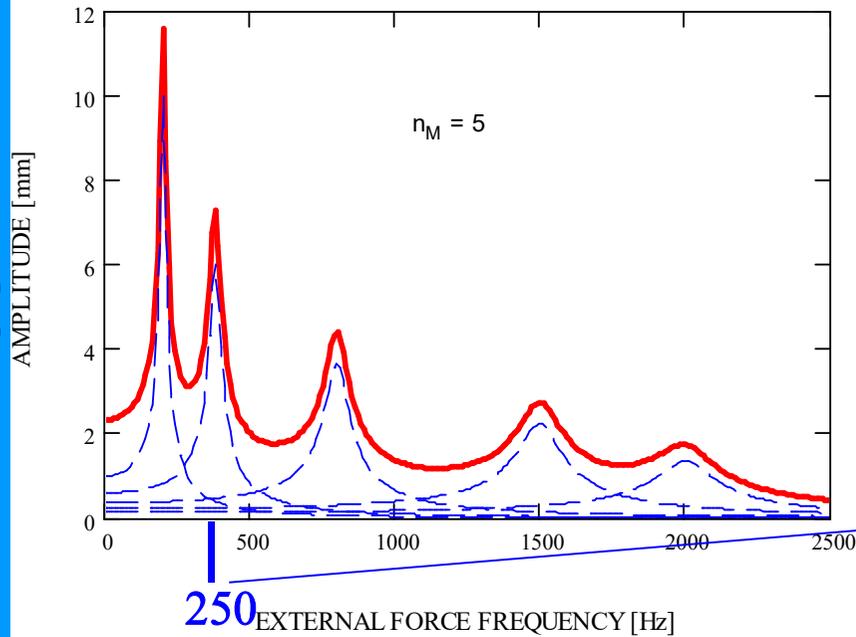
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA - MSM - APPLICAZIONI

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza

$$\omega_{n_M} \gg n_F \Omega_0$$

$$\omega_{n_M} > 1.5 \cdot n_F \Omega_0$$





## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – MSM + MD - APPLICAZIONI

Ulteriore requisito per MD e per MSM:

- il modello FEM deve essere costruito in maniera da rappresentare in maniera sufficientemente accurata tutti i modi che danno un contributo significativo alla risposta del sistema (tutti gli  $n_M$  modi propri nel caso del MSM)



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – MSM – SMORZAMENTO

$$\xi_k = \frac{\alpha}{\omega_k} + \beta\omega_k + \xi + \xi_{mk}$$

$\alpha$ -damping (ALPHAD o MP,ALPD)

$\beta$ -damping (BETAD o MP,BETD)

Constant damping ratio (DMPRAT o MP,DMPR)

Modal damping ratio (MDAMP)

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA – FULL – SMORZAMENTO

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] + \frac{\xi}{\Omega}[K] + \sum_k [C_k]$$

$\alpha$ -damping (ALPHAD o MP,ALPD)

$\beta$ -damping (BETAD o MP,BETD)

Constant damping ratio (DMPRAT o MP,DMPR)

Element damping matrix (Es.: LINK11, COMBIN14, MATRIX27,...)



## COMANDI ANSYS/1 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

**/SOLU**

**ANTYPE, HARMIC**

Definisce il tipo di analisi richiesta

**HROPT, FULL, .....**

Sceglie il tipo di analisi diretto completo

**HARFRQ, *FREQB, FREQE***

Frequenza iniziale e finale per l'analisi

**NSUBST, *NSBSTP***

N° di "step" in cui suddividere l'intervallo di frequenze da analizzare

## COMANDI ANSYS/2 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

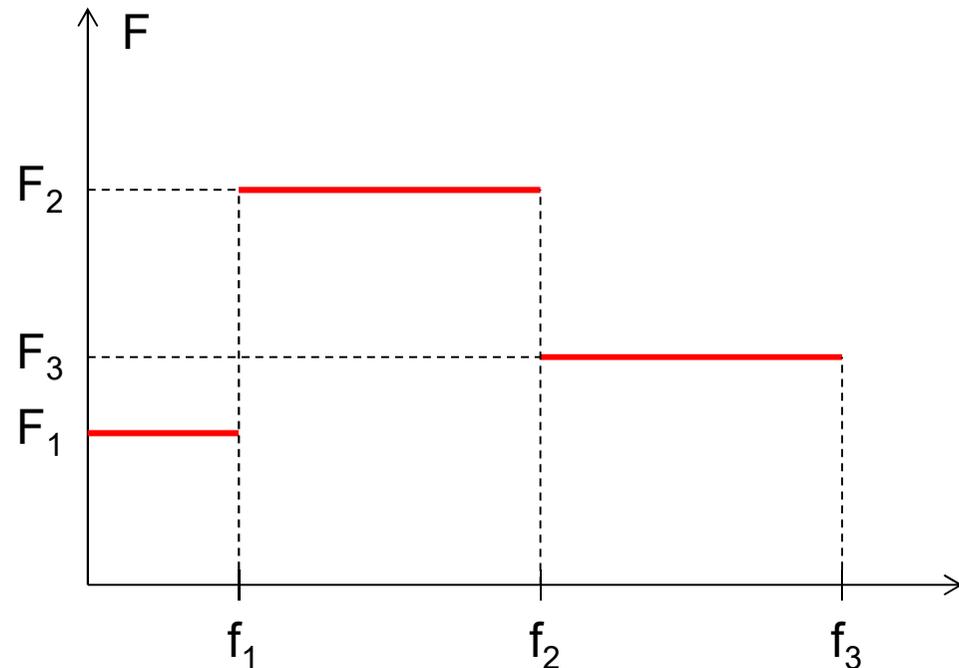
Possibile anche suddividere il campo di frequenza in intervalli contigui con variazione del carico imposto tra un intervallo e l'altro. Ogni intervallo viene trattato come un "Load Step" separato.

**HARFRQ**, 0,  $f_1$   
**NSUBST**, *NSBSTP*  
**F**, *N*,  $F_1$   
**SOLVE**

**HARFRQ**,  $f_1$ ,  $f_2$   
**NSUBST**, *NSBSTP*  
**F**, *N*,  $F_2$   
**SOLVE**

**HARFRQ**,  $f_2$ ,  $f_3$   
**NSUBST**, *NSBSTP*  
**F**, *N*,  $F_3$   
**SOLVE**

Nel POST26 i risultati sono comunque disponibili come un intervallo continuo di frequenza





## COMANDI ANSYS/3 ANALISI ARMONICA – METODO DIRETTO COMPLETO

HROUT, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*

- ON Stampa i risultati come parti reale ed immaginaria
- OFF Stampa i risultati come ampiezza e fase

- OFF “Step” di frequenza equispaziati
- ON “Step” di frequenza addensati attorno ai modi propri

- OFF Non stampa il contributo dei diversi modi
- ON Stampa il contributo dei diversi modi

F, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*

Parti reale ed immaginaria della forza

SOLVE  
FINISH



## COMANDI ANSYS/4 ANALISI ARMONICA – POST26

**/POST26**

**NSOL**

**ESOL** Definizione grandezze da estrarre dal database

**RFORCE**

etc.

**PRCPLX, KEY**

**PRVAR**

- 0 – Stampa i risultati nella forma parte reale + parte immaginaria
- 1 – Stampa i risultati nella forma ampiezza + fase

**PLCPLX, KEY**

**PLVAR**

- 0 — Ampiezza
- 1 — Fase
- 2 — Parte reale
- 3 — Parte immaginaria



## COMANDI ANSYS/5 ANALISI ARMONICA – POST26

Comandi per la elaborazione  
delle grandezze definite

<u>ABS</u>	<u>IMAGIN</u>	<u>SMALL</u>
<u>ADD</u>	<u>INT1</u>	<u>SQRT</u>
<u>ATAN</u>	<u>LARGE</u>	<u>RPSD</u>
<u>CLOG</u>	<u>NLOG</u>	<u>CVAR</u>
<u>CONJUG</u>	<u>PROD</u>	<u>RESP</u>
<u>DERIV</u>	<u>QUOT</u>	
<u>EXP</u>	<u>REALVAR</u>	



## COMANDI ANSYS/6 ANALISI ARMONICA – POST26

**PLVAR**, *NVAR1*, *NVAR2*, *NVAR3*, *NVAR4*, *NVAR5*, *NVAR6*, *NVAR7*...

Consente di rappresentare fino a 10 variabili in funzione del tempo o della variabile definita nel comando XVAR

**XVAR**, *N*

Definisce la variabile da utilizzare per l'asse X; per default si usa la variabile 1 (tempo)

**/AXLAB**, *Axis*, *Lab*

Consente di specificare la "label" dei due assi

**/XRANGE**, *XMIN*, *XMAX*

**/YRANGE**, *XMIN*, *XMAX*

Definiscono i valori massimi e minimi per i due assi

**/GROPT**, *Lab*, *KEY*

Consente varie opzioni grafiche (es. Numero di divisioni, assi logaritmici, etc)



## COMANDI ANSYS/7

### ANALISI ARMONICA – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

**/SOLU**

**ANTYPE, MODAL**                      Analisi modale preliminare

**MODOPT, Method, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey**

-----

**SOLVE**

**FINISH**

**/SOLU**

Analisi armonica con MSM

**HROPT, MSUP, MAXMODE, MINMODE**

N° d'ordine finale (default e max.: NMODE) ed iniziale (default: 1) dei modi da impiegare

**HROUT, Reimky, Clust, Mcont**

**F, NODE, Lab, VALUE, VALUE2, NEND, NINC**

**SOLVE**

**FINISH**



## COMANDI ANSYS/8 ANALISI ARMONICA – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

```
/SOLU      Passo di espansione  
EXPASS, ON  
NUMEXP, NUM, BEGRNG, ENDRNG  
SOLVE  
FINISH
```

## COMANDI ANSYS/9 USO DI MATRICI

Il programma ANSYS permette l'uso di diversi tipi di variabili dimensionate (matrici o vettori).

*\*DIM, Par, Type, IMAX, JMAX, KMAX, Var1, Var2, Var3, CSYSID*

Denominazione del parametro in forma di tabella

Tipo di tabella:

- ARRAY matrice standard, ad indici interi
- TABLE matrice ad indici reali

Numero di righe, colonne e "strati"



## COMANDI ANSYS/10 USO DI MATRICI

Matrici di tipo ARRAY (denominazione: TABI)

	1	2	3	4
1	0.25	3	2	5
2	1.25	4.3	1.2	2.5
3	2	7	12	24

TABI(2,3) → 1.2



## COMANDI ANSYS/11 USO DI MATRICI

Matrici di tipo TABLE (denominazione: RISU)

	0.5	1	1.5	2
0.25	0.25	3	2	5
0.5	1.25	4.3	1.2	2.5
1.00	2	7	12	24

Indici reali, inseriti dall'utente nella colonna "0" e nella riga "0" (Es.  $RISU(2,0)=0.5$ ).



## COMANDI ANSYS/12 USO DI MATRICI

In uscita, gli indici possono essere reali. Il valore fornito viene interpolato

	0.5	1	1.5	2
0.25	0.25	3	2	5
0.5	1.25	4.3	1.2	2.5
			6.6	
1.00	2	7	12	24

$$\text{RISU}(0.75,1.5)=1.2+(12-1.2)/(1-0.5)*(0.75-0.5)=6.6$$



## COMANDI ANSYS/13 USO DI MATRICI

**\*VPLOT**, *ParX*, *ParY*, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8

Parametro una delle cui colonne deve essere usata per l'asse X  
Es. RISU(3,4) usa per l'asse X i valori della colonna 4, partendo dalla riga 3

Parametro una delle cui colonne deve essere usata per l'asse Y  
Es. RISU(2,5) usa per l'asse Y i valori della colonna 5, partendo dalla riga 2

**IGCOLUMN**, *CURVE*, *STRING*

*Consente di attribuire una denominazione ad ogni curva del grafico, che compare nella legenda*

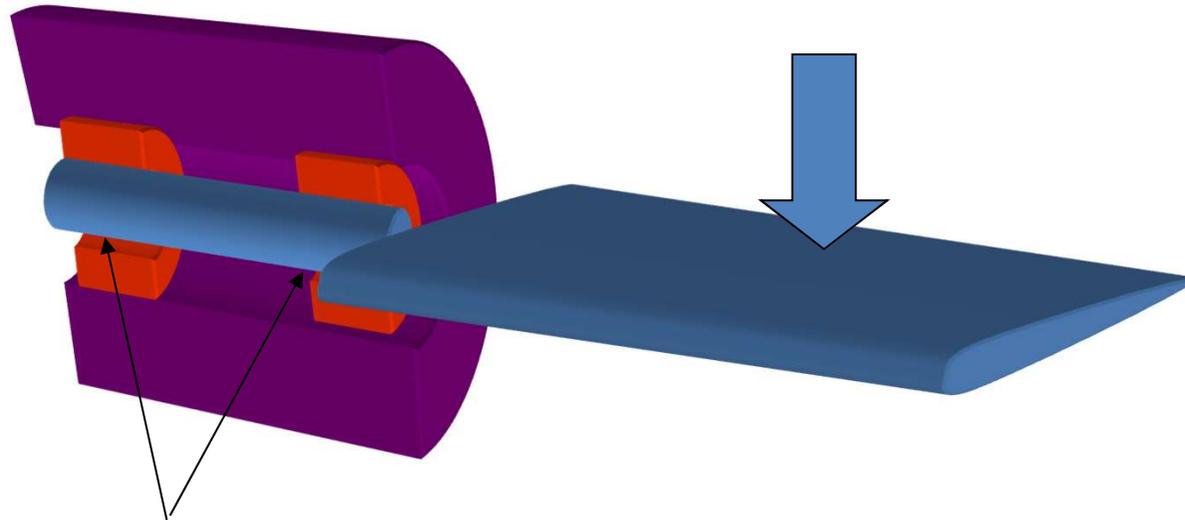
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

**SCOPO:** Valutare la risposta del sistema in presenza di forze o sollecitazioni esterne, generalmente di tipo **non periodico**, applicate abbastanza rapidamente **da rendere non trascurabili gli effetti delle forze di inerzia**.

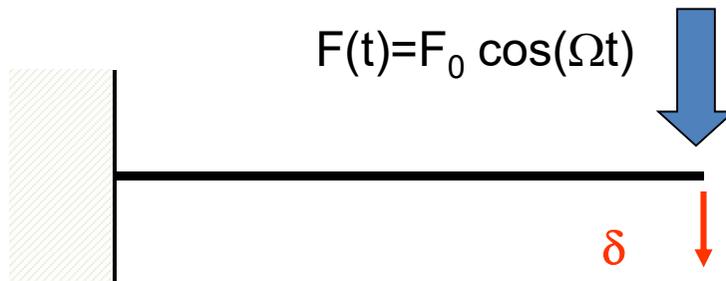


## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Può essere impiegato anche per valutare la risposta del sistema a forze o sollecitazioni esterne di tipo **periodico**, in **presenza di effetti non lineari**.



Non linearità di contatto



Materiale elastico non lineare



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Principali tecniche di soluzione:

➤ **Metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

▪ Ipotesi:

- *Struttura in campo lineare, con matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  costanti*
- *Matrice di smorzamento proporzionale o costante*

➤ **Metodi di integrazione diretta (MID)**

▪ Ipotesi:

- *Struttura operante anche in campo non lineare*
- *Matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  anche non costanti*
- *Matrice di smorzamento qualsiasi*



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Soluzione: **metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t)$$

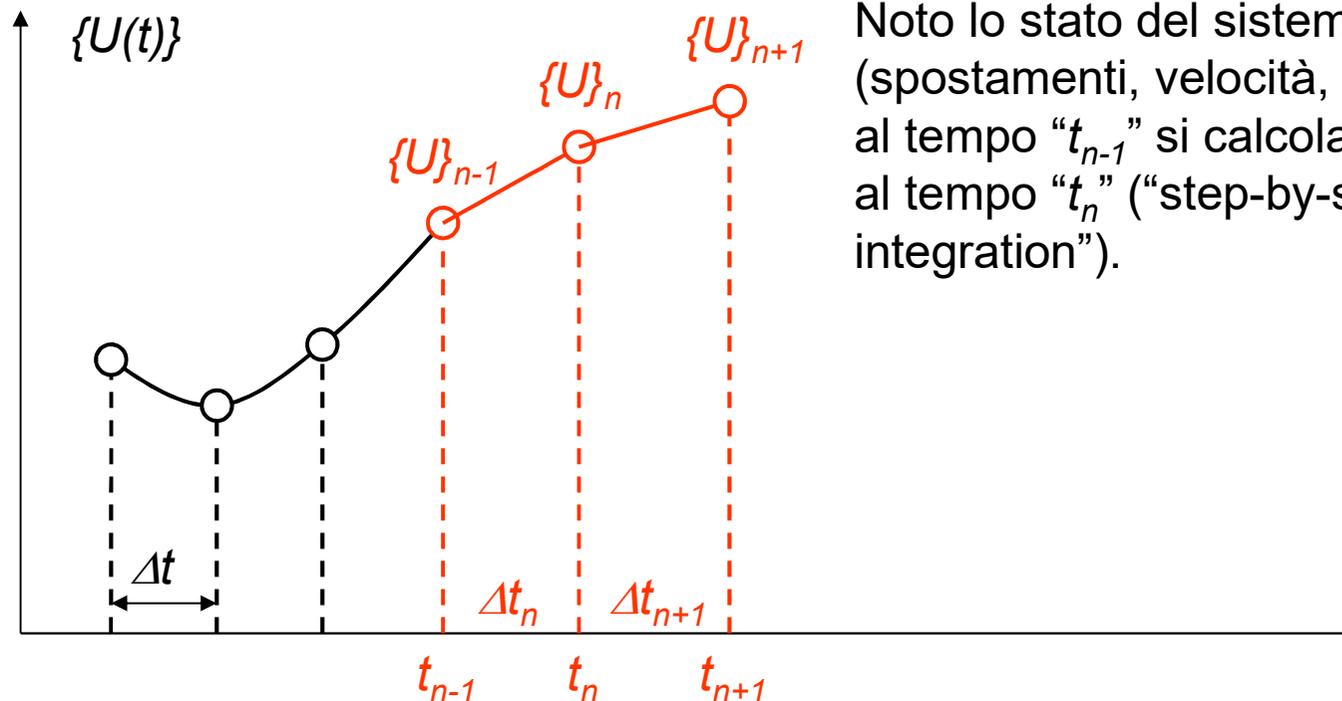
$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \{Y^{(k)}\}^T \{F(t)\} = f_k(t)$$

Soluzione della equazione relativa ad ogni modo con metodi “passo-passo”  
(Es. Runge-Kutta)

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

**Metodi di integrazione diretta (MID):** nessuna ipotesi preliminare sulla linearità del problema, né sulle matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$

L'intervallo temporale in cui si vuole studiare il comportamento del sistema viene suddiviso in intervalli (“passi”) temporali successivi.



Nota lo stato del sistema (spostamenti, velocità, accelerazioni) al tempo “ $t_{n-1}$ ” si calcola il nuovo stato al tempo “ $t_n$ ” (“step-by-step integration”).



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

**Metodi di integrazione diretta (MID):** nessuna ipotesi preliminare sulla linearità del problema, né sulle matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$

Tra i metodi di integrazione diretta, rientrano **due tipi principali di algoritmi:**

**Algoritmi di tipo implicito:** la soluzione al passo temporale  $n+1$  è ottenuta tramite la conoscenza della **soluzione al passo  $n$**  e delle **condizioni imposte al passo  $n+1$**  (Es.: metodo di Newmark)

**Algoritmi di tipo esplicito:** la soluzione al passo temporale  $n+1$  è ottenuta tramite la conoscenza della **soluzione e delle condizioni imposte al passo  $n$**  (Es.: metodo delle differenze centrali)

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### Metodo delle differenze centrali (Esplicito)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ $t_n$ ” (nota)

$$[M]\{\ddot{U}\}_n + [C]\{\dot{U}\}_n + [K]\{U\}_n = \{F(t_n)\}$$

Si assume:  $\{\dot{U}\} \approx \frac{1}{2} \left( \{\dot{U}\}_{\Delta t_n} + \{\dot{U}\}_{\Delta t_{n+1}} \right)$

$$\{\dot{U}\} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\Delta t} + \frac{\{U\}_n - \{U\}_{n-1}}{\Delta t} \right) \approx \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1}}{2\Delta t}$$

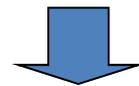
$$\{\ddot{U}\} \approx \frac{\{\dot{U}\}_{\Delta t_{n+1}} - \{\dot{U}\}_{\Delta t_n}}{\Delta t}$$

$$\{\ddot{U}\} \approx \frac{\frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\Delta t} - \frac{\{U\}_n - \{U\}_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} \approx \frac{\{U\}_{n+1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2}$$

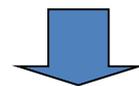
**ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID**
**Metodo delle differenze centrali (Esplicito)**

Sostituendo:  $\{\ddot{U}\} \approx \frac{\{U\}_{n+1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2}$        $\{\dot{U}\} \approx \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1}}{2\Delta t}$

$$[M]\{\ddot{U}\}_n + [C]\{\dot{U}\}_n + [K]\{U\}_n = \{F(t_n)\}$$



$$[M] \frac{\{U\}_{n+1} - 2\{U\}_n + \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2} + [C] \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_{n-1}}{2\Delta t} + [K]\{U\}_n = \{F(t_n)\}$$



$$\{U\}_{n+1} = \frac{\Delta t^2 (\{F(t_n)\} - [K]\{U\}_n) + 2[M]\{U\}_n - \left( [M] - [C] \frac{\Delta t}{2} \right) \{U\}_{n-1}}{[M] + [C] \frac{\Delta t}{2}}$$

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### Metodo delle differenze centrali (Esplicito)

$$\{U\}_{n+1} = \frac{\Delta t^2 (\{F(t_n)\} - [K]\{U\}_n) + 2[M]\{U\}_n - \left( [M] - [C]\frac{\Delta t}{2} \right) \{U\}_{n-1}}{[M] + [C]\frac{\Delta t}{2}}$$

Se si fa in modo che [M] e [C] siano diagonali il calcolo è immediato.

Stabilità:  $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$  **Massima pulsazione propria del modello EF**

L'algoritmo risulta **condizionatamente stabile**, vale a dire che la stabilità dipende dal passo temporale prescelto.

Possibili stime  $\Delta t$ :

$$\Delta t \leq \mu L \left( \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

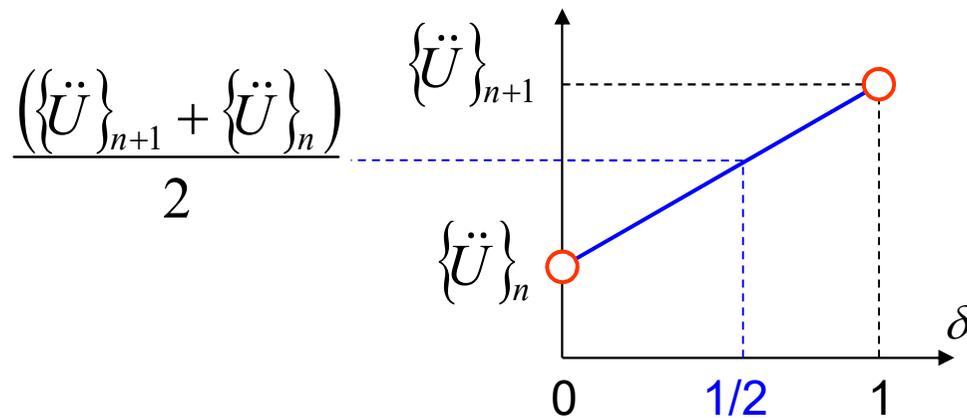
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### Metodo di Newmark (Implicito)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ $t_{n+1}$ ” (non nota)

$$[M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\}$$

Si assume:  $\{\dot{U}\}_{n+1} \approx \{\dot{U}\}_n + \left( (1-\delta)\{\ddot{U}\}_n + \delta\{\ddot{U}\}_{n+1} \right) \Delta t$   $\delta \in \{0,1\}$

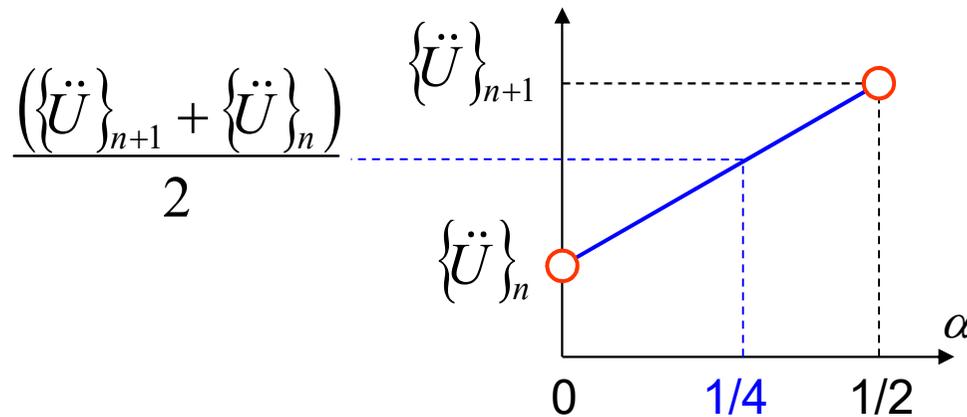


## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### Metodo di Newmark (Implicito)

Si assume:

$$\{U\}_{n+1} \approx \{U\}_n + \{\dot{U}\}_n \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}_n + \alpha \{\ddot{U}\}_{n+1} \right) \Delta t^2 \quad \alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$$

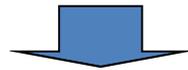


## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### Metodo di Newmark (Implicito)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ $t_{n+1}$ ” (non nota)

$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\} \\ \{\dot{U}\}_{n+1} \approx \{\dot{U}\}_n + ((1-\delta)\{\ddot{U}\}_n + \delta\{\ddot{U}\}_{n+1})\Delta t \\ \{U\}_{n+1} \approx \{U\}_n + \{\dot{U}\}_n \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}_n + \alpha \{\ddot{U}\}_{n+1} \right) \Delta t^2 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\} \\ \{\dot{U}\}_{n+1} \approx \{\dot{U}\}_n + ((1-\delta)\{\ddot{U}\}_n + \delta\{\ddot{U}\}_{n+1})\Delta t \\ \{\ddot{U}\}_{n+1} = \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n - \{\dot{U}\}_n \Delta t}{\alpha \Delta t^2} - \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{U}\}_n \end{array} \right.$$

Risolvendo per

**ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID**
**Metodo di Newmark (Implicito)**

$$\begin{cases}
 [M]\{\ddot{U}\}_{n+1} + [C]\{\dot{U}\}_{n+1} + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\} \\
 \{\dot{U}\}_{n+1} \approx \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\{\dot{U}\}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\{\ddot{U}\}_n \Delta t + \delta \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t} \\
 \{\ddot{U}\}_{n+1} = \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\{\dot{U}\}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\{\ddot{U}\}_n
 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 & [M] \left( \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\{\dot{U}\}_n}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\{\ddot{U}\}_n \right) + \\
 & + [C] \left( \delta \frac{\{U\}_{n+1} - \{U\}_n}{\alpha \Delta t} + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\{\dot{U}\}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\{\ddot{U}\}_n \Delta t \right) + \\
 & + [K]\{U\}_{n+1} = \{F(t_{n+1})\}
 \end{aligned}$$

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

## Metodo di Newmark (Implicito)

$$\{U\}_{n+1} \left( \frac{[M]}{\alpha \Delta t^2} + \frac{\delta [C]}{\alpha \Delta t} + [K] \right) = \{F(t_{n+1})\} +$$

$$+ [M] \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{U\}_n + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{U}\}_n + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \{\ddot{U}\}_n \right) +$$

$$+ [C] \left( \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \{U\}_n + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \{\dot{U}\}_n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \{\ddot{U}\}_n \right)$$

$$[\hat{K}] \{U\}_{n+1} = [\hat{F}]$$

Risoluzione:

$$\{U\}_{n+1} = [\hat{K}]^{-1} [\hat{F}]$$

Oss.: se  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  sono costanti, la matrice  $[\hat{K}]$  è anch'essa costante e può essere costruita ed invertita una sola volta.

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Condizioni di stabilità:

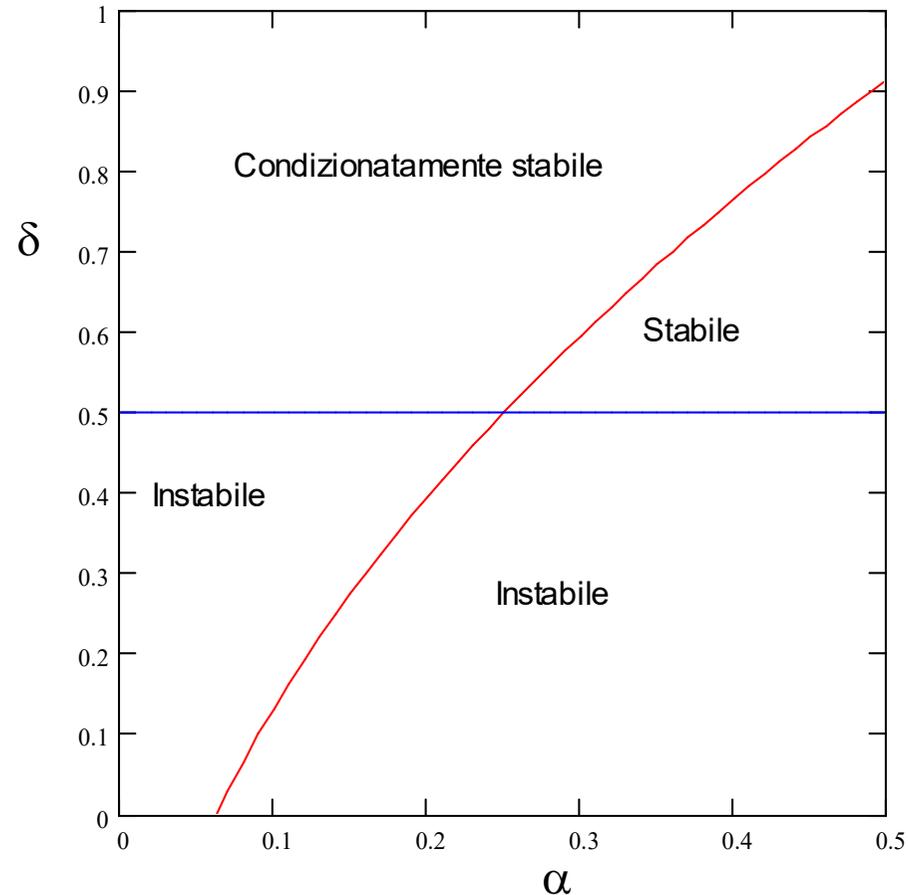
$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

All'interno del campo di stabilità l'algoritmo risulta **incondizionatamente stabile**, vale a dire stabile indipendentemente dal passo temporale prescelto.

Esiste anche una regione in cui l'algoritmo risulta **condizionatamente stabile**, con passo limite:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\Omega \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2 - 4\alpha}}$$





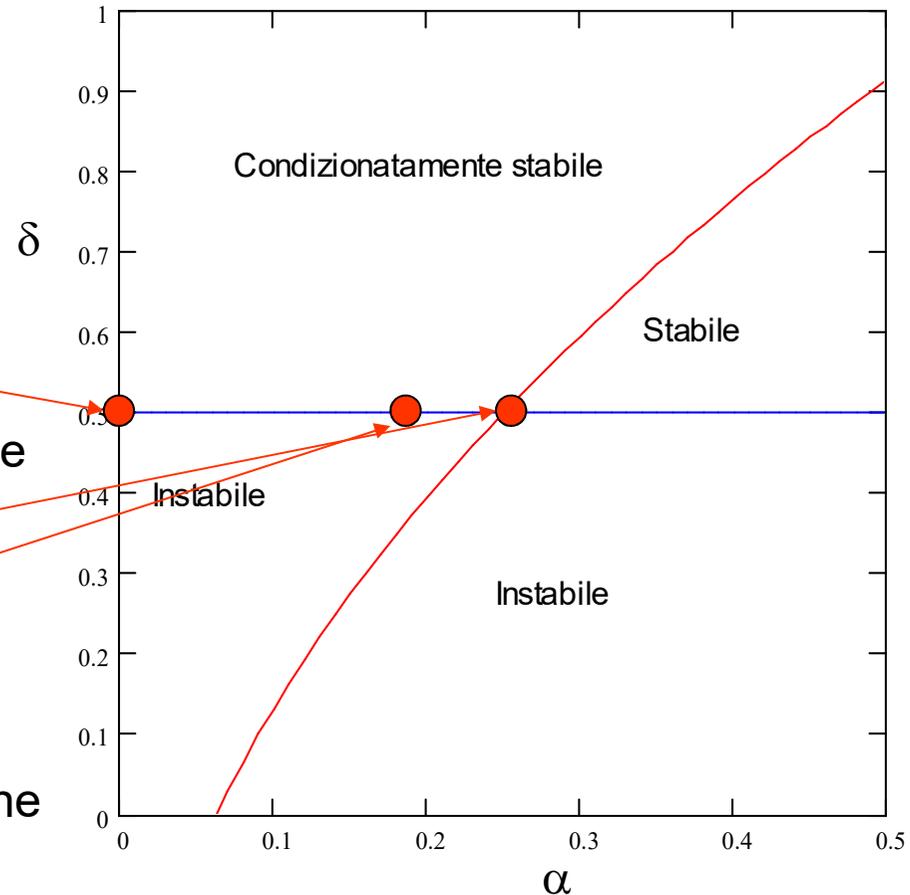
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Al variare di  $\alpha$  e  $\delta$  si ottengono altri algoritmi classici di soluzione:

$\alpha = 0$   
 $\delta = \frac{1}{2}$  Metodo delle differenze centrali

$\alpha = \frac{1}{4}$   
 $\delta = \frac{1}{2}$  Metodo dell'accelerazione media

$\alpha = \frac{1}{6}$   
 $\delta = \frac{1}{2}$  Metodo dell'accelerazione lineare



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

In ANSYS i due parametri  $\alpha$  e  $\delta$  sono generalmente espressi in funzione di un terzo parametro  $\gamma$  (TINTP):

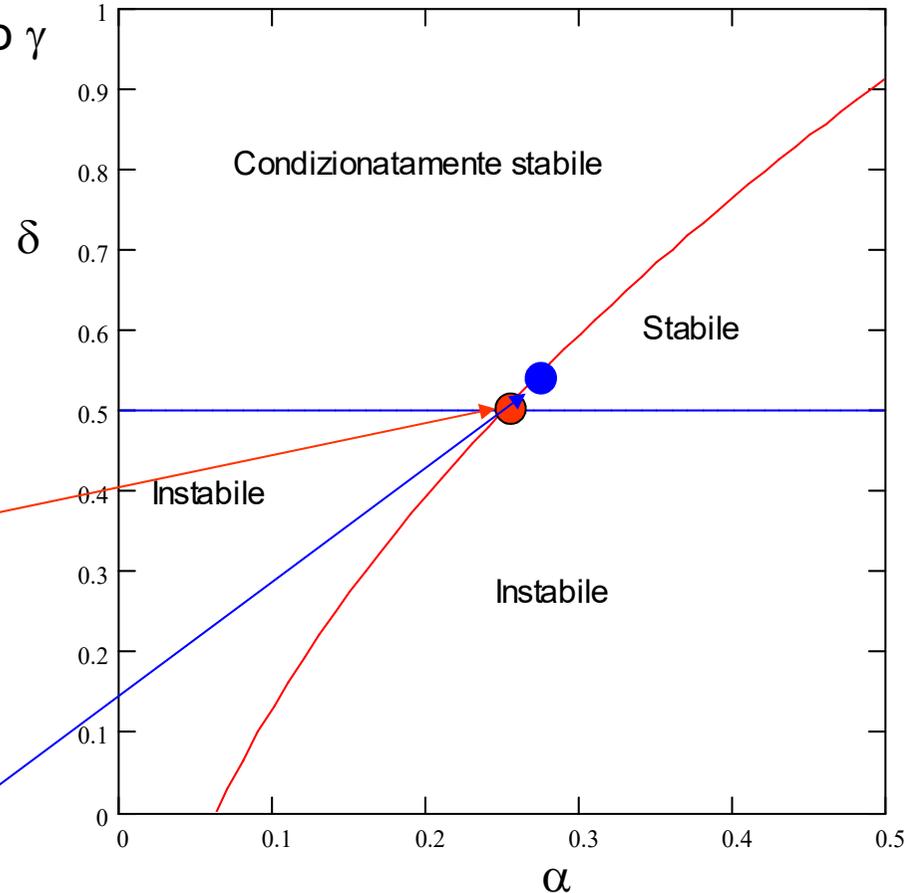
$$\alpha = \frac{1}{4}(1 + \gamma)^2$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \delta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Per default

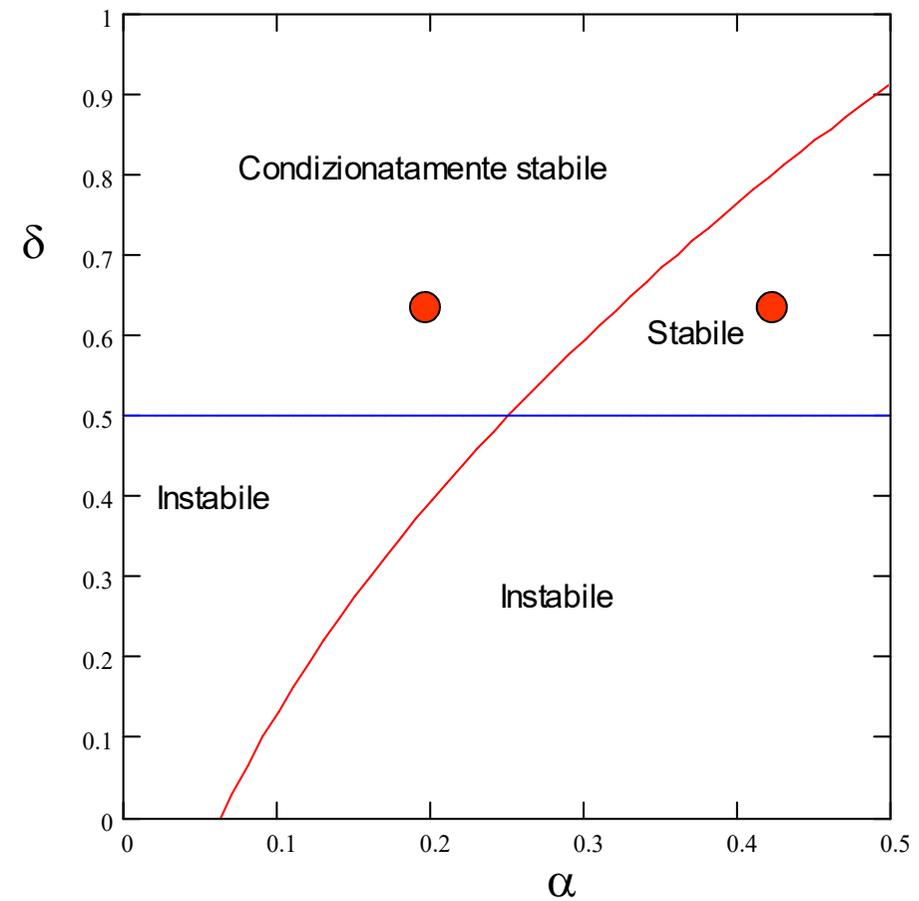
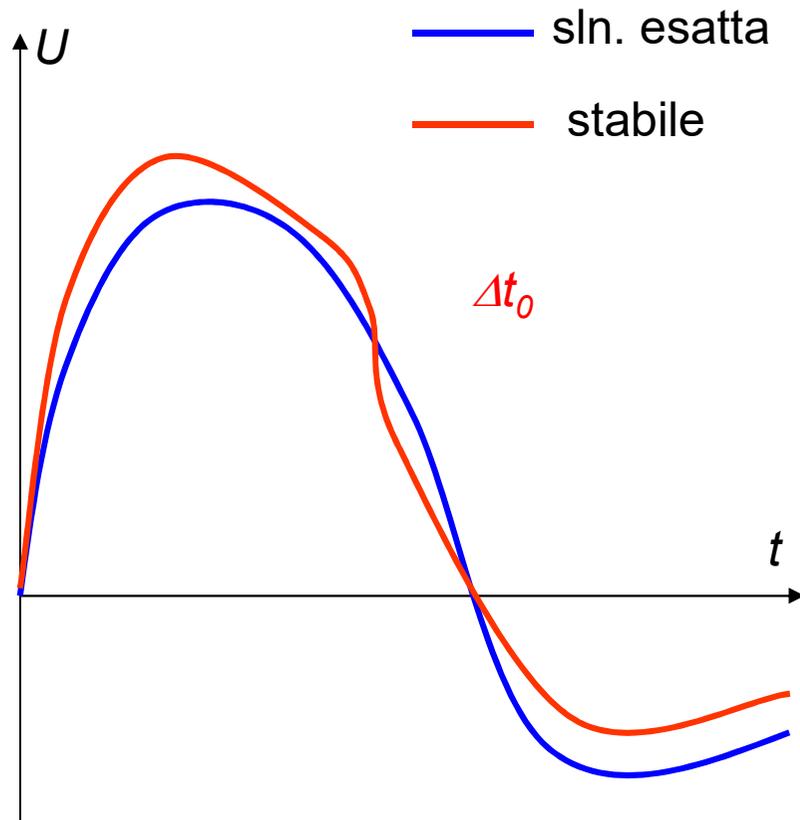
$$\gamma = 0.005 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.2525 \\ \delta = 0.505 \end{cases}$$





## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

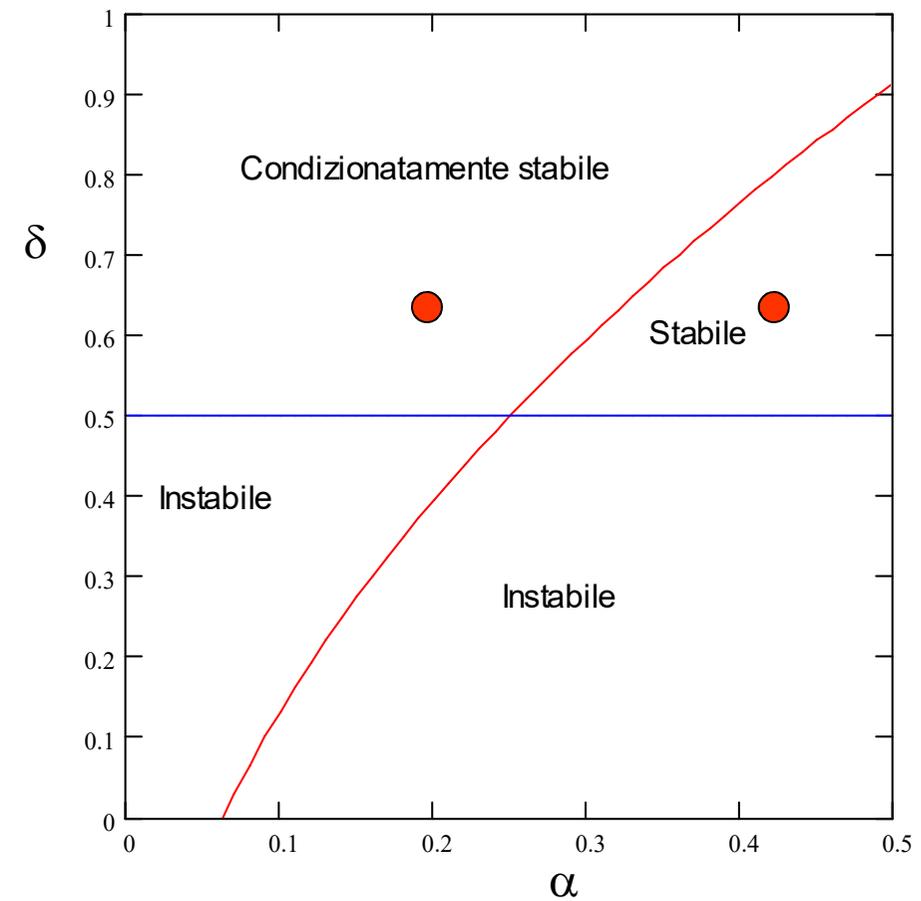
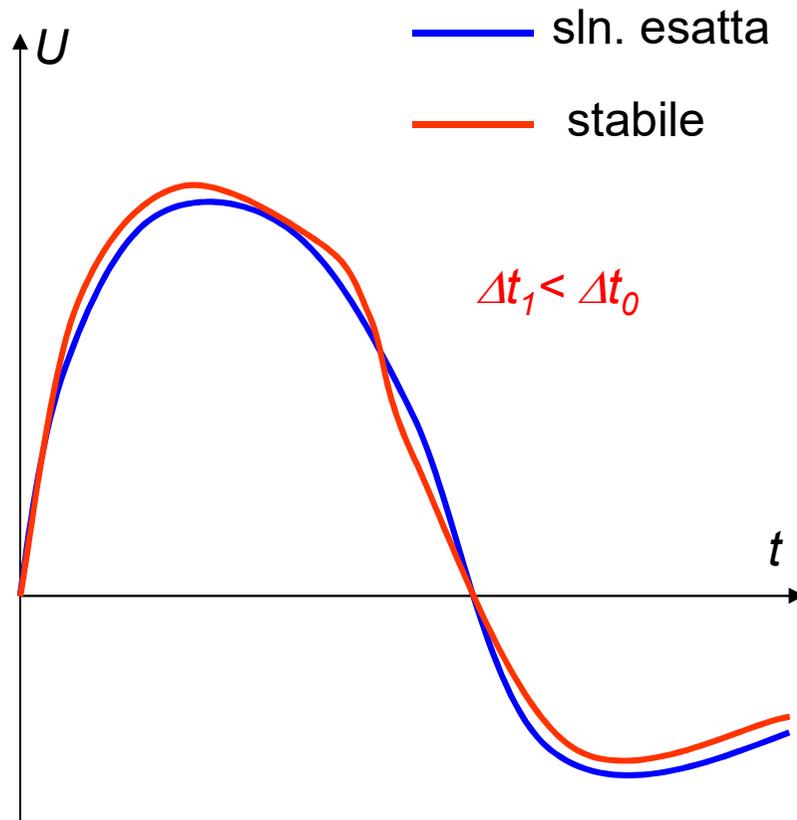
All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di  $\Delta t$ .





## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

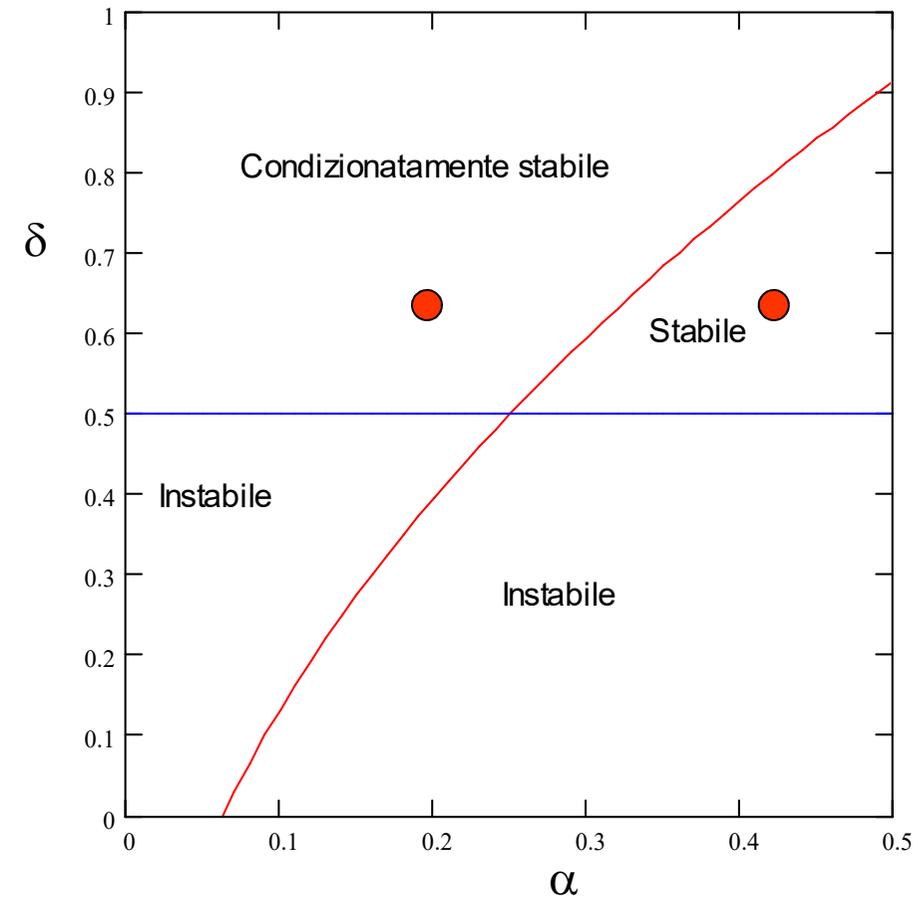
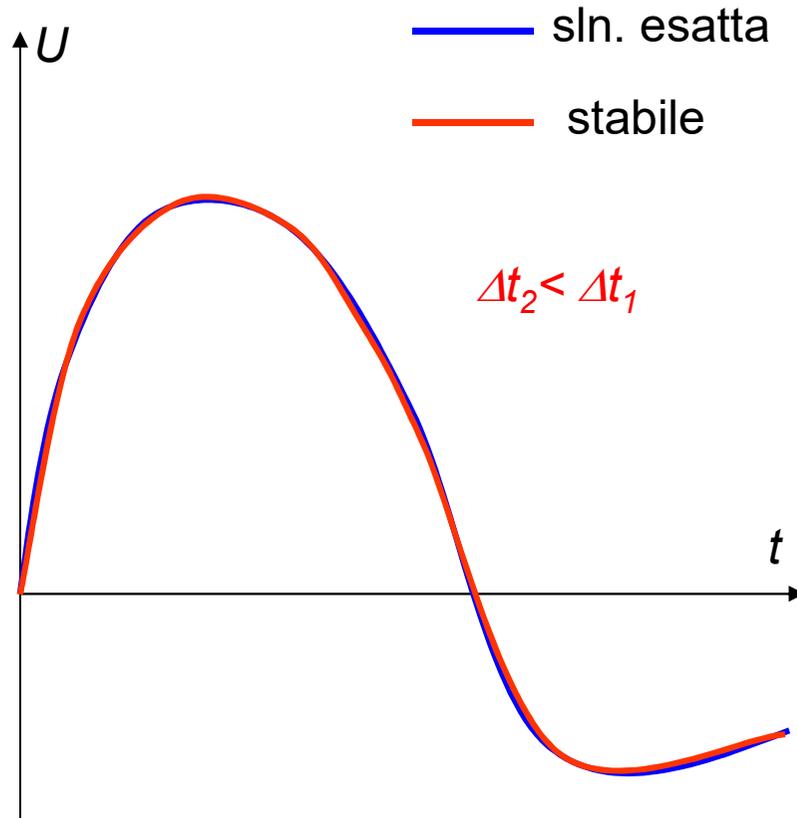
All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di  $\Delta t$ .



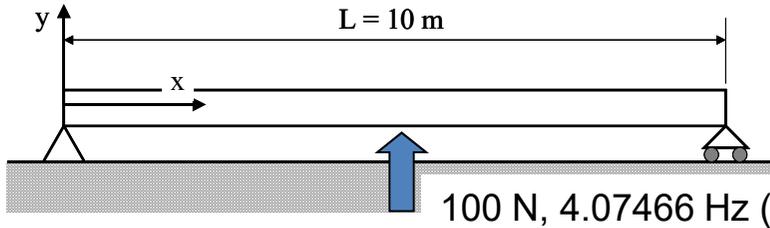


## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di  $\Delta t$ .



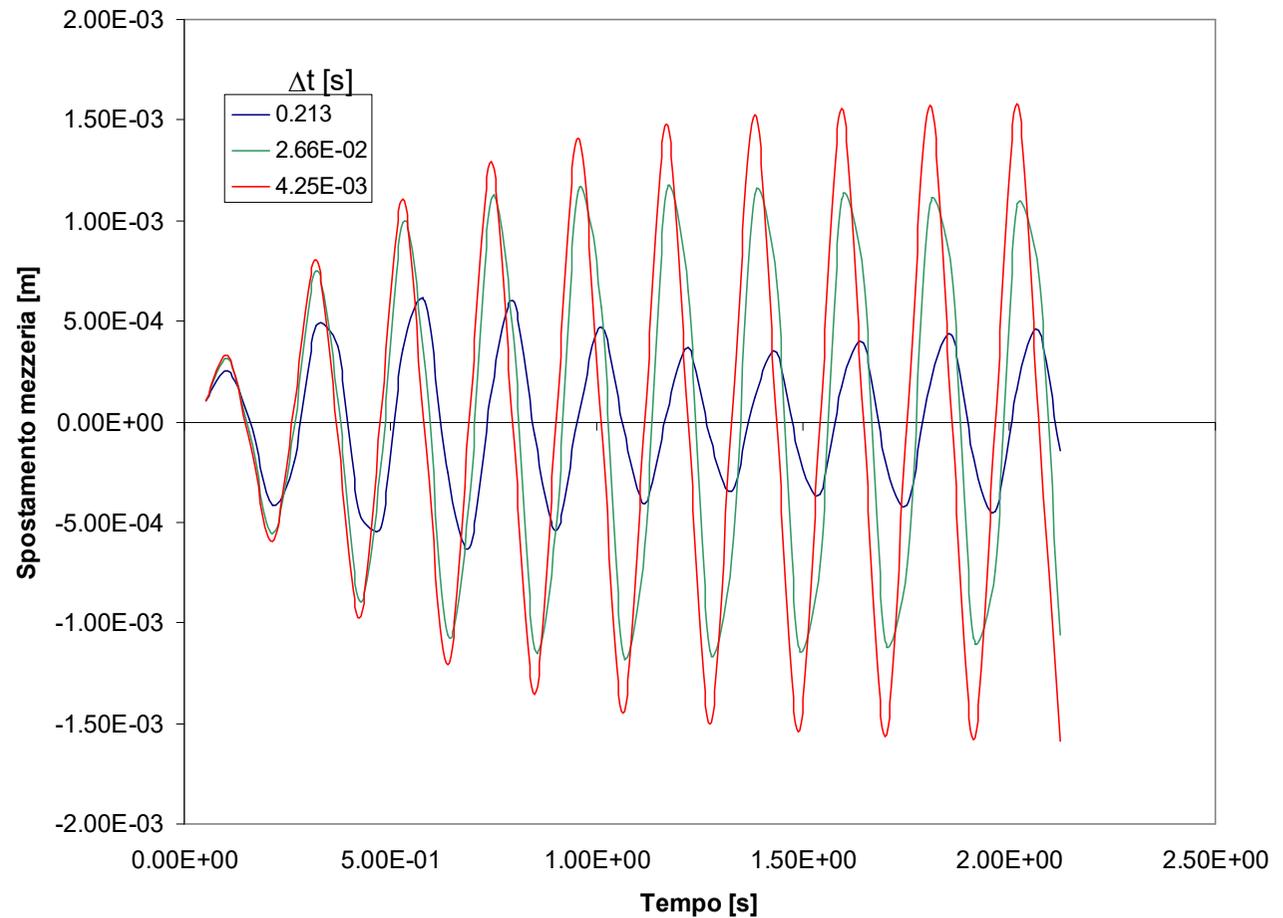
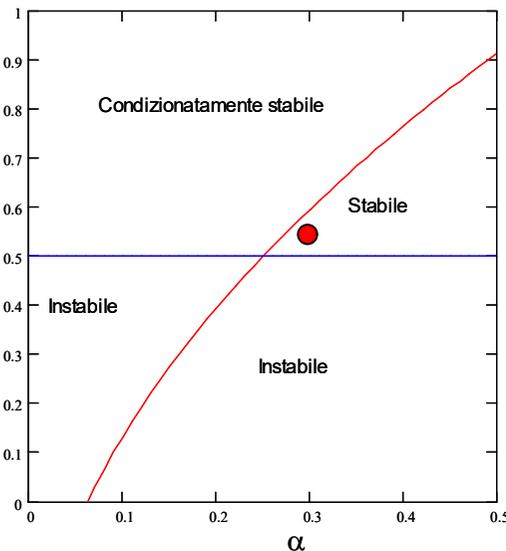
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID



Effetto del passo di integrazione in condizioni di stabilità incondizionata

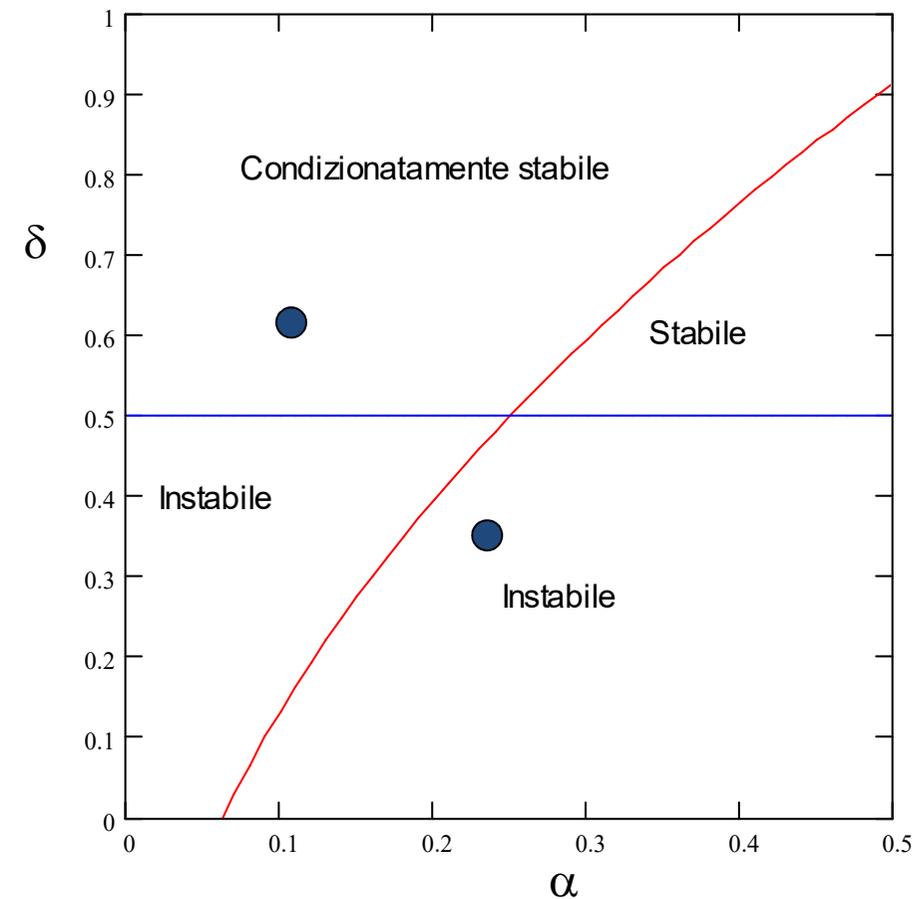
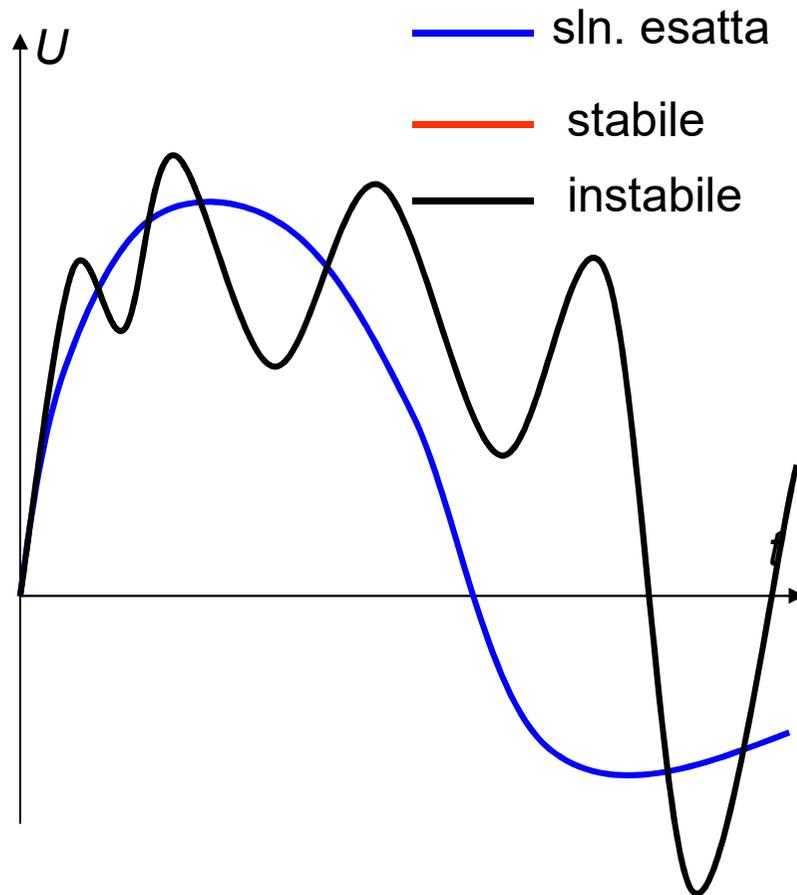
$$\alpha = 0.2525$$

$$\delta = 0.5050$$



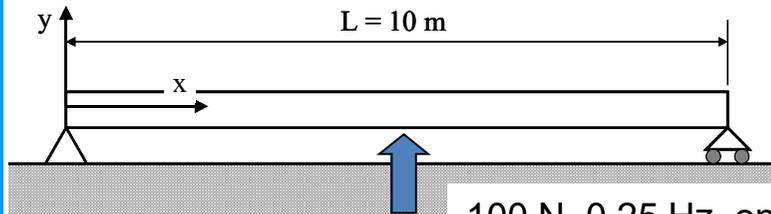
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Al di fuori del campo di stabilità, la soluzione mostra una rapida divergenza (in genere con forti oscillazioni) da quella esatta, senza convergere su quest'ultima al tendere a zero di  $\Delta t$ .





## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

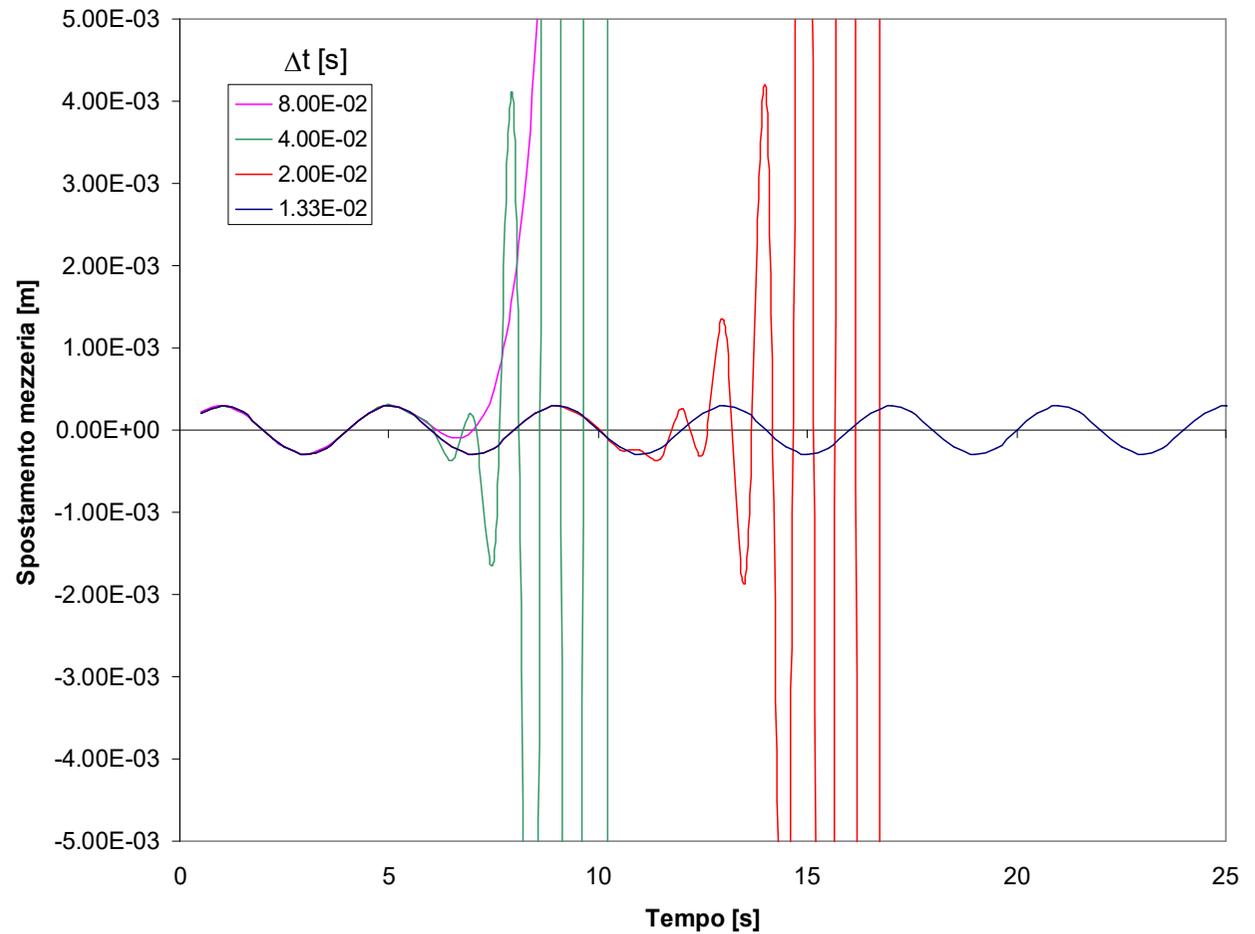
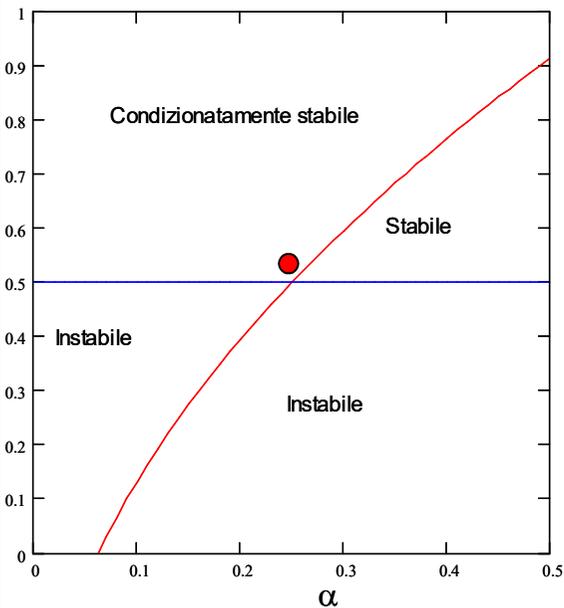


Effetto del passo di integrazione in condizioni di stabilità condizionata

100 N, 0.25 Hz, onda triangolare

$$\alpha = 0.25$$

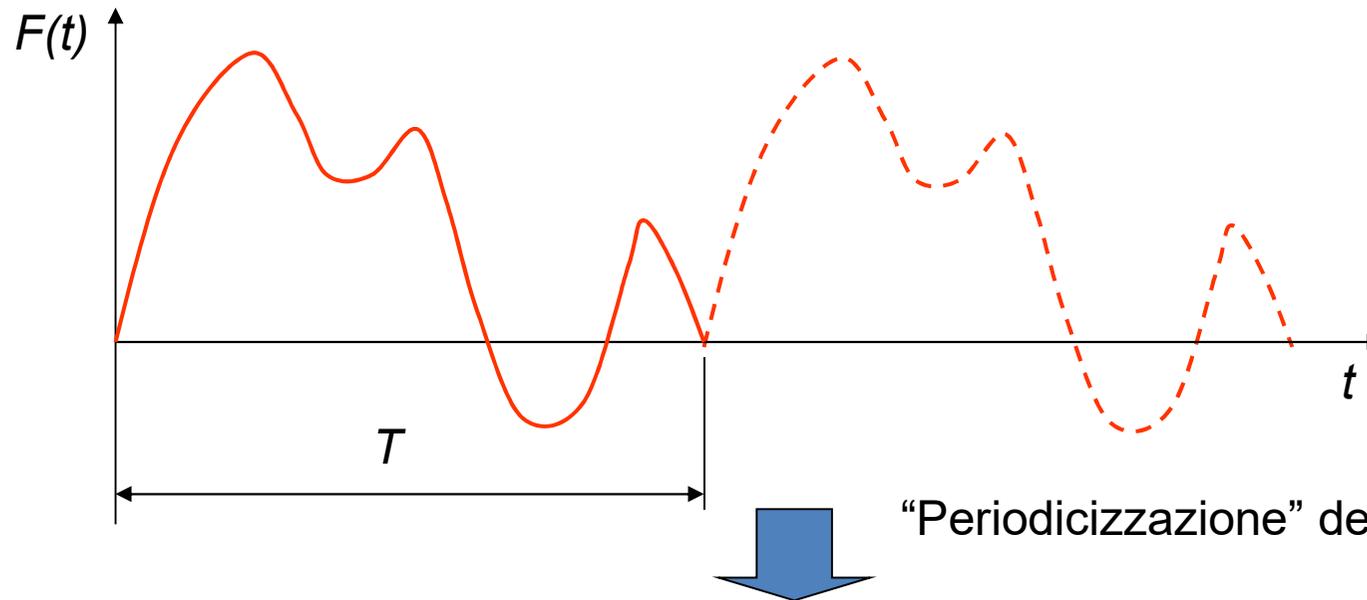
$$\delta = 0.51$$



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### Scelta del passo di integrazione temporale.

Procedura per valori **indicativi** frequenze in gioco



“Periodicizzazione” della storia di carico

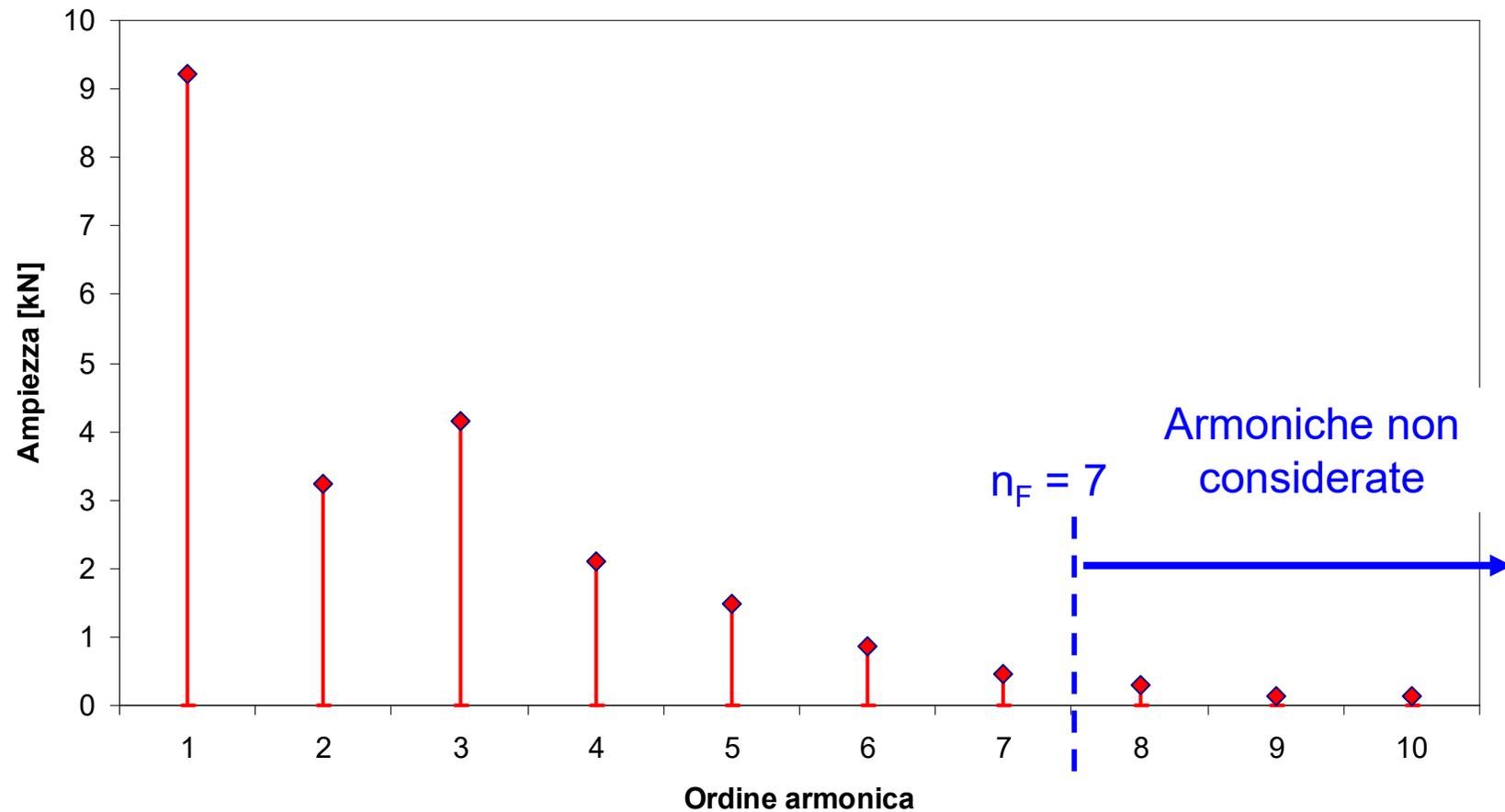
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Andamento tipico delle ampiezze



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

Metodo di sovrapposizione modale:

$$\{U(t)\} = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \{Y^{(j)}\} q_j(t)$$

$$\omega_{n_M} \gg n_F \Omega_0$$

Tutti i metodi di soluzione:

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{n_P n_F \Omega_0} \quad n_P > 20 \div 30$$

In ogni caso, a partire da questa prima stima, è generalmente necessario uno studio di convergenza su  $n_P$  e  $\Delta t$ .

Situazioni che possono richiedere valori particolarmente ridotti di  $\Delta t$ :

- fenomeni di contatto
- propagazione di onde elastiche (dimensioni elementi  $< 1/20$  lungh. d'onda)
- non linearità geometriche, “stress stiffening”



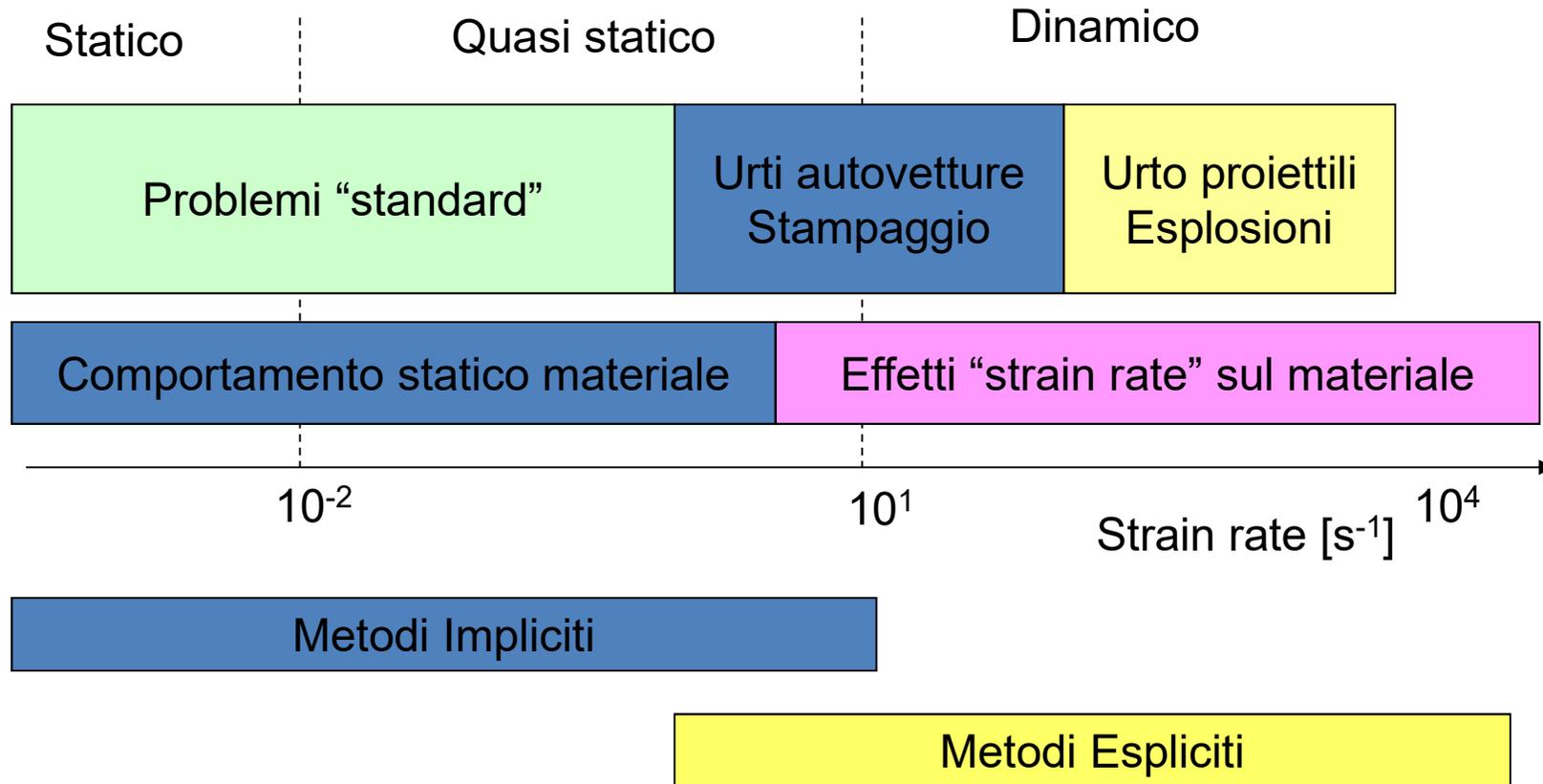
## INTEGRAZIONE RISPETTO AL TEMPO/2

Tipo di problema	Algoritmi espliciti	Algoritmi impliciti
Generale	Nessuna inversione di matrici; basso tempo di calcolo per step	Inversione di matrici ad ogni step; elevato tempo di calcolo per step
Campo lineare	Stabilità condizionata; necessari passi temporali molto piccoli	Possibile stabilità incondizionata; grandi passi temporali
Campo non lineare	Soluzione diretta ad ogni passo	Soluzione tramite tecniche iterative
	Necessari passi temporali molto piccoli per la stabilità	Necessari piccoli passi temporali per la convergenza
	Verifiche di convergenza non richieste	Convergenza non sempre assicurata per forti non linearità



# INTEGRAZIONE RISPETTO AL TEMPO/3

Campo applicativo

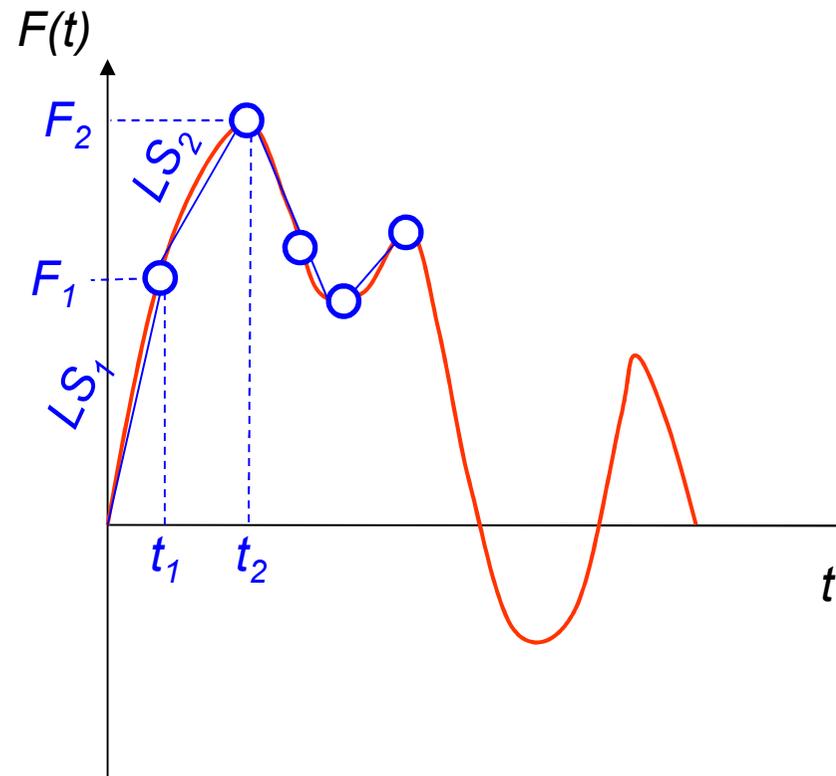


Possibili anche approcci misti Impliciti+Espliciti

## RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/1

La effettiva storia di carico viene rappresentata tramite una successione di «Load Steps» (incrementi di carico), ciascuno dei quali caratterizzato da:

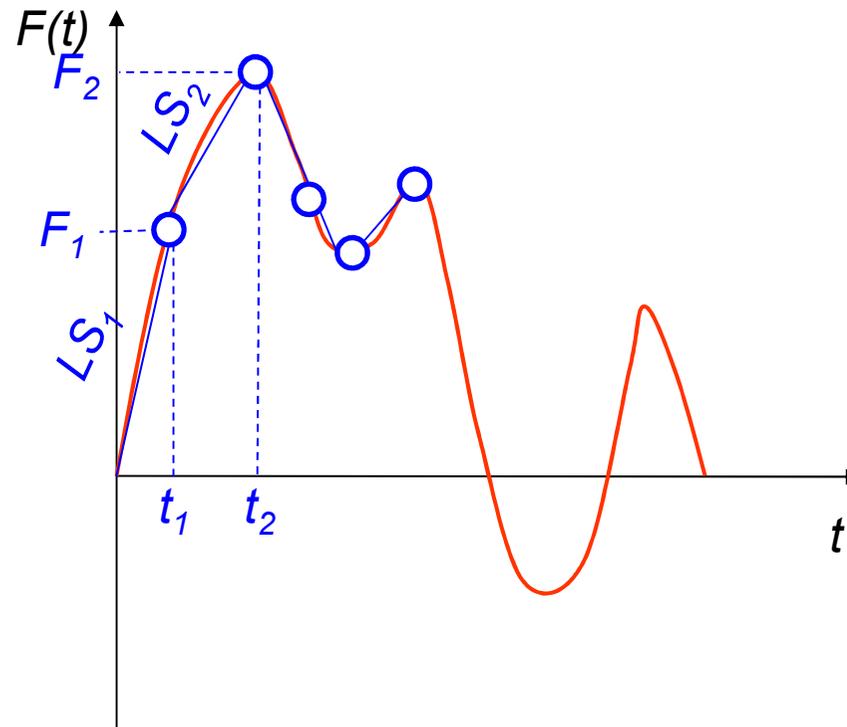
- Tempo finale
- Valore finale del carico applicato



## RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/2

In ogni «Load Step» il carico può:

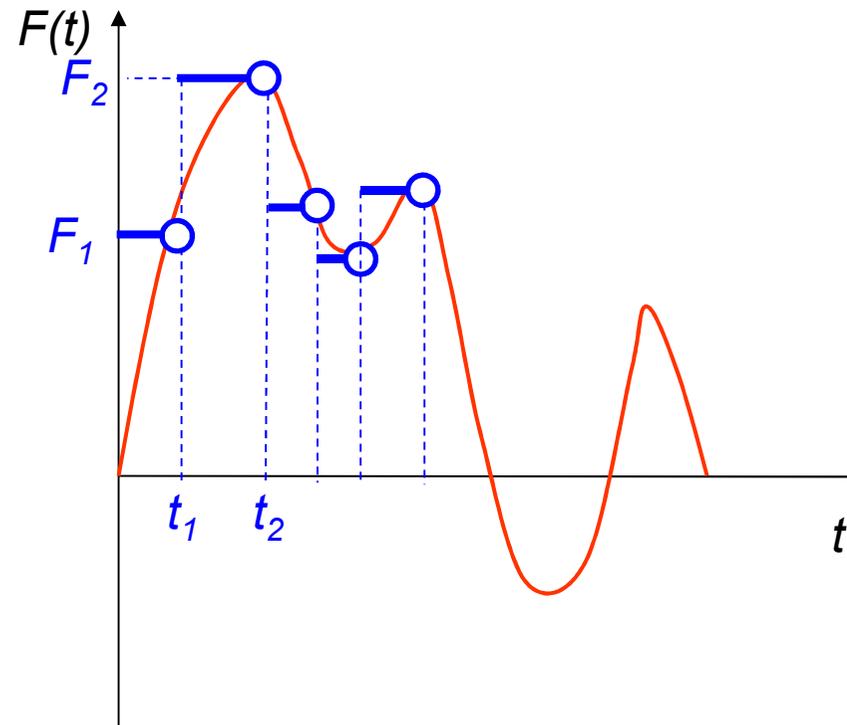
- Variare linearmente nel tempo dal valore finale dello step precedente a quello finale dello step corrente
- Raggiungere immediatamente il valore finale dello step corrente



## RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/2

In ogni «Load Step» il carico può:

- Variare linearmente nel tempo dal valore finale dello step precedente a quello finale dello step corrente
- Raggiungere immediatamente il valore finale dello step corrente





## COMANDI ANSYS/1 ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK

**/SOLU**

**ANTYPE, TRANS**            Definisce il tipo di analisi richiesta

**TRNOPT, FULL, .....**        Sceglie il tipo di analisi diretto completo

---- comandi per la definizione dei diversi Load Steps -----



## COMANDI ANSYS/2 ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK

Comandi per la definizione di un Load Step

**TIME, TIME** *definisce il tempo finale del Load Step*

Comandi per la definizione dei carichi applicati con il valore che ciascuno assume alla fine del Load Step. NB: I carichi che non vengono ridefiniti nel LS corrente rimangono applicati con il valore che avevano alla fine del LS precedente.

**DELTIM, TIMESTEP** *definisce il valore iniziale del passo di integrazione*

**TINTP, GAMMA, ALPHA, DELTA,...** *definisce i parametri che controllano l'algoritmo di Newmark*



## COMANDI ANSYS/3 ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK

**AUTOTS**, *Key* attiva (ON) o disattiva (OFF) la scelta automatica dei passi di integrazione. La dimensione minima è data da DELTIM

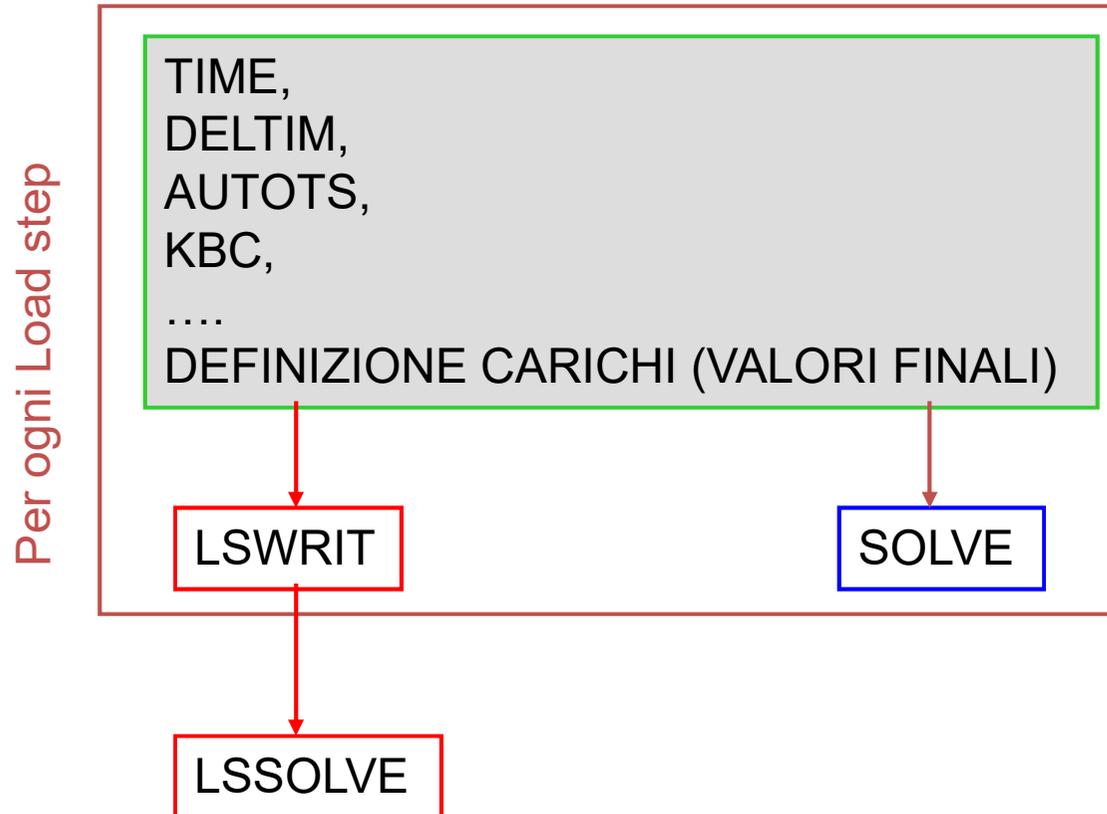
**KBC**, *KEY* sceglie l'andamento del carico nel LoadStep

- 0 variabile linearmente nel Loadstep
- 1 a gradino (costante nel Loadstep)

**OUTRES**, *Item, Freq, Cname* Definisce il tipo di dati trasferiti nel file di output e la frequenza di scrittura.



## COMANDI ANSYS/4 ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK





## COMANDI ANSYS/5 ANALISI DI TRANSITORIO – MSM

### Analisi modale preliminare

**/SOLU**

**ANTYPE,MODAL**

**MODOPT,QRDAMP,NMOD**

! Include lo smorzamento

**SOLVE**

**SAVE**

**FINISH**

**/SOLU**

**ANTYPE, TRANS**

Definisce il tipo di analisi richiesta

**TRNOPT, MSUP, .....**

Sceglie il tipo di analisi MSM

---- comandi per la definizione dei diversi Load Steps e per la loro soluzione (identici a quelli visti per il metodo di Newmark) -----



## COMANDI ANSYS/6 ANALISI DI TRANSITORIO – MSM

Passo di espansione della soluzione

```
/SOLU  
EXPASS,ON           ! Expansion pass  
NUMEXP,ALL         ! No. of solutions to expand; time range  
SOLVE  
FINISH
```