



# ANALISI DINAMICA

## Principali tipi di analisi

- analisi modale
- analisi della risposta armonica
- analisi di transitorio dinamico



# ANALISI DINAMICA – Considerazioni generali

## Unità di misura

È preferibile usare il sistema m.k.s

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m}$$

kg

$$\sqrt{\frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm} \cdot \frac{1}{kg}} = \sqrt{\frac{1000}{s^2}} = \frac{1}{s} \sqrt{10^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{N}{mm} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot mm}$$

kg

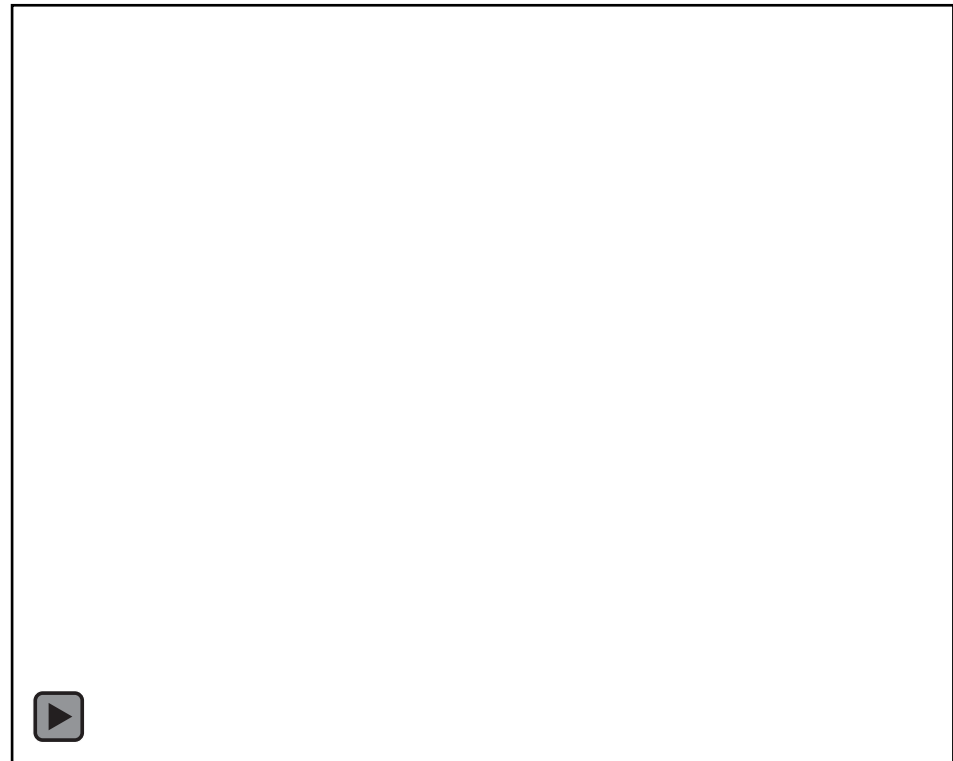


# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

## Relazione tra frequenza e lunghezza d'onda

Onda: perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nel tempo e nello spazio senza comportare trasferimento di materia, ma talora con un trasferimento di energia.

Esempio: le onde si propagano sulla superficie dell'acqua, ma una particella d'acqua o un oggetto galleggiante non subiscono spostamenti nella direzione di propagazione dell'onda, ma solo spostamenti verticali





# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

In Fisica si distinguono diverse tipologie di onde. Noi ci occuperemo di quelle che vengono trasmesse attraverso **deformazioni elastiche** del mezzo in cui si propagano (**Onde Elastiche**). Esistono anche onde che non necessitano di un mezzo per propagarsi (Es: Onde Elettromagnetiche, Onde Gravitazionali).



# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Le onde elastiche possono distinguersi in base alla direzione in cui avviene l'oscillazione in relazione a quella di propagazione dell'onda in:

- Longitudinali



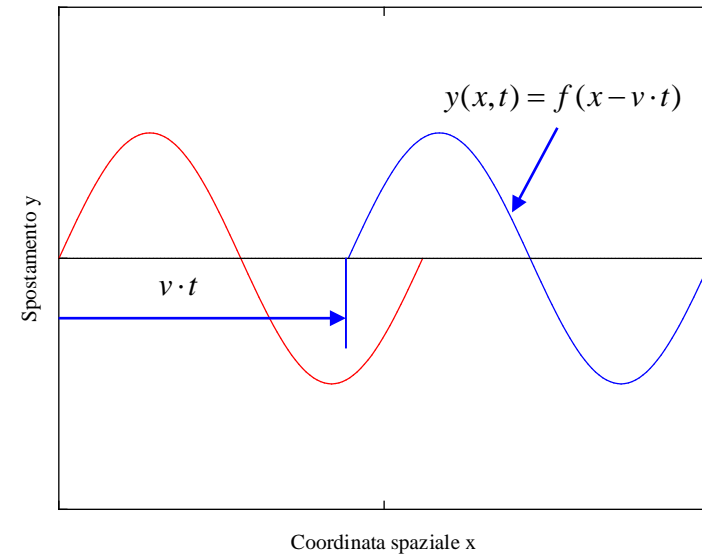
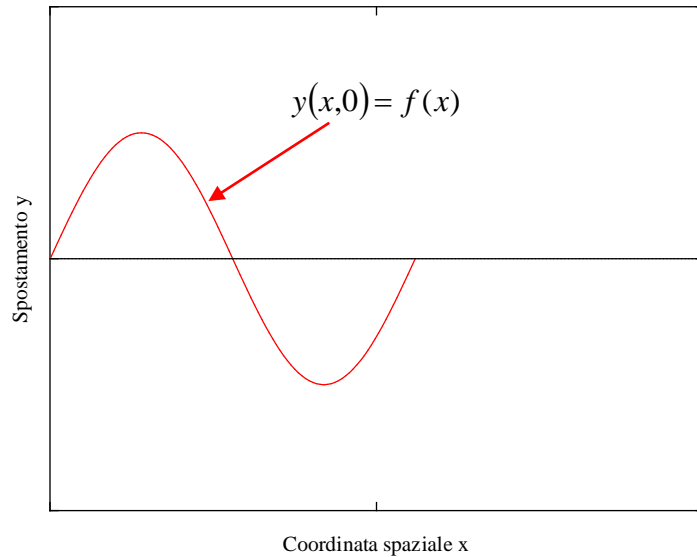
- Trasversali



# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Data l'equazione che rappresenta la forma di un'onda al tempo  $t=0$ , del tipo:

$$y(x, t) = y(x, 0) = f(x)$$

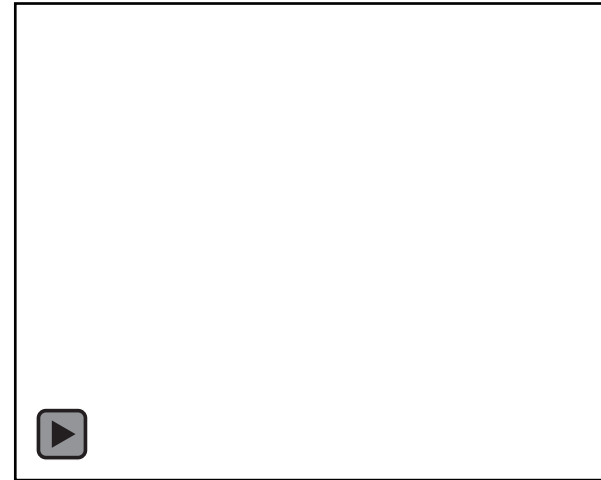
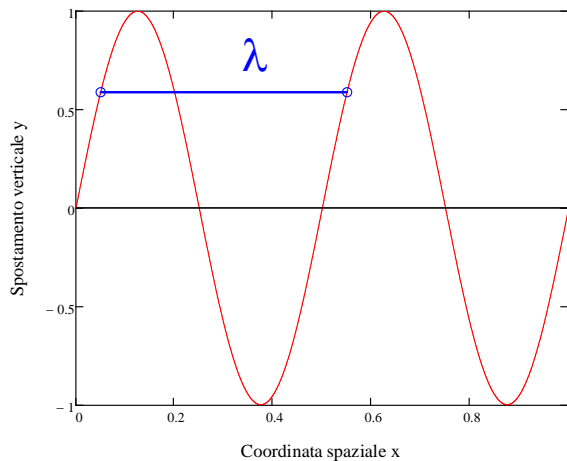


L'equazione che rappresenta la forma di un'onda che viaggia in direzione « $x$ » con velocità « $v$ » in funzione del tempo  $t$  risulta data da:

$$y(x, t) = f(x - v \cdot t)$$

# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Data un pacchetto («treno») di onde che si propaga con velocità « $v$ », si consideri il parametro «lunghezza d'onda» ( $\lambda$ ) che corrisponde alla distanza tra punti corrispondenti in oscillazioni successive:



Il periodo « $T$ » della oscillazione subita da un punto del continuo è dato dal tempo necessario per il passaggio di una onda completa, vale a dire:

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

da cui, essendo:

$$f = \frac{1}{T}$$

si ottiene:

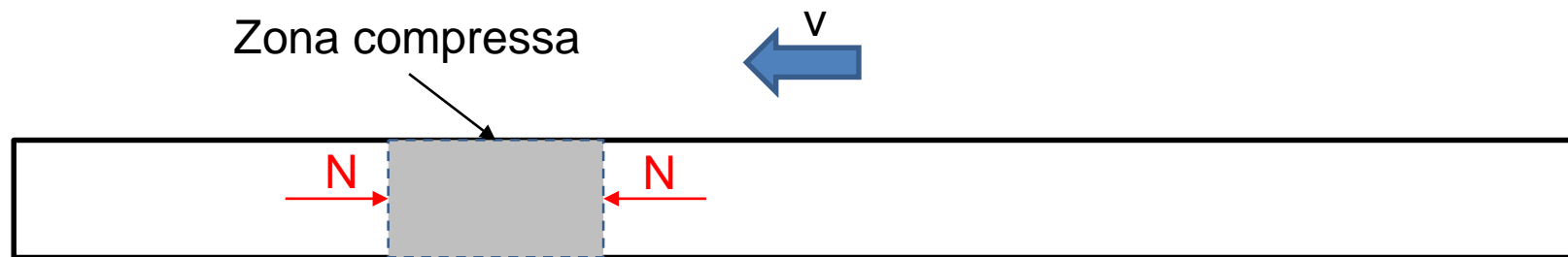
$$\lambda \cdot f = v$$

# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

È interessante analizzare la dipendenza della velocità « $v$ » dalle caratteristiche del mezzo in cui avviene la propagazione dell'onda.

Si consideri una barra isotropa di sezione uniforme  $A$ , ad un'estremità della quale venga prodotto un impulso di compressione, che si propaga verso destra a velocità « $v$ ».

Si immagini adesso di imporre a tutto il sistema una velocità « $v$ » da destra a sinistra. In tal modo la zona compressa si mantiene ferma e la barra «passa» progressivamente attraverso di essa.



La zona compressa è soggetta ad una forza normale (negativa)  $N$ .

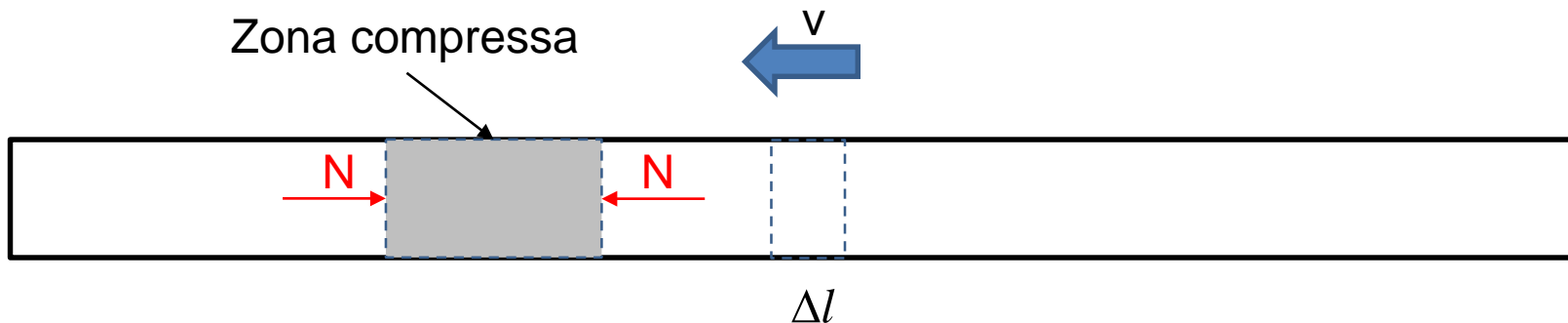
# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Si consideri un elemento di volume di lunghezza  $\Delta l$ , che si muove da destra a sinistra con velocità «v». La sua massa è pari a:

$$\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta l = \rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t$$

dove:  $\Delta t = \frac{\Delta l}{v}$

è il tempo impiegato dall'elemento di volume ad attraversare qualunque sezione del corpo (in particolare, ad entrare completamente nella zona compressa)



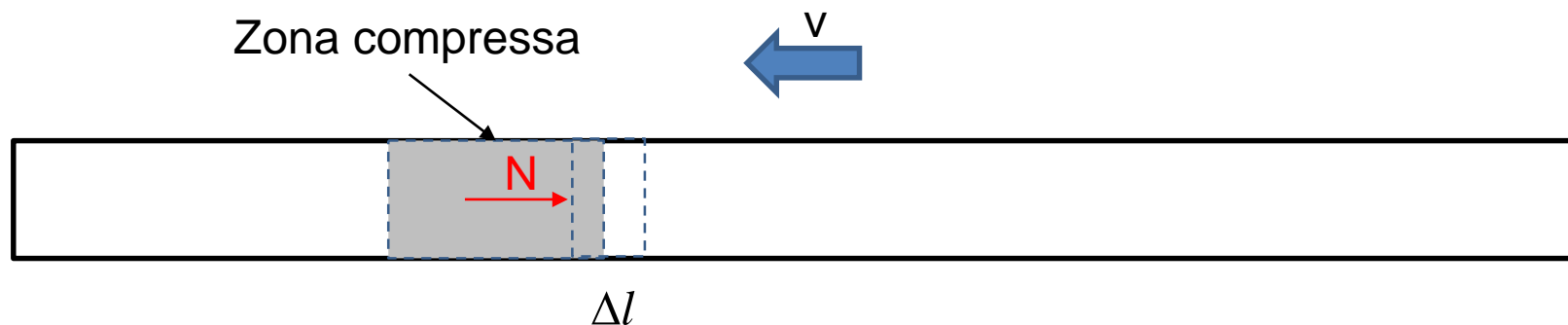
# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Per il tempo  $\Delta t$ , impiegato per entrare nella zona compressa, l'elemento è soggetto alla forza  $N$ , che determina una variazione della sua velocità data da:

$$N = \Delta m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

*dividendo ambo i membri per  $A$ , semplificando  $\Delta t$  e moltiplicando numeratore e denominatore per  $v$*

$$\frac{N}{A} = \rho \cdot v^2 \frac{\Delta v}{v}$$



# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Mentre l'elemento di volume è immerso nella zona compressa, dato che il flusso di massa deve essere costante, deve risultare:

$$\rho \cdot A \cdot v = \rho' \cdot A \cdot (v + \Delta v)$$

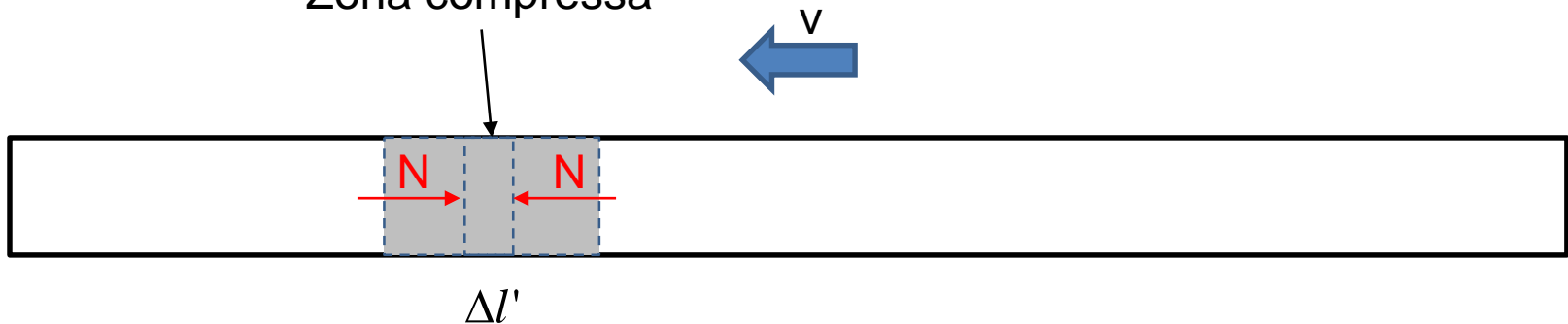
$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{v + \Delta v}{v}$$

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\frac{\Delta m}{A \cdot \Delta l}}{\frac{\Delta m}{A \cdot \Delta l'}} = \frac{\Delta l'}{\Delta l} = \frac{\Delta l(1 + \varepsilon)}{\Delta l} = 1 + \varepsilon$$

$$1 + \varepsilon = 1 + \frac{\Delta v}{v}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta v}{v}$$

Zona compressa





# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

$$\frac{N}{A} = \sigma = \rho \cdot v^2 \frac{\Delta v}{v}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta v}{v}$$

$$\sigma = \rho \cdot v^2 \varepsilon$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E = \rho \cdot v^2$$

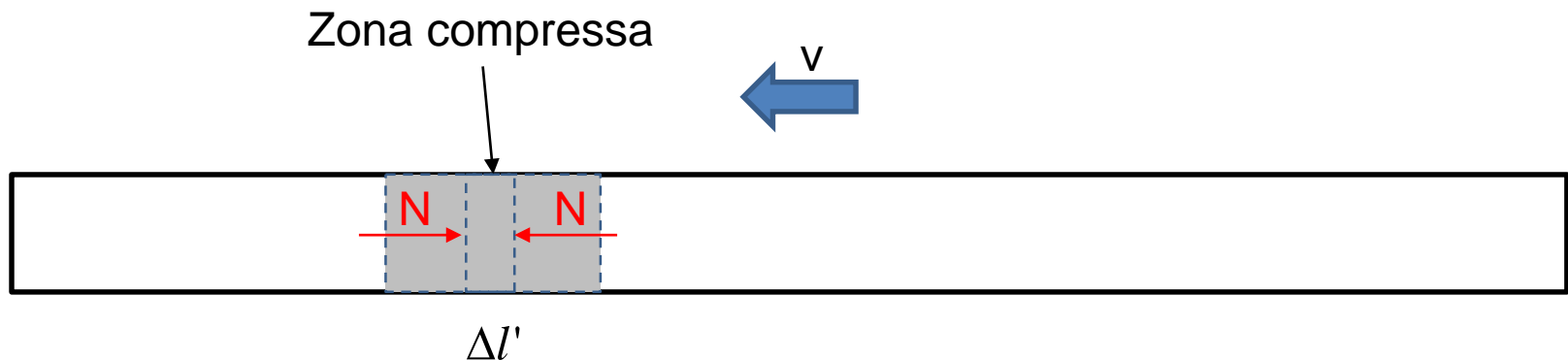
$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

La velocità di propagazione **dipende solo** da:

- Tipo di onda
- Proprietà del mezzo

**Non dipende** da:

- Lunghezza d'onda
- Frequenza





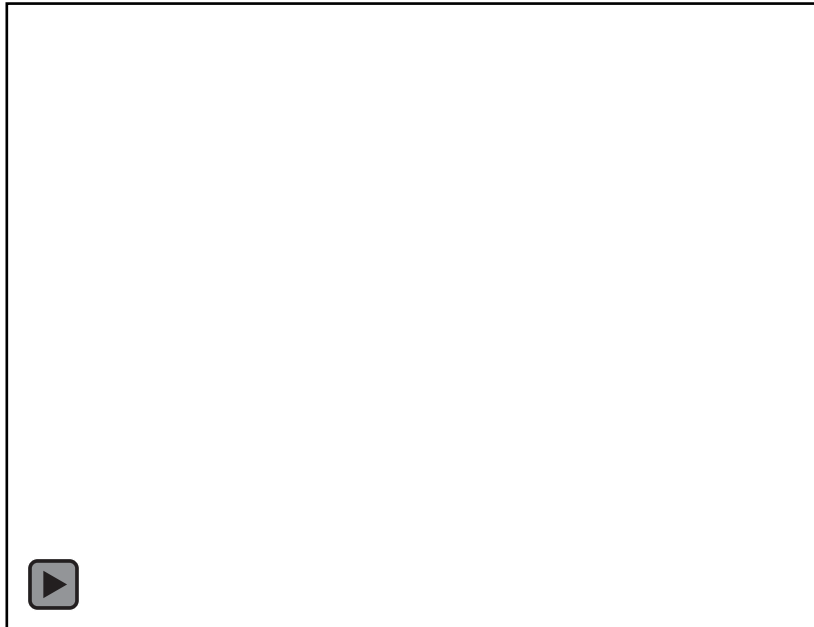
# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Di conseguenza, per un onda di tipo dato (Es.: longitudinale) in un mezzo assegnato, in base alla:

$$\lambda \cdot f = v$$

**Lunghezza d'onda e Frequenza di oscillazione sono inversamente proporzionali**

Onde con lunghezza d'onda diversa che propagano verso destra alla stessa velocità.



# PROPAGAZIONE DI ONDE ELASTICHE

Equazione che rappresenta un'onda sinusoidale di ampiezza  $A$ , lunghezza d'onda « $\lambda$ », viaggiante alla velocità « $v$ » verso le  $x$  positive, in funzione del tempo e dello spazio:

$$y(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - v \cdot t) \right]$$

# ONDE ELASTICHE STAZIONARIE

Oltre alle onde che si propagano in un mezzo continuo, in un sistema meccanico **isolato** possono verificarsi **onde stazionarie**, (vale a dire che non si spostano nello spazio).

Una semplice relazione matematica in grado di rappresentare **un'onda stazionaria** è data da:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t) = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \sin(\omega t)$$

Secondo tale relazione, i diversi punti del corpo elastico oscillano in fase tra loro con pulsazione « $\omega$ » e con ampiezza costante nel tempo e variabile solo con la coordinata « $x$ », data da:

$$A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = A \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right)$$





# ONDE ELASTICHE STAZIONARIE

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t)$$

essendo:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin(\omega t) = \frac{A}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \omega t\right) \right]$$

dato che:  $\omega \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = v$

si ottiene: 
$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} (x + vt)\right) \right]$$

La relazione trovata mostra che **un'onda stazionaria** può essere vista come la **sovrapposizione di due onde di lunghezza d'onda «λ»**, che si propagano a velocità «v» nella direzione delle x positive ed in quella delle x negative.

Di conseguenza, la relazione tra lunghezza d'onda, frequenza e velocità di propagazione, derivata per l'onda viaggiante, **vale anche per l'onda stazionaria.**

# ONDE ELASTICHE STAZIONARIE



$$y(x,t) = \frac{A}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right) \right]$$



$$y(x,t) = \frac{A}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right) \right]$$



$$y(x,t) = \frac{A}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right) \right]$$



### Esercizio D1

Data la seguente funzione che descrive un'onda di compressione che si propaga in un metallo:

$$y(x, t) = 0.02m \left[ \sin \left( 2.272m^{-1} \left( 2x - 1.02 \cdot 10^4 \frac{m}{s} t \right) \right) \right]$$

- calcolare la frequenza, la lunghezza d'onda e la velocità di propagazione
- cercare di determinare la natura del metallo tra acciaio e alluminio



Per analogia

$$y(x) := \sin \left[ \frac{2.772}{m} \left( 2x - 10.2 \cdot 10^3 \cdot \frac{m}{s} \cdot t \right) \right]$$

$$y(x) := A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x - v \cdot t) \right]$$

$$v := \frac{10.2 \cdot 10^3}{2} \cdot \frac{m}{s} = 5.1 \times 10^3 \frac{m}{s}$$

$$\lambda := \frac{2\pi}{2 \cdot 2.772 \cdot \frac{1}{m}} = 1.133 \text{ m}$$

$$f := \frac{v}{\lambda} = 4.5 \times 10^3 \frac{1}{s}$$

Velocità onde nell'acciaio

$$E_0 := 2.1 \cdot 10^{11} \cdot \text{Pa}$$

$$\rho_0 := 7850 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$v_0 := \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} = 5.172 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Velocità onde nell'alluminio

$$E_1 := 7 \cdot 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$\rho_1 := 2617 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$v_1 := \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} = 5.172 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Non si può dire



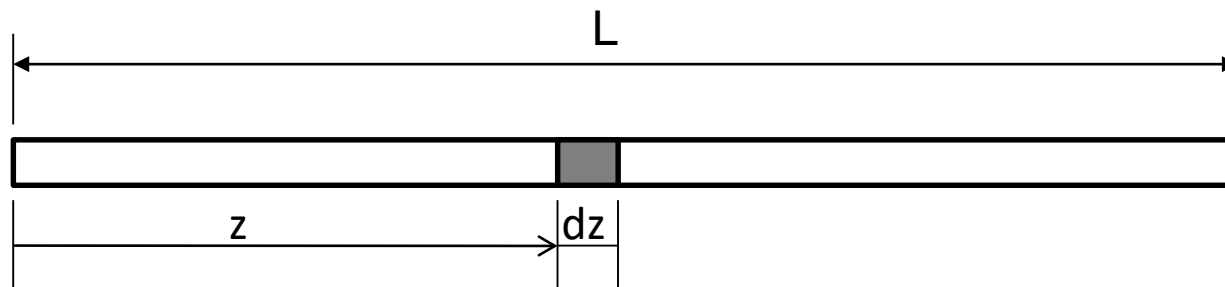
# VIBRAZIONI DI SISTEMI CONTINUI

- L'analisi delle vibrazioni di sistemi continui è molto complessa e sono disponibili soluzioni in forma chiusa (analitiche) solo per i casi più semplici
- Casi che saranno trattati
  - Trave
    - Vibrazioni estensionali (soluzione completa)
    - Vibrazioni flessionali (caratteristiche della soluzione)
  - Piastra circolare
    - Vibrazioni flessionali (caratteristiche della soluzione)

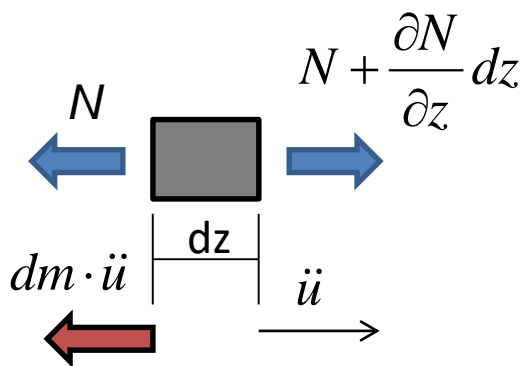




## SISTEMI CONTINUI TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



Equazione di equilibrio:



$$\rho A dz \cdot \ddot{u} = N + \frac{\partial N}{\partial z} dz - N$$

$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$N = EA \varepsilon = EA \frac{\partial u}{\partial z}$$

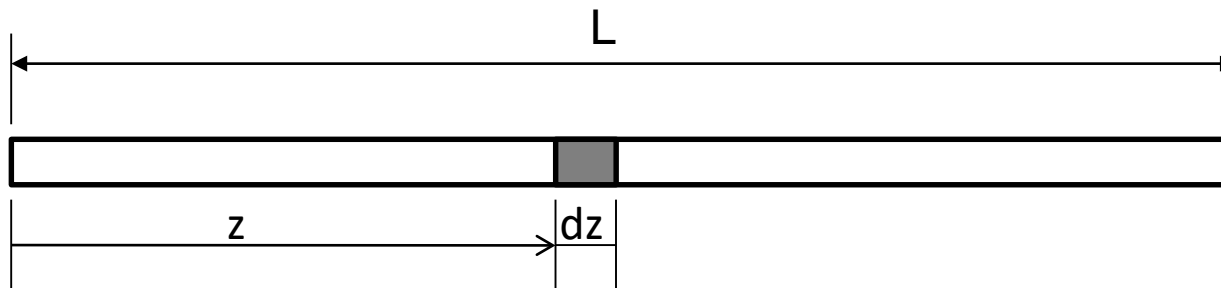
$$\frac{\partial N}{\partial z} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho A \ddot{u} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

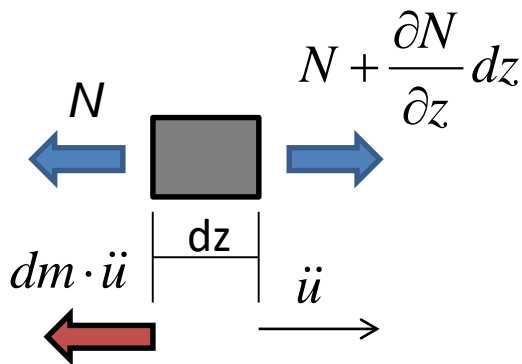


$$\rho A \ddot{u} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

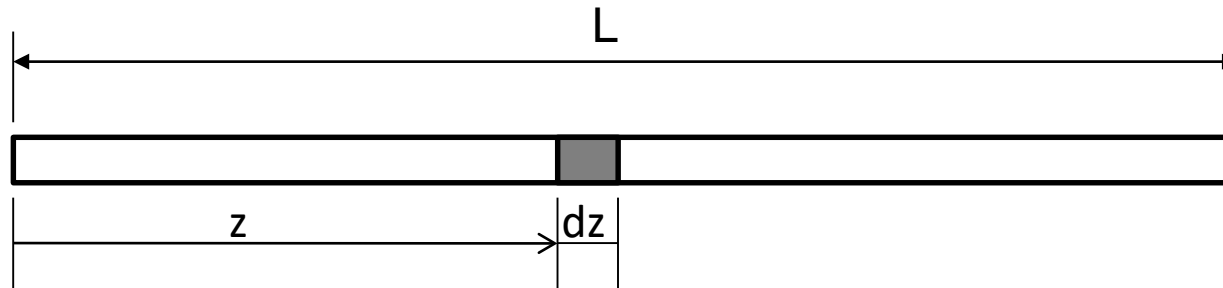
$$\ddot{u} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$\ddot{u} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$u(z, t) = Z(z)T(t)$$

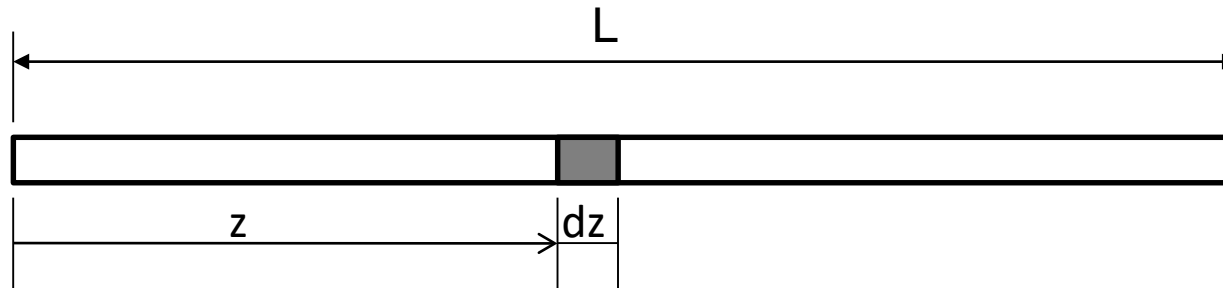
$$\ddot{u}(z, t) = Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = T(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

$$Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = v^2 T(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = v^2 T(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$



$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

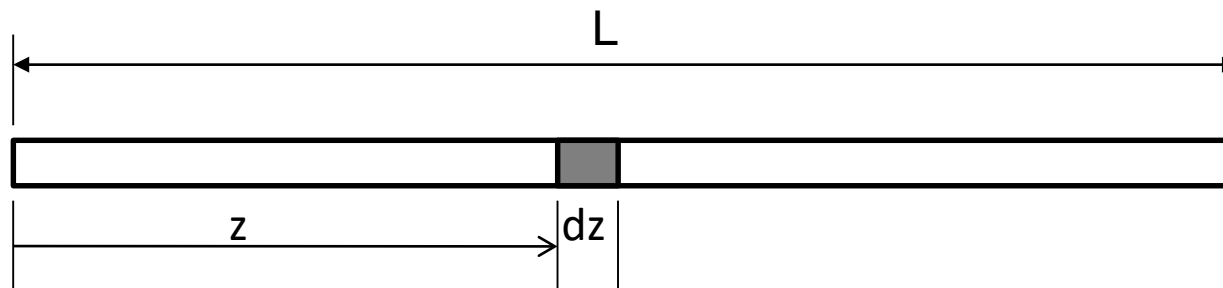


$$\frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \frac{Z''}{Z}$$



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$\frac{\ddot{T}}{T} = a = v^2 \frac{Z''}{Z}$$



$$\ddot{T} - aT = 0$$

$$v^2 Z'' - aZ = 0$$

$$a = -\omega^2$$



$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

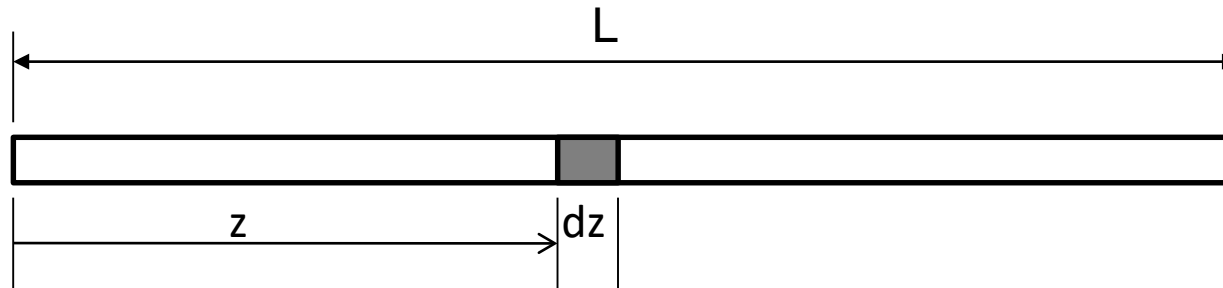


$$Z'' + \frac{\omega^2}{v^2} Z = 0$$

$$Z(z) = C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} z\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} z\right)$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



La soluzione generale ottenuta è quindi:

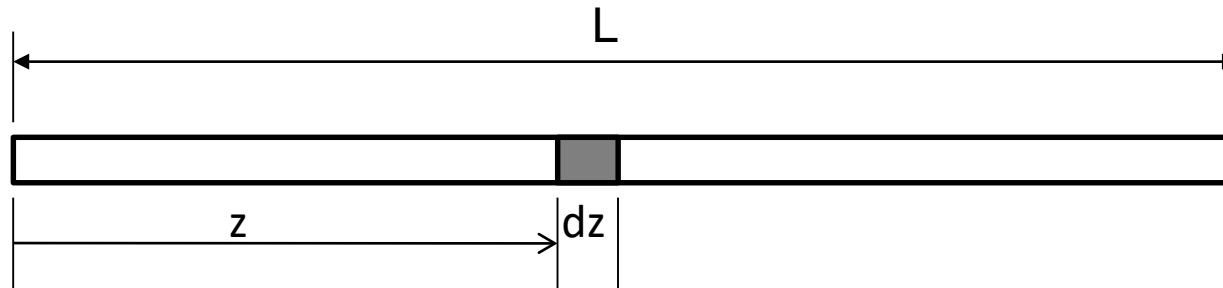
$$u(z, t) = Z(z)T(t) = \left[ C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} z\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} z\right) \right] \left[ A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \right]$$

La  $Z(z)$  definisce la **forma spaziale (forma normale)** della soluzione. Le sue costanti  $C$  e  $D$  devono essere determinate tramite apposite **condizioni al contorno**.

La  $T(t)$  definisce l'**andamento temporale** della soluzione. Le sue costanti  $A$  e  $B$  devono essere determinate tramite apposite **condizioni iniziali**.

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



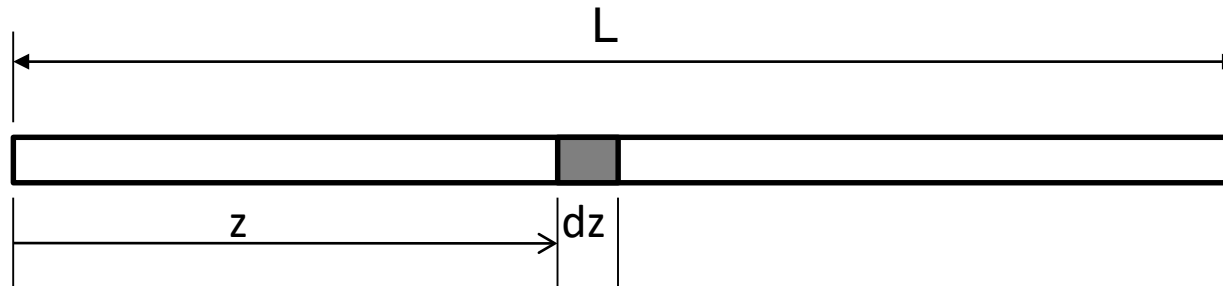
La soluzione generale ottenuta è quindi:

$$u(z, t) = Z(z)T(t) = \left[ C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} z\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} z\right) \right] \left[ A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \right]$$

OSS: sia l'andamento spaziale che quello temporale sono di tipo armonico. **La pulsazione dell'andamento temporale e di quello spaziale sono legate da una relazione di proporzionalità** tramite la costante « $v$ », per cui all'aumentare dell'una aumenta anche l'altra.

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



La soluzione generale ottenuta è quindi:

$$u(z, t) = Z(z)T(t) = \left[ C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} z\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} z\right) \right] \left[ A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \right]$$

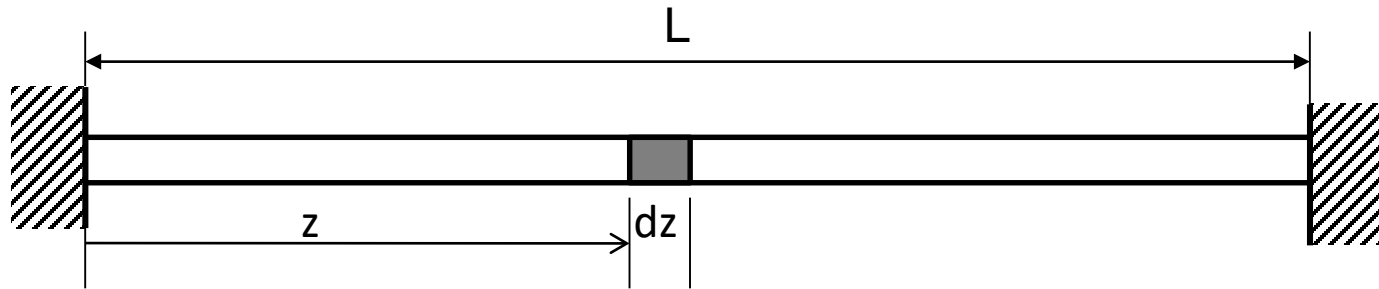
Nel seguito verranno determinati i valori di « $\omega$ » per i quali è possibile un moto del sistema **isolato** (senza scambi di energia con l'esterno), attraverso l'imposizione di diverse condizioni di vincolo:

- estremi bloccati
- estremi liberi
- un estremo bloccato ed uno libero



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



#### Trave bloccata agli estremi

$$\text{C.C.} \quad u(0, t) = Z(0)T(t) = 0 \quad u(L, t) = Z(L)T(t) = 0$$

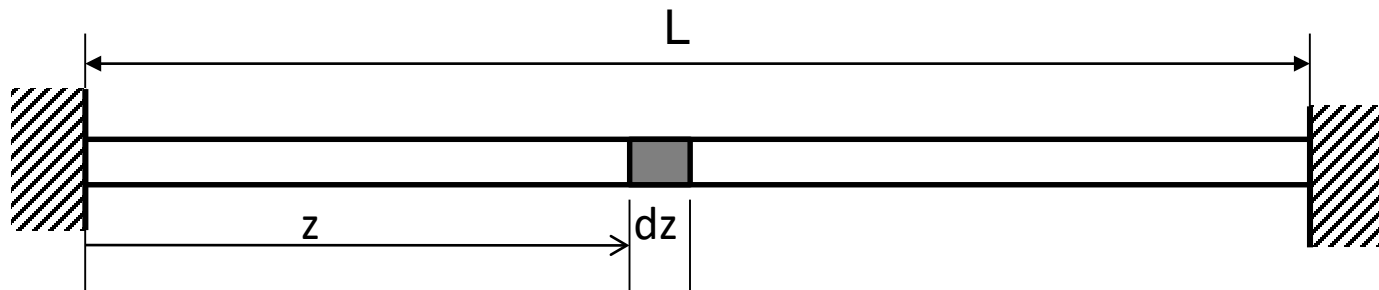
$$Z(0) = C \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} 0\right) + D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} 0\right) = C = 0$$

$$Z(L) = D \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} L\right) = 0$$

$$\frac{\omega}{v} L = k\pi \rightarrow \omega_k = \frac{k\pi v}{L}$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



#### Trave bloccata agli estremi

Il sistema può oscillare liberamente (senza interventi esterni) alle frequenze discrete (frequenze proprie):

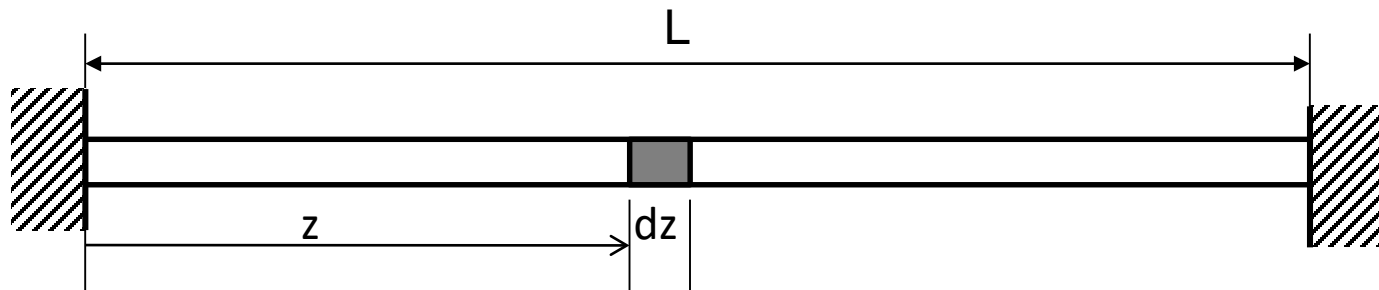
$$\omega_k = \frac{k\pi v}{L} \quad k \in \mathbb{N}$$

A ciascuna frequenza propria è associata una specifica deformata spaziale (forma normale), secondo la quale avviene l'oscillazione del sistema:

$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



#### Trave bloccata agli estremi

La funzione completa che rappresenta il sistema oscillante alla frequenza propria « $\omega_k$ » è quindi data da:

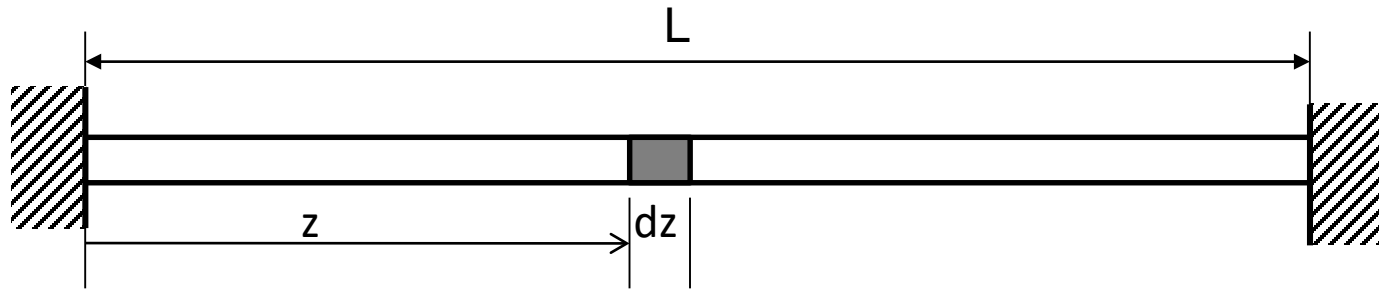
$$u_k(z, t) = \left[ A_k \cdot \cos(\omega_k t) + B_k \cdot \sin(\omega_k t) \right] D_k \cdot \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) = \left[ a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t) \right] \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

dove le costanti  $a_k$  e  $b_k$  devono essere determinate a partire da apposite condizioni iniziali, in assenza delle quali la effettiva ampiezza di oscillazione del sistema non può essere determinata.



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

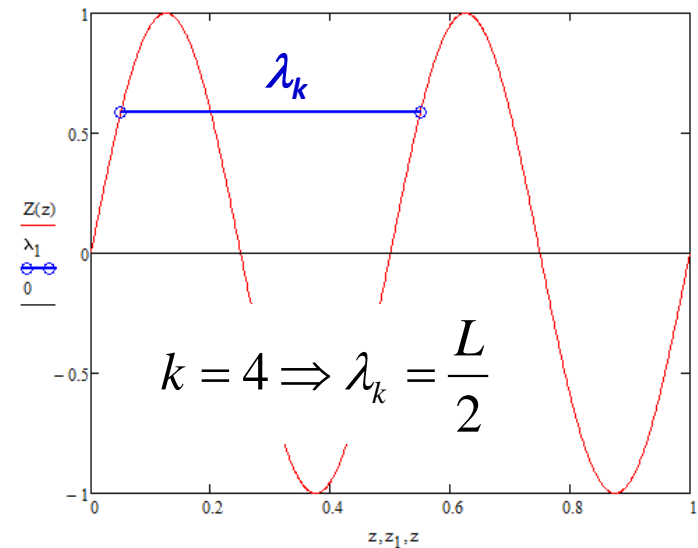


#### Trave bloccata agli estremi

$$u_k(z, t) = \left[ A_k \cdot \cos(\omega_k t) + B_k \cdot \sin(\omega_k t) \right] D_k \cdot \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right) = \left[ a_k \cdot \cos(\omega_k t) + b_k \cdot \sin(\omega_k t) \right] \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

La relazione rappresenta un'onda stazionaria di pulsazione  $\omega_k$  e di lunghezza d'onda spaziale data da :

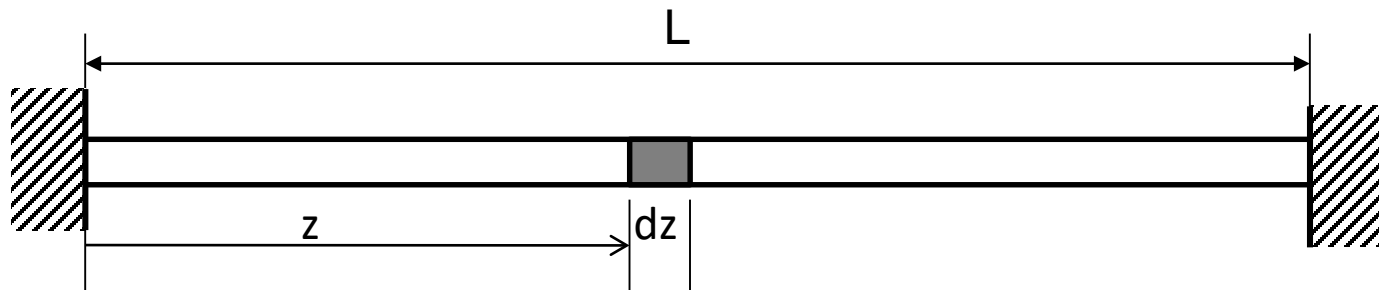
$$\left. \begin{aligned} \lambda_k f_k = v &\Rightarrow \lambda_k = v \frac{2\pi}{\omega_k} \\ \omega_k = \frac{k\pi v}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_k = v \frac{2\pi L}{k\pi v} = \frac{2L}{k}$$





## SISTEMI CONTINUI

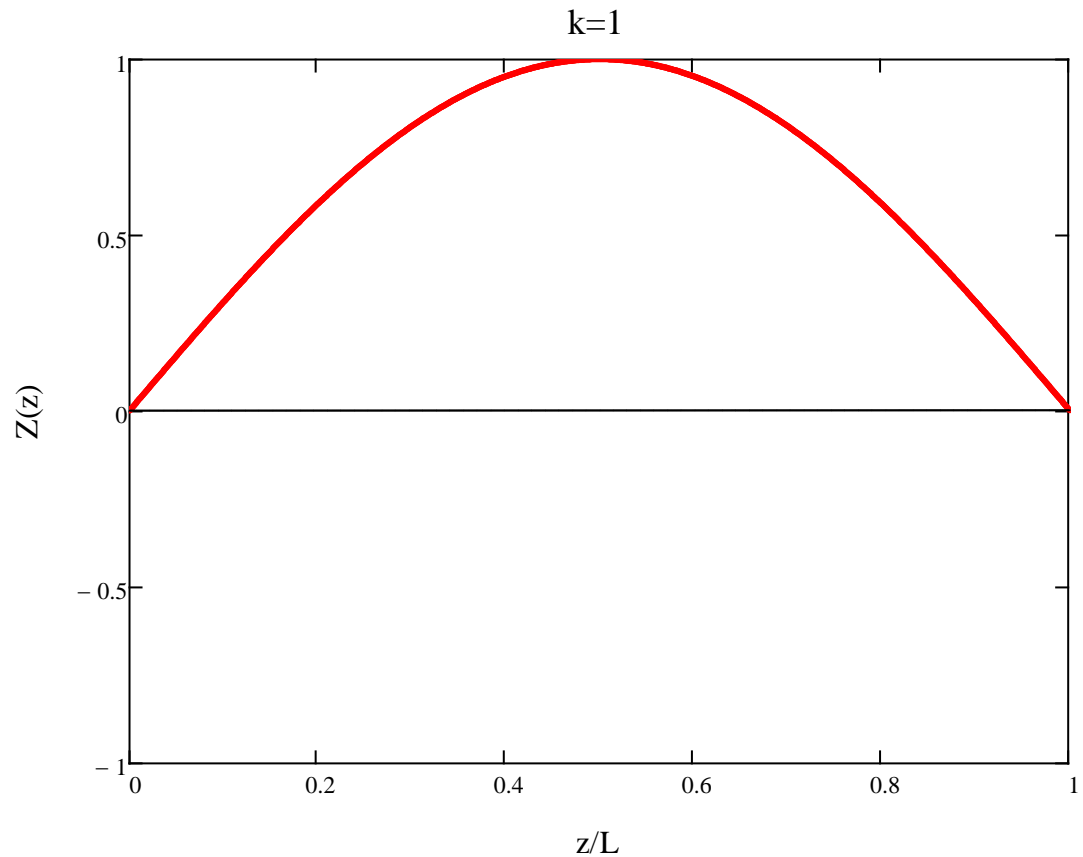
### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



**Trave bloccata agli estremi**

$$\lambda_k = \frac{2L}{k}$$

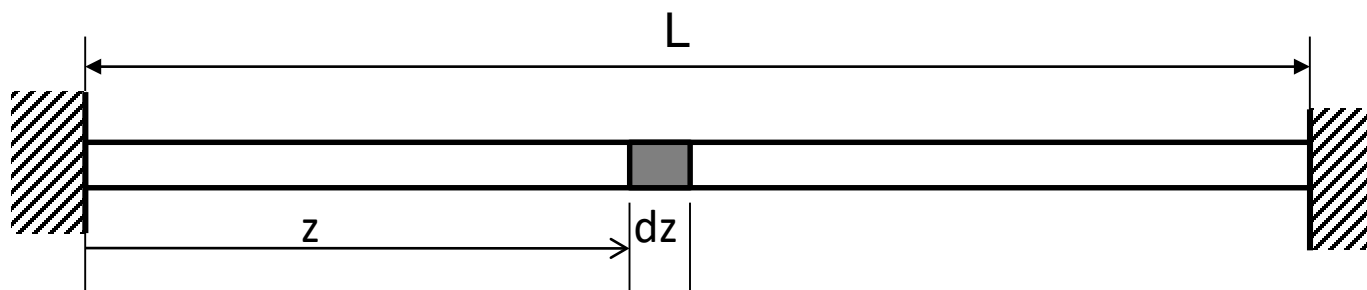
$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$





## SISTEMI CONTINUI

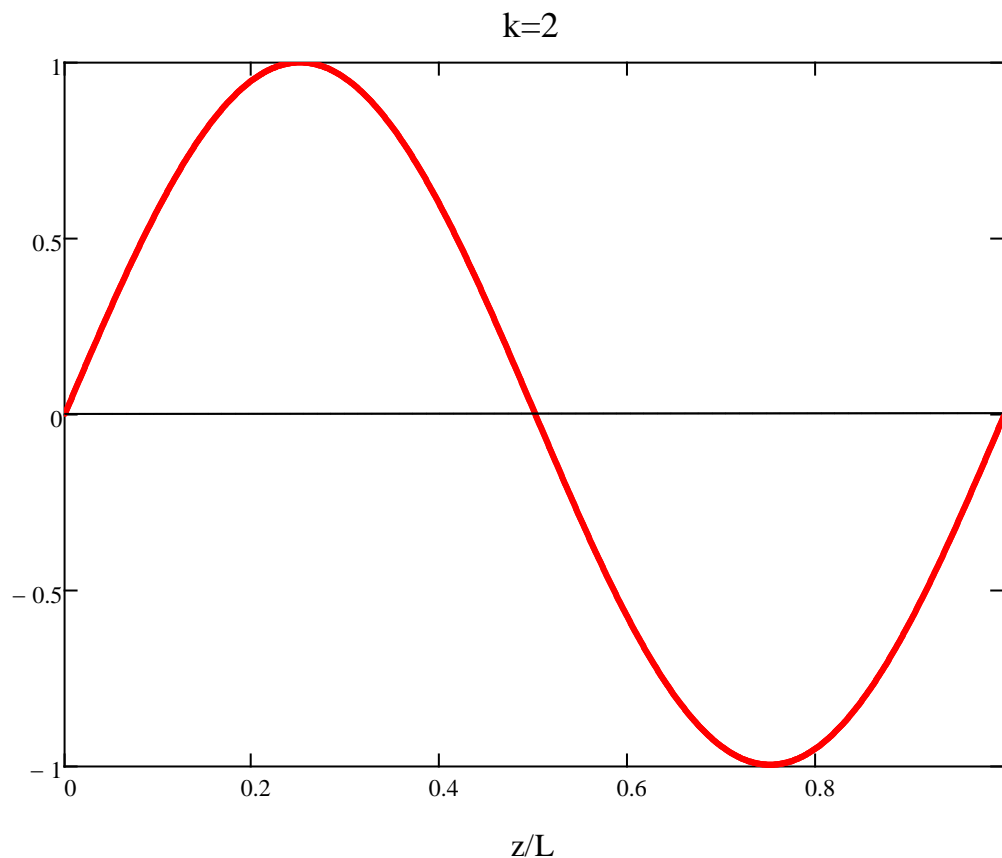
### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



**Trave bloccata agli estremi**

$$\lambda_k = \frac{2L}{k}$$

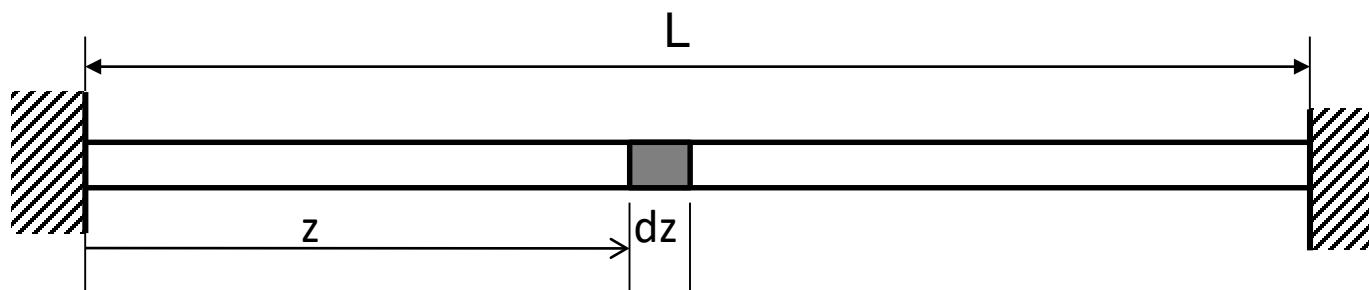
$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$





## SISTEMI CONTINUI

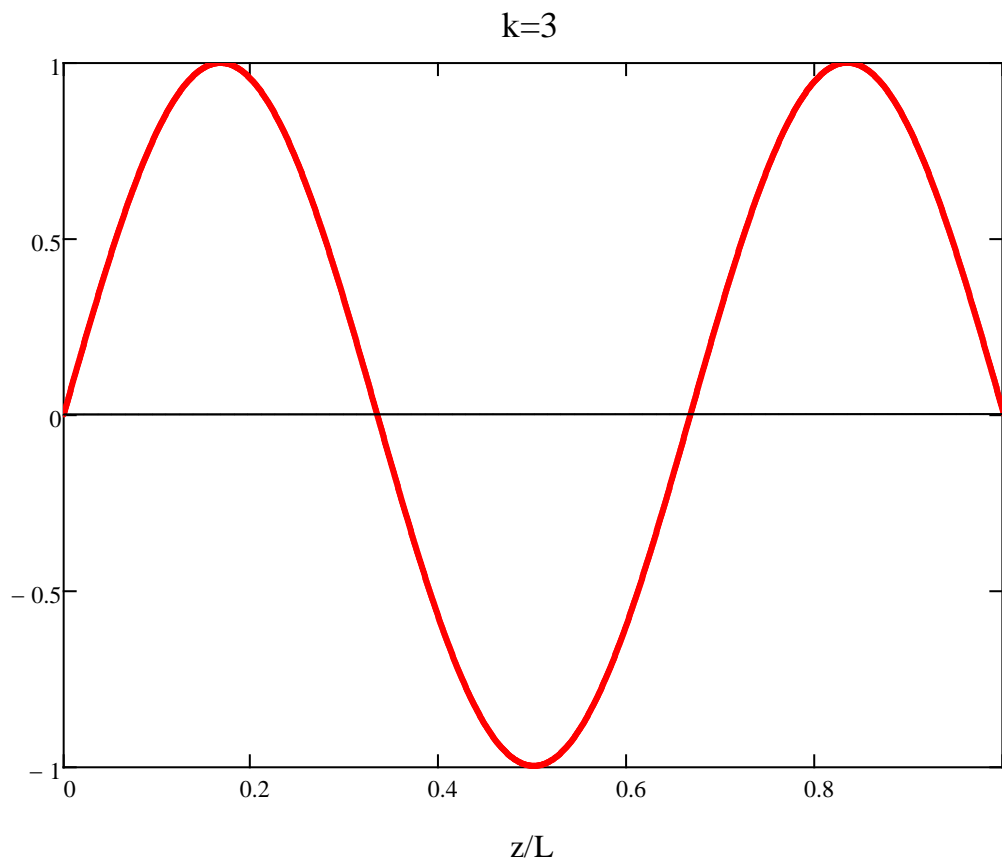
### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



**Trave bloccata agli estremi**

$$\lambda_k = \frac{2L}{k}$$

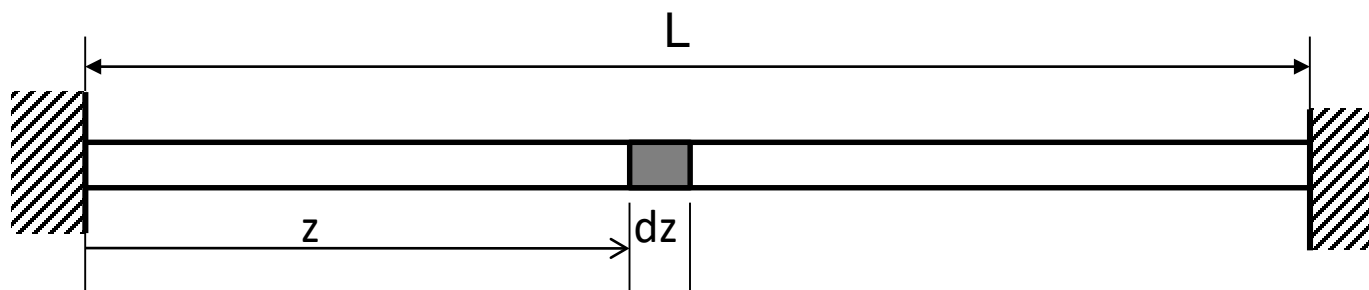
$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$





## SISTEMI CONTINUI

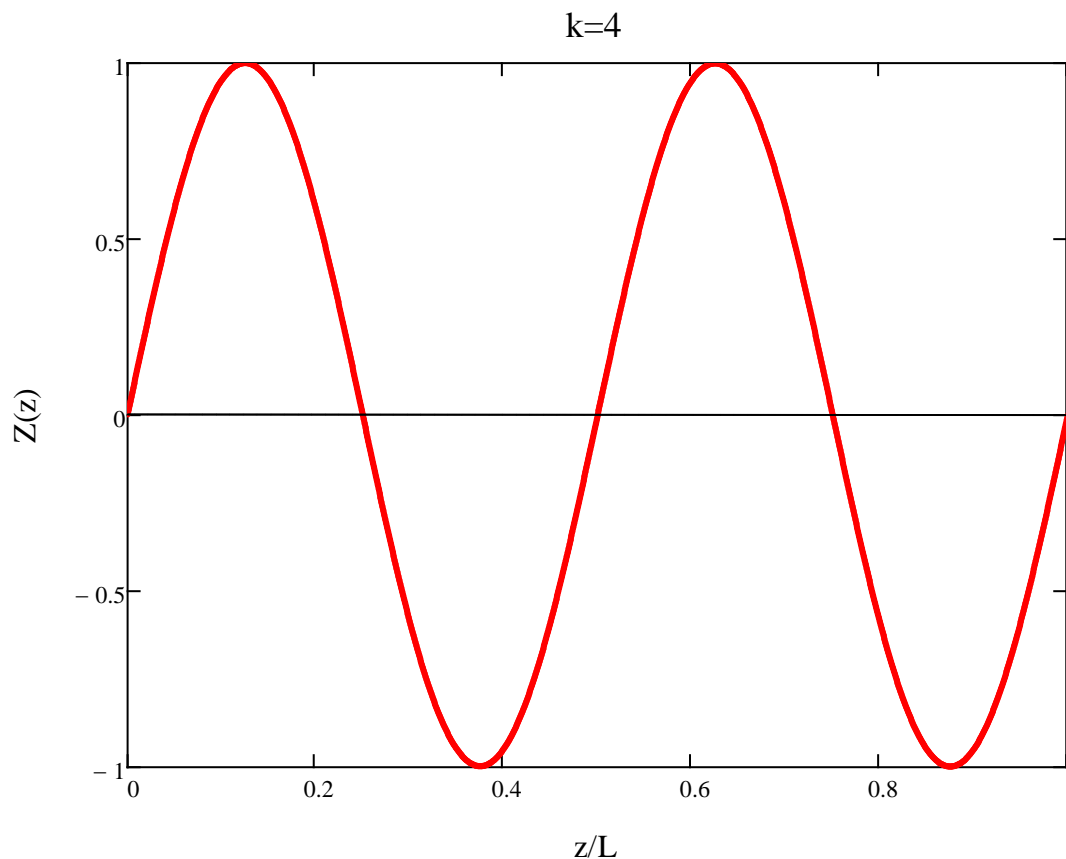
### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



**Trave bloccata agli estremi**

$$\lambda_k = \frac{2L}{k}$$

$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$

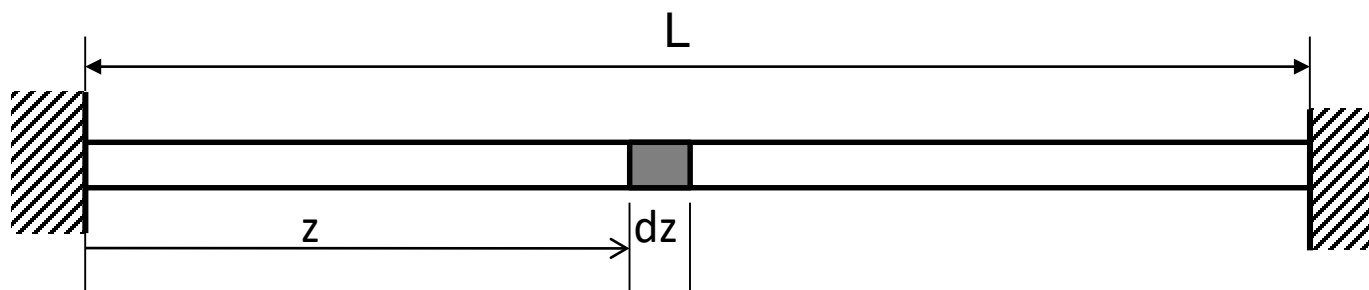






## SISTEMI CONTINUI

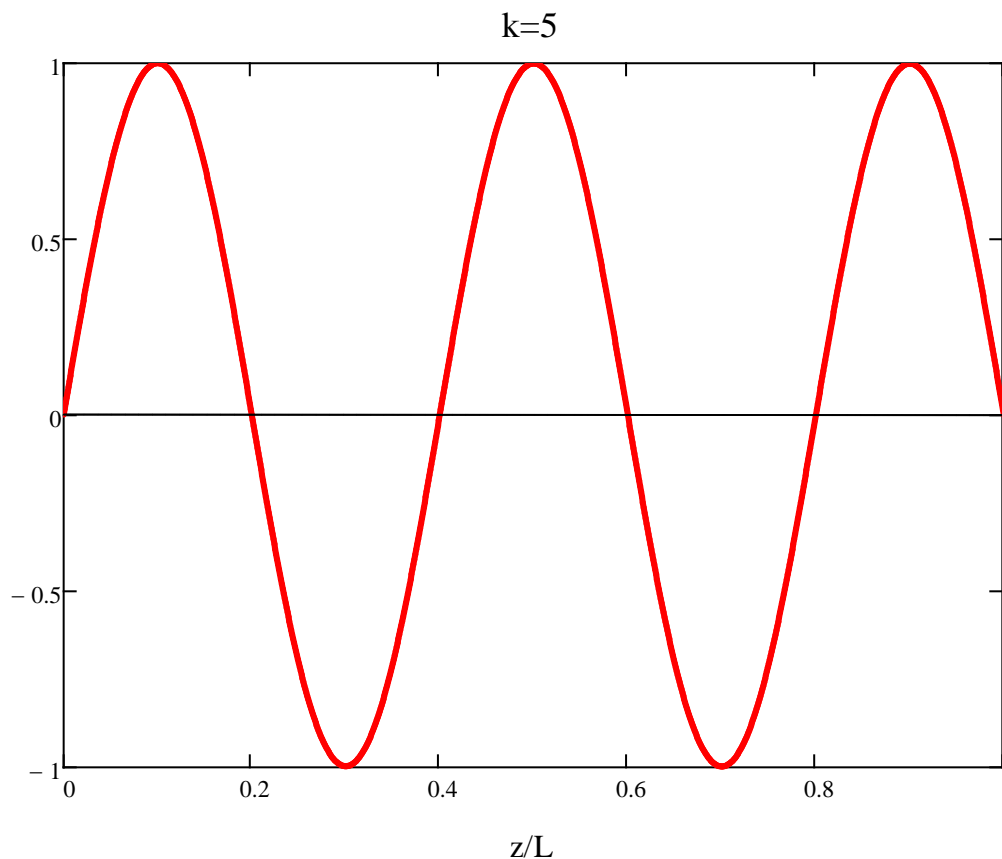
### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



**Trave bloccata agli estremi**

$$\lambda_k = \frac{2L}{k}$$

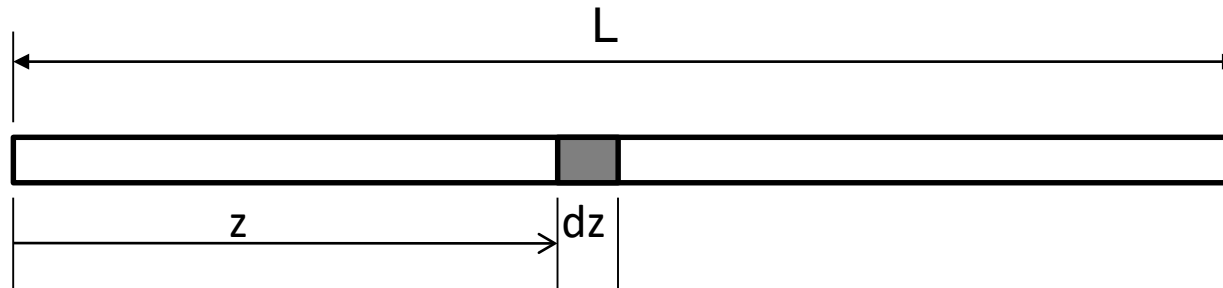
$$Z_k(z) = D_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} z\right)$$





## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

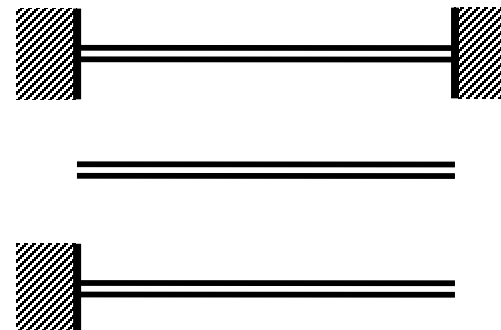


#### Altre condizioni di vincolo

Le frequenze proprie, per altre modalità di vincolo, sono date dalla seguente relazione generale, nella quale il coefficiente  $K(k)$  dipende da queste ultime:

$$\omega_k = K(k) \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

	$K(k)$
Incastrato-incastrato	$k$
Libero-libero	$k$
Incastrato-libero	$k+1/2$





## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

#### Osservazioni riassuntive

Oss.1: La «forma normale» può presentare uno o più punti fissi (nodi), nei quali lo spostamento si mantiene identicamente nullo

Oss. 2: **la «forma normale» è nota a meno di una costante moltiplicativa**, che potrà essere determinata solo assegnando le condizioni iniziali; essa definisce la «forma» spaziale della deformata, ma non i valori effettivi degli spostamenti.



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

#### Osservazioni riassuntive

Oss.3: attraverso i punti fissi (nodi) non può avvenire trasferimento di energia durante l'oscillazione. Di conseguenza **il contenuto energetico di una trave oscillante secondo uno dei suoi modi propri si mantiene costante nel tempo**, con uno scambio continuo tra la forma cinetica e quella potenziale.

Oss. 4: **l'oscillazione libera della trave può avvenire solo tramite una combinazione dei modi propri**, dato che solo in questo modo il suo contenuto energetico può mantenersi costante. Essa sarà esprimibile come:

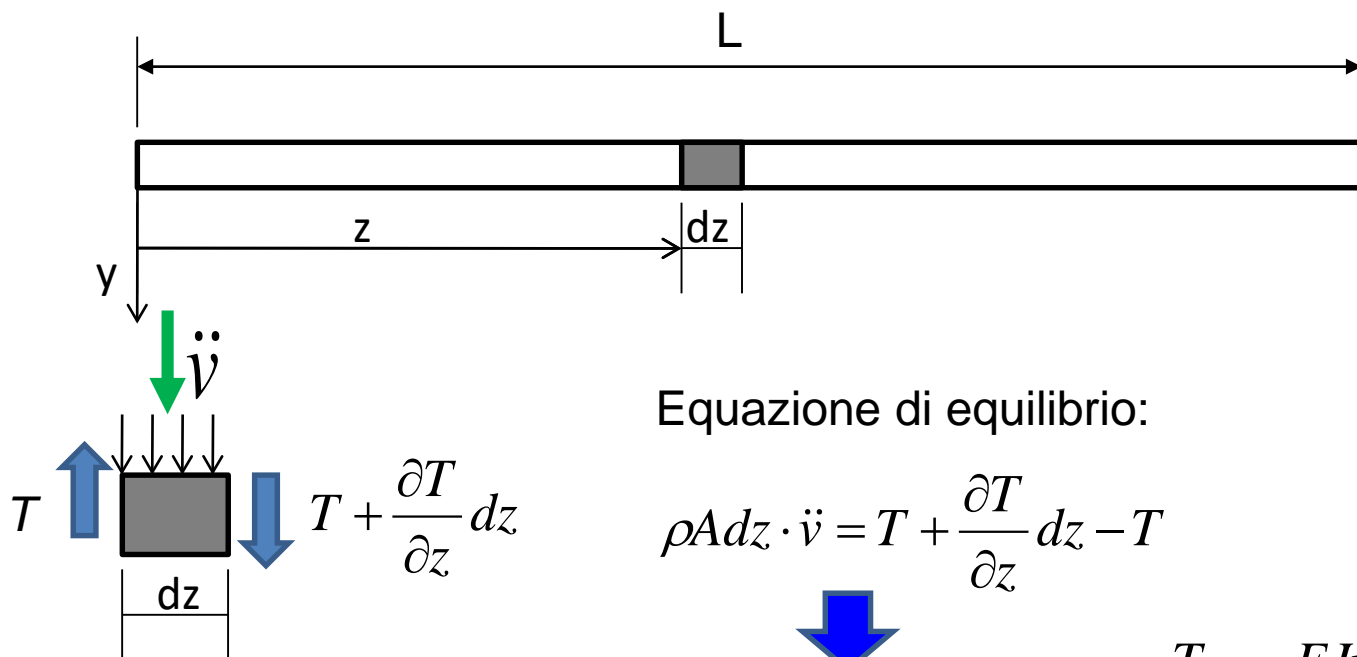
$$u(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] \sin\left(\frac{\omega_k}{v} z\right)$$

Oss. 5: all'aumentare della pulsazione propria aumenta anche **il numero di oscillazioni della deformata spaziale** ad essa associata.



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Equazione di equilibrio:

$$\rho A dz \cdot \ddot{v} = T + \frac{\partial T}{\partial z} dz - T$$

$$\rho A \ddot{v} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\rho A \ddot{v} = -EJ v^{IV}$$

$$T = -EJ v^{III}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -EJ v^{IV}$$

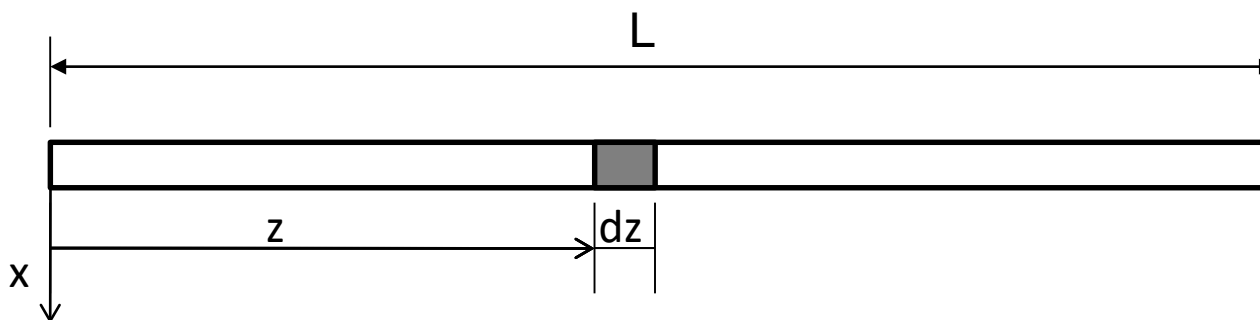
$$\ddot{v} = -k^2 v^{IV}$$

$$k = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )

$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

*Espressione valida per tutte le condizioni di vincolo. I valori di  $\chi_n L$  cambiano, invece, con queste ultime.*

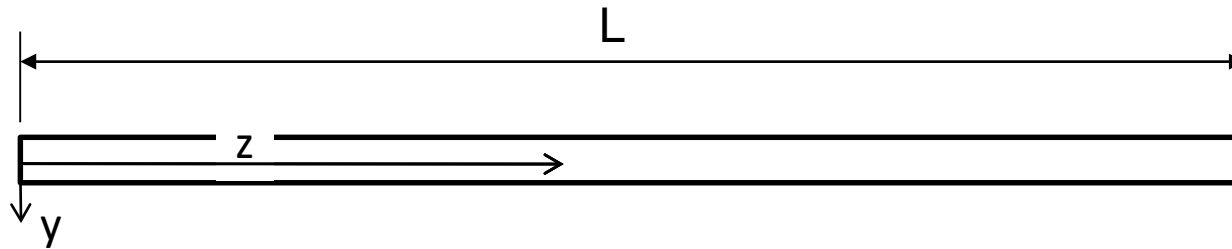
<b>n</b>	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	4.730	7.853	10.996	14.137	$(n+1/2)\pi$

Valore asintotico  
(valido dopo i  
primi 3-4 termini)



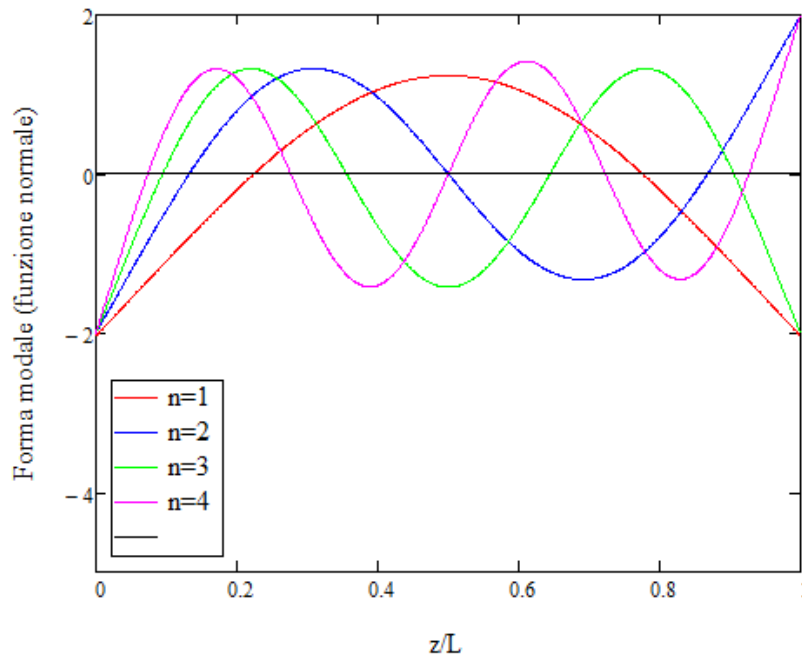
## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



**Trave libera agli estremi ( $z=0, L$ )**

$$V_n(z) = C_n \left[ \sin(\chi_n z) + \sinh(\chi_n z) + \frac{\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)}{\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)} (\cos(\chi_n z) + \cosh(\chi_n z)) \right]$$

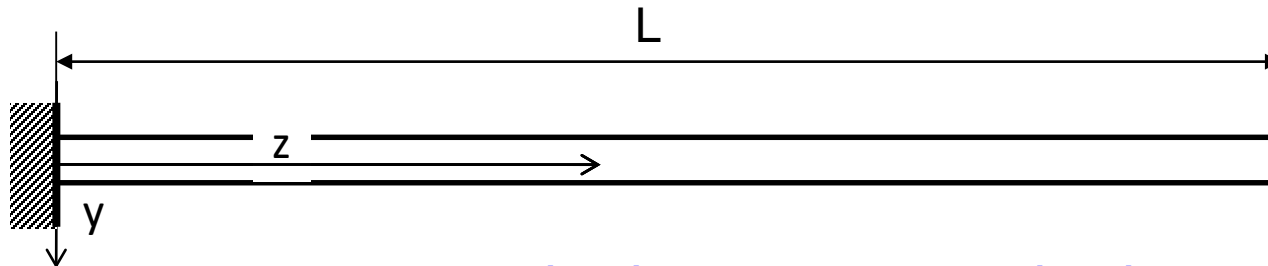


Oss.: le forme normali sono compatibili con una distribuzione autoequilibrata di forze di inerzia, necessaria dato che il sistema è libero nello spazio.



## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave incastrata ad un estremo ( $z=0$ ) e libera all'altro ( $z=L$ )

$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

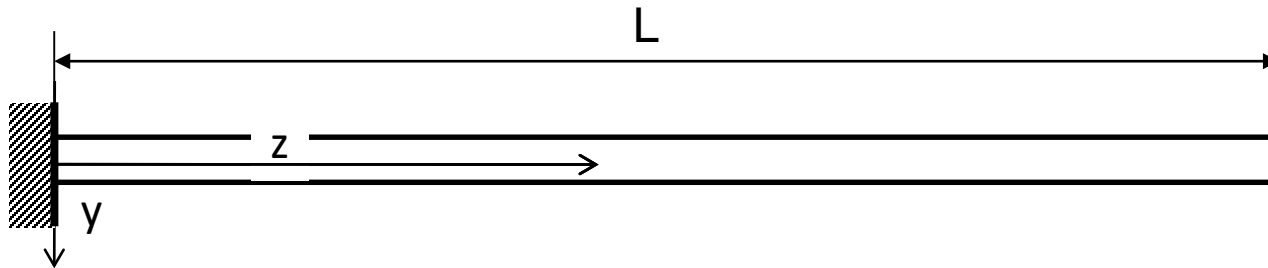
<b>n</b>	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	1.875	4.694	7.855	10.996	$(n-1/2)\pi$





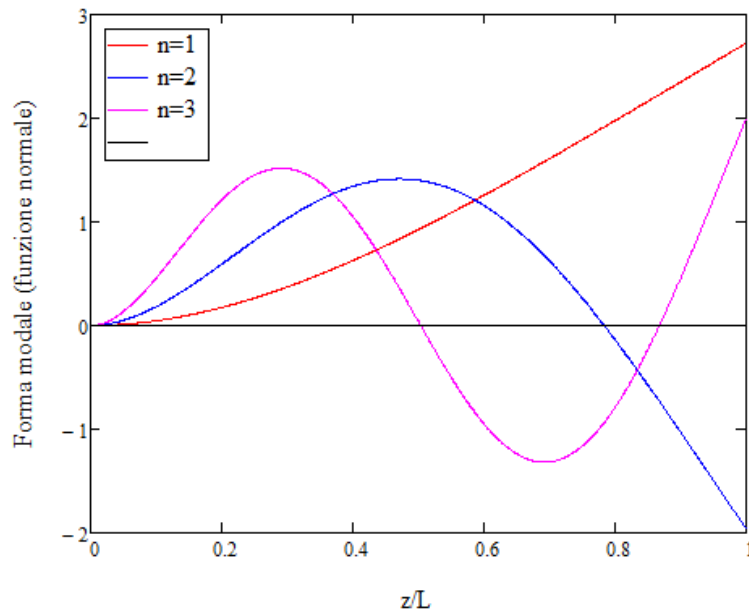
## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



**Trave incastrata ad un estremo ( $z=0$ ) e libera all'altro ( $z=L$ )**

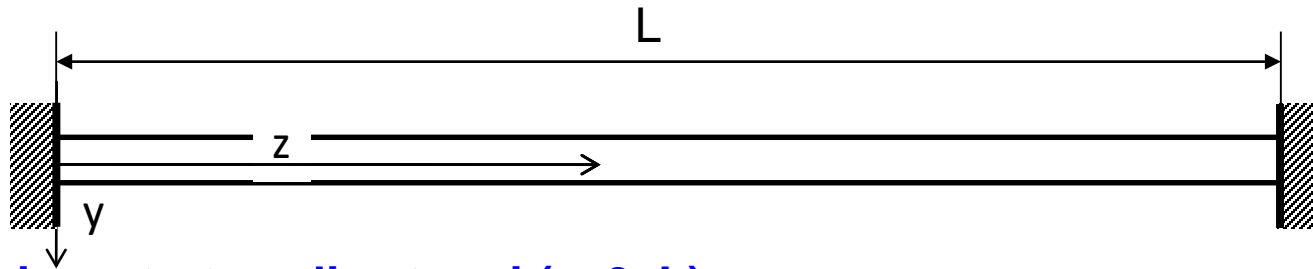
$$V_n(z) = C_n \left[ \sin(\chi_n z) - \sinh(\chi_n z) - \frac{\sinh(\chi_n L) + \sin(\chi_n L)}{\cos(\chi_n L) + \cosh(\chi_n L)} (\cos(\chi_n z) - \cosh(\chi_n z)) \right]$$





## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave incastrata agli estremi ( $z=0, L$ )

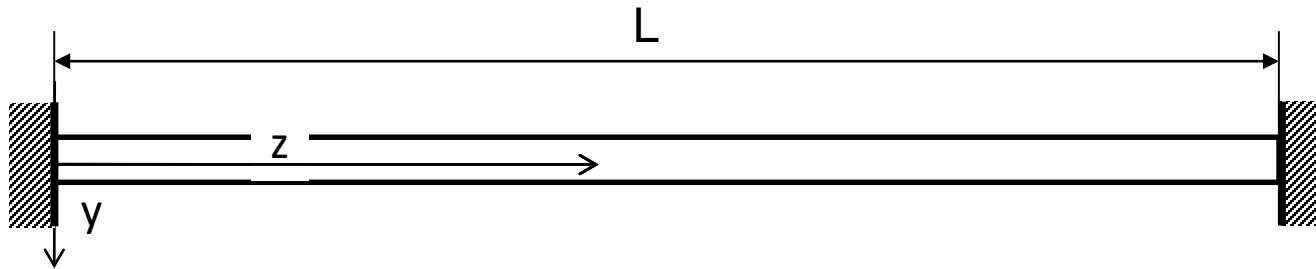
$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

n	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	4.730	7.853	10.996	14.137	$(n+1/2)\pi$



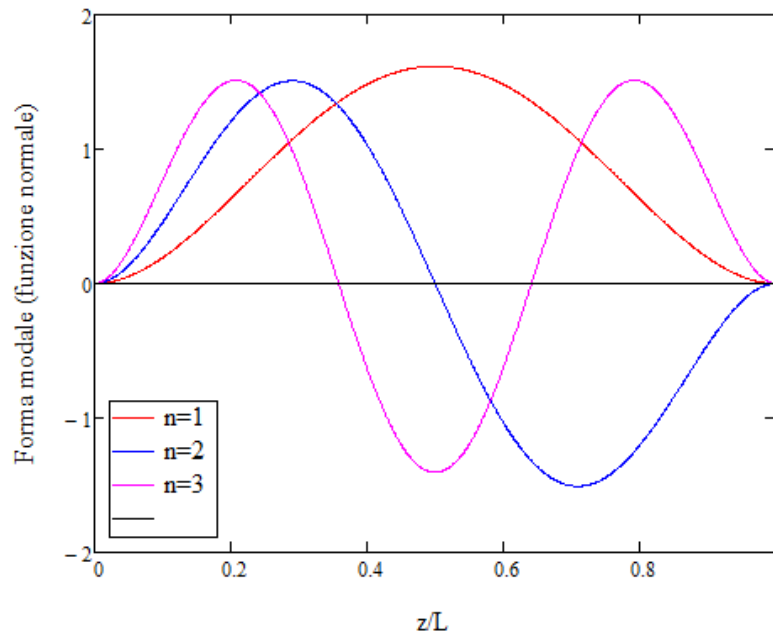
## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



**Trave incastrata agli estremi ( $z=0, L$ )**

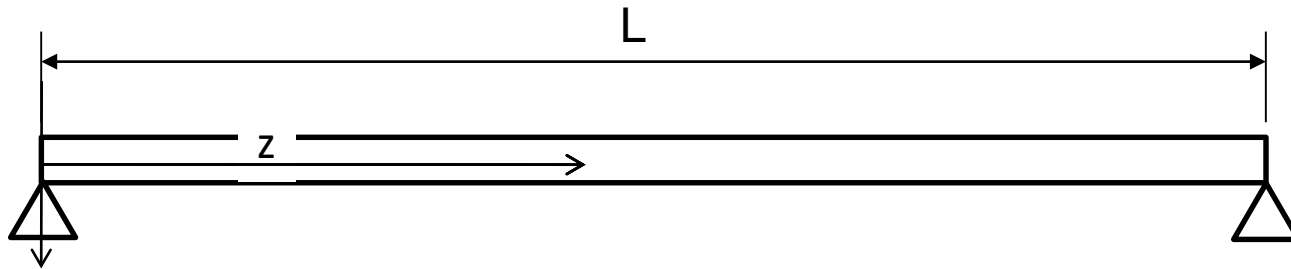
$$V_n(z) = C_n \left[ \sinh(\chi_n z) - \sin(\chi_n z) + \frac{\sinh(\chi_n L) - \sin(\chi_n L)}{\cos(\chi_n L) - \cosh(\chi_n L)} (\cosh(\chi_n z) - \cos(\chi_n z)) \right]$$





## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



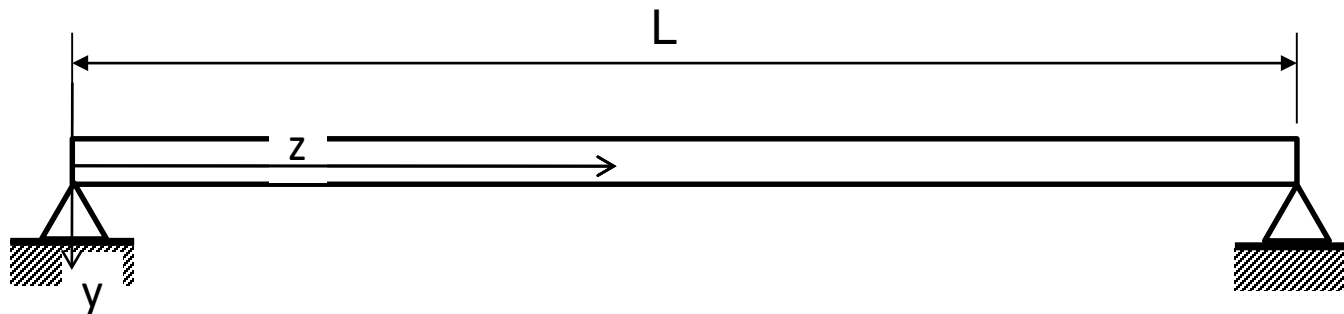
Trave appoggiata agli estremi ( $z=0, L$ )

$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

<b>n</b>	1	2	3	4	>4
$\chi_n L$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$n\pi$

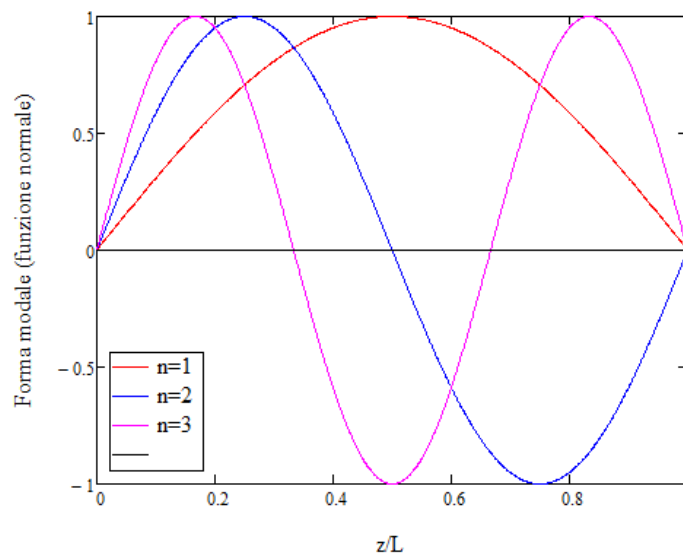
## SISTEMI CONTINUI

### TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave appoggiata agli estremi ( $z=0, L$ )

$$V_n(z) = C_n [\sin(\chi_n z)]$$

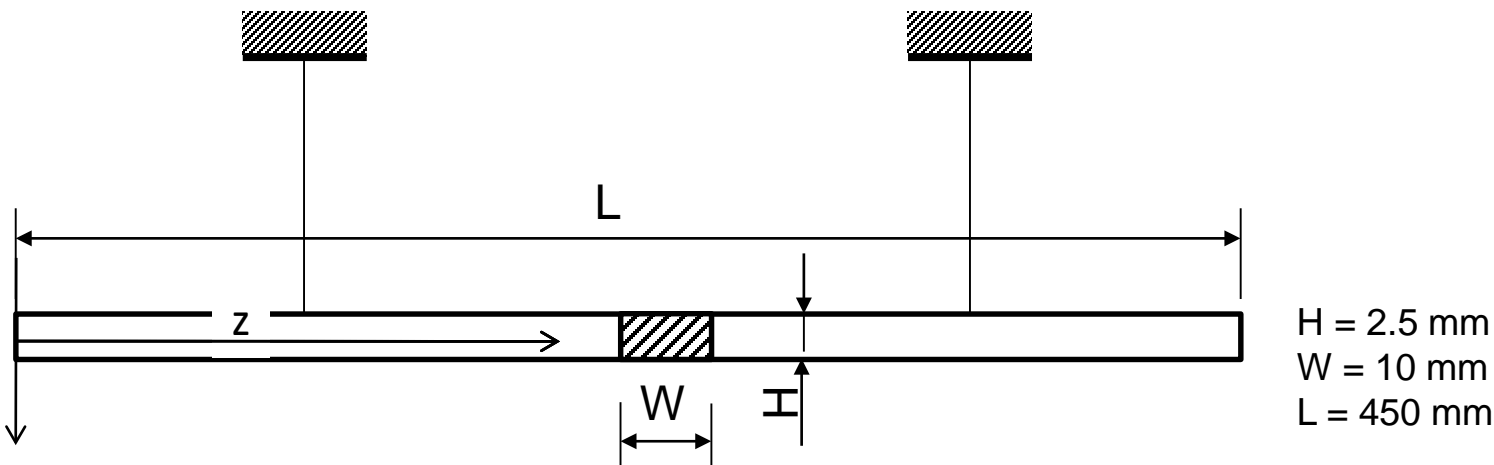


### Esercizio D2

Un metodo utilizzato per stimare il modulo elastico di un materiale consiste nel misurare la prima frequenza propria flessionale di una barretta sospesa a dei fili sottili in corrispondenza dei «nodi» della relativa forma modale.

Data la barretta in acciaio mostrata in Figura:

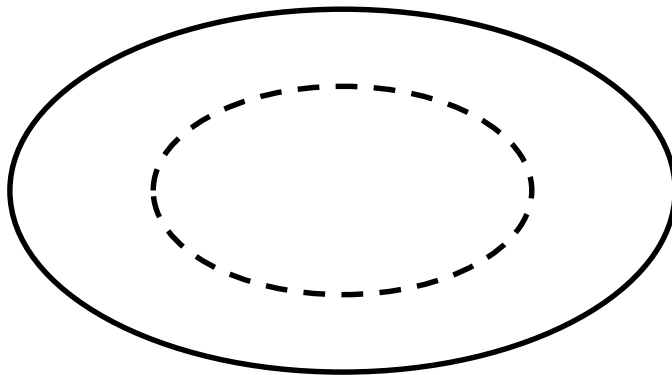
- perché la barretta è sostenuta nel modo descritto e quale modello di calcolo analitico si ritiene applicabile?
- stimare il modulo di Young del materiale sapendo che la prima frequenza propria flessionale è di 65 Hertz
- stimare le posizioni « $z$ » lungo la barretta in cui devono essere posizionati i punti di attacco dei fili



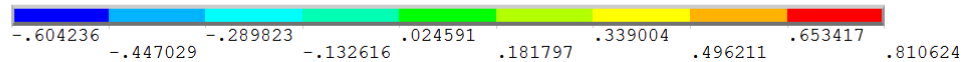
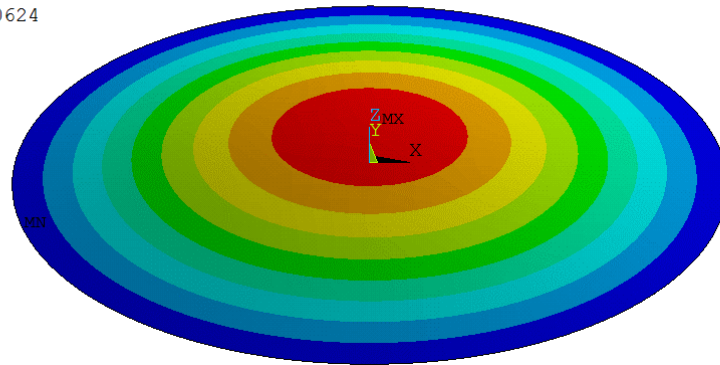
## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare possono prevedere:

- forme modali simmetriche, che presentano circonferenze nodali, i cui punti non si spostano durante la vibrazione



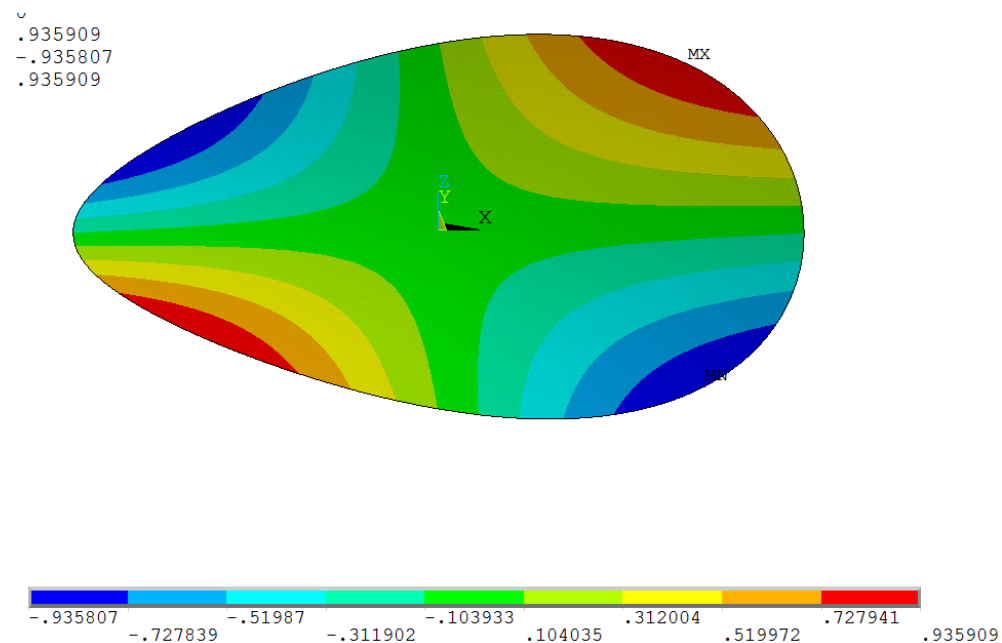
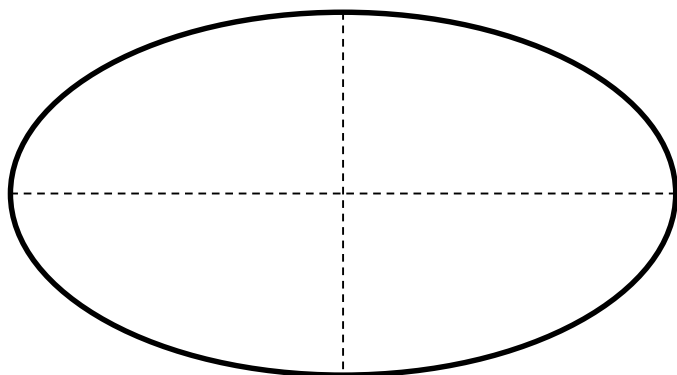
DMX = .810624  
SMN = -.604236  
SMX = .810624



## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare possono prevedere:

- **forme modali simmetriche**, che presentano **circonferenze nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione
- **forme modali anti-simmetriche**, che presentano **diametri nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione

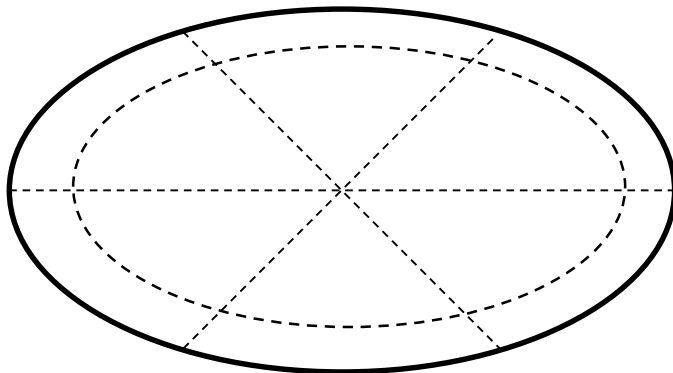




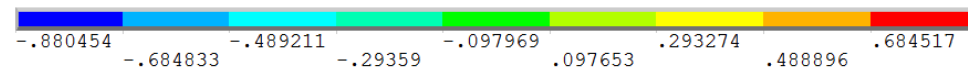
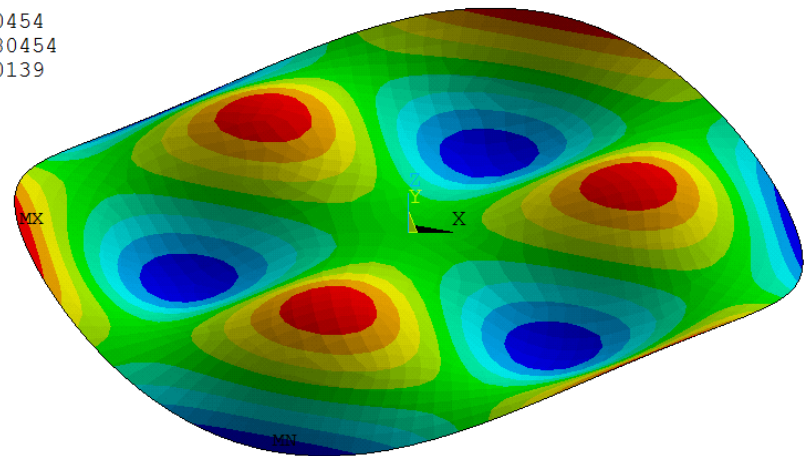
## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare possono prevedere:

- **forme modali simmetriche**, che presentano **circonferenze nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione
- **forme modali anti-simmetriche**, che presentano **diametri nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione
- **forme modali miste**, che presentano sia **circonferenze** che **diametri nodali**, i cui punti non si spostano durante la vibrazione



$v$   
 .880454  
 -.880454  
 .880139





## SISTEMI CONTINUI PIASTRA CIRCOLARE

Le vibrazioni proprie di una piastra circolare di spessore uniforme e raggio R, sono date dalla seguente relazione:

$$\omega_{n,m} = \frac{\alpha_{n,m}}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

n = numero circonferenze nodali

m = numero diametri nodali

Libera al bordo esterno

$\alpha_{nm}$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=0$	0	0	5,251
$n=1$	9,076	20,52	35,24
$n=2$	38,52	59,86	–

Incastrata al bordo esterno

$\alpha_{nm}$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$n=0$	10,21	21,22	34,84
$n=1$	39,78	60,84	84,58
$n=2$	88,90	120,08	153,81

**Esercizio D3 - ANALISI MODALE DI DISCO**

Il disco circolare in acciaio ha un diametro esterno di 380 mm e spessore uniforme pari a 1 mm.

Si calcolino i valori delle frequenze proprie e si disegnano schematicamente con linee tratteggiate le relative linee nodali fornite da un semplice modello di piastra circolare libera o incastrata al bordo esterno.

D: perché non è possibile, per la piastra libera al bordo esterno, calcolare i modi propri per  $n=0$  e  $m=0,1$ ?

m	n	Freq. proprie libera [Hz]	Forme modali libera [Hz]	Freq. proprie inc. [Hz]	Forme modali inc. [Hz]
0	0				
1					
2					
0	1				
1					



# MODELLI DISCRETIZZATI

La soluzione di problemi strutturali nel continuo in campo dinamico è possibile solo in un numero molto ristretto di casi, quali quelli mostrati in precedenza.

Negli altri casi è comunque possibile ottenere soluzioni sufficientemente accurate ai fini applicativi attraverso processi di «**discretizzazione**», tramite i quali si sostituisce il **classico problema definito nel continuo**, con infiniti gradi di libertà (gdl), con un **sistema discreto**, dotato di un numero finito di gdl.

Il processo di discretizzazione conduce a due tipi principali di modelli:

- **a masse concentrate**, nei quali la massa della struttura viene condensata in punti discreti, spesso tramite una semplice ragionevole suddivisione della massa totale
- **FEM**, nei quali si ricorre alle usuali tecniche di approssimazione tramite funzioni di forma al fine di ottenere modelli in cui il campo di spostamenti (velocità, accelerazioni) è descritto tramite un numero discreto di valori (quelli relativi ai nodi).



# MODELLI DISCRETIZZATI

Le differenze concettuali tra i due metodi di soluzione sono piuttosto contenute, dato che entrambi condividono la maggior parte delle tecniche di soluzione.

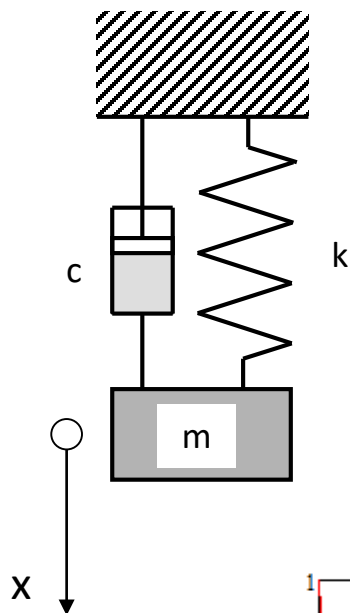
Dal punto di vista pratico, si tende ad utilizzare la tecnica a masse concentrate per la costruzione di modelli relativamente semplici (spesso risolubili in forma chiusa) in grado di prevedere il comportamento della struttura tenendo conto di un numero limitato di frequenze proprie (solitamente le prime di pulsazione più bassa).

I modelli FEM sono invece in grado di trattare la struttura in un campo decisamente più ampio di frequenze e tenendo conto di fenomeni di elevata complessità (es. irrigidimento da sforzo), difficilmente trattabili con modelli a masse concentrate.

I modelli a masse concentrate possono fornire un utilissimo termine di confronto per la validazione dei modelli FEM.

# MODELLI DISCRETIZZATI

Sistema ad 1 gdl – Risposta libera



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

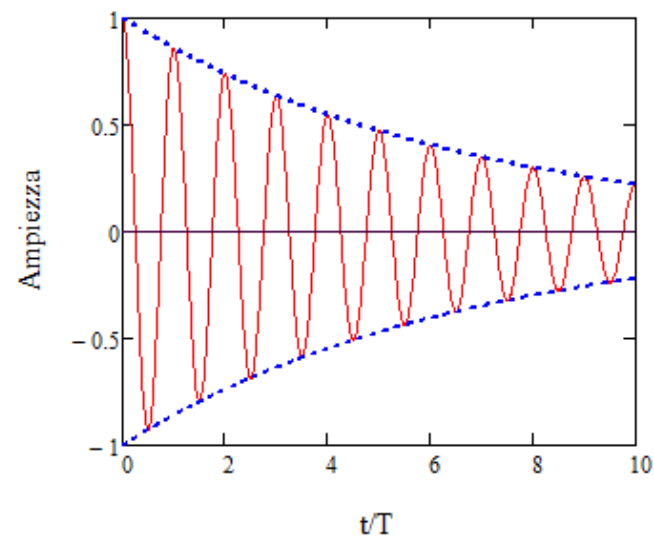
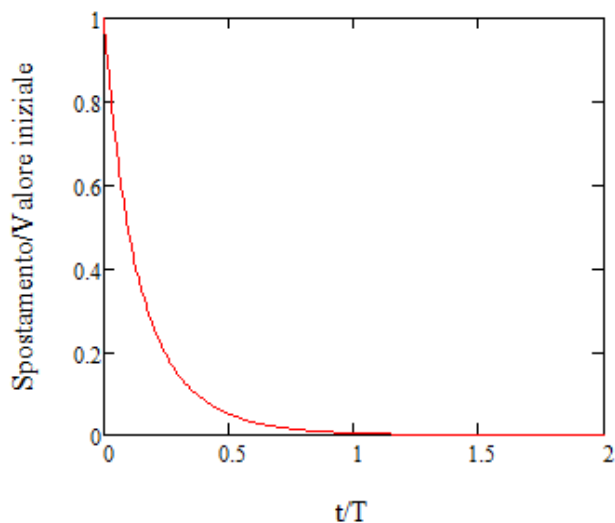
$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

$$\omega_s = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$c < c_{cr}$$

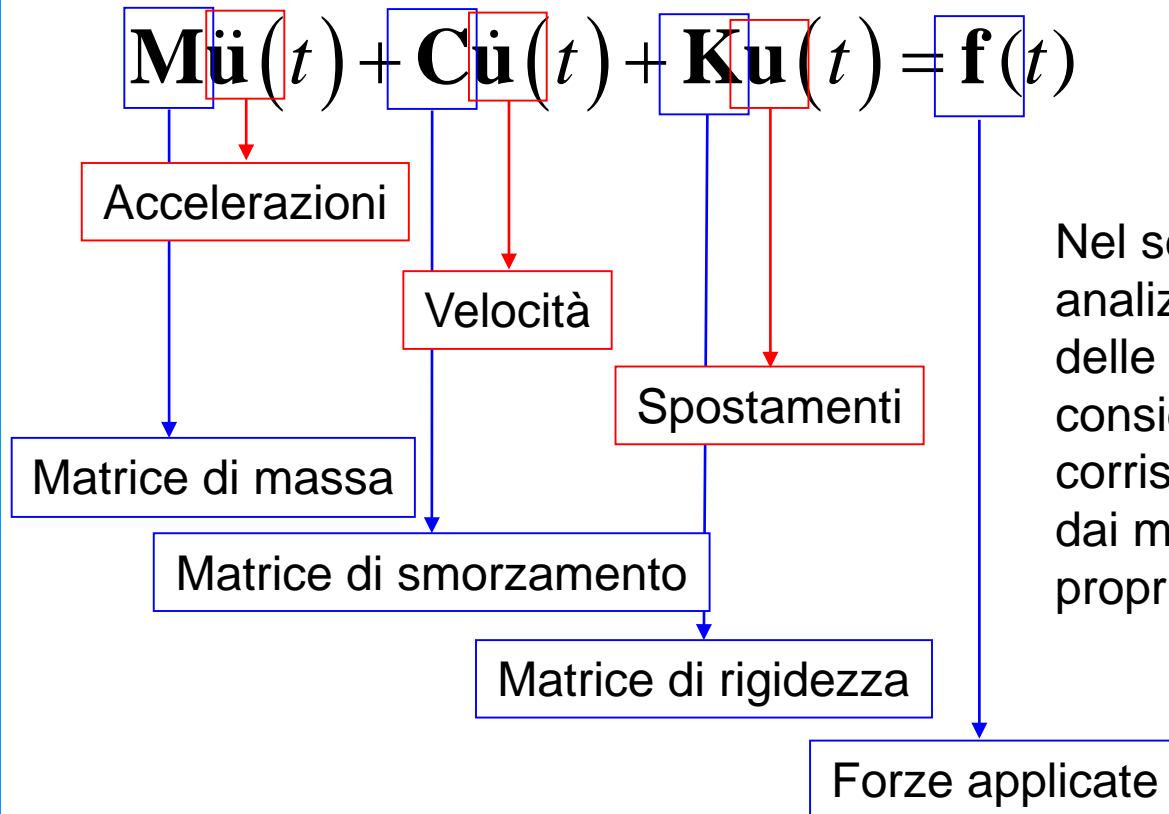
$$c \geq c_{cr}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( Ae^{i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} + Be^{-i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t} \right)$$



# MODELLI DISCRETIZZATI

Il sistema risolvete del problema dinamico assume un identico formalismo per i modelli a masse concentrate e FEM:



Nel seguito verranno brevemente analizzate le tecniche di costruzione delle matrici del sistema risolvete e considerato il problema della corrispondenza tra i risultati forniti dai modelli discretizzati e le effettive proprietà della struttura

Nel seguito, per maggiore chiarezza si adotterà la convenzione di rappresentare le **matrici** in grassetto+maiuscolo (Es: **M**) ed i **vettori** in grassetto+ minuscolo (Es: **x**)

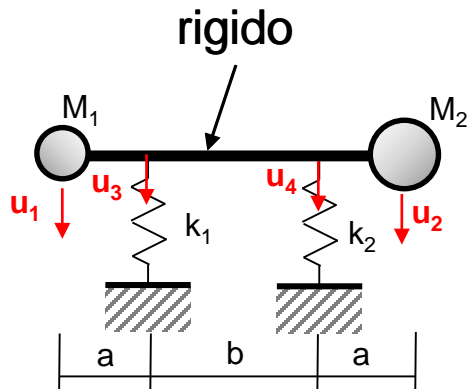
# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di massa

Matrice di massa:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

Struttura diagonale qualora si usino come gdl gli spostamenti delle singole masse e come equazioni le relative equazioni di equilibrio.

GDL :  $u_1, u_2 \rightarrow$  Eq.ni equilibrio singole masse  $\rightarrow$   $[\mathbf{M}]$  diagonale



$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + \left[ k_1 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_2 \frac{a^2}{(2a+b)^2} \right] u_1 - \left[ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \right] u_2 = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 - \left[ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \right] u_1 + \left[ k_2 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_1 \frac{a^2}{(2a+b)^2} \right] u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_2 \frac{a^2}{(2a+b)^2} & (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \\ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} & k_2 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_1 \frac{a^2}{(2a+b)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$



# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di massa

Matrice di massa:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

Struttura diagonale qualora si usino come gdl gli spostamenti delle singole masse e come equazioni le relative equazioni di equilibrio.

GDL :  $u_1, u_2 \rightarrow$  Equazioni di equilibrio traslazione e rotazione del corpo rigido  $\rightarrow$   $[\mathbf{M}]$  non diagonale

Diagram description: A rigid beam of length  $2a+b$  is supported by two springs with stiffnesses  $k_1$  and  $k_2$ . The beam has masses  $M_1$  and  $M_2$  at its ends. Displacements  $u_1$  and  $u_2$  are indicated at the masses, while  $u_3$  and  $u_4$  are indicated at the spring supports. The beam is labeled "rigido".

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + k_1 \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \frac{a+b}{2a+b} \right] = 0 \\ m_1 \ddot{u}_1 a - m_2 \ddot{u}_2 (a+b) - k_2 \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \frac{a+b}{2a+b} \right] b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 a & -m_2 (a+b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] b & k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di massa

NB : i due sistemi ottenuti con GDL  $u_1, u_2$  sono perfettamente equivalenti. Infatti il secondo si può trasformare nel primo con una opportuna sequenza di operazioni matriciali:

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 a & -m_2(a+b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] b & k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Moltiplicando la seconda equazione per  $-1/a$ :

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ -m_1 & m_2 \left( \frac{a+b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ -k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] \frac{b}{a} & -k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Sommando la prima equazione alla seconda:

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & m_2 \left( \frac{2a+b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] \left( 1 - \frac{b}{a} \right) & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di massa

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \left( \frac{2a+b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] \left( 1 - \frac{b}{a} \right) & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Moltiplicando la seconda equazione per  $a/(2a+b)$ :

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_1 \left( \frac{a}{2a+b} \right) \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left( \frac{a+b}{2a+b} \right) \left( \frac{a}{2a+b} \right) \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right]^2 + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \left( \frac{a}{2a+b} \right) \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima

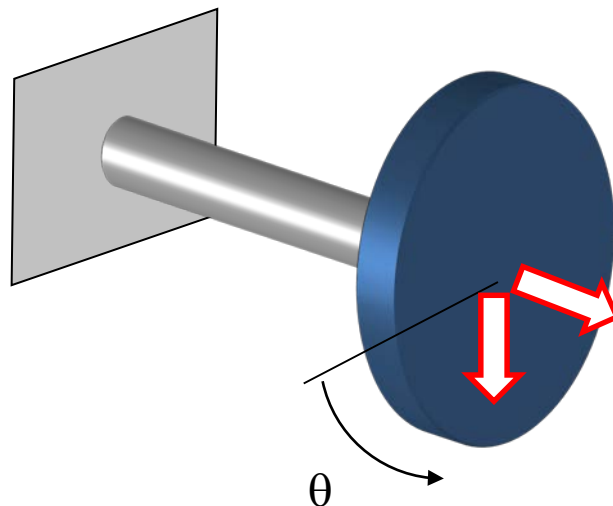
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right]^2 + k_2 \left[ \frac{a}{2a+b} \right]^2 & k_1 \left( \frac{a}{2a+b} \right) \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left( \frac{a+b}{2a+b} \right) \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_1 \left( \frac{a}{2a+b} \right) \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left( \frac{a+b}{2a+b} \right) \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right]^2 + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right]^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Eseguendo i calcoli

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right]^2 + k_2 \left[ \frac{a}{2a+b} \right]^2 & (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \\ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right]^2 + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right]^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di massa

I gradi di libertà utilizzabili, a seconda dei casi, possono essere traslazionali o rotazionali:



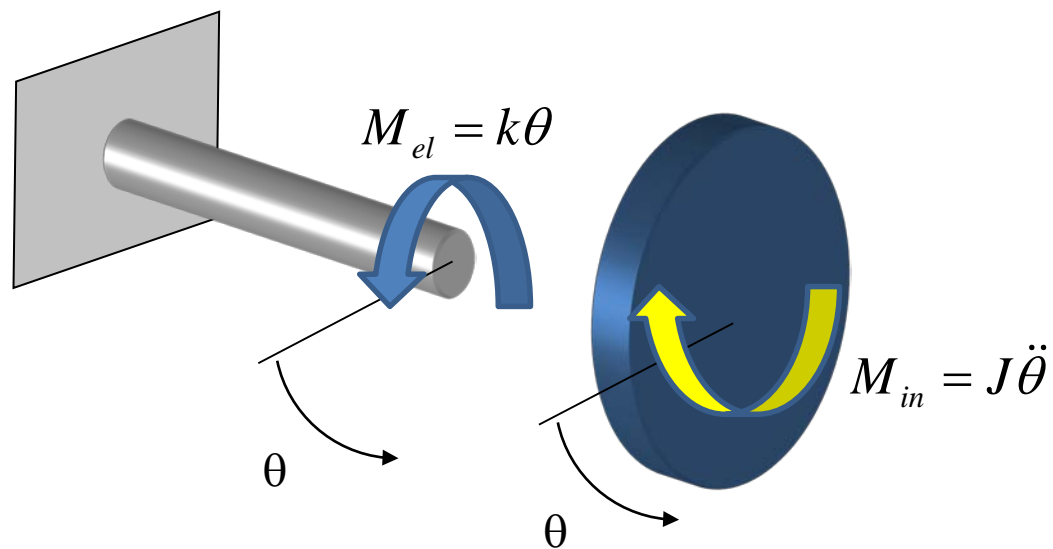
Le proprietà massive utilizzabili includono :

- Massa
- Momenti di inerzia di massa

<p>Hoop about central axis</p> $I = MR^2$	<p>Annular cylinder about central axis</p> $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$	<p>Solid cylinder about central axis</p> $I = \frac{1}{2} ML^2$
<p>Solid cylinder about central diameter</p> $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$	<p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> $I = \frac{1}{12} ML^2$	<p>Solid sphere about any axis</p> $I = \frac{2}{5} MR^2$
<p>Thin spherical shell about any diameter</p> $I = \frac{2}{3} MR^2$	<p>Hoop about central axis</p> $I = MR^2$	<p>Slab about perpendicular axis through center</p> $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di massa

In caso di gradi di libertà rotazionali le azioni elastiche ed inerziali sono espresse da:



## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Equazione di equilibrio dinamico

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$$

Matrice di rigidezza:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & k_{n-1,n} \\ 0 & \dots & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Nella forma «classica» ha una struttura simmetrica rispetto alla diagonale principale ( $k_{ij}=k_{ji}$ ), con una organizzazione «a banda», più o meno stretta attorno a quest'ultima

La struttura simmetrica ( $k_{ij}=k_{ji}$ ) si osserva in tutti i casi in cui la matrice di rigidezza rappresenta il legame tra gli spostamenti dei GDL e le forze elastiche conseguenti agenti sui GDL stessi.

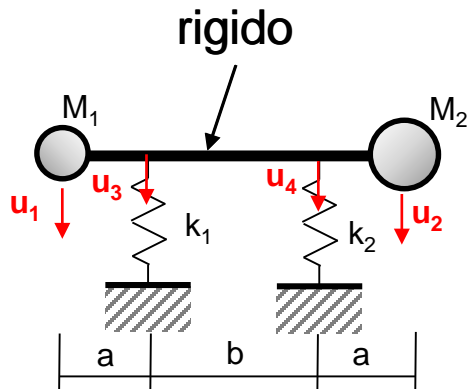
# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Matrice di rigidezza:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & k_{n-1,n} \\ 0 & \dots & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Struttura simmetrica qualora si usino come gdl gli spostamenti delle singole masse e come equazioni le relative equazioni di equilibrio.

GDL :  $u_1, u_2 \rightarrow$  Eq.ni equilibrio singole masse  $\rightarrow$   $\mathbf{K}$  simmetrica



$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + \left[ k_1 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_2 \frac{a^2}{(2a+b)^2} \right] u_1 - \left[ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \right] u_2 = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 - \left[ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \right] u_1 + \left[ k_2 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_1 \frac{a^2}{(2a+b)^2} \right] u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_2 \frac{a^2}{(2a+b)^2} & (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} \\ (k_1 + k_2) \frac{a(a+b)}{(2a+b)^2} & k_2 \frac{(a+b)^2}{(2a+b)^2} + k_1 \frac{a^2}{(2a+b)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$

# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Matrice di rigidezza:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & k_{n-1,n} \\ 0 & \dots & k_{n,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Struttura simmetrica qualora si usino come gdl gli spostamenti delle singole masse e come equazioni le relative equazioni di equilibrio.

GDL :  $u_1, u_2 \rightarrow$  Equazioni di equilibrio traslazione e rotazione del corpo rigido  $\rightarrow \mathbf{K}$  non simmetrica

Diagram illustrating a rigid body with two masses  $M_1$  and  $M_2$  supported by two springs  $k_1$  and  $k_2$ . The distances from the left end to the springs are  $a$  and  $b$ . The displacements at the masses are  $u_1$  and  $u_2$ , and the displacements at the springs are  $u_3$  and  $u_4$ . The body is labeled "rigido".

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + k_1 \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \frac{a+b}{2a+b} \right] = 0 \\ m_1 \ddot{u}_1 a - m_2 \ddot{u}_2 (a+b) - k_2 \left[ u_1 + (u_2 - u_1) \frac{a+b}{2a+b} \right] b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_1 a & -m_2 (a+b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \left[ 1 - \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] & k_1 \left[ \frac{a}{2a+b} \right] + k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] \\ k_2 \left[ 1 - \frac{a+b}{2a+b} \right] b & k_2 \left[ \frac{a+b}{2a+b} \right] b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0$$





## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Costruzione della matrice di rigidezza:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u}$$

La generica componente di forza applicata secondo il gdl «j» è data da:

$$f_j = \sum_l k_{jl} u_l$$

Imponendo uno stato di spostamento:

$$u_l = \begin{cases} 0 & \text{per } l \neq i \\ 1 & \text{per } l = i \end{cases}$$

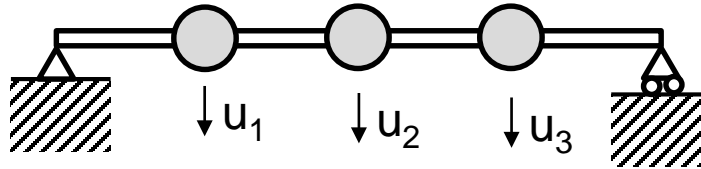
si ottiene :

$$f_j = k_{ji}$$

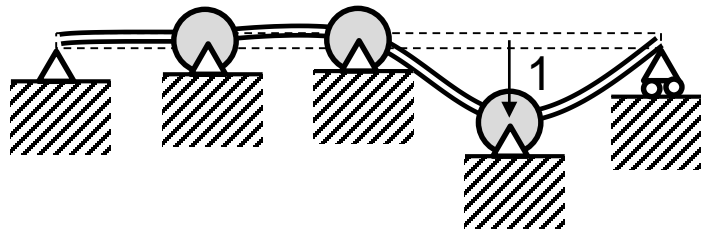
$k_{ji}$  = forza agente secondo il gdl «j» in presenza di uno stato di spostamento in cui tutti i gdl sono nulli tranne il gdl «i» che risulta uguale ad 1.

## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Le  $k_{ji}$  risultano, in pratica, onerose da calcolare direttamente dato che richiedono la soluzione di sistemi spesso fortemente **iperstatici**



Sistema originale (isostatico)

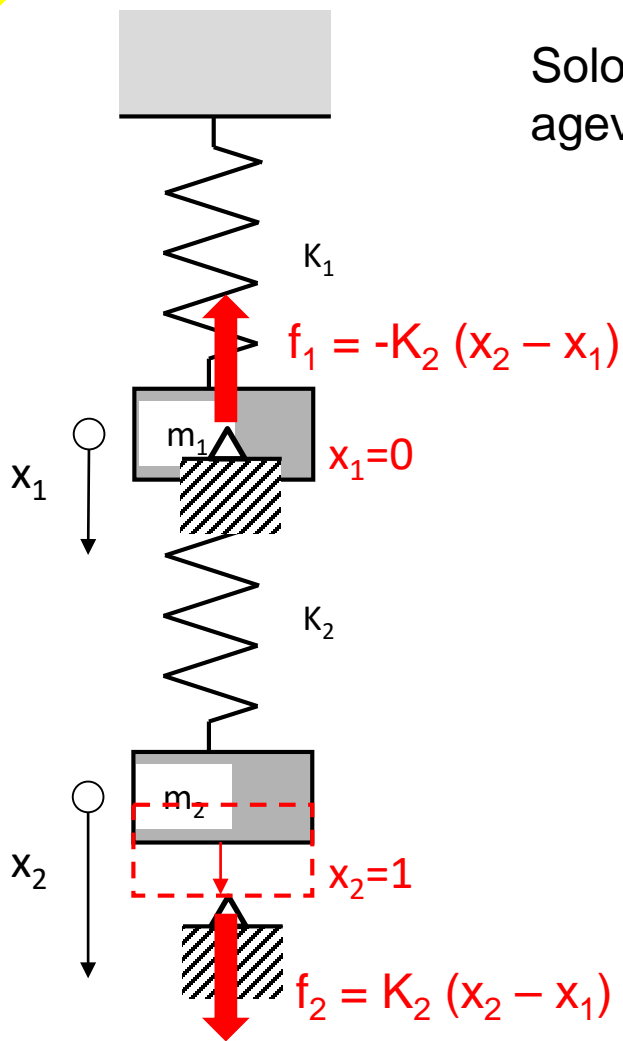


Sistema con imposto  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = 1$  (iperstatico). Calcolo delle reazioni vincolari oneroso.

# MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Solo in alcuni casi semplici è possibile calcolare agevolmente in modo diretto le  $k_{ij}$ .

Dato il sistema in figura, per calcolare le  $k_{12}$  e la  $k_{22}$ , si può imporre  $x_1=0$  ed  $x_2=1$ , ottenendo:



$$k_{12} = f_1 = -K_2 \cdot (x_2 - x_1) = -K_2 \cdot (1 - 0) = -K_2$$

$$k_{22} = f_2 = K_2 \cdot (x_2 - x_1) = K_2 \cdot (1 - 0) = K_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Molto più agevole, solitamente, risulta la costruzione della matrice di cedevolezza:

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{f}$$

La generica componente di spostamento secondo il gdl «j» è data da:

$$u_j = \sum_l v_{jl} f_l$$

Imponendo una distribuzione di carichi applicati:

$$f_l = \begin{cases} 0 & \text{per } l \neq i \\ 1 & \text{per } l = i \end{cases}$$

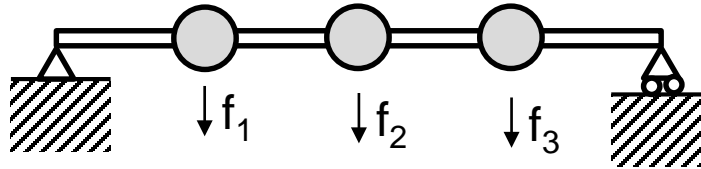
si ottiene :

$$u_j = v_{ji}$$

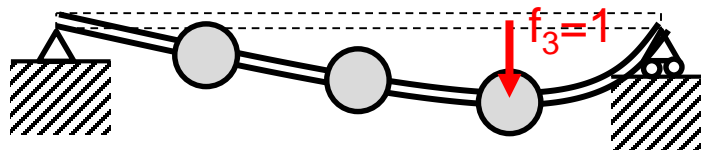
$v_{ji}$  = spostamento prodotto secondo il gdl «j» in presenza di una distribuzione di carichi applicati tutti nulli tranne quello agente secondo il gdl «i» che risulta uguale ad 1.

## MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza

Le  $v_{ji}$  risultano, in pratica, piuttosto semplici da calcolare direttamente dato che richiedono la soluzione della sola struttura originale, spesso isostatica o limitatamente iperstatica.



Sistema originale (isostatico)



Sistema con imposto  $f_1 = f_2 = 0$ ,  $f_3 = 1$  (isostatico). Calcolo delle componenti di spostamento semplice.

Una volta costruita la  $\mathbf{V}$  si ottiene facilmente la  $\mathbf{K}$ :

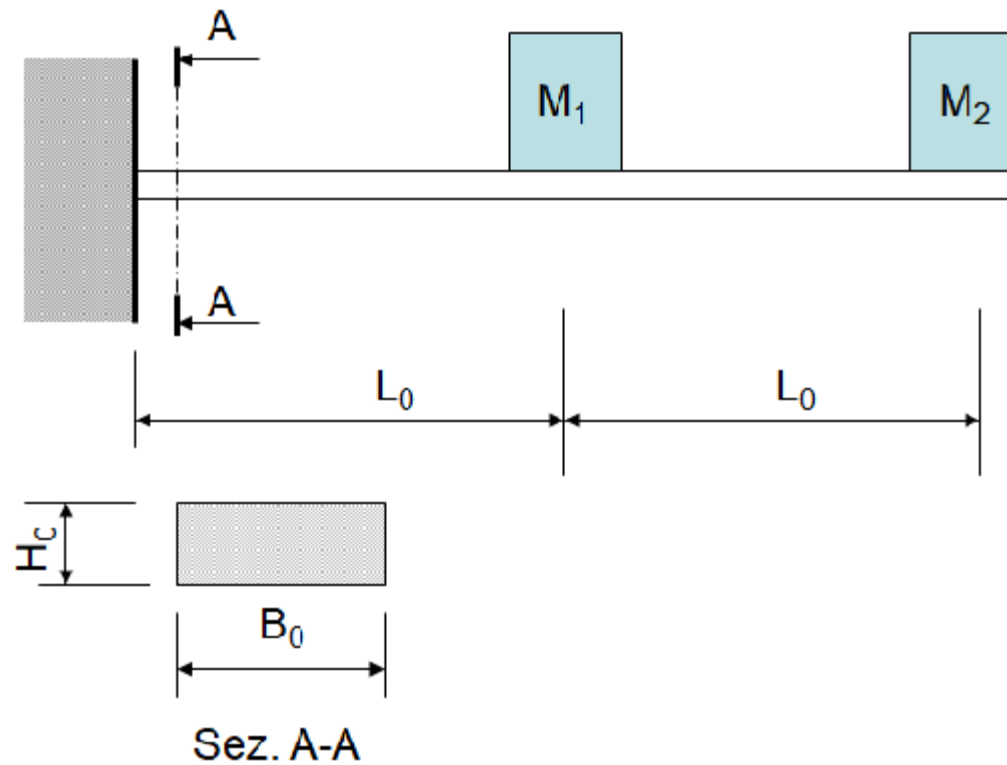
$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}$$



## Esempio E1

### CALCOLO MATRICE DI RIGIDEZZA DI SISTEMA A 2 GDL

Si calcolino la matrice di rigidezza del sistema mostrato nella Figura, assumendo come gdl gli spostamenti verticali delle masse 1 e 2. La trave a sezione rettangolare è in acciaio.



Dati

$$L_0 = 1 \cdot \text{m} \quad E = 2.1 \cdot 10^{11} \cdot \text{Pa} \quad \nu = 0.3$$

$$H_0 = 0.01 \cdot \text{m} \quad B_0 = 0.05 \cdot \text{m}$$



Calcolo parametri geometrici sezione

$$A_0 := H_0 \cdot B_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad J_x := \frac{B_0 \cdot H_0^3}{12} = 4.167 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Calcolo matrice di cedevolezza

$$C_{11} := \frac{L_0^3}{3 \cdot E \cdot J_x} = 3.81 \times 10^{-4} \cdot \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad C_{22} := \frac{(2 \cdot L_0)^3}{3 \cdot E \cdot J_x} = 3.048 \times 10^{-3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

$$C_{21} := \int_0^{L_0} \frac{(2 \cdot L_0 - \xi) \cdot (L_0 - \xi)}{E \cdot J_x} d\xi = 9.524 \times 10^{-4} \cdot \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad C_{12} := C_{21}$$

$$C_0 := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

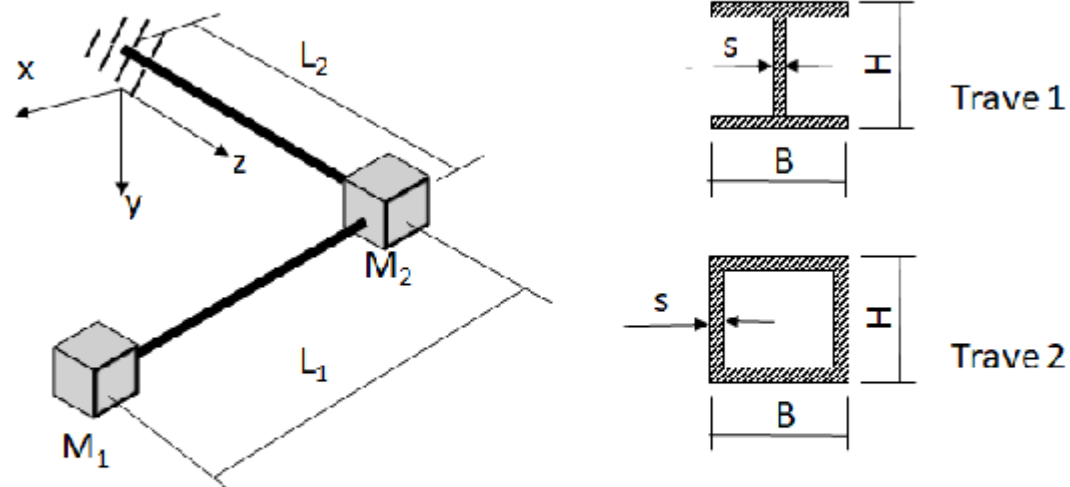
Matrice di rigidità e di massa

$$K_0 := C_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1.2 \times 10^4 & -3.75 \times 10^3 \\ -3.75 \times 10^3 & 1.5 \times 10^3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

## Esercizio D4A

### CALCOLO MATRICE DI RIGIDEZZA

Si calcoli la matrice di rigidezza del sistema mostrato in figura, relativamente a moti verticali delle due masse. Le travi sono in acciaio, da considerarsi prive di massa.



Dati

$$\begin{array}{lllll}
 L_1 := 1.5\text{-m} & M_1 := 150\text{-kg} & M_2 := 250\text{-kg} & E := 2.1 \cdot 10^{11}\text{-Pa} & \nu := 0.3 \\
 L_2 := 1\text{-m} & H := 100\text{-mm} & B := 80\text{-mm} & s_p := 10\text{-mm} & 
 \end{array}$$



RISPOSTA:

$$\underline{\underline{C}} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.86 \times 10^{-6} & 3.865 \times 10^{-7} \\ 3.865 \times 10^{-7} & 3.865 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

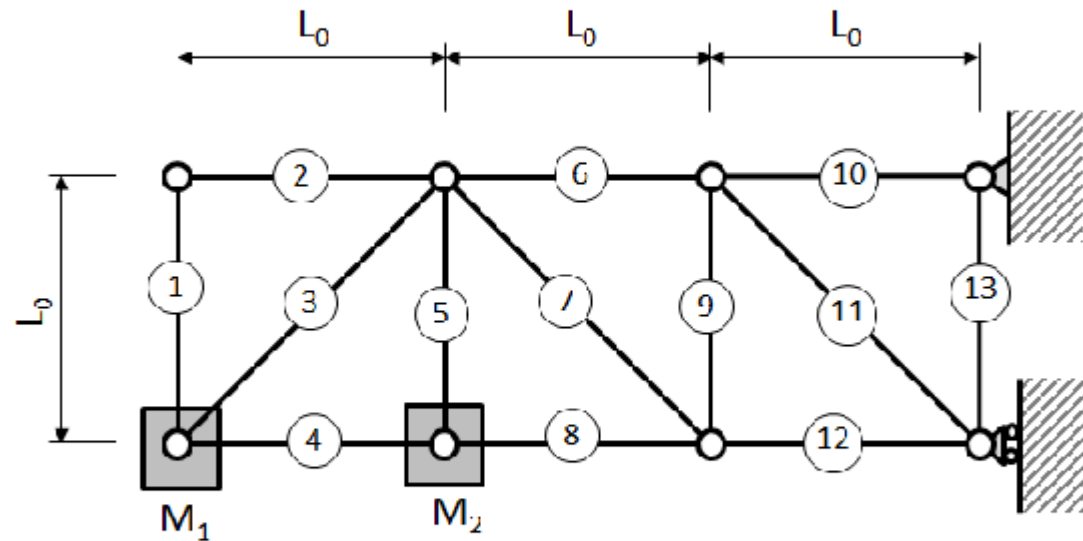
$$\underline{\underline{K}} := \underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.827 \times 10^5 & -1.827 \times 10^5 \\ -1.827 \times 10^5 & 2.77 \times 10^6 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

## Esercizio D4B

### DETERMINAZIONE MATRICE DI RIGIDEZZA

È dato il sistema mostrato schematicamente in Figura, costituito da due masse, fissate ai nodi di una travatura reticolare in acciaio.

Assumendo prive di massa le aste della travatura reticolare e considerando solo gli spostamenti verticali delle masse, da assumersi puntiformi, si determini la matrice di rigidità del sistema.



$$M_1 := 300\text{-kg} \quad M_2 := 350\text{-kg}$$

$$L_0 := 1\text{-m} \quad A_0 := 20\text{-mm}^2 \quad E := 2.1 \cdot 10^5 \text{-MPa}$$

RISPOSTA:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{pmatrix} 5.113 \times 10^5 & -6.16 \times 10^5 \\ -6.16 \times 10^5 & 1.029 \times 10^6 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

**MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di smorzamento**

Equazione di equilibrio dinamico

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$$

Matrice di smorzamento:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_{n-1,n} \\ 0 & \dots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{bmatrix}$$

La matrice di smorzamento assume forme molto diverse, a seconda del tipo di effetto smorzante che si intende rappresentare (smorzatori concentrati, smorzamento diffuso, etc.)

La struttura della matrice di smorzamento influenza fortemente il comportamento del sistema e, soprattutto, le tecniche di soluzione impiegabili. Per questo motivo essa sarà analizzata in dettaglio nelle parti successive del corso.



# ANALISI DINAMICA TRAMITE FINITE ELEMENT METHOD (FEM)

- Il FEM costituisce un metodo molto versatile per condurre la maggior parte delle analisi dinamiche
- Il modello FEM è finalizzato ad una soluzione approssimata, tramite discretizzazione, del problema dinamico definito nel continuo
- Il modello FEM, dato che possiede un numero finito di gdl, è sostanzialmente un modello a parametri concentrati
- Il classico modello a parametri concentrati implica la riduzione della struttura ad un insieme di masse, molle e smorzatori semplici
- Il modello FEM, invece, permette di ottenere direttamente matrici di massa, rigidità e smorzamento rappresentativi di strutture complesse e anche di problemi definiti nel continuo.



## MODELLI FEM – Aspetti generali

- Generalmente lo studio di una struttura in campo dinamico tende a prendere in considerazione soprattutto i modi propri di ordine più basso, le relative forme modali ed il loro contributo alle ampiezze di vibrazione.
- Per rappresentare solo i modi propri di ordine più basso è, in genere, sufficiente un numero piuttosto contenuto di gdl, nettamente inferiore a quello richiesto per una rappresentazione di dettaglio dello stato di tensione.
- Di conseguenza, il modello FEM per analisi dinamica può essere più semplice e grossolano di quelli usati per l'analisi tensionale (ad esempio, gli elementi possono essere decisamente più grandi e si possono trascurare particolari geometrici come fori, raccordi, etc.)

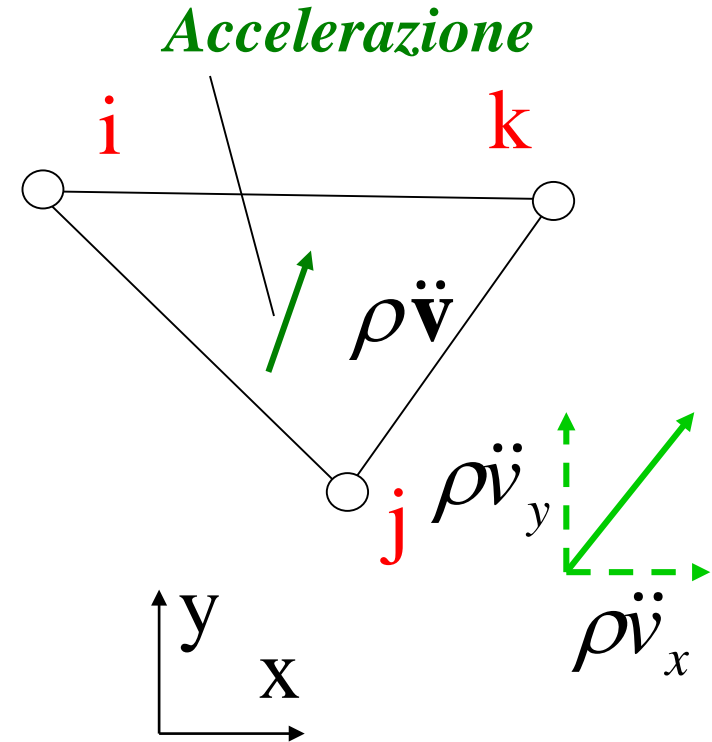


# MODELLI FEM– Estensione sistema risolvete in campo dinamico

Contributo inerzia

$$L_{est} = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{p}^e + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



$$dL_i = -\delta \mathbf{v}^T \rho \ddot{\mathbf{v}} dV$$

$$\begin{aligned} L_i &= -\int_V \delta \mathbf{v}^T \rho \ddot{\mathbf{v}} dV = -\int_V \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e dV = \\ &= -\delta \mathbf{u}^{eT} \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}}^e \end{aligned}$$

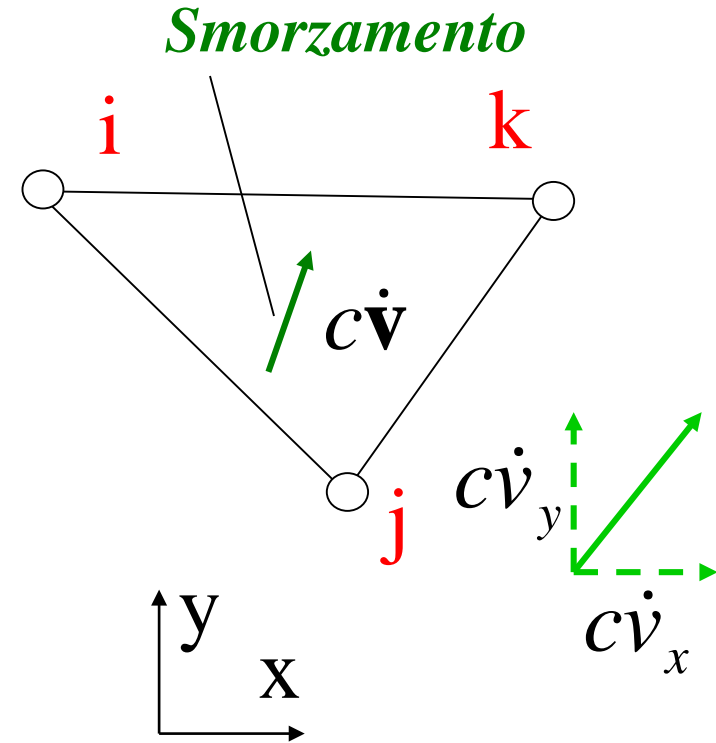


# MODELLI FEM– Estensione sistema risolvete in campo dinamico

Contributo inerzia

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_i + L_s$$

Contributo smorzamento



$$dL_s = -\delta \mathbf{v}^T c \dot{\mathbf{v}} dV$$

$$\begin{aligned} L_s &= -\int_V \delta \mathbf{v}^T c \dot{\mathbf{v}} dV = -\int_V \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e dV = \\ &= -\delta \mathbf{u}^{eT} \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{u}}^e \end{aligned}$$

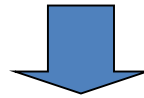




# MODELLI FEM– Estensione sistema risolvete in campo dinamico

$$\cancel{\delta \mathbf{u}^{eT}} \left( \mathbf{p}^e - \int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{u}}^e - \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}}^e \right) =$$

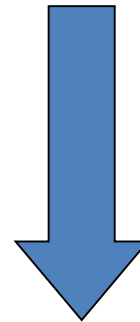
$$= \cancel{\delta \mathbf{u}^{eT}} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{u}^e$$



$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{p}^e$$

$$\int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$$

$$\int_V \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV$$



$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

# MODELLI FEM– Formulazione matrice di massa

Matrice di massa “consistent”:  $\mathbf{M}^e = \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV$

- simmetrica
- sostanzialmente piena

Elemento triangolare piano

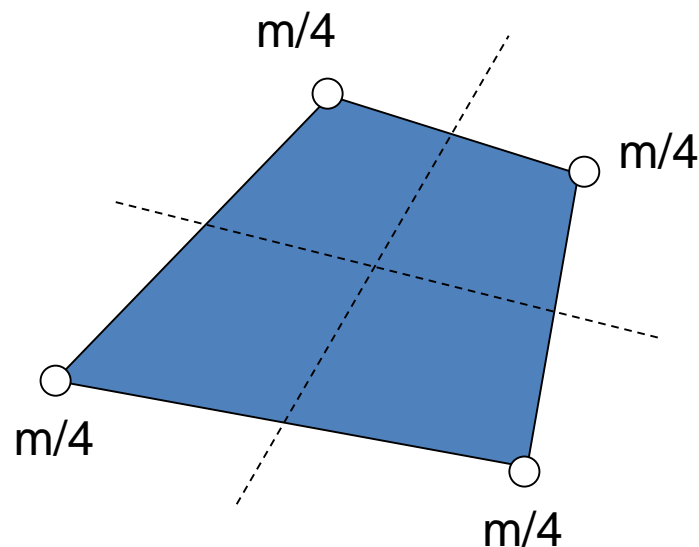
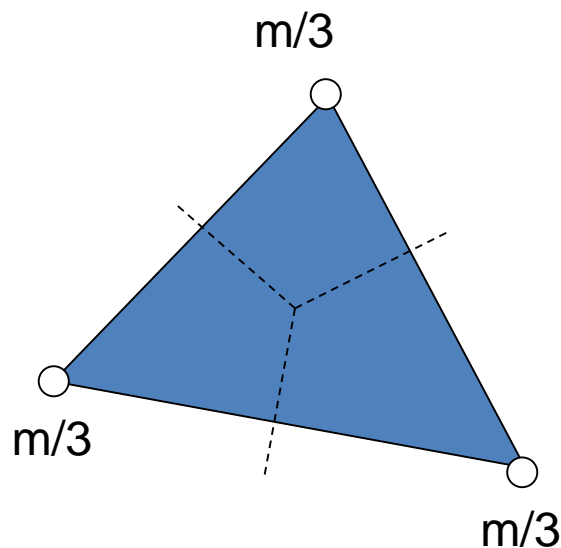
$$\int \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV = \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix} dV =$$

$$= \rho \begin{bmatrix} \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11}^2 dV & 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{11} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{13} dV & 0 & \int N_{13}^2 dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV \\ \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV & 0 \\ 0 & \int N_{11} N_{15} dV & 0 & \int N_{13} N_{15} dV & 0 & \int N_{15}^2 dV \end{bmatrix}$$

## MODELLI FEM– Formulazione matrice di massa

Matrice di massa “lumped”: la massa viene concentrata nei nodi in qualche modo fisicamente accettabile (di solito ovvio per gli elementi con nodi nei vertici, meno ovvio per quelli con nodi intermedi), in modo che risulti:

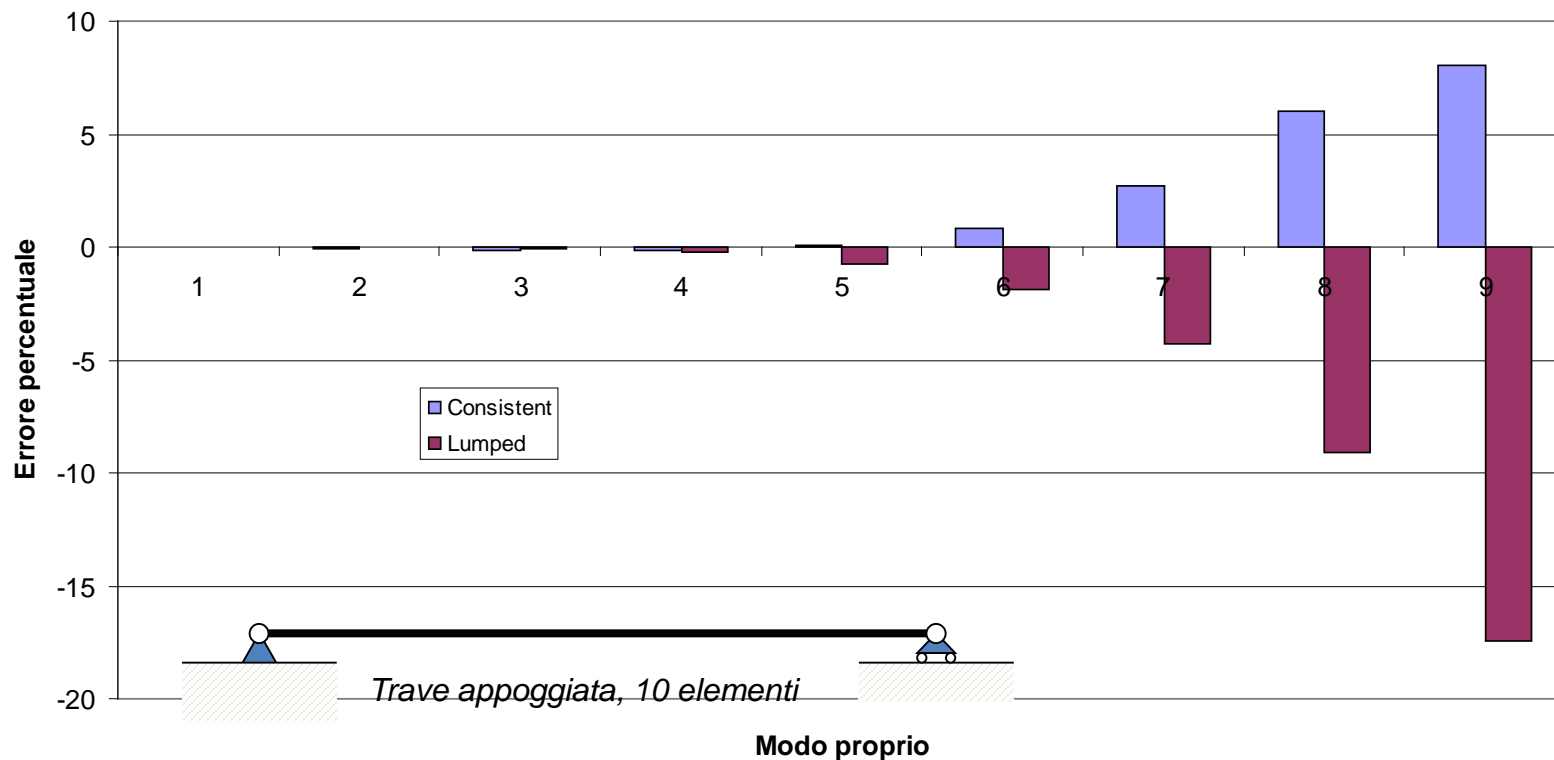
$$\sum_j M_j = \int \rho dV$$



- la struttura della matrice di massa è diagonale

$$[M] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

## MODELLI FEM– Formulazione matrice di massa



- La formulazione “consistent” produce errori minori in valore assoluto, anche se gli errori sono comunque piccoli, almeno per le prime frequenze proprie
- La struttura diagonale può risultare molto vantaggiosa in alcune soluzioni iterative (es. analisi di transitorio) in quanto non richiede inversione

## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

Saranno ora analizzate le tecniche di soluzione utilizzabili per determinare le pulsazioni proprie di una struttura. Tali tecniche sono concettualmente identiche, sia che si tratti di un sistema a masse concentrate, che di un modello FEM.

Effetto dello smorzamento sulle pulsazioni proprie solitamente molto piccolo

$$\omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad \xi = 0.1 \quad \omega_s = 0.985 \cdot \omega_n$$

Equazione di equilibrio dinamico trascurando lo smorzamento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \mathbf{a}e^{i\omega t}$$

Sostituendo

$$-\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{a}e^{i\omega t} + \mathbf{K}\mathbf{a}e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = 0$$

## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = 0$$

Condizione n.s. per avere una soluzione non banale:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

$$(\omega^2)^n + a_{n-1}(\omega^2)^{n-1} + \dots + a_1(\omega^2) + a_n = 0 \quad \text{“Polinomio caratteristico”}$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n \quad n \text{ radici (autovalori) tutte reali (K ed M simmetriche)}$$

Sostituendo un autovalore  $\omega_j$  è possibile determinare il relativo autovettore  $\boldsymbol{\psi}^{(j)}$  (forma modale), soluzione di:

$$(\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}^{(j)} = 0$$



## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

### *Normalizzazione rispetto alla matrice di massa*

Dato che il determinante è uguale a 0, la soluzione (forma modale) è nota a meno di una costante. Si è soliti normalizzarla convenzionalmente, ad esempio rispetto alla matrice di massa, in modo che risulti ( $\mathbf{y}^{(j)}$  autovettore normalizzato):

$$\mathbf{y}^{(j)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)} = 1$$

L'autovettore normalizzato è dato da:

$$\boldsymbol{\psi}^{(j)T} \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}^{(j)} = a^2 \quad \text{dove «} a^2 \text{» = massa modale}$$

$$\mathbf{y}^{(j)} = \frac{1}{a} \boldsymbol{\psi}^{(j)}$$

## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

*Problema agli autovalori in forma standard:*

$$\mathbf{K}\mathbf{y}^{(j)} = \omega_j^2 \mathbf{M}\mathbf{y}^{(j)}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{y}^{(j)} = \omega_j^2 \mathbf{y}^{(j)}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

$$\lambda_j = \omega_j^2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{y}^{(j)}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^{(j)} = \omega_j^2 \mathbf{y}^{(j)}$$



## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

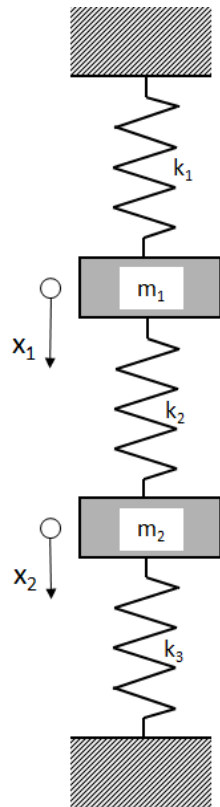
Gli autovalori  $\omega_j^2$  ed i relativi autovettori  $\mathbf{y}^{(j)}$  sono solitamente organizzati in due matrici  $n \times n$

$$\text{diag}\mathbf{\Omega}_j^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{“Matrice spettrale”}$$

$$\mathbf{Y} = \left[ \mathbf{y}^{(1)} \quad \mathbf{y}^{(2)} \quad - \quad \mathbf{y}^{(n)} \right] \quad \text{“Matrice modale”}$$

## Esercizio D5

Determinare le frequenze proprie e le forme modali per il sistema mostrato nella Figura. Normalizzare inoltre le forme modali rispetto alla matrice di massa.



$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

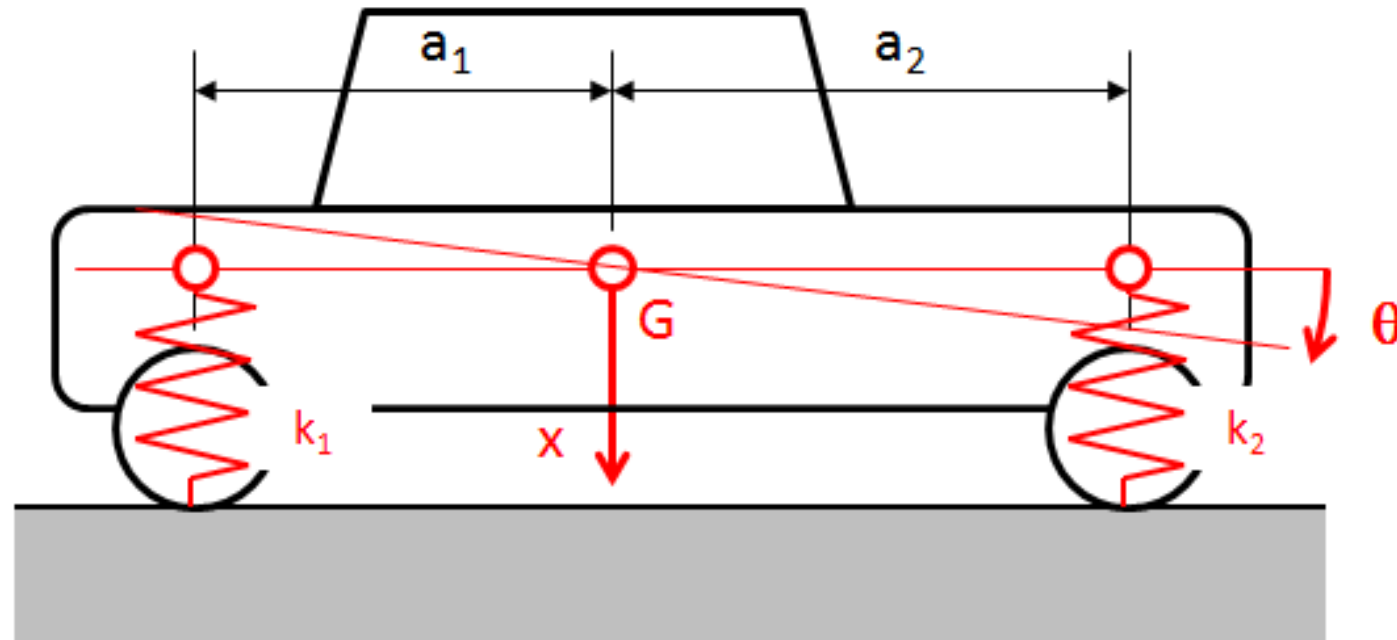
$$m_1 := 14 \cdot \text{kg}$$

$$m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$

## Esercizio D6

Il modello di veicolo mostrato in Figura, caratterizzato da 2 gdl, può essere utilizzato per studiare i moti di "saltellamento" e di "beccheggio".

- si calcolino i modi propri del sistema e le relative forme modali.
- si verifichi sotto quali condizioni i due moti risultano disaccoppiati



Dati

$a_1 := 1.1\text{-m}$  semipasso posteriore

$a_2 := 1.348\text{-m}$  semipasso anteriore

$M_V := 800\text{-kg}$  Massa complessiva veicolo

$J_V := 1816\text{-kg}\cdot\text{m}^2$

Momento di inerzia di massa rispetto ad asse baricentrico trasversale

$k_1 := 22.5\cdot\frac{\text{kN}}{\text{m}}$

$k_2 := 20.4\cdot\frac{\text{kN}}{\text{m}}$

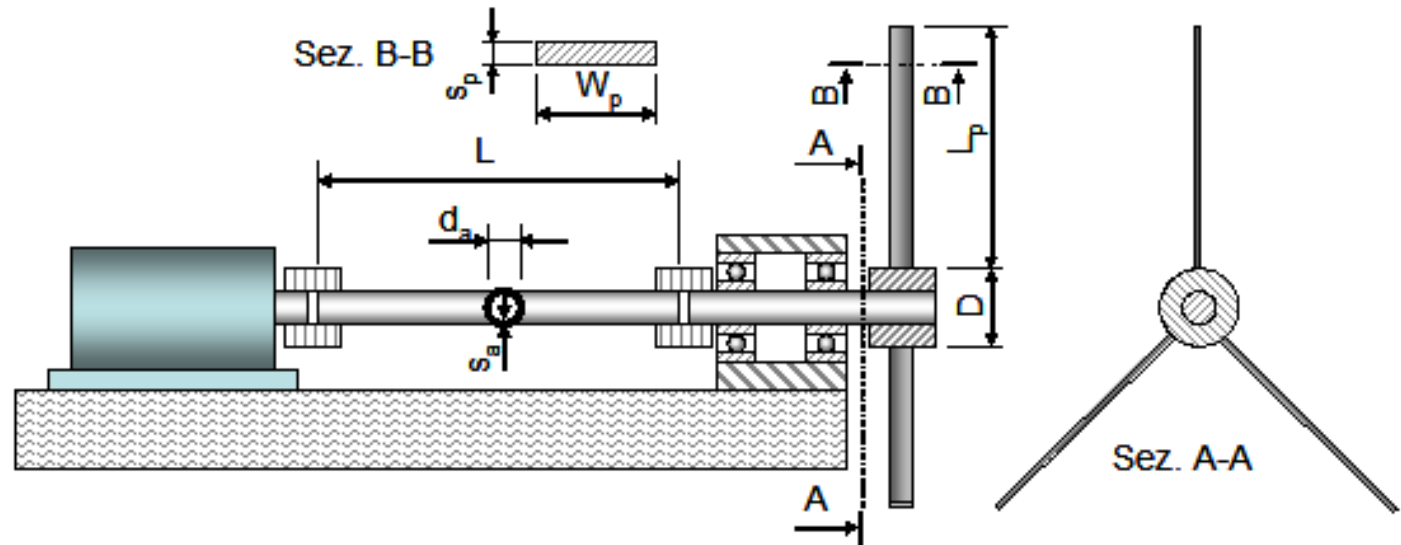
## Esercizio D7

### OSCILLAZIONI TORSIONALI DI VENTILATORE

Calcolare la frequenza propria torsionale del sistema costituito dalla pala di ventilatore mostrata in figura, considerando il motore bloccato contro la rotazione.

Si assumano le seguenti ipotesi

- asse elica e giunti torsionalmente rigidi
- momento di inerzia del mozzo e dell'albero trascurabili



#### DATI

$$d_a := 15 \cdot \text{mm} \quad L := 3000 \cdot \text{mm} \quad s_a := 1 \cdot \text{mm} \quad D := 40 \cdot \text{mm}$$

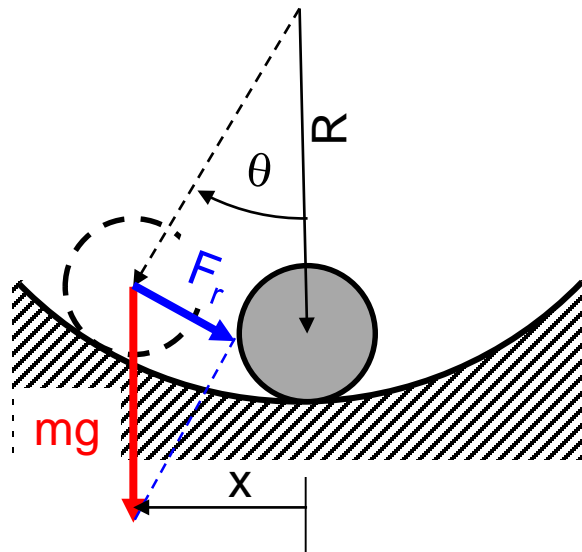
$$L_p := 800 \cdot \text{mm} \quad W_p := 80 \cdot \text{mm} \quad s_p := 5 \cdot \text{mm}$$

$$\rho := 7850 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{densità materiale pale (acciaio)}$$

$$E := 80000 \cdot \text{MPa} \quad \nu := 0.3 \quad \text{Dati materiale albero di trasmissione (alluminio)}$$

**MODELLI A MASSE CONCENTRATE – Matrice di rigidezza**

In senso generale, la  $k_{ji}$  è definita come la forza agente secondo il gdl «j» dovuta ad uno spostamento unitario del gdl «i». Nonostante sia il caso più comune, questa forza di reazione non è necessariamente di natura elastica.



Sfera o cilindro in sede sferica (o pendolo semplice). «Rigidezza» dovuta all'azione della forza peso:

$$x = R \sin(\vartheta)$$

$$F_r = mg \sin(\theta)$$

Per  $\theta$  molto piccolo:

$$x \approx R\vartheta$$

$$F_r \approx mg\vartheta = mg \frac{x}{R} = kx$$

$$k = \frac{mg}{R}$$

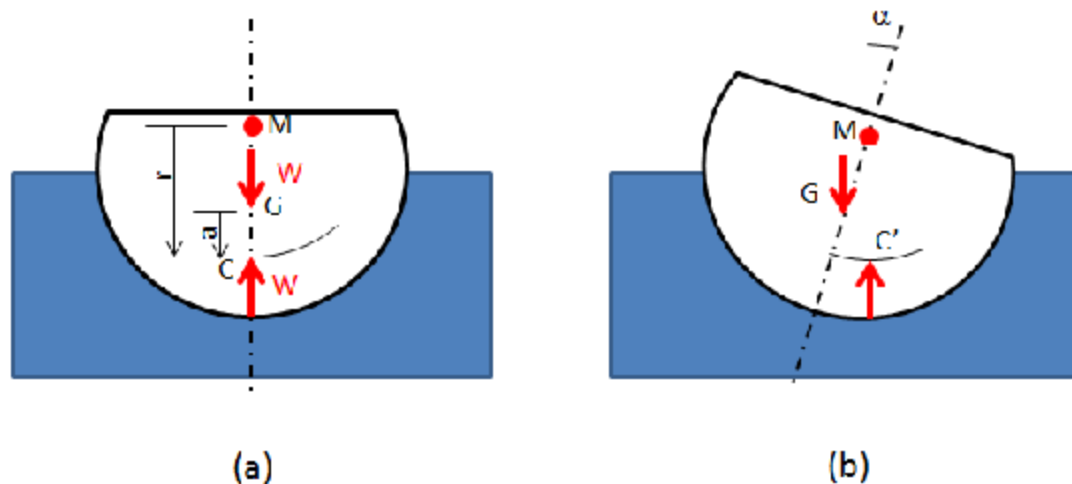
## Esercizio D8

### OSCILLAZIONI NON SMORZATE DI IMBARCAZIONE

Si consideri l'imbarcazione immersa in acqua mostrata nella Figura. Essa risulta soggetta alla forza peso, costantemente rivolta verso il basso ed applicata nel baricentro  $G$ , ed alla spinta idrostatica, di uguale modulo e rivolta verso l'alto, applicata nel punto  $C$ , a nave dritta, che si sposta nel punto  $C'$  a nave deviata.

Per piccole oscillazioni, la retta d'azione della spinta idrostatica passa per un punto fisso posto sull'asse verticale della nave, detto Metacentro ( $M$ ). Di fatto, quindi, il moto di rollio della nave, per piccole oscillazioni, può essere assimilato ad una rotazione attorno al metacentro.

Si chiede di calcolare la pulsazione del moto di rollio della nave.



#### DATI

$r := 5\text{-m}$                       distanza tra il metacentro ed il punto di applicazione della spinta idrostatica  
 $a := 4\text{-m}$                       distanza tra il baricentro ed il punto di applicazione della spinta idrostatica

$J_G := 6 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$                       Momento di inerzia del natante attorno al baricentro

$W_N := 10^7 \cdot \text{kg}$                       Massa del natante

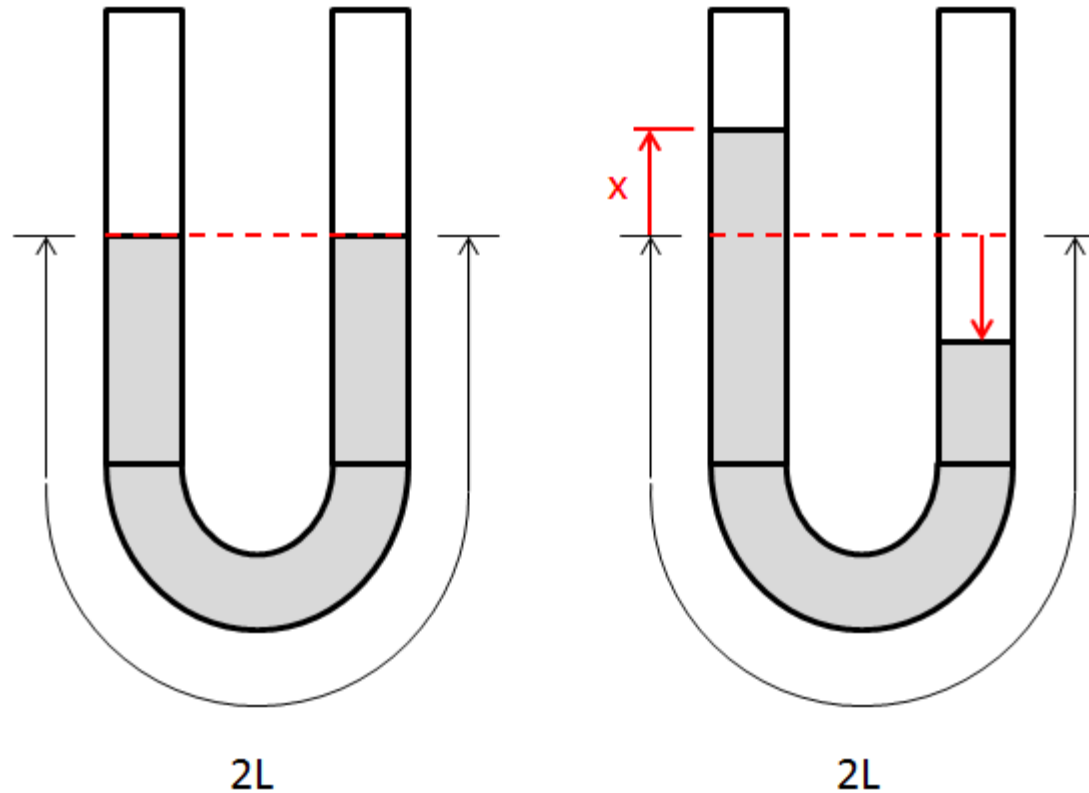
$\underline{W} := W_N \cdot g = 9.807 \times 10^7 \text{ N}$                       Forza peso = spinta idrostatica



## Esercizio D9

### OSCILLAZIONI NON SMORZATE DI LIQUIDO IN TUBO AD "U"

Si consideri il tubo ad U parzialmente riempito di liquido mostrato in Figura. Si calcoli la pulsazione propria della oscillazione del pelo libero del liquido.



#### DATI

$L_0 := 0.25\text{-m}$       Semi-lunghezza complessiva della colonna di liquido

$A_0$  = sezione interna del tubo a U

$g$  = accelerazione di gravità

$\rho$  = densità del liquido

**ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati**

*Ortogonalità rispetto alle matrici M e K*

Presi due modi propri qualsiasi:

$$(\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}^{(r)} = 0$$

$$(\mathbf{K} - \omega_s^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}^{(s)} = 0$$

Premoltiplicando la prima per  $\boldsymbol{\psi}^{(s)T}$

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)T} (\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}^{(r)} = 0$$

Trasponendo la seconda e postmoltiplicando per  $\boldsymbol{\psi}^{(r)}$

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)T} (\mathbf{K}^T - \omega_s^2 \mathbf{M}^T) \boldsymbol{\psi}^{(r)} = 0$$

Dato che M e K sono simmetriche

$$\boldsymbol{\psi}^{(s)T} (\mathbf{K}^T - \omega_s^2 \mathbf{M}^T) \boldsymbol{\psi}^{(r)} = \boldsymbol{\psi}^{(s)T} (\mathbf{K} - \omega_s^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi}^{(r)}$$



**ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati**

*Ortogonalità rispetto alle matrici M e K*

Si ha:

$$\Psi^{(s)T} (\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M}) \Psi^{(r)} = 0$$

$$\Psi^{(s)T} (\mathbf{K} - \omega_s^2 \mathbf{M}) \Psi^{(r)} = 0$$

Sottraendo

$$\left(\omega_s^2 - \omega_r^2\right) \Psi^{(s)T} \mathbf{M} \Psi^{(r)} = 0 \quad \begin{cases} \Psi^{(s)T} \mathbf{M} \Psi^{(r)} = 0 & \text{se } \omega_s \neq \omega_r \\ \Psi^{(s)T} \mathbf{M} \Psi^{(r)} \neq 0 & \text{se } \omega_s = \omega_r \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\Psi^{(s)T} \mathbf{K} \Psi^{(r)} = \omega_r^2 \Psi^{(s)T} \mathbf{M} \Psi^{(r)} \quad \begin{cases} \Psi^{(s)T} \mathbf{K} \Psi^{(r)} = 0 & \text{se } \omega_s \neq \omega_r \\ \Psi^{(s)T} \mathbf{K} \Psi^{(r)} \neq 0 & \text{se } \omega_s = \omega_r \end{cases}$$

Infine:

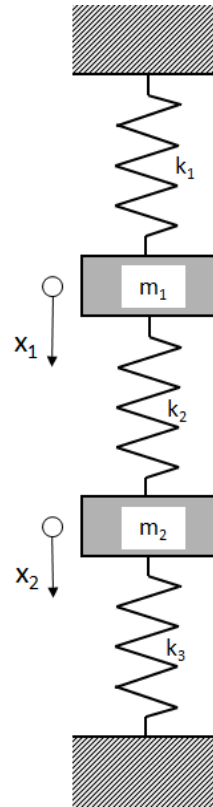
$$\omega_r^2 = \frac{\Psi^{(r)T} \mathbf{K} \Psi^{(r)}}{\Psi^{(r)T} \mathbf{M} \Psi^{(r)}} = \frac{k_r}{m_r}$$

Rapporto di Rayleigh

( $k_r$ ,  $m_r$  rigidezza e massa “modali” per il modo  $r$ )

## Esercizio D10

Verificare le proprietà di ortogonalità delle forme modali, sia normalizzate che non normalizzate rispetto alla matrice di massa, del sistema dell'esercizio D5 rispetto alle matrici di massa e rigidezza



$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m_1 := 14 \cdot \text{kg}$$

$$m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$



Si verifica immediatamente che le forme modali precedentemente determinate per il sistema dell'esercizio D5, sia nella forma normalizzata, che in quella non normalizzata rispetto alla matrice di massa, sono ortogonali rispetto alle matrici di massa e rigidezza:

$$[\psi^{(2)}]^T \cdot M \cdot [\psi^{(1)}] = 0 \text{ kg}$$

$$[\psi^{(1)}]^T \cdot M \cdot [\psi^{(1)}] = 16.2 \text{ kg}$$

$$[\psi^{(2)}]^T \cdot M \cdot [\psi^{(2)}] = 102.8 \text{ kg}$$

$$[\psi^{(1)}]^T \cdot K \cdot [\psi^{(2)}] = 0 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[\psi^{(1)}]^T \cdot K \cdot [\psi^{(1)}] = 2117.2 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$[\psi^{(2)}]^T \cdot K \cdot [\psi^{(2)}] = 36132.8 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\left[ \mathbf{y}^{(1)} \right]^T \cdot \mathbf{M} \cdot \left[ \mathbf{y}^{(2)} \right] = 0$$

$$\left[ \mathbf{y}^{(1)} \right]^T \cdot \mathbf{M} \cdot \left[ \mathbf{y}^{(1)} \right] = 1$$

$$\left[ \mathbf{y}^{(2)} \right]^T \cdot \mathbf{M} \cdot \left[ \mathbf{y}^{(2)} \right] = 1$$

$$\left[ \mathbf{y}^{(1)} \right]^T \cdot \mathbf{K} \cdot \left[ \mathbf{y}^{(2)} \right] = -0 \frac{1}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\left[ \mathbf{y}^{(1)} \right]^T \cdot \mathbf{K} \cdot \left[ \mathbf{y}^{(1)} \right] = 130.6 \frac{1}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\left[ \mathbf{y}^{(2)} \right]^T \cdot \mathbf{K} \cdot \left[ \mathbf{y}^{(2)} \right] = 351.5 \frac{1}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

In generale, le forme modali non risultano invece ortogonali tra loro, salvo il caso particolare in cui le masse siano tutte uguali.



## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

*Ortogonalità rispetto alle matrici M e K – Diagonalizzazione delle matrici **M** e **K***

Posto:  $\Psi = [\psi^{(1)} \quad \psi^{(2)} \quad \dots \quad \psi^{(n)}]$  (Matrice modale non normalizzata)

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa :

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

masse modali  
Matrice di massa principale

$$\Psi^T \mathbf{K} \Psi = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

rigidezze modali  
Matrice di rigidezza principale

NB: Il rapporto  $k_r/m_r$  è una proprietà del sistema, i valori di  $k_r$  ed  $m_r$ , invece, dipendono dal tipo di normalizzazione adottato per le forme modali.

## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

*Ortogonalità rispetto alle matrici M e K*

Se, in particolare, si normalizzano le forme modali in modo che risulti:

$$\mathbf{y}^{(r)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(r)} = 1$$

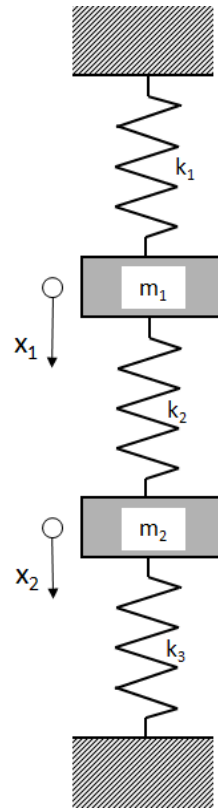
Il prodotto della matrice modale per le matrici di massa e rigidezza diviene:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \text{diag } \Omega_j^2$$

## Esercizio D11

Costruire le matrici spettrale e modale per il sistema dell'esercizio D5 e verificare la capacità di quest'ultima di diagonalizzare le matrici di massa e rigidezza.



$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m_1 := 14 \cdot \text{kg}$$

$$m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$

## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

### *Indipendenza lineare*

Un sistema di vettori è linearmente indipendente se la condizione:

$$\sum_i b_i \mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{0}$$

implica che tutti i  $b_i$  siano uguali a 0.

Si osserva che la condizione è equivalente al sistema lineare, omogeneo:

$$\mathbf{Y}\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

in cui  $\mathbf{b}$  è un vettore che ha come componenti le  $b_i$ . Dato che si ha:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{I}$$

$$\det \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \det \mathbf{Y}^T \det \mathbf{M} \det \mathbf{Y} = \det \mathbf{I} = 1$$

per cui:

$$\det \mathbf{Y} \neq 0$$

e di conseguenza si ha la sola soluzione banale  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$



## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

*Forme modali come «base»*

Date le proprietà di indipendenza lineare, le forme modali costituiscono una “base”, per cui qualsiasi vettore appartenente allo stesso spazio vettoriale può essere espresso come combinazione lineare di esse:

$$\mathbf{V} = \sum_i b_i \mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{Y}\mathbf{b}$$

con i coefficienti  $b_i$  scalari univocamente determinati



## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

*Disaccoppiamento delle equazioni del moto*

Ponendo:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{q}(t) \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}}(t)$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = 0$$

da cui:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathit{diag} \mathbf{\Omega}_j^2 \mathbf{q} = 0$$

che costituisce un **sistema di equazioni disaccoppiate** del tipo:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

Le  $q_i$  sono dette «coordinate modali». La capacità della matrice modale  $\mathbf{Y}$  di diagonalizzare le matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$ , unita alla proprietà di agire come base delle forme modali, consente di disaccoppiare le equazioni del moto.

## ANALISI MODALE – Sistemi non smorzati

### *Autovalori nulli*

Dato che risulta :

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \text{diag } \boldsymbol{\Omega}^2$$

si ha:

$$\det(\mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y}) = \det \mathbf{Y}^T \det \mathbf{K} \det \mathbf{Y} = \det(\text{diag } \boldsymbol{\Omega}^2) = \prod_i \omega_i^2$$

Se la struttura è labile, si ha:

$$\det \mathbf{K} = 0$$

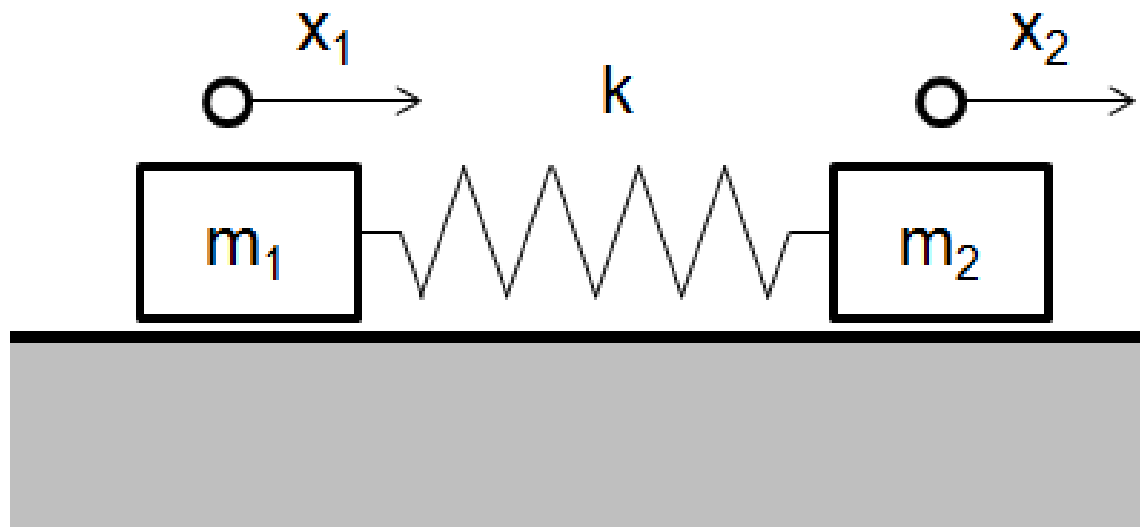
il che implica che alcuni degli autovalori siano nulli. Il numero di autovalori nulli è pari al grado di labilità della struttura

## Esercizio D12

Esempio di sistema con possibilità di moto rigido (labile)

Il sistema mostrato nella Fig., costituito da due masse scorrevoli senza attrito su un piano orizzontale e collegate tra loro da una molla, è chiaramente labile rispetto ad eventuali forze ad esso applicate in senso orizzontale.

Calcolare le pulsazioni proprie e le relative forme modali



## COMANDI ANSYS ANALISI MODALE/1

/SOLU

ANTYPE, MODAL      Definisce il tipo di analisi richiesta

MODOPT, *Method*, *NMODE*, *FREQB*, *FREQE*, *Nrmkey*

- LANB
- SUBSP
- .....

Block-Lanczos (Default)

Subspace

Frequenza iniziale e  
finale per la ricerca dei  
modi

N° modi da estrarre  
(per SUBSP, al massimo n° g.d.l./2)

- OFF: forme modali normalizzate su [M]
- ON: forme modali normalizzate al valore 1

Per Power Dynamics:

- MODOPT, SUBSP
- EQSLV, PCG

## COMANDI ANSYS ANALISI MODALE/2

LUMPM, **OPZ** Attiva la matrice di massa “Lumped”

OFF: matrice “consistent” (default)  
ON: matrice “lumped” (default per “Power Dynamics”)

/POST1

SET,LIST            Gli “n” modi richiesti compaiono come “n” substep del Load step 1

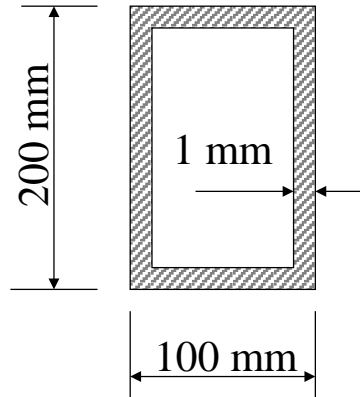
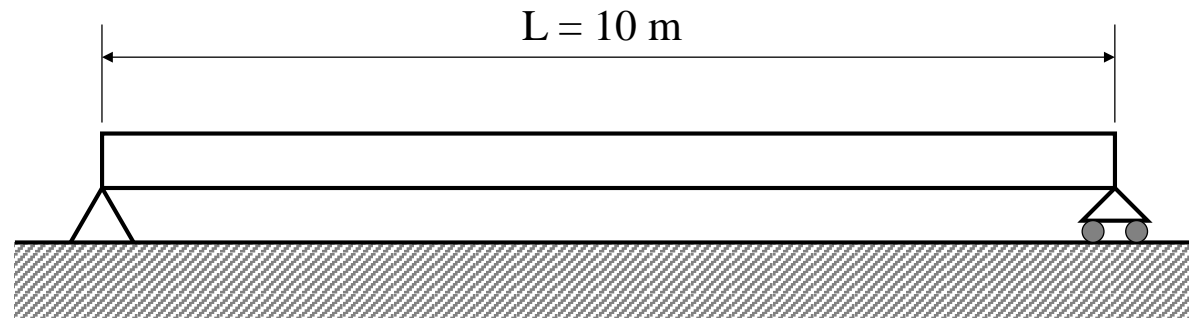
SET,1,n            Carica il modo “n”

PLDISP, PRDISP Rappresentano la deformata



## Esercizio F1

### ANALISI MODALE DI TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA IN 3D

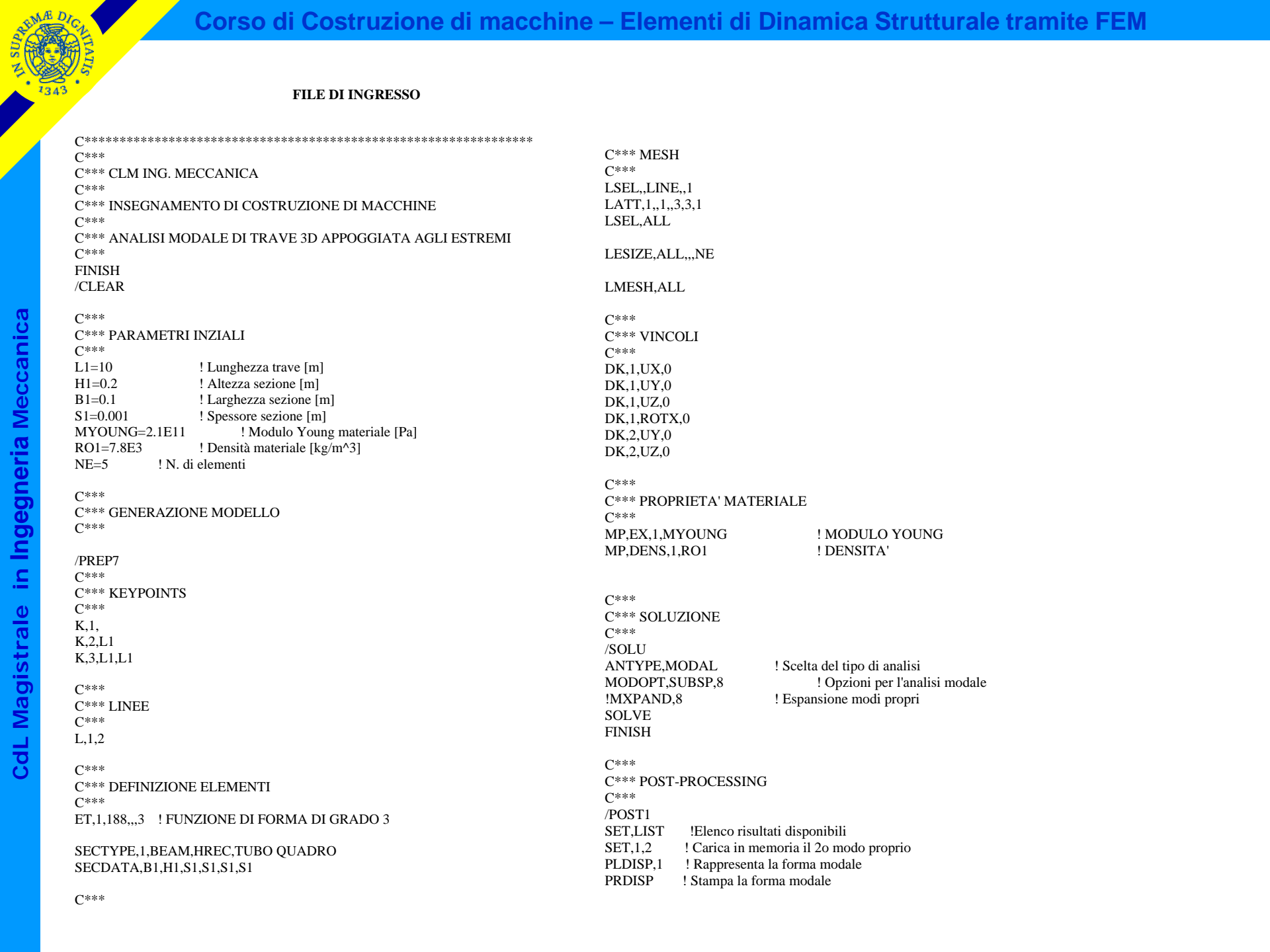


Si conduca l'analisi modale della trave in acciaio riportata in Figura.

Per il modello si utilizzi l'elemento 188 (trave nello spazio).

Una volta condotta l'analisi modale:

- si analizzino le forme modali, cercando di distinguere i modi flessionali sui due piani, da quelli estensionali e da quelli torsionali, cercando di determinare in tutti i casi il numero di “nodi” (punti stazionari)
- si confrontino i risultati ottenuti con quelli forniti dalla teoria della vibrazione delle travi continue
- si verifichi la convergenza di alcune frequenze proprie (es. la 5° flessionale e/o estensionale) al variare del numero di g.d.l. del modello



FILE DI INGRESSO

```

*****
C***
C*** CLM ING. MECCANICA
C***
C*** INSEGNAMENTO DI COSTRUZIONE DI MACCHINE
C***
C*** ANALISI MODALE DI TRAVE 3D APPOGGIATA AGLI ESTREMI
C***
FINISH
/CLEAR

C***
C*** PARAMETRI INZIALI
C***
L1=10           ! Lunghezza trave [m]
H1=0.2         ! Altezza sezione [m]
B1=0.1         ! Larghezza sezione [m]
S1=0.001      ! Spessore sezione [m]
MYOUNG=2.1E11  ! Modulo Young materiale [Pa]
RO1=7.8E3      ! Densità materiale [kg/m^3]
NE=5          ! N. di elementi

C***
C*** GENERAZIONE MODELLO
C***

/PREP7
C***
C*** KEYPOINTS
C***
K,1,
K,2,L1
K,3,L1,L1

C***
C*** LINEE
C***
L,1,2

C***
C*** DEFINIZIONE ELEMENTI
C***
ET,1,188,,,3 ! FUNZIONE DI FORMA DI GRADO 3

SECTYPE,1,BEAM,HREC,TUBO QUADRO
SECDATA,B1,H1,S1,S1,S1,S1

C***

```

```

C*** MESH
C***
LSEL,,LINE,,1
LATT,1,,1,,3,3,1
LSEL,ALL

LESIZE,ALL,,,NE

LMESH,ALL

C***
C*** VINCOLI
C***
DK,1,UX,0
DK,1,UY,0
DK,1,UZ,0
DK,1,ROTX,0
DK,2,UY,0
DK,2,UZ,0

C***
C*** PROPRIETA' MATERIALE
C***
MP,EX,1,MYOUNG           ! MODULO YOUNG
MP,DENS,1,RO1           ! DENSITA'

C***
C*** SOLUZIONE
C***
/SOLU
ANTYPE,MODAL           ! Scelta del tipo di analisi
MODOPT,SUBSP,8        ! Opzioni per l'analisi modale
!MXPAND,8             ! Espansione modi propri
SOLVE
FINISH

C***
C*** POST-PROCESSING
C***
/POST1
SET,LIST               !Elenco risultati disponibili
SET,1,2                ! Carica in memoria il 2o modo proprio
PLDISP,1               ! Rappresenta la forma modale
PRDISP                 ! Stampa la forma modale

```





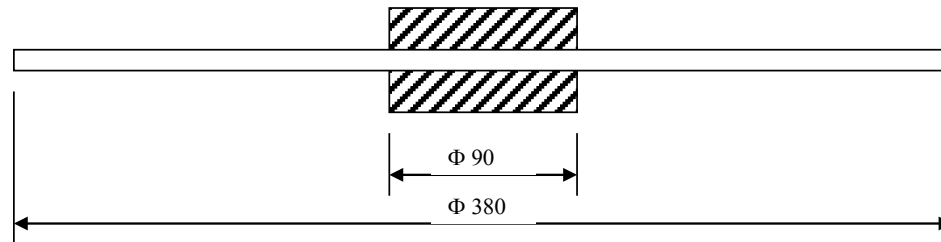
## Esercizio F3

### ANALISI MODALE DI DISCO DI TAGLIO PER CARTIERA

Si costruisca un modello per condurre l'analisi modale del disco di taglio per cartiera mostrato in Figura.

Il disco, in acciaio, ha un diametro esterno di 380 mm, spessore uniforme pari a 1 e 3 mm ed è incastrato al centro in corrispondenza di un diametro di 90 mm.

Si confrontino i valori ottenuti dei modi propri e le relative forme modali con i risultati di rilievi sperimentali riportati nella tabella.



N. diametri nodali	N. circonferenze nodali	Frequenze proprie sper. [Hz] (sp=1 mm)	Frequenze proprie calc. [Hz] (sp=1 mm)	Frequenze proprie sper. [Hz] (sp=3 mm)	Frequenze proprie calc. [Hz] (sp=3 mm)
0	0	39		111	
1		34		100	
2		43		131	
3		86		263	
4		149		-	
5		227		-	
0	1	245		-	
1		290		-	

Si noterà che le frequenze calcolate con il modello EF tendono ad essere più elevate di quelle sperimentali. E' possibile dare una giustificazione fisica a questa osservazione?



## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

Equazione di equilibrio dinamico

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

La procedura di soluzione, come è lecito attendersi, è fortemente influenzata dalla natura della matrice  $\mathbf{C}$ .

In particolare è opportuno distinguere due casi:

- la matrice  $\mathbf{C}$  viene diagonalizzata dalla matrice modale  $\mathbf{Y}$  del sistema **non smorzato** (“**Smorzamento Classico**” o “**Classical Damping**”)
- la matrice  $\mathbf{C}$  **non** viene diagonalizzata dalla matrice modale  $\mathbf{Y}$  (“**Smorzamento Non Classico**” o “**Non Classical Damping**”)

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Classical Damping

In generale

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$$

← Matrice modale sistema non smorzato

non è una matrice diagonale, per cui le equazioni del moto non possono essere disaccoppiate .

Se lo smorzamento è molto piccolo, diviene lecito assumere forme diagonalizzabili della matrice di smorzamento. In tal caso si ha (**Smorzamento Classico o “Classical Damping”**):

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} = \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix} = \text{diag } \mathbf{C}_{jd}$$

In analogia col sistema ad 1 gdl si pone:  $c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Classical Damping

Ponendo:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}}(t) \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}}(t)$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{C}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = 0$$

da cui:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathit{diag}\mathbf{C}_{jd}\mathbf{q} + \mathit{diag}\mathbf{\Omega}_j^2\mathbf{q} = 0$$

che costituisce un **sistema di equazioni disaccoppiate** del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = 0$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Classical Damping

Il sistema di  $n$  equazioni indipendenti (disaccoppiate):

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = 0$$

equivale formalmente ad  $n$  oscillatori smorzati indipendenti, cui corrispondono quindi gli autovalori:

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_{sj}$$

e soluzioni del tipo:

$$q_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \left[ A_{j1} e^{i \omega_{sj} t} + A_{j2} e^{-i \omega_{sj} t} \right]$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Classical Damping

Per quanto riguarda gli autovettori (forme modali) si dimostra che, **nel caso di smorzamento classico, coincidono con quelli del sistema non smorzato.**

$$\left(\mathbf{K} - \omega_{nj}^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{y}^{(j)} = 0 \quad \text{Sistema non smorzato}$$

$$\left(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \mathbf{z}^{(j)} = 0 \quad \text{Sistema smorzato}$$

Ipotizzando che valga la:  $\mathbf{z}^{(j)} = \mathbf{y}^{(j)}$  si ottiene:

$$\left(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \mathbf{y}^{(j)} = \left(\mathbf{K} - \omega_{nj}^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{y}^{(j)}$$

$$\lambda_j^2 \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)} + \lambda_j \mathbf{C} \mathbf{y}^{(j)} = -\omega_{nj}^2 \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)}$$

Premoltiplicando per la trasposta della forma modale  $\mathbf{y}^{(j)}$ :

$$\mathbf{y}^{(j)T} \lambda_j^2 \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)} + \mathbf{y}^{(j)T} \lambda_j \mathbf{C} \mathbf{y}^{(j)} = -\omega_{nj}^2 \mathbf{y}^{(j)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)}$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Classical Damping

$$\lambda_j^2 \mathbf{y}^{(j)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)} + \lambda_j \mathbf{y}^{(j)T} \mathbf{C} \mathbf{y}^{(j)} + \omega_{nj}^2 \mathbf{y}^{(j)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(j)} = \lambda_j^2 1 + \lambda_j c_{jd} + \omega_{nj}^2 1 = 0$$

$$\lambda_j^2 + 2\xi_j \omega_j \lambda_j + \omega_{nj}^2 = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_{nj} \pm \sqrt{(\xi_j \omega_{nj})^2 - \omega_{nj}^2} = -\xi_j \omega_{nj} \pm \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

Si dimostra quindi che il problema agli autovalori del sistema smorzato è soddisfatto dagli **autovettori del sistema non smorzato** e da autovalori dati dalla relazione precedente.

$$(\lambda_j^2 \mathbf{M} + \lambda_j \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{y}^{(j)} = 0$$

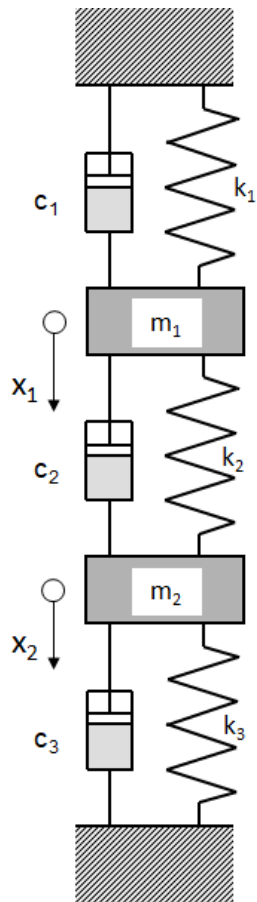
$$\lambda_j = -\xi_j \omega_{nj} \pm \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$



## Esercizio D12

Un modo semplice per costruire una matrice di smorzamento «classico» è quello di partire da una matrice  $\mathbf{C}_d$  diagonale e ricostruire la matrice di smorzamento  $\mathbf{C}$  compatibile con quest'ultima tramite la:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{Y}^T)^{-1} \mathbf{C}_d \mathbf{Y}^{-1}$$



Dato il sistema in Figura, identico a quello dell'esercizio D5 salvo che per l'introduzione dei tre smorzatori viscosi, e dati:

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 := 0.1$$

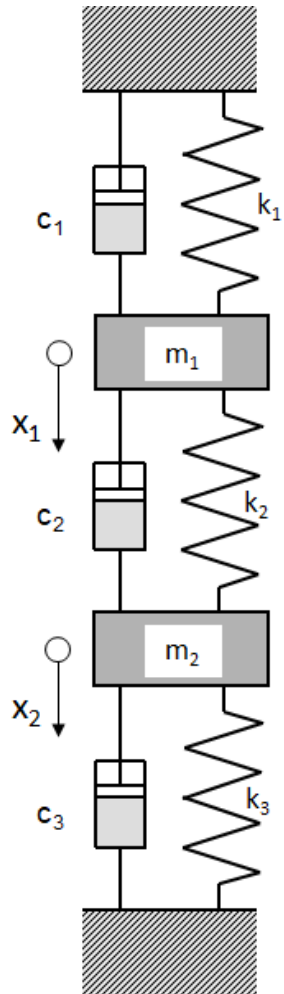
$$\xi_2 := 0.075$$

determinare il valore da attribuire alla costante «c» dei tre smorzatori per ottenere la matrice  $\mathbf{C}_d$  assegnata.



## Esercizio D13

Dato il sistema mostrato in Figura e facendo uso dei dati relativi all'esercizio precedente, si determinino le pulsazioni proprie e le relative forme modali



## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

### Classical Damping

Si dimostra che c.n.s. perché la matrice di smorzamento sia diagonalizzabile è che valga la :

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$$

una forma della matrice di smorzamento che rispetta la precedente condizione è data da:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{l=0}^m \alpha_l (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^l$$

Se si pone  $m=1$ , si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$



## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

### Classical Damping – Smorzamento proporzionale

Combinando:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

con:

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(s)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(r)} = 0 & \text{se } \omega_s \neq \omega_r \\ \mathbf{y}^{(s)T} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(r)} \neq 0 & \text{se } \omega_s = \omega_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(s)T} \mathbf{K} \mathbf{y}^{(r)} = 0 & \text{se } \omega_s \neq \omega_r \\ \mathbf{y}^{(s)T} \mathbf{K} \mathbf{y}^{(r)} \neq 0 & \text{se } \omega_s = \omega_r \end{cases}$$

si ottiene:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} = \alpha \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} + \beta \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} = \alpha \mathbf{I} + \beta \cdot \text{diag } \omega_{nj}^2$$

$$c_{rd} = \alpha + \beta \omega_{nr}^2$$



# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Classical Damping – Smorzamento proporzionale

$$c_{rd} = \alpha + \beta\omega_{nr}^2$$

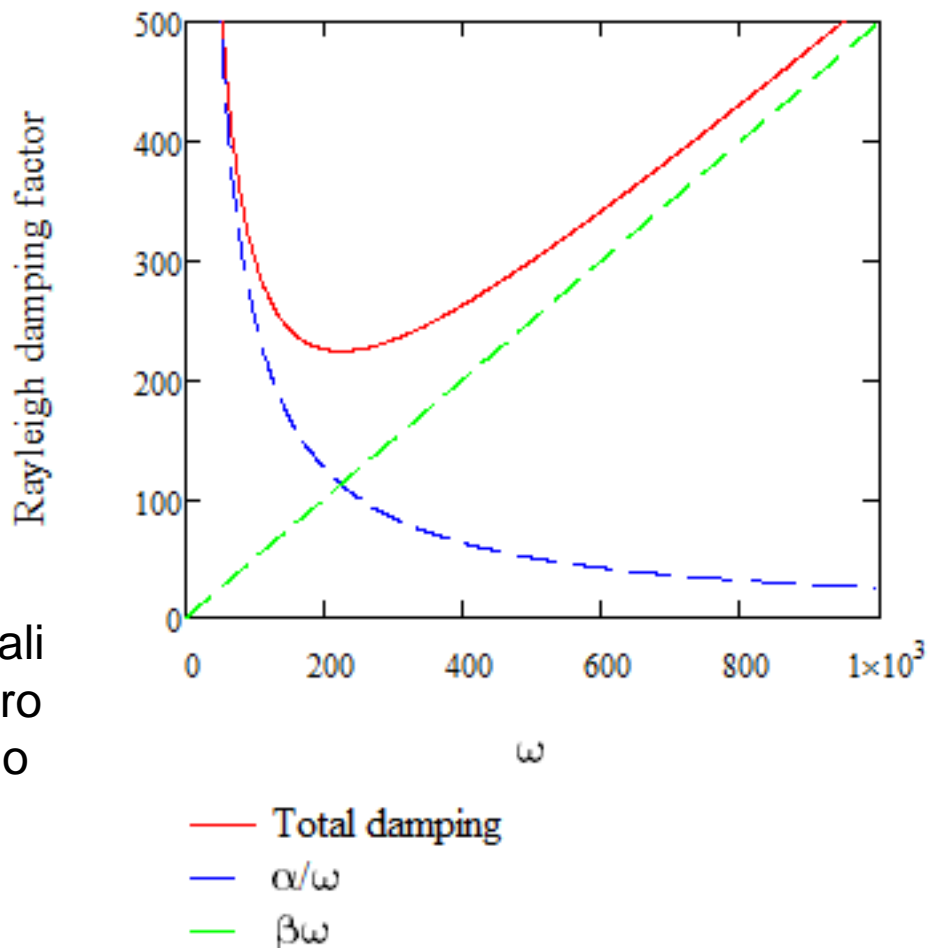
Combinando con :  $c_{rd} = 2\xi_r\omega_{nr}$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_{nr} = \alpha + \beta\omega_{nr}^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_{nr}} + \beta\omega_{nr} \right)$$

Per definire  $\alpha$  e  $\beta$  occorrono almeno due misure sperimentali di  $\xi$  (se si dispone di un numero maggiore di misure, si possono adottare tecniche di best-fit)





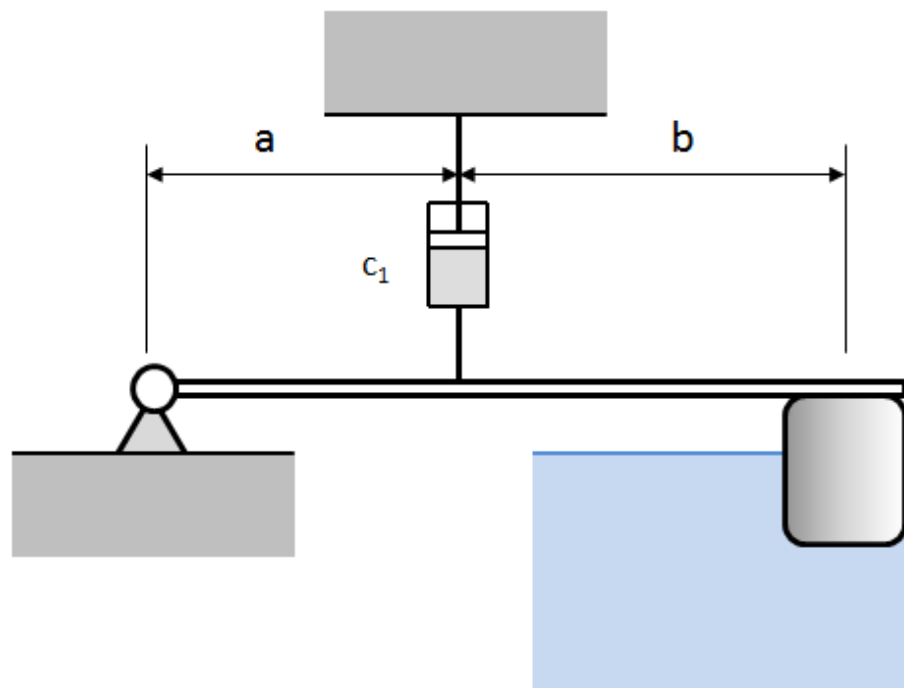
## Esercizio D14

### OSCILLAZIONI SMORZATE DI MISURATORE DI LIVELLO

Si consideri il misuratore di livello di un serbatoio, recante all'estremità un galleggiante immerso in acqua

Valutare:

- il valore da attribuire al coefficiente di smorzamento dello smorzatore  $c_1$  affinché lo smorzamento relativo sia pari ad 1
- il valore da attribuire al coefficiente di smorzamento  $c_1$  affinché l'oscillazione massima dopo una perturbazione (approssimata col valore a 1 periodo) risulti pari al 10% dello spostamento iniziale imposto



#### DATI

$a = 25 \text{ mm}$	distanza tra la cerniera ed il punto di applicazione dello smorzatore
$b = 35 \text{ mm}$	distanza tra i punti di attacco dello smorzatore e del galleggiante
$\rho_A = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Densità del liquido
$M_G = 0.5 \text{ kg}$	Massa del galleggiante
$V_G = 1 \text{ l}$	Volume del galleggiante
$A_G = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$	Sezione trasversale del galleggiante
$A_O = 0.1$	Ampiezza relativa della prima oscillazione



## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento Non Classical Damping

Nel caso di Non Classical Damping la matrice:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$$

non risulta diagonale. In questo caso, la soluzione del problema, sia dell'analisi modale che della risposta forzata, può essere affrontato in due modi diversi:

- soluzione diretta del sistema completo in campo complesso
- riduzione alla forma diagonale della matrice  $\mathbf{C}_d$ , trascurando i termini fuori della diagonale stessa



# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Non Classical Damping

Equazione di equilibrio dinamico

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{z}e^{\lambda t}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \lambda\mathbf{z}e^{\lambda t}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \lambda^2\mathbf{z}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2\mathbf{M}\mathbf{z}e^{\lambda t} + \lambda\mathbf{C}\mathbf{z}e^{\lambda t} + \mathbf{K}\mathbf{z}e^{\lambda t} = 0$$

da cui:

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{z} = 0$$

## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento Non Classical Damping

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{z} = 0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) = 0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2(n-1)} + \dots + a_{2(n-1)} \lambda^2 + a_{2n} = 0$$

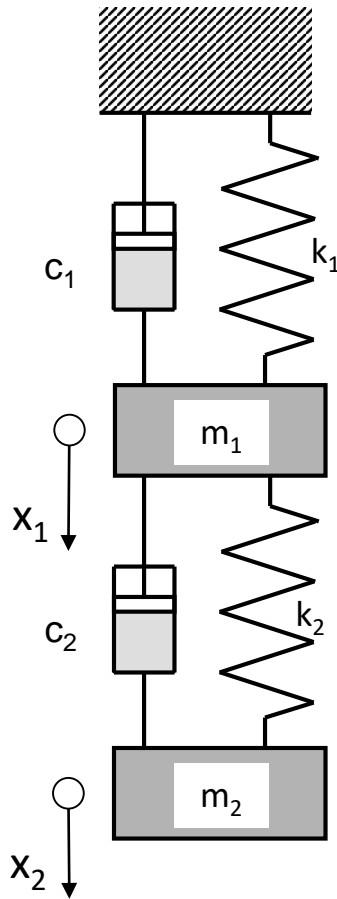
$n$  coppie di radici (autovalori)  $\lambda_j$  complesse coniugate, che sostituite, forniscono  $n$  coppie di autovettori  $\mathbf{z}_j$ , anch'essi complessi coniugati. Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente (per piccoli  $n$ ) o con metodi numerici.





## Esercizio D15

Dato il sistema mostrato in Figura e facendo uso dei dati forniti, si determinino le pulsazioni proprie e le relative forme modali



### Dati iniziali

$$k_1 := 1000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m_1 := 10 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 5 \cdot \text{kg}$$

$$c_1 := 90 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad c_2 := 10 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$



## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento Non Classical Damping – Spazio degli stati

Una tecnica di soluzione diretta del problema agli autovalori in campo complesso è quella della **Analisi nello Spazio degli Stati (State Space Analysis)**

Vettore della variabili di stato ( $2n$  componenti):

$$\mathbf{h}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}$$

La variabili di stato (spostamenti e velocità) definiscono completamente la situazione di un sistema dinamico, in quanto quantificano il suo contenuto energetico (energia cinetica e potenziale). Per poter risolvere, si aggiungono alle  $n$  equazioni di equilibrio,  $n$  ulteriori equazioni sempre verificate:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = 0$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Non Classical Damping – Spazio degli stati

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} = 0$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = 0$$

Posto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{B}\mathbf{h} = 0$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Non Classical Damping – Spazio degli stati

Assumendo una soluzione del tipo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}e^{st}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = s\mathbf{a}e^{st}$$

si ottiene:

$$\mathbf{h}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}e^{st} \\ s\mathbf{a}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ s\mathbf{a} \end{Bmatrix} e^{st} = \mathbf{a}e^{st}$$

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \begin{Bmatrix} s\mathbf{a}e^{st} \\ s^2\mathbf{a}e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\mathbf{a} \\ s^2\mathbf{a} \end{Bmatrix} e^{st} = s\mathbf{a}e^{st}$$

## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

### Non Classical Damping – Spazio degli stati

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(t) &= \boldsymbol{\alpha} e^{st} \\ \dot{\mathbf{h}}(t) &= s\boldsymbol{\alpha} e^{st} \end{aligned} \quad \text{in :} \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{B}\mathbf{h} = 0$$

si ottiene:

$$s\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} e^{st} + \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} e^{st} = 0$$

ovvero:

$$(\mathbf{sA} + \mathbf{B})\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \text{problema agli autovalori in forma generalizzata}$$

da cui:

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = -s\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = -s\boldsymbol{\alpha} \quad \text{problema agli autovalori standard}$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Non Classical Damping – Spazio degli stati

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = -s\boldsymbol{\alpha}$$

N coppie autovalori complessi coniugati + N coppie autovettori complessi coniugati

$$s_i, \mathbf{z}^{(i)}$$

autovalore +  
autovettore

$$\bar{s}_i, \bar{\mathbf{z}}^{(i)}$$

autovalore + autovettore  
complessi coniugati

Autovettori completi nello spazio delle variabili di stato:

$$\mathbf{w}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}^{(i)} \\ s_i \mathbf{z}^{(i)} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{w}}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{z}}^{(i)} \\ \bar{s}_i \bar{\mathbf{z}}^{(i)} \end{Bmatrix}$$

### ***Esempio - Analisi modale per sistema a 2 gdl con smorzamento non classico nello spazio degli stati***

Costruzione della matrici dello spazio degli stati.

$$[A_1] := \text{augment} \left( \begin{array}{c} \frac{C}{N} \\ \frac{M}{kg} \\ \frac{m}{s} \end{array}, [\text{Zero}] \right) \quad [\text{Zero}] := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [A_2] := \text{augment} \left( \frac{M}{kg}, [\text{Zero}] \right)$$

$$[A] := \text{stack}([A_1], [A_2]) = \begin{pmatrix} 100 & -10 & 10 & 0 \\ -10 & 10 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Matrice A}$$

$$[B_1] := \text{augment} \left( \begin{array}{c} \frac{K}{N} \\ \frac{m}{m} \end{array}, [\text{Zero}] \right) \quad [B_2] := \text{augment} \left( [\text{Zero}], \frac{-M}{kg} \right)$$

$$[B] := \text{stack}([B_1], [B_2]) = \begin{pmatrix} 2500 & -1500 & 0 & 0 \\ -1500 & 1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{Matrice B}$$



## Ricerca degli autovalori

$$[C] := -([A])^{-1} \cdot [B]$$

$$\text{rad}_{10} := \text{eigenvals}([C]) = \begin{pmatrix} -3.3649226 + 21.3816647i \\ -3.3649226 - 21.3816647i \\ -2.6350774 + 7.5558423i \\ -2.6350774 - 7.5558423i \end{pmatrix}$$

$$\text{rad}_1 := \text{stack}(\text{submatrix}(\text{rad}_{10}, 3, 4, 1, 1), \text{submatrix}(\text{rad}_{10}, 1, 2, 1, 1)) = \begin{pmatrix} -2.6350774 + 7.5558423i \\ -2.6350774 - 7.5558423i \\ -3.3649226 + 21.3816647i \\ -3.3649226 - 21.3816647i \end{pmatrix}$$

Si constata come gli autovalori siano gli stessi ottenuti nell'esempio precedente tramite soluzione diretta





## Ricerca degli autovettori

$$V_1 := \text{eigenvec}([C], \text{rad}_{1_1}) = \begin{pmatrix} 0.0670141 - 0.0425185i \\ 0.0872485 - 0.0382814i \\ 0.1446753 + 0.6183878i \\ 0.0593413 + 0.7601104i \end{pmatrix}$$

$$V_2 := \text{eigenvec}([C], \text{rad}_{1_2}) = \begin{pmatrix} 0.0670141 + 0.0425185i \\ 0.0872485 + 0.0382814i \\ 0.1446753 - 0.6183878i \\ 0.0593413 - 0.7601104i \end{pmatrix}$$

$$V_3 := \text{eigenvec}([C], \text{rad}_{1_3}) = \begin{pmatrix} -0.0240019 - 0.0034764i \\ 0.0375497 - 0.0114794i \\ 0.1550957 - 0.5015022i \\ 0.119096 + 0.8415029i \end{pmatrix}$$

$$V_4 := \text{eigenvec}([C], \text{rad}_{1_4}) = \begin{pmatrix} -0.0240019 + 0.0034764i \\ 0.0375497 + 0.0114794i \\ 0.1550957 + 0.5015022i \\ 0.119096 - 0.8415029i \end{pmatrix}$$



Si constata immediatamente come i primi due termini degli autovettori corrispondano esattamente agli autovettori trovati nel problema precedente. Infatti, per l'autovettore  $V_1$ , il rapporto tra lo spostamento della massa 2 e quello della massa 1 è pari a:

$$r_{1SS} := \frac{V_{1_2}}{V_{1_1}} = 1.1866784 + 0.1816688i$$

identico al rapporto  $r_1$  calcolato in precedenza

$$r_1 = 1.1866784 + 0.1816688i$$

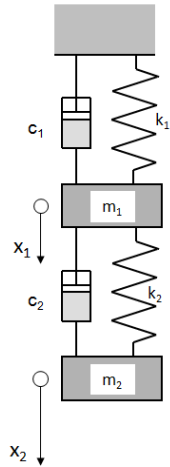
Si vede inoltre immediatamente che i secondi due termini degli autovettori corrispondono alle espressioni viste in precedenza

$$V_{1_1} \cdot \text{rad}_{1_1} = 0.1446753 + 0.6183878i = \quad V_{1_3} = 0.1446753 + 0.6183878i$$

$$V_{1_2} \cdot \text{rad}_{1_1} = 0.0593413 + 0.7601104i = \quad V_{1_4} = 0.0593413 + 0.7601104i$$

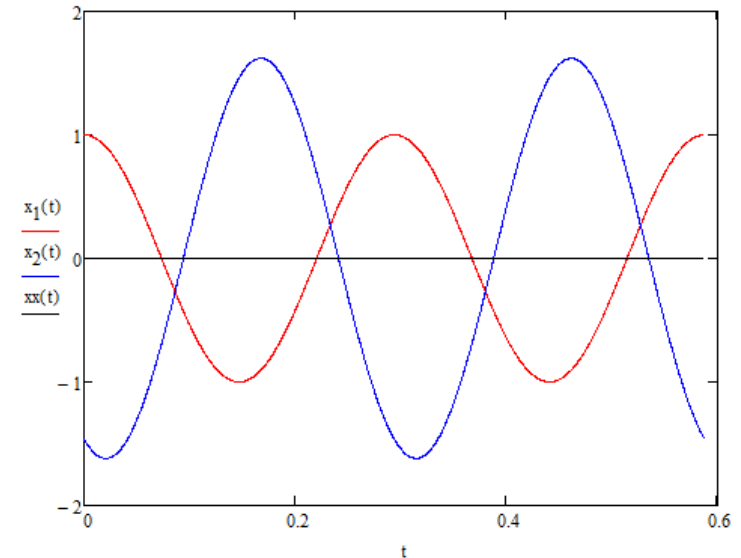
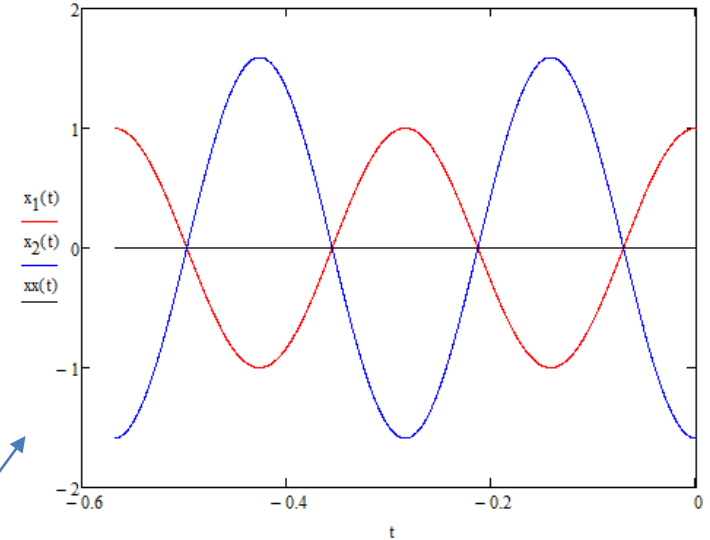
# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

## Considerazioni sulle forme modali



Moto masse 1 e 2 in accordo con la forma modale del secondo modo proprio

Smorzamento	Autovalori	Autovettori
Assente	$n$ coppie di autovalori complessi coniugati senza parte reale	$n$ autovettori reali
Classico	$n$ coppie di autovalori complessi coniugati con parte reale negativa	$n$ autovettori reali
Non classico	$n$ coppie di autovalori complessi coniugati con parte reale negativa	$n$ coppie di autovettori complessi coniugati



**ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento**

Non Classical Damping – Errore commesso trascurando i termini di  $\mathbf{C}_d$  fuori diagonale

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}$$

sono «trascurabili», si può assumere per essa una forma diagonale:

$$\mathbf{C}_d \approx \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \quad n \leq N$$

In questo caso risultano direttamente applicabili le tecniche di soluzione adottate per il Classical Damping.

Nel seguito si cercherà di fornire indicazioni circa l'effettiva importanza quantitativa dei termini fuori diagonale tramite un esempio diretto.

## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

Non Classical Damping – Errore commesso trascurando i termini di  $\mathbf{C}_d$  fuori diagonale

Una quantificazione dell'importanza relativa dei termini fuori diagonale può essere data dal cosiddetto **Coefficiente di Accoppiamento**  $\Xi$ :

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} C_{d,11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & C_{d,ii} & \dots & C_{d,ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & C_{d,jj} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{d,NN} \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \max \left( \frac{C_{d,ij}^2}{C_{d,ii} C_{d,jj}} \right)$$

$$\zeta = \sqrt{\Xi}$$

$$C_{d,ij} \approx \zeta C_{d,ii}$$

## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

Non Classical Damping – Errore commesso trascurando i termini di  $\mathbf{C}_d$  fuori diagonale

Si assume una matrice di smorzamento principale del tipo:

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & -\zeta\sqrt{4\xi^2\omega_{n1}\omega_{n2}} \\ -\zeta\sqrt{4\xi^2\omega_{n1}\omega_{n2}} & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

si conduce l'analisi modale del sistema, utilizzando una matrice di smorzamento data da:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}^T \mathbf{C}_d \mathbf{Y}^{-1}$$

ed ottenendo :

$$\omega_{1,true}, \omega_{2,true}, y_{true}^{(1)}, y_{true}^{(2)}, r_{1,true} = \frac{y_{true,2}^{(1)}}{y_{true,1}^{(1)}}, r_{2,true} = \frac{y_{true,2}^{(2)}}{y_{true,1}^{(2)}}$$

Si calcolano quindi gli stessi parametri per il sistema dinamico avente la stessa matrice  $\mathbf{C}_d$ , nella quale si trascurino i termini fuori diagonale, ottenendo:

$$\omega_{1,diag}, \omega_{2,diag}, y_{diag}^{(1)}, y_{diag}^{(2)}, r_{1,diag} = \frac{y_{diag,2}^{(1)}}{y_{diag,1}^{(1)}}, r_{2,diag} = \frac{y_{diag,2}^{(2)}}{y_{diag,1}^{(2)}}$$

# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

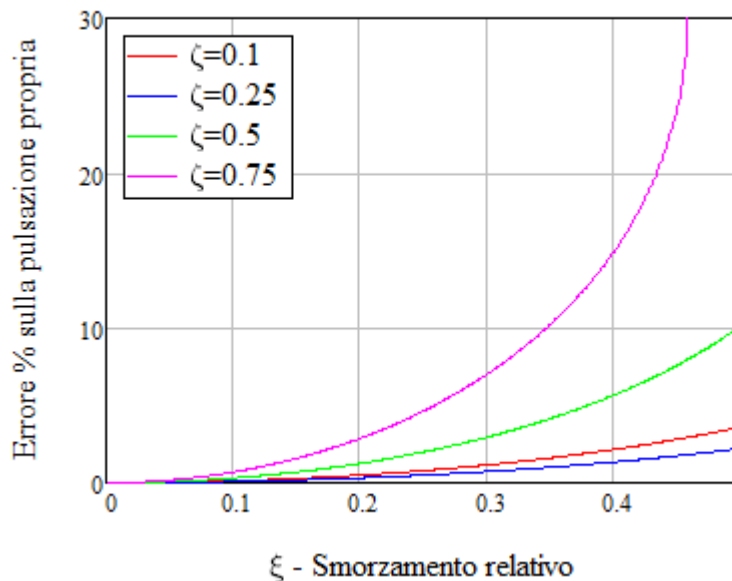
Non Classical Damping – Errore commesso trascurando i termini di  $\mathbf{C}_d$  fuori diagonale

Si definisce quindi un primo parametro di errore:

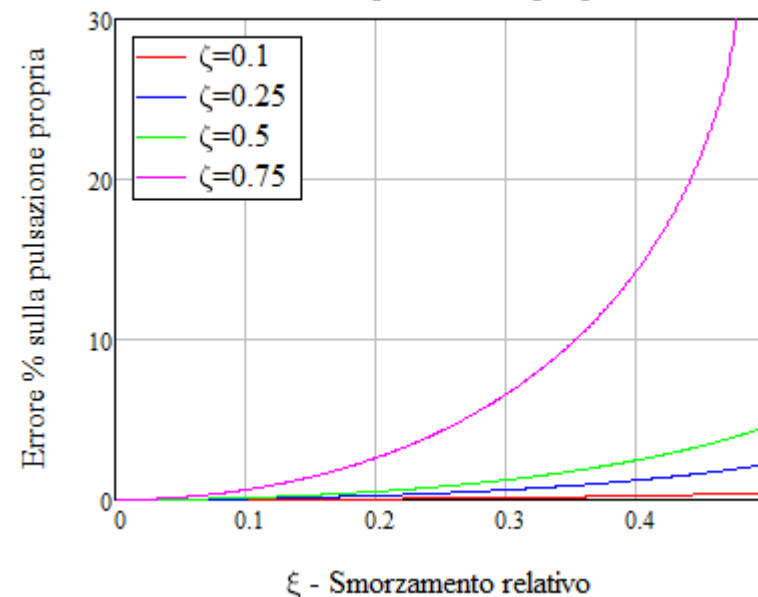
$$Err_{\omega}(\xi, \zeta) = \left| \frac{\omega_{i,true} - \omega_{i,diag}}{\omega_{i,true}} \right| \cdot 100$$

*errore sul valore delle pulsazioni proprie*

Prima pulsazione propria



Seconda pulsazione propria



L'errore commesso sul valore delle pulsazioni proprie appare trascurabile per valori di  $\xi < 0.1$  e di  $\zeta$  fino a 0.5.

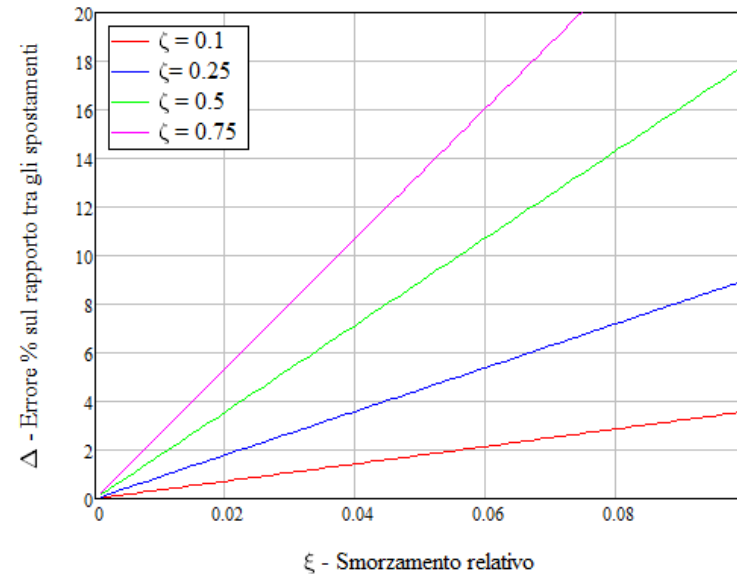
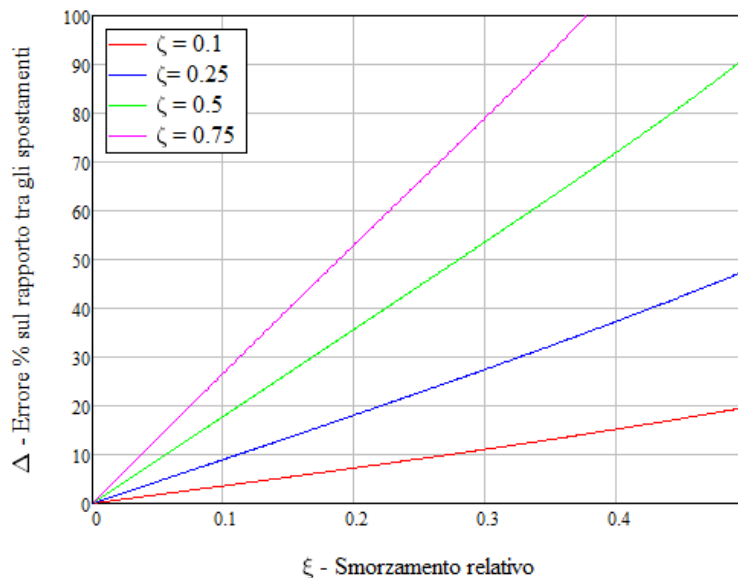
# ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

Non Classical Damping – Errore commesso trascurando i termini di  $\mathbf{C}_d$  fuori diagonale

Si definisce un ulteriore parametro di errore:

$$Err_r(\xi, \zeta) = \max \left( \left| \frac{r_{1,true} - r_{1,diag}}{r_{1,true}} \right|, \left| \frac{r_{2,true} - r_{2,diag}}{r_{2,true}} \right| \right) \cdot 100$$

*errore massimo sul rapporto tra gli spostamenti nelle forme modali*



L'errore commesso sul rapporto  $r$  appare trascurabile per valori di  $\xi < 0.1$  e per valori di  $\zeta$  fino a 0.1.



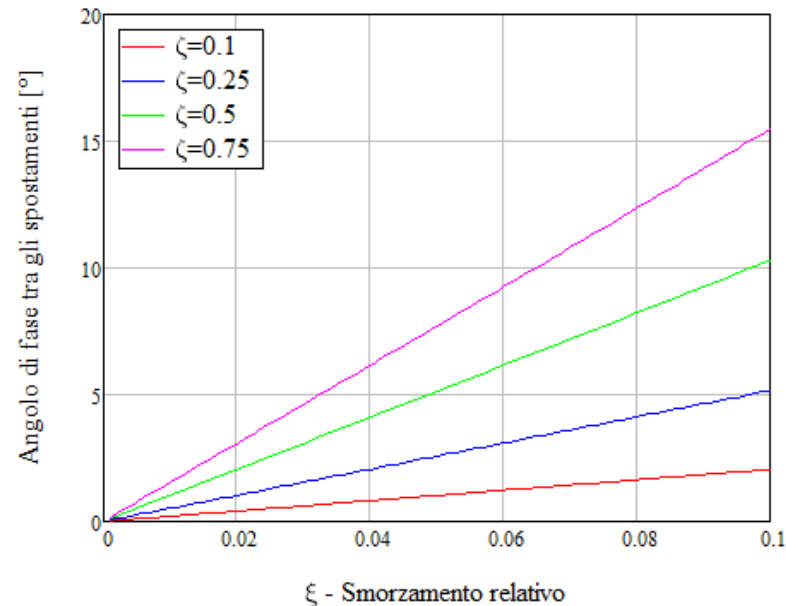
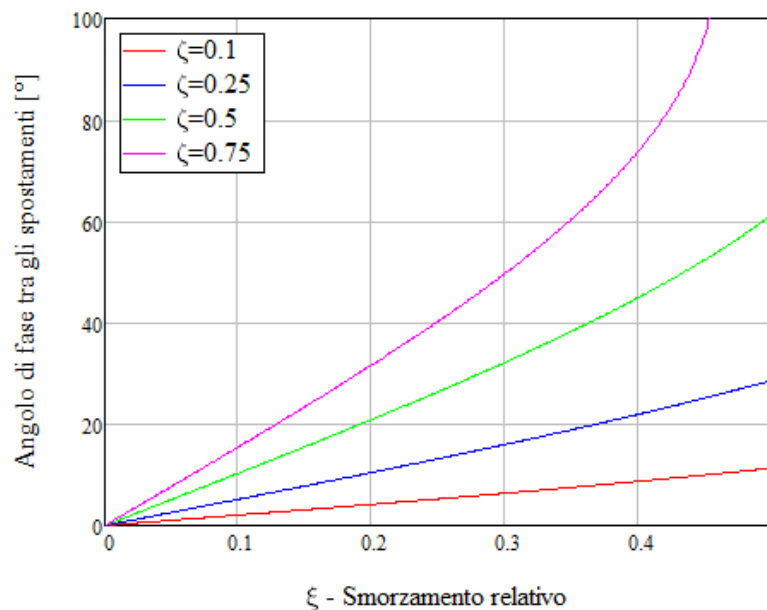


## ANALISI MODALE – Sistemi con smorzamento

Non Classical Damping – Errore commesso trascurando i termini di  $\mathbf{C}_d$  fuori diagonale

Si definiscono quindi i seguenti parametri di errore:

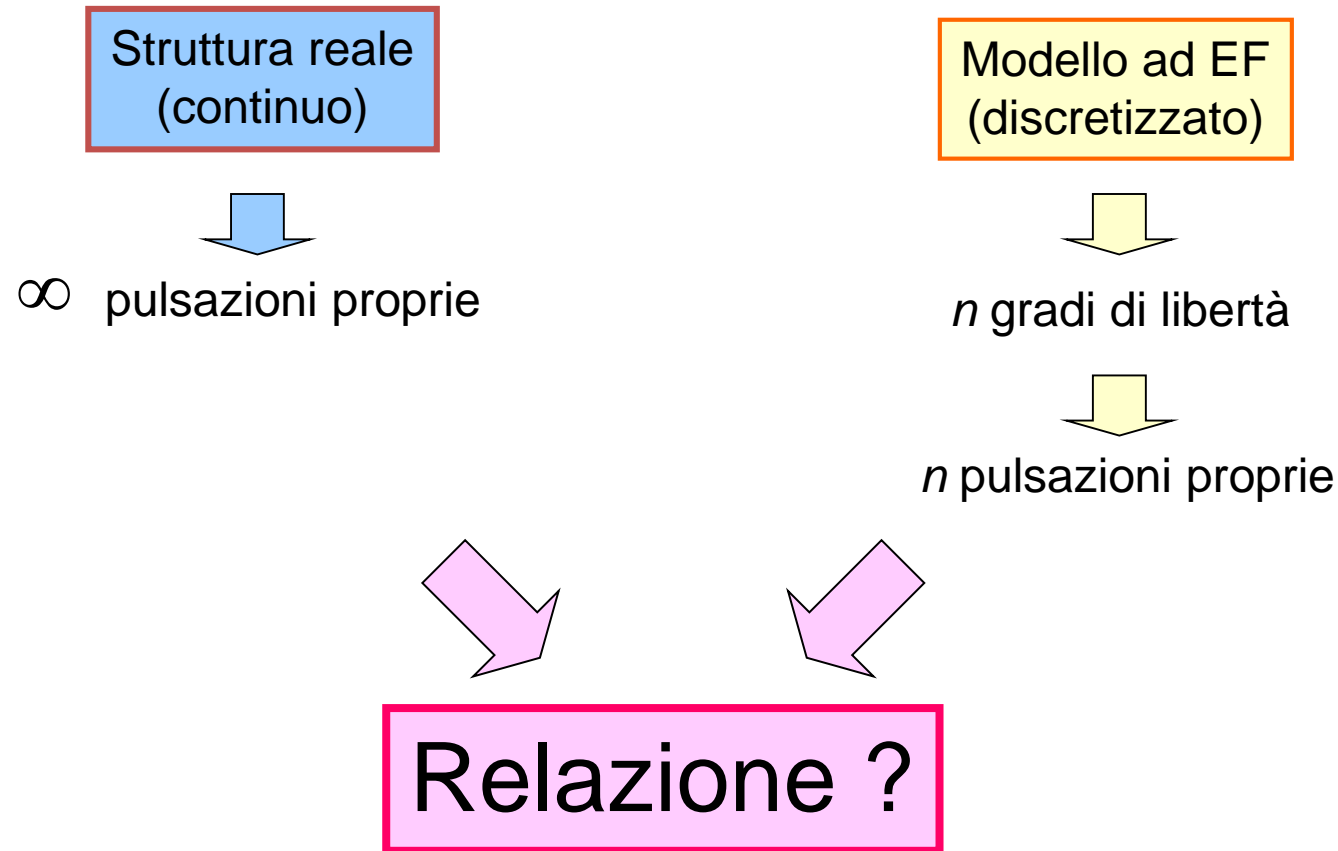
*angolo di fase tra gli spostamenti (non presente nel caso di smorzamento classico o nullo)*



L'angolo di fase si mantiene al di sotto di  $10^\circ$  per valori di  $\xi < 0.1$  e per valori di  $\zeta$  fino a 0.25.



## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

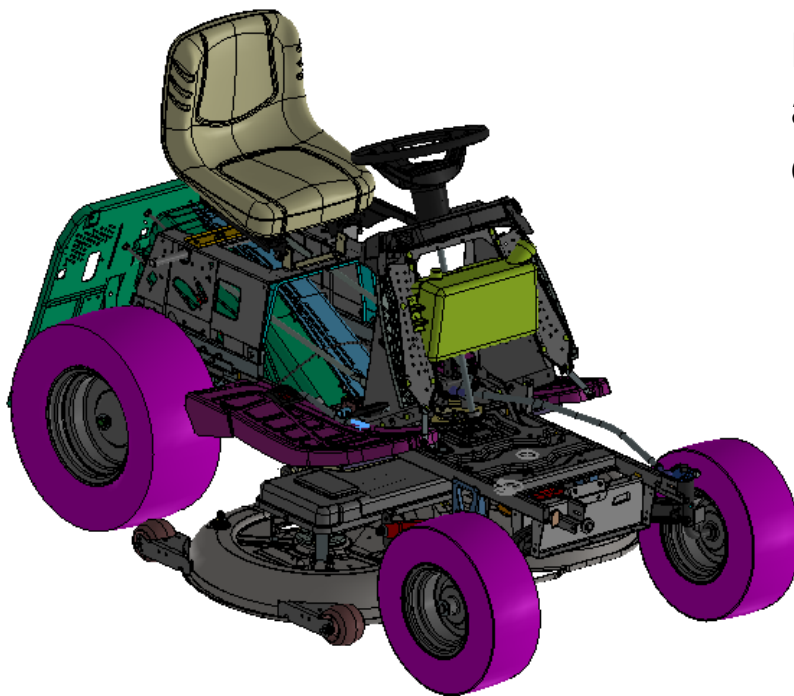


# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

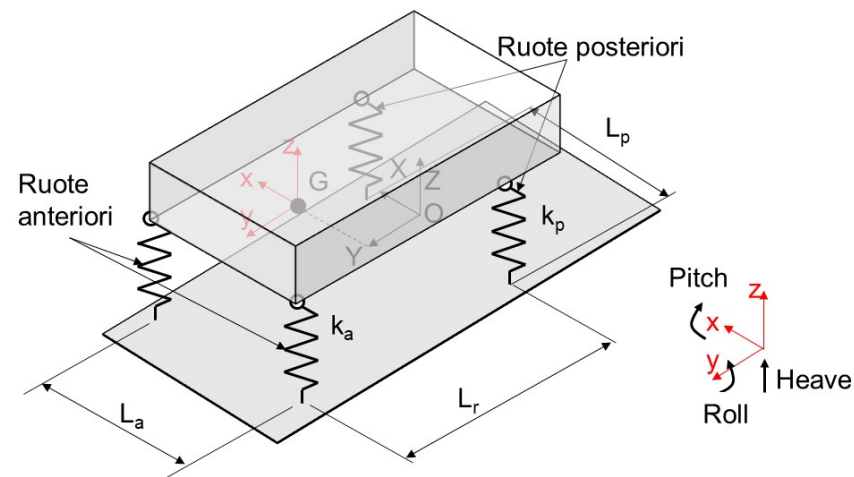
## *Sistemi con elasticità concentrata*

La corrispondenza dipende da quanto il modello a parametri concentrati si adatta a rappresentare l'effettivo comportamento della struttura.

Trattorino rasaerba: il telaio, cui sono fissate le masse (motore, lame, etc.) è molto rigido se paragonato ai pneumatici.

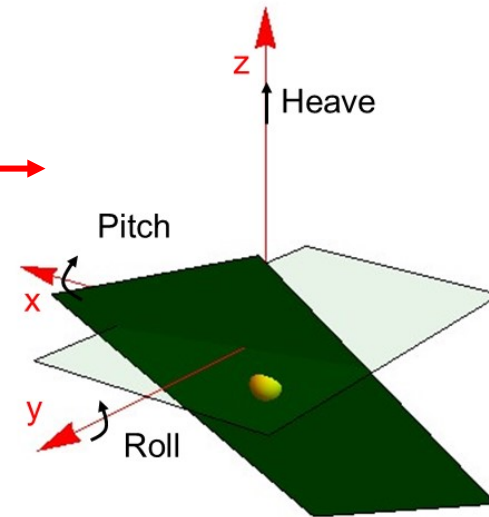
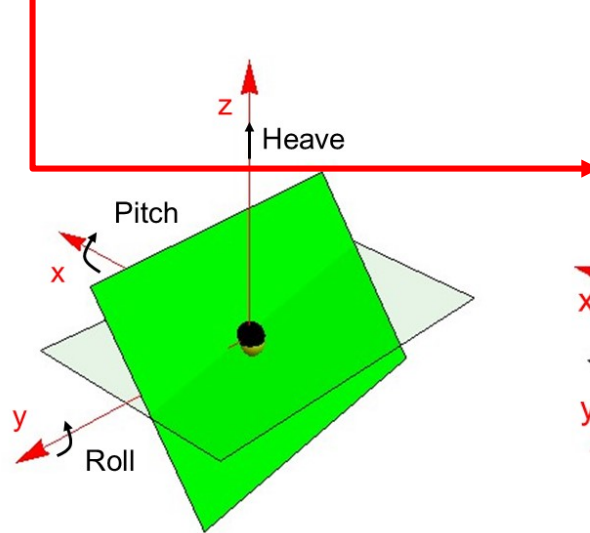
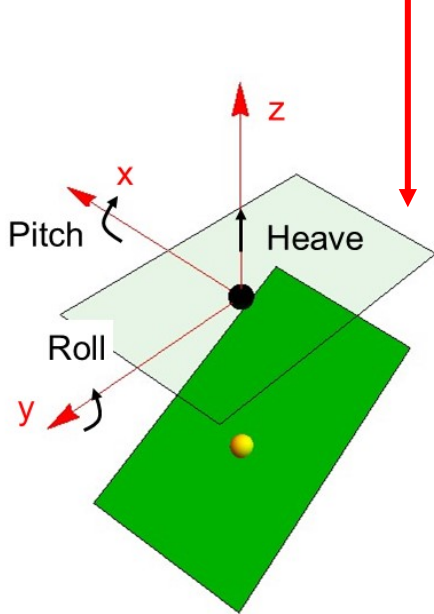


Le prime pulsazioni proprie si possono accuratamente calcolare con un modello di corpo rigido su supporti elastici.



# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

Mode index	Mode shape	Natural frequency (Hz)	Heave	Pitch	Roll
1	Heave and pitch	7.8	-0.82	-0.58	0.0052
2	Roll	11.1	-0.022	0.125	-0.99
3	Pitch and roll	11.2	-0.153	0.92	0.36





# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

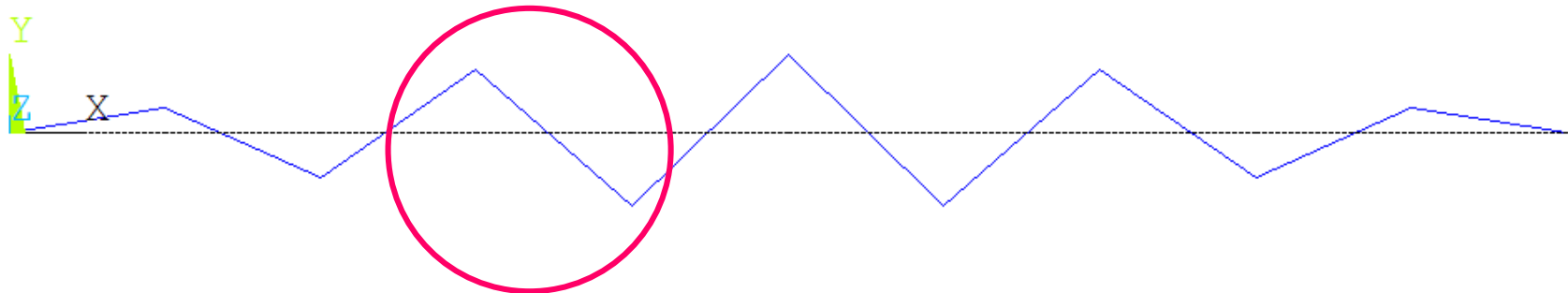
## *Sistemi continui a massa distribuita*

Tipico andamento spaziale delle Forme modali

*Trave appoggiata, 10 elementi*



9° modo

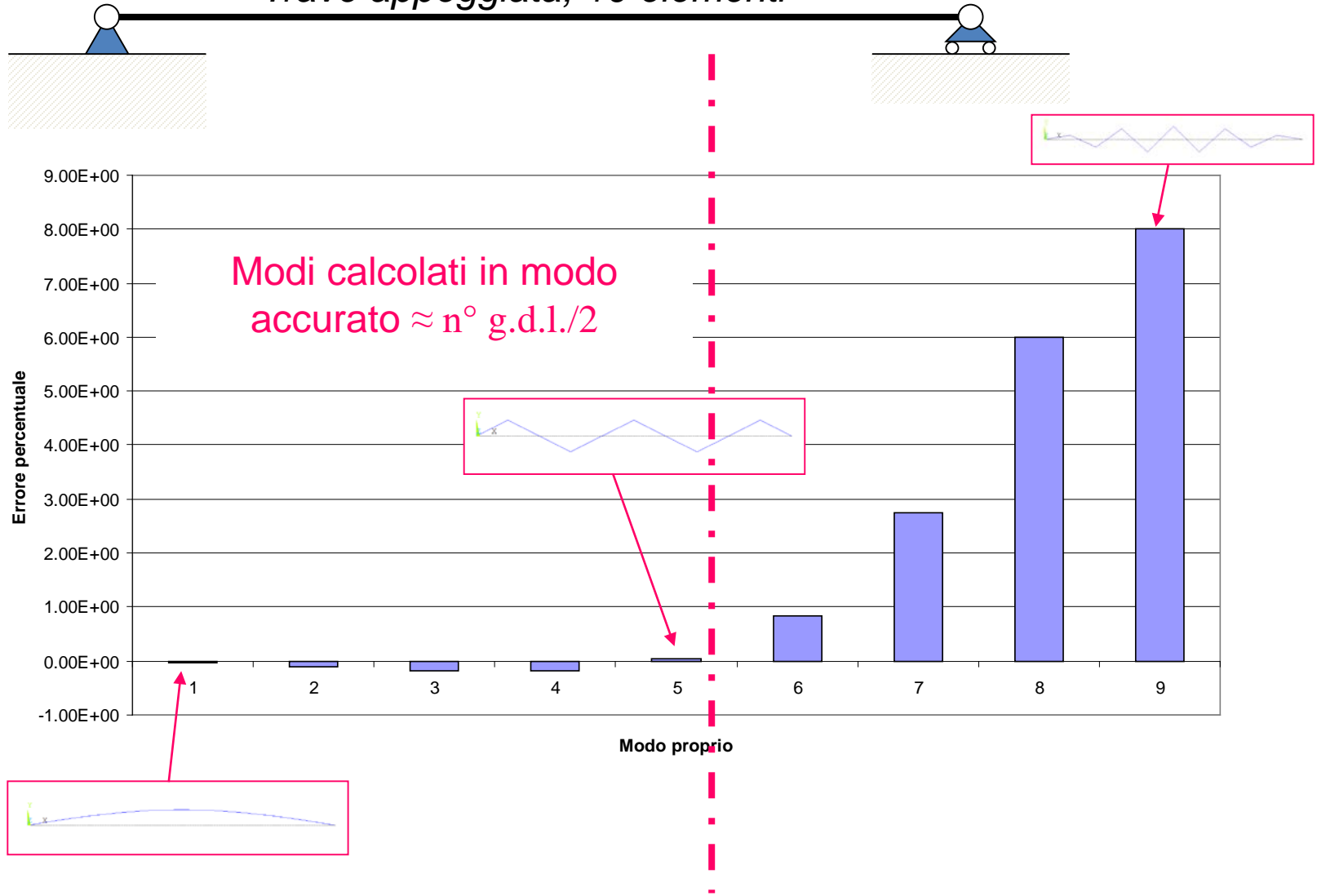


1 solo elemento: rappresentazione poco accurata del campo di velocità ed accelerazione

# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

## *Sistemi continui a massa distribuita*

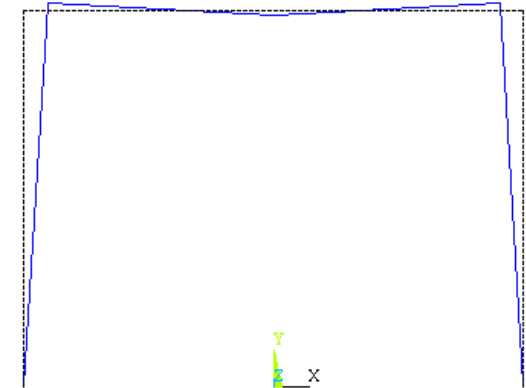
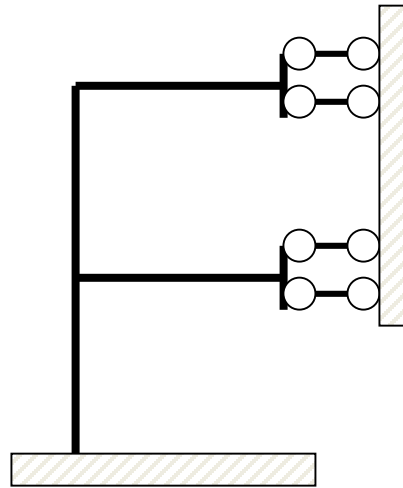
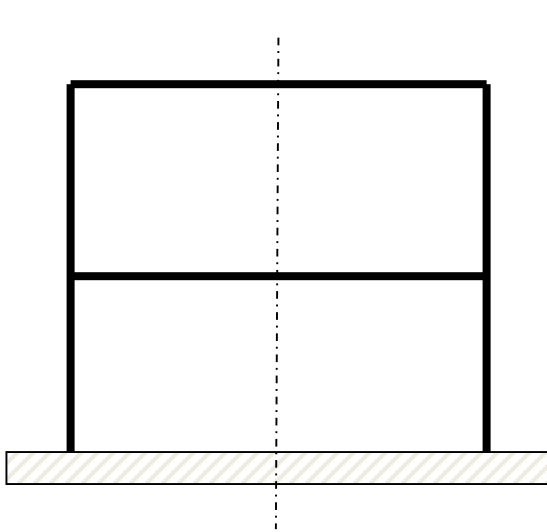
Trave appoggiata, 10 elementi



# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

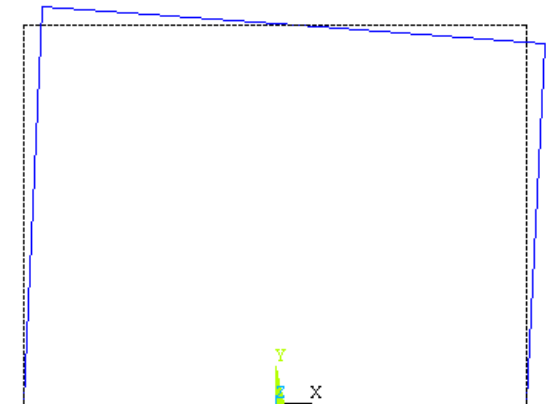
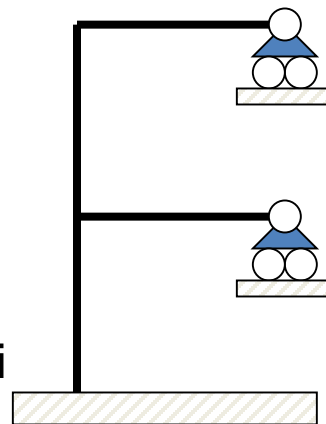
## *Simmetrie strutturali*

Se si usano considerazioni di simmetria per ridurre le dimensioni di un modello, si otterranno solo i modi propri le cui forme modali rispettano la stessa simmetria.



In una struttura simmetrica le forme modali sono simmetriche o anti-simmetriche.

Esse possono quindi essere ottenute tutte, combinando un'analisi con vincoli di simmetria con una con vincoli di antisimmetria

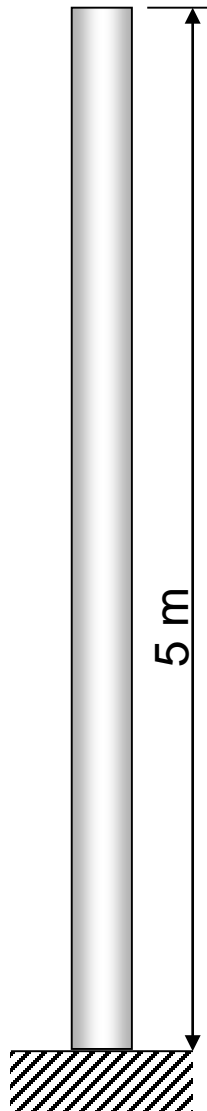




# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

## *Simmetrie strutturali*

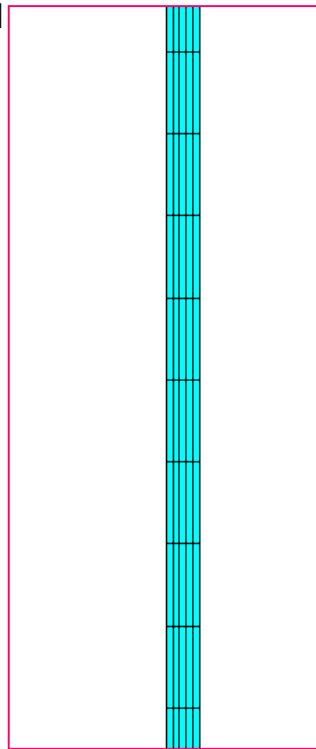
Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma modale assialsimmetrica



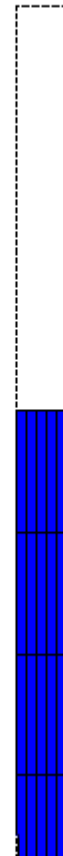
Modello con  
elementi piani  
assialsimmetrici

$$\phi = 0.5 \text{ m}$$

$$s = 0.01 \text{ m}$$



1° modo proprio  
Deformata assiale  
 $f = 260 \text{ Hz}$



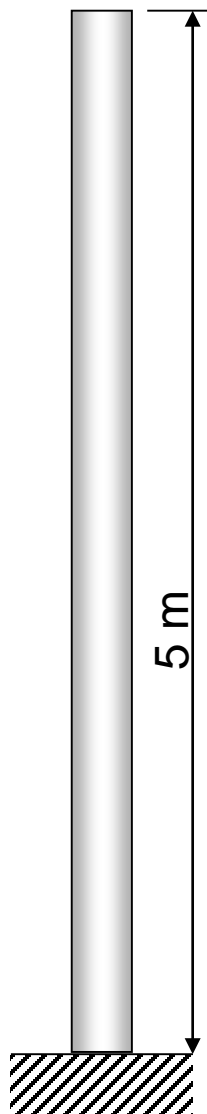




# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

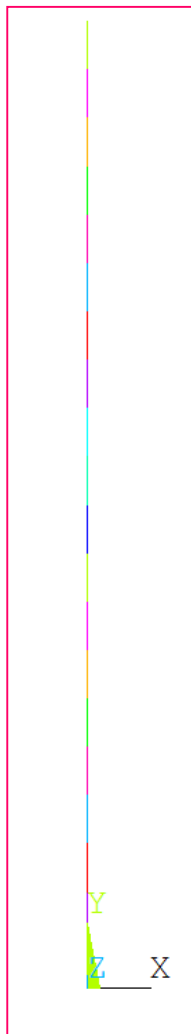
## *Simmetrie strutturali*

Se si utilizza l'assialsimmetria, si ottengono solo i modi con forma modale assialsimmetrica

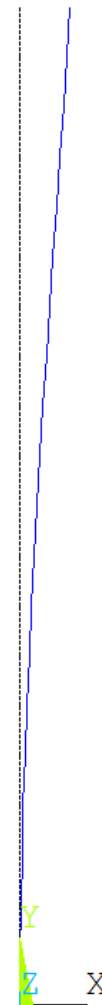


Modello con  
elementi trave

$\phi=0.5$  m  
 $s=0.01$  m



1° modo proprio  
Deformata flessionale  
 $f = 20$  Hz





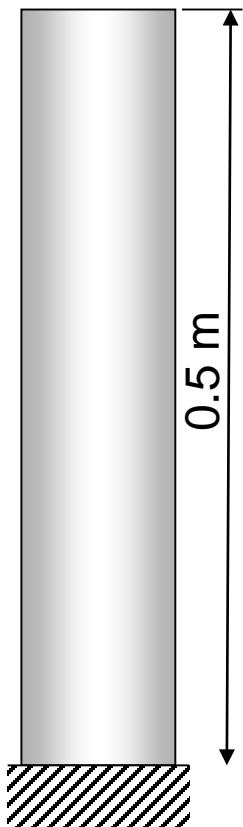
## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto della scelta del tipo di elemento*

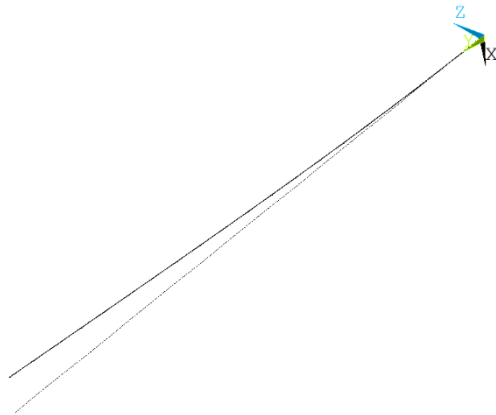
Selezionando un particolare tipo di elemento si vedono solo i modi propri la cui forma modale rispetta le ipotesi alla base dell'elemento stesso.

$$\phi = 0.1 \text{ m}$$

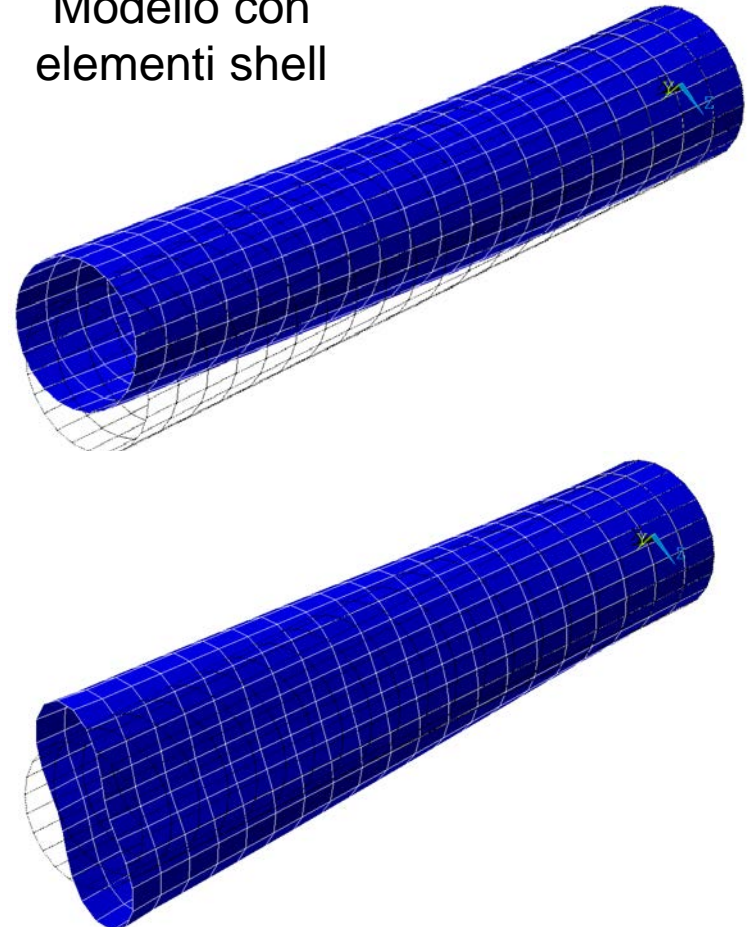
$$s = 0.01 \text{ m}$$



Modello con  
elementi trave



Modello con  
elementi shell

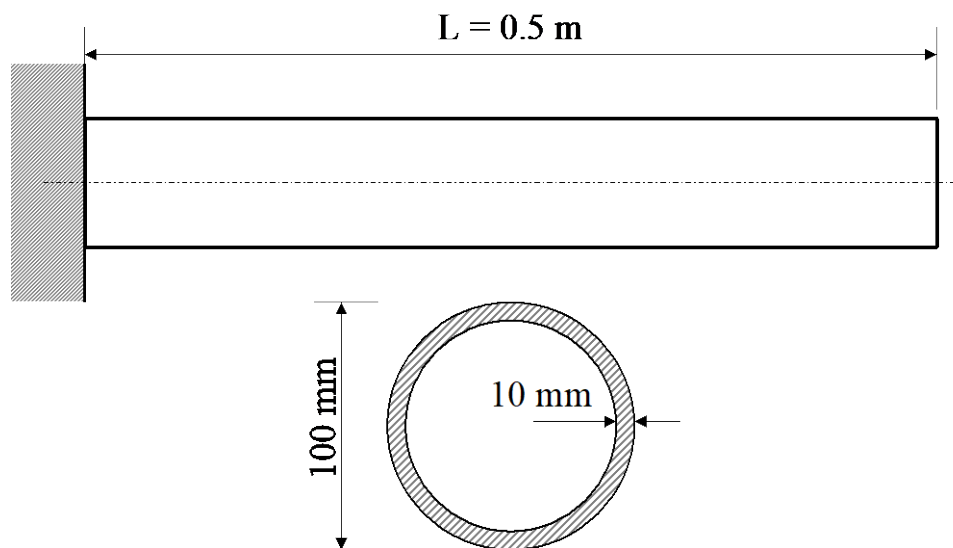




## Esercizio F3

### ANALISI MODALE DI TRAVE TUBOLARE – MODELLO CON ELEMENTI "SHELL"

Si conduca l'analisi modale della trave in acciaio riportata in Figura.



Le prime 3 frequenze proprie flessionali, estensionali e torsionali ottenute con il modello analitico di trave continua (basato sull'ipotesi delle sezioni piane) sono riportate nella seguente tabella.

n	Frequenze proprie flessionali [Hz]	Frequenze proprie estensionali [Hz]	Frequenze proprie torsionali [Hz]
1	371.8	2594	1607
2	2330	7783	4827
3	6525	12972	8045

#### PARTE I

Si metta a punto modello utilizzando un elemento shell 3D.

Si conduca l'analisi modale calcolando le prime 30 frequenze proprie.

Una volta condotta l'analisi modale si verifichi la corrispondenza delle frequenze trovate con i valori della tabella, analizzando le concordanze e le discrepanze e motivandole.

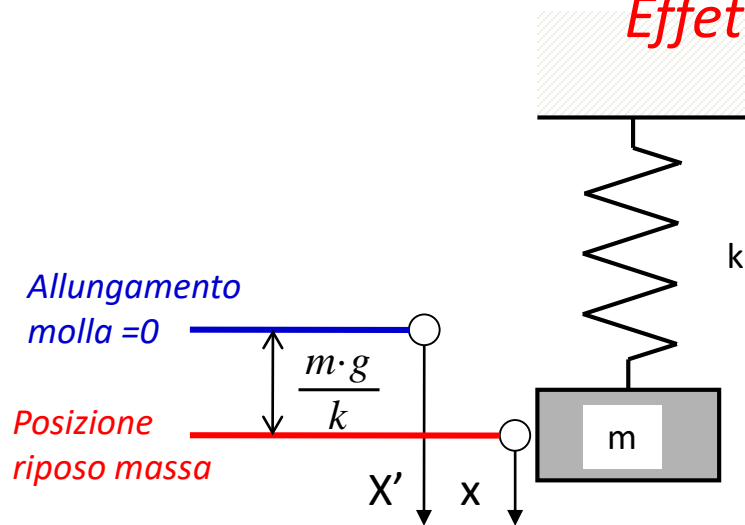
#### PARTE II

Si conduca l'analisi modale della stessa trave a mensola facendo uso di un modello basato su elementi trave 3D, confrontando i risultati con quelli forniti dal modello a shell.



# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

## *Effetto dei carichi statici*



$$\ddot{X}' = \ddot{x}$$

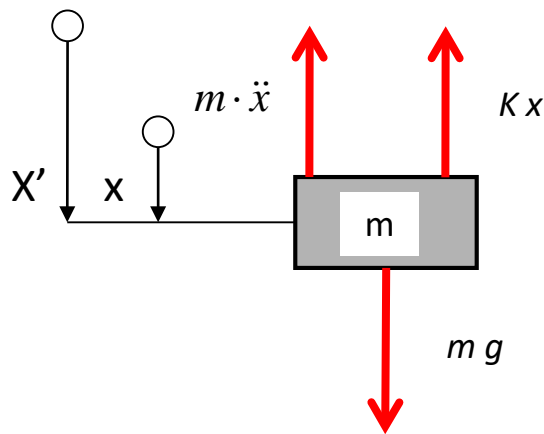
$$-m\ddot{X}' - kX' + mg = 0$$

$$-m\ddot{x} - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) + mg = 0$$

$$-m\ddot{x} - kx - mg + mg = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Analisi delle forze agenti

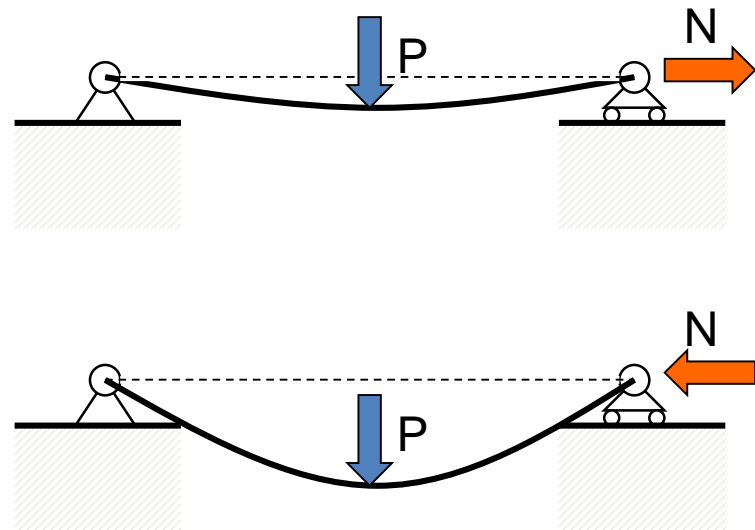
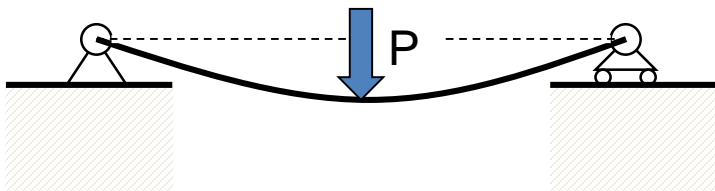


Equazione del moto non influenzata dalla forza peso

## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto dei carichi statici*

In generale il comportamento vibratorio della struttura non è influenzato dalla presenza di carichi applicati staticamente, a meno che la presenza di questi ultimi non ne modifichi la rigidezza (“irrigidimento da sforzo” o “stress stiffening”). Questo effetto è significativo, in particolare, per strutture snelle aventi una rigidezza trasversale (legata a deformazioni flessionali) piccola rispetto a quella longitudinale (legata a deformazioni estensionali).



Esempio classico : la corda della chitarra o del violino, che viene «accordata» su una specifica frequenza di vibrazione variandone la tensione assiale.

## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

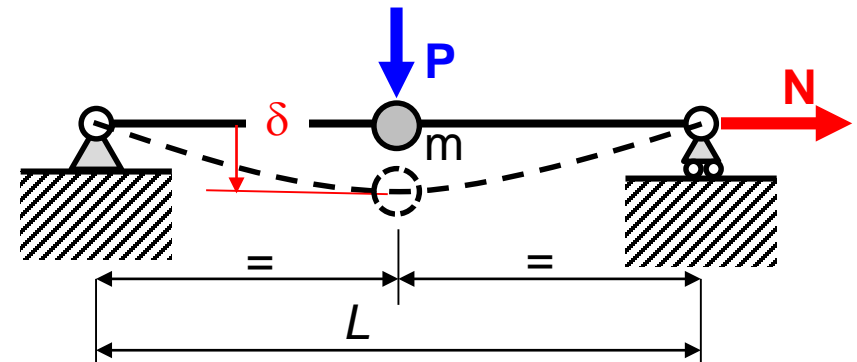
Si consideri un albero privo di massa, recante una massa concentrata puntiforme  $m$  in posizione centrale. Per quanto concerne la frequenza propria flessionale (spostamenti verticali della massa) si ha, trascurando l'effetto del carico assiale  $N$ :

$$\delta = \frac{PL^3}{48EJ}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{48EJ}{L^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EJ}{mL^3}}$$

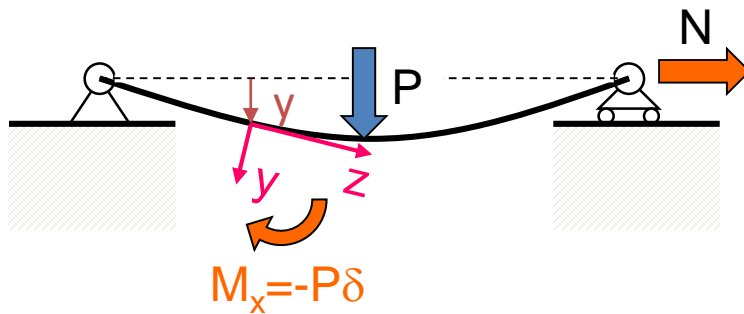
indipendente da  $N$  e da  $P$ .



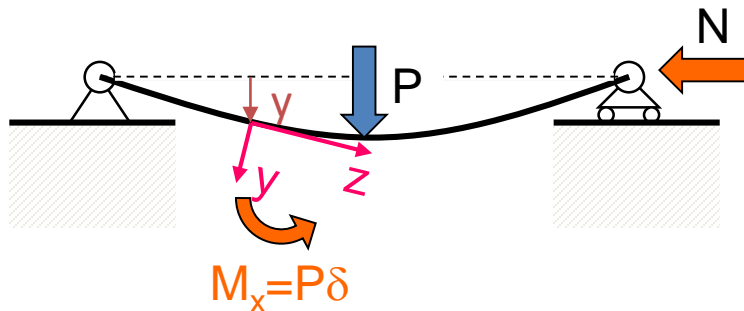
## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

L'effetto sulla rigidezza della trave può essere spiegato considerandone la geometria deformata:



una forza normale positiva produce, rispetto alla generica sezione, un momento flettente che tende a ridurre l'inflessione.

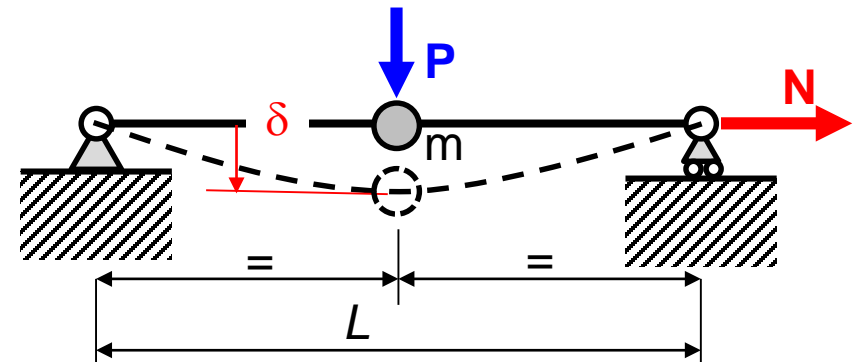


Una forza normale negativa produce, un momento flettente opposto, che tende ad aumentare l'inflessione.

## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

Per ottenere l'effetto di  $N$  sulla pulsazione propria, è necessario valutarne l'effetto sulla rigidezza trasversale  $k$ . Per simmetria si studia il tratto  $0 \leq x \leq L/2$ :



$$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x - N \cdot y$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} - N \cdot y = -\frac{P}{2} \cdot x$$

$$\alpha^2 = \frac{N}{EJ}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \alpha^2 \cdot y = -\frac{P}{2EJ} \cdot x$$

$$y(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + \frac{P}{2N} x$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right) = Ake^{\alpha x} - Bke^{-\alpha x} + \frac{P}{2N}$$



# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

## *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

Imponendo le Condizioni al Contorno si valutano i coefficienti  $A$  e  $B$ :

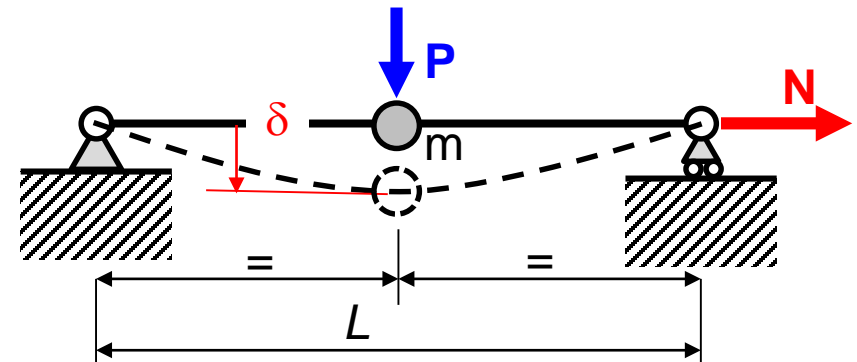
$$y(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + \frac{P}{2N}x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = Ake^{\alpha x} - Bke^{-\alpha x} + \frac{P}{2N}$$

$$C.C. \begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{L}{2}} = A\alpha e^{\frac{\alpha L}{2}} - B\alpha e^{-\frac{\alpha L}{2}} + \frac{P}{2N} = A\alpha e^{\frac{\alpha L}{2}} + A\alpha e^{-\frac{\alpha L}{2}} + \frac{P}{2N} = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{P}{2N\alpha \left( e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right)}$$

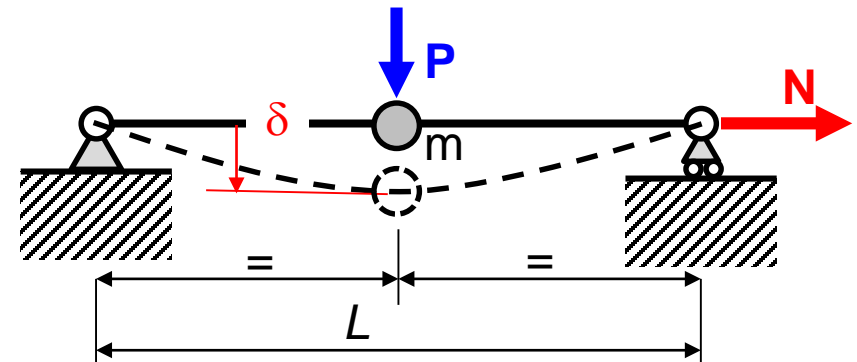
$$B = \frac{P}{2N\alpha \left( e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right)}$$



## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

Si calcola la rigidezza trasversale della trave, in presenza della forza assiale  $N$ , tramite lo spostamento per  $x=L/2$ :



$$y(x) = -\frac{P}{2N\alpha \left( e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right)} e^{\alpha x} + \frac{P}{2N\alpha \left( e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right)} e^{-\alpha x} + \frac{P}{2N} x =$$

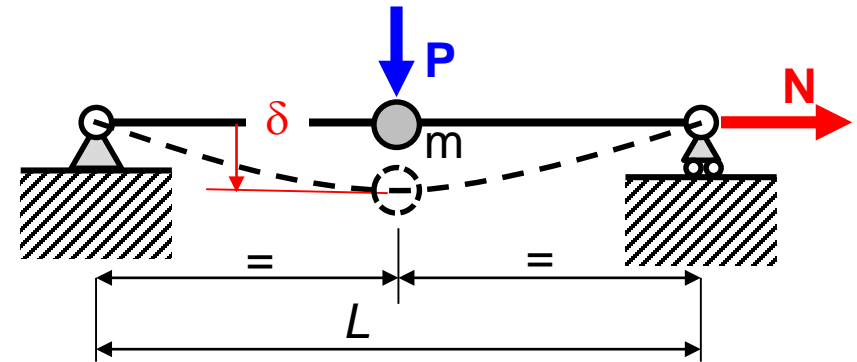
$$= \frac{P}{2N\alpha \left( e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right)} \left( e^{-\alpha x} - e^{\alpha x} \right) + \frac{P}{2N} x = \frac{P}{2N} \left( x - \frac{1}{\alpha} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}}} \right)$$

$$\delta = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2N} \left( \frac{L}{2} - \frac{1}{\alpha} \frac{e^{\frac{\alpha L}{2}} - e^{-\frac{\alpha L}{2}}}{e^{\frac{\alpha L}{2}} + e^{-\frac{\alpha L}{2}}} \right) = \frac{PL}{4N} \left( 1 - \frac{\tanh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{\frac{\alpha L}{2}} \right)$$

## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

Si calcola la rigidezza trasversale della trave, in presenza della forza assiale  $N$ , tramite lo spostamento per  $x=L/2$ :



$$k_N = \frac{P}{\delta} = \frac{4N}{L} \frac{1}{\left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{\frac{\alpha L}{2}}\right)} = \frac{12EJ}{L^3} \frac{L^3}{12EJ} \frac{4N}{L} \frac{1}{\left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{\frac{\alpha L}{2}}\right)} = \frac{48EJ}{L^3} \frac{NL^2}{12EJ} \frac{1}{\left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{\frac{\alpha L}{2}}\right)}$$

$$u = \frac{\alpha L}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L^2 N}{\pi^2 EJ}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}, \quad k = \frac{48EJ}{L^3}$$

$$\frac{k_N}{k} = \frac{u^2}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\tanh(u)}{u}\right)} = \frac{u^3}{3(u - \tanh(u))}$$

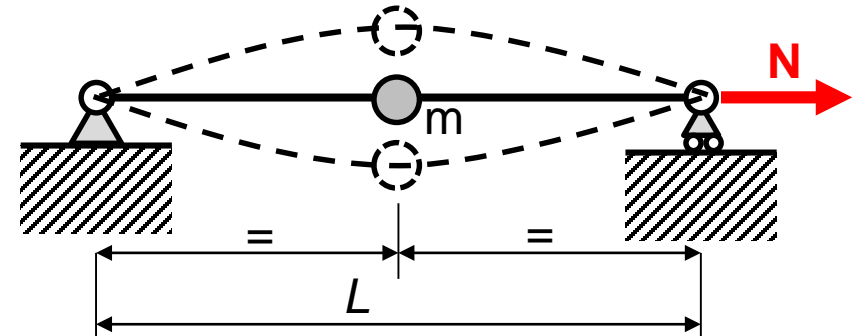


## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

Nel caso in cui  $N$  sia di compressione si ottiene facilmente:

$$\frac{k_N}{k} = \frac{u^3}{3[\tan(u) - u]} \quad \text{in cui:} \quad u = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|N|}{EJ}}$$



L'effetto di  $N$  sulla pulsazione propria può essere ricavato immediatamente:

$$\frac{\omega_N}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\frac{k_N}{m}}}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{k_N}{k}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{u^3}{3[\tan(u) - u]}} & N < 0 \\ \sqrt{\frac{u^3}{3[u - \tanh(u)]}} & N > 0 \end{cases}$$

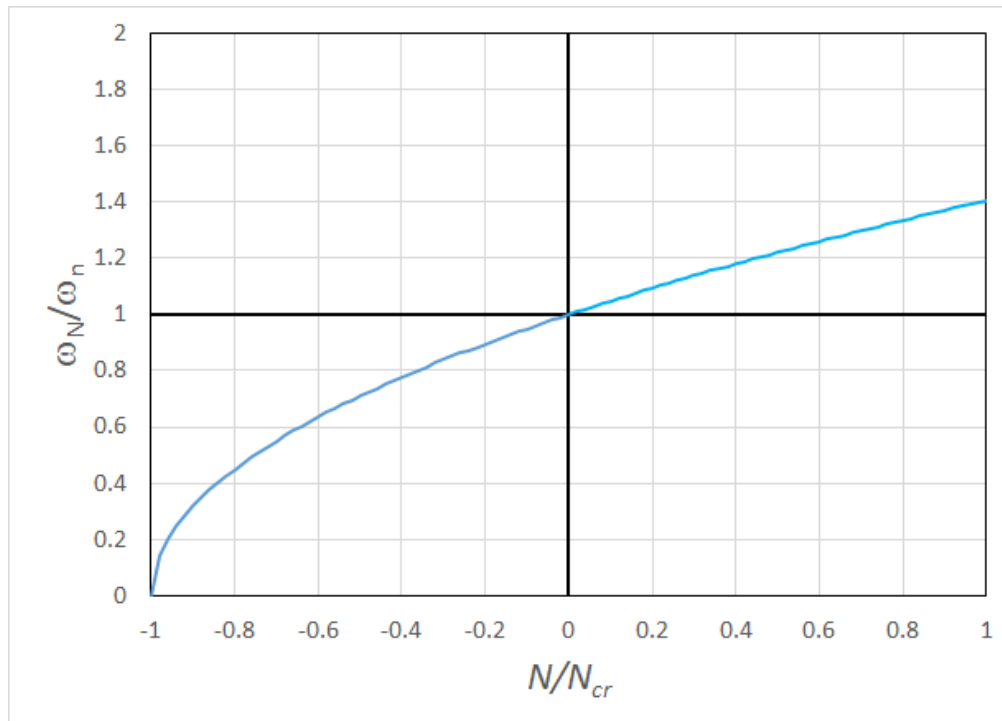
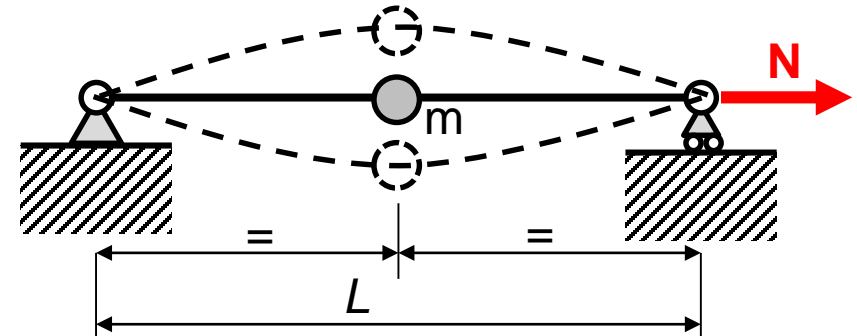
in cui: 
$$u = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|N|}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}$$



## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di forza assiale su oscillazione flessionale albero*

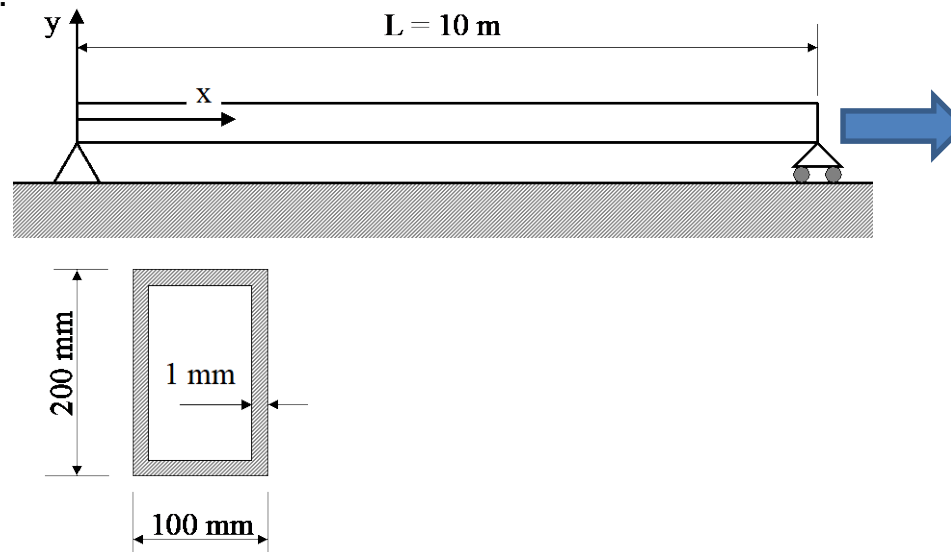
L'effetto del carico assiale  $N$  sulla pulsazione propria è rappresentato nel grafico:



## Esercizio F4

### ANALISI MODALE DI TRAVE APPOGGIATA CON CARICO ASSIALE

Si conduca, considerando solo gli spostamenti nel piano “X-Y” (problema piano) l’analisi modale della trave in acciaio riportata in Figura, rappresentando l’azione del carico assiale attraverso effetti di «stress stiffening».



Per il modello si faccia uso dell’elemento 188, vincolando i gdl non necessari.

Il file di comandi proposto, traccia un grafico del rapporto tra la pulsazione propria effettiva e quella in presenza di carico assiale nullo, fino al carico assiale massimo (positivo o negativo) inserito. La curva è tracciata in funzione del parametro :

$$u = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|N|}{EJ}}$$

L’analisi prevede un primo calcolo statico, in grado di stimare l’effetto di «stress stiffening» in funzione del carico assiale applicato, ed una successiva analisi modale. La valutazione dell’effetto «stress stiffening» è ottenuta col comando PSTRES,ON



FINISH  
/CLEAR

C\*\*\*\*\*

C\*\*\*

C\*\*\* ANALISI MODALE DI TRAVE APPOGGIATA 2D

C\*\*\* CON CARICO ASSIALE: SOLUZIONE CON METODO  
STRESS STIFFENING

C\*\*\*

C\*\*\*\*\*

C\*\*\*

C\*\*\* PARAMETRI INIZIALI

C\*\*\*

l=10 ! lunghezza trave [m]

izz=3.27e-6 ! momento di inerzia sezione attorno all'asse z  
[m^4]

a=0.000596 ! area sezione [m^2]

ne=10 ! n. di elementi

B1= 0.1 ! DIMENSIONI SEZIONE

H1=0.2

S1=0.001

\*ASK,imax,numero di passi:,10

\*DIM,B,TABLE,imax+1,2

C\*\*\*

C\*\*\* PROPRIETA' MATERIALE

C\*\*\*

/PREP7

MP,ex,1,2.1e11

MP,dens,1,7.8e3



C\*\*\*

C\*\*\* GENERAZIONE MODELLO

C\*\*\*

C\*\*\* KEYPOINTS

K,1

K,2,1

K,3,1,1

C\*\*\* LINEA

L,1,2

C\*\*\* ELEMENTI

ET,1,188,,,3

SECTYPE,1,BEAM,HREC,TUBO QUADRO

SECDATA,B1,H1,S1,S1,S1,S1

C\*\*\* MESH

LSEL,,LINE,,1

LATT,1,,1,,3,3,1

LSEL,ALL

LESIZE,ALL,,,,NE

LMESH,ALL

C\*\*\* VINCOLI

DK,1,UX,0

DK,1,UY,0

DK,1,UZ,0

DK,2,UZ,0

DK,2,UY,0

D,ALL,UZ,0

D,ALL,ROTX,0





```
*ASK,fax1,carico assiale:,0  
*ask,nfrq,frequenza da rappresentare:,1  
C*** *ask,frif,valore a carico nullo,6.04
```

```
*DO,i,0,imax,1  
/gopr
```

```
C*** CARICO ASSIALE  
/PREP7  
fax=(fax1/imax)*i  
FK,2,fx,fax
```

```
FINISH
```

```
C***  
C*** SOLUZIONE  
C***
```

```
/SOLU  
antype,static,new  
SSTIF,on  
SOLVE  
finish
```

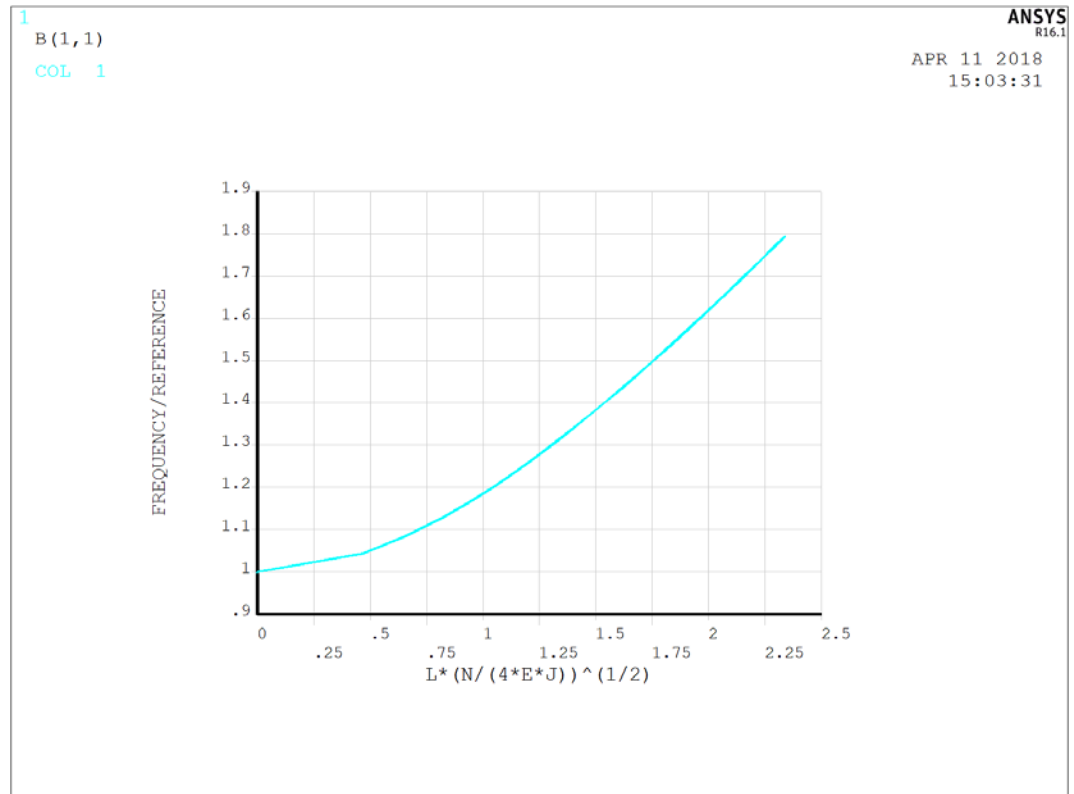
```
/SOLU  
ANTYPE,modal ! scelta del tipo di  
analisi  
SSTIF,on  
MODOPT,subsp,8 ! opzioni per l'analisi  
modale  
SOLVE  
FINISH
```



```
*GET,BBB,MODE,nfrq,FREQ
*if,i,eq,0,then
    frif=BBB
*endif
B(i+1,1)=BBB/frif
B(i+1,0)=l*(abs(fax)/(4*2.1e11*izz))**0.5
*ENDDO
```

```
C***
C*** post-processing
C***
```

```
/post1
/AXLAB,X,L*(N/(4*E*J))^(1/2)
/AXLAB,Y,FREQUENCY/REFERENCE
*vplot,B(1,0),B(1,1)
```

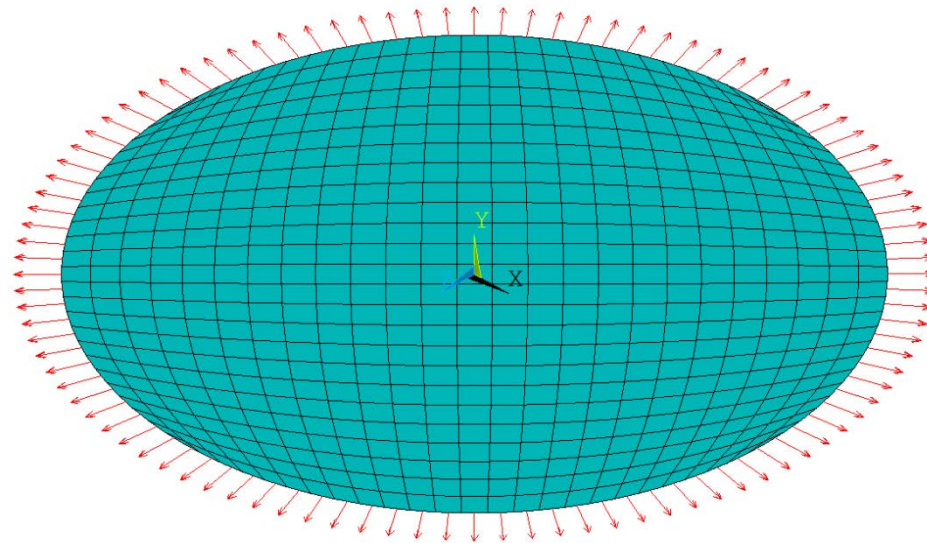




## Esercizio F5

### ANALISI MODALE DI PIASTRA CIRCOLARE TESA AL BORDO ESTERNO

Si conduca, considerando solo gli spostamenti ortogonali al piano medio, l'analisi modale di una piastra circolare in acciaio, semplicemente appoggiata al bordo esterno e tesa da un carico distribuito applicato al bordo stesso.



Per il modello si possono utilizzare gli elementi 51 (assialsimmetrici) o 63 (shell 3D).

Dati:

- Raggio = 1 m
- Spessore = 1 mm

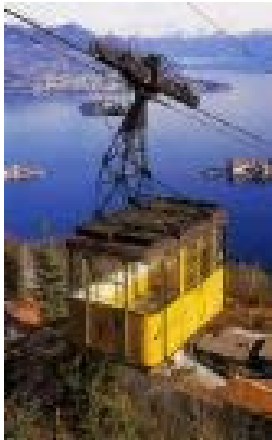


# ANALISI MODALE – Considerazioni generali

## *Effetto dei carichi statici*

Altri esempi di strutture per le quali l'effetto di "Stress stiffening" può essere significativo:

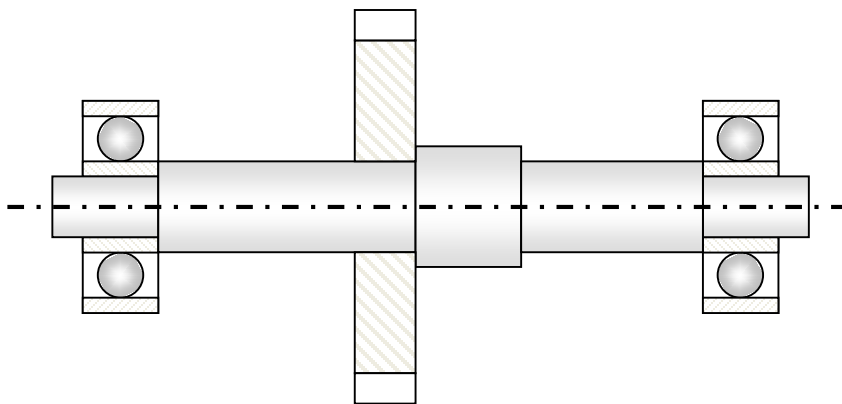
Cavi di sostegno funivia



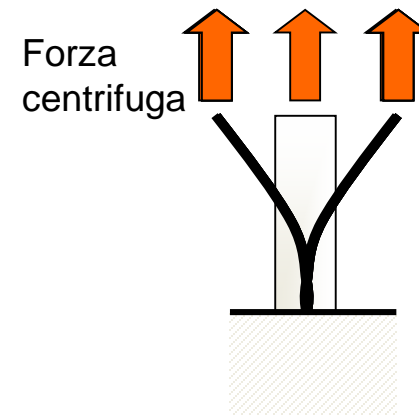
Cinghie di trasmissione



Rotori e pale di turbina



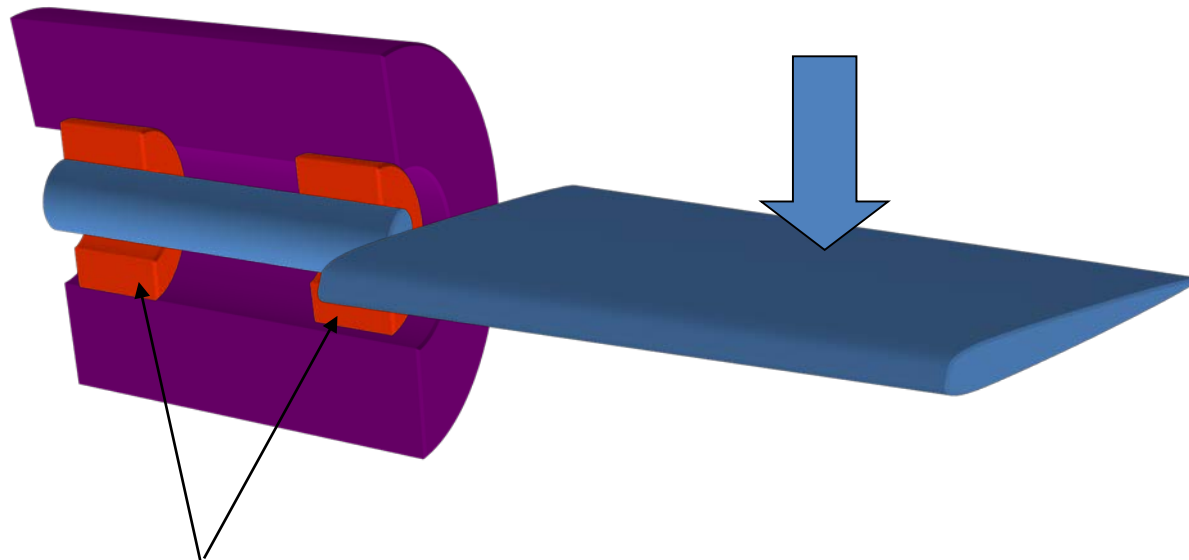
Alberi di trasmissione snelli



## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto dei carichi statici*

Un esempio atipico di «Stress Stiffening», dovuto alla presenza di **effetti non lineari**. All'aumentare del carico aerodinamico sulla pala, aumenta l'area di contatto sui cuscinetti a strisciamento e, di conseguenza, la rigidità apparente degli stessi.



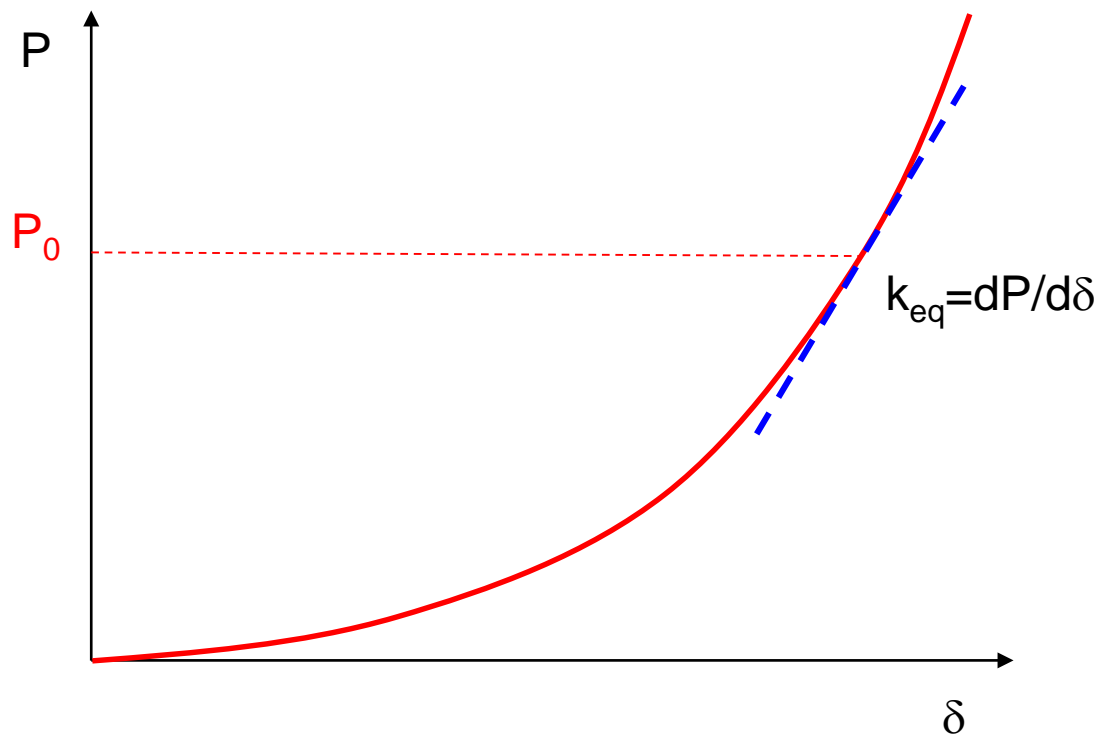
Non linearità di contatto

## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Effetto di rigidezze non lineari*

Dall'esempio precedente risulta chiaro l'interesse verso una trattazione dei casi di non linearità, che riguardano solitamente quegli elementi dai quali derivano le azioni di reazione elastica (vera o equivalente).

Il fenomeno è, chiaramente, molto complesso. Nei casi in cui l'oscillazione sia piccola, è possibile ricorrere ad una linearizzazione della rigidezza apparente della struttura.



In presenza di un carico statico  $P_0$  e di piccole oscillazioni attorno a tale punto di equilibrio, è lecito assumere come rigidezza la pendenza della tangente alla curva  $P$ - $\delta$ .

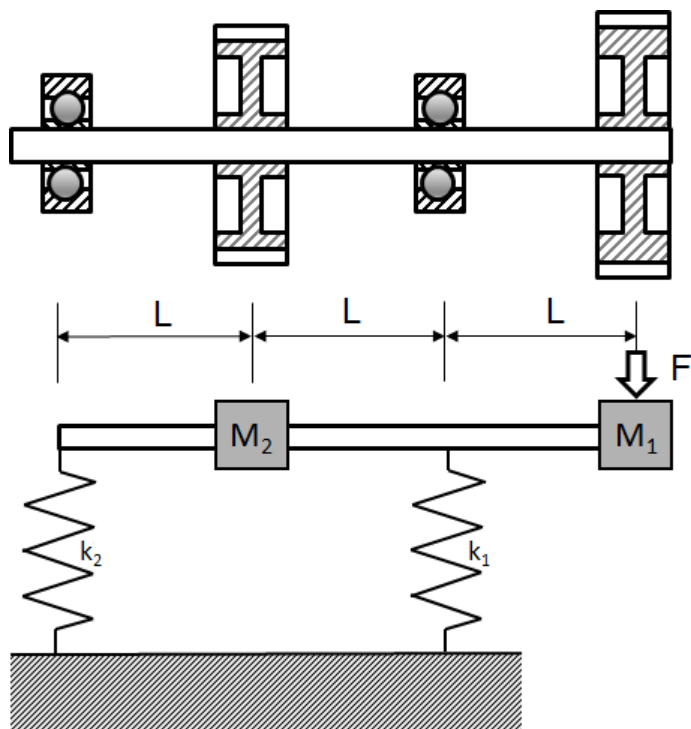


## Esercizio D15A

È dato un albero recante due ruote dentate e supportato da cuscinetti a sfere. Ipotizzando trascurabili la massa e la cedevolezza dell'albero e sapendo che la rigidezza dei cuscinetti a sfere può essere rappresentata dalla relazione:

$$\delta = \frac{P^{0.84}}{16 \cdot d^{0.65}}$$

in cui  $P$  è il carico radiale in N,  $d$  il diametro dell'albero in mm e  $\delta$  lo spostamento radiale del cuscinetto in  $\mu\text{m}$ .



Utilizzando il modello a 2 gdl mostrato in Figura, calcolare le pulsazioni proprie della struttura, in presenza di una forza  $F$  statica pari a 50, 500 e 1500 N.

$$L_0 := 0.2\text{-m} \quad M_1 := 45\text{-kg} \quad M_2 := 30\text{-kg}$$

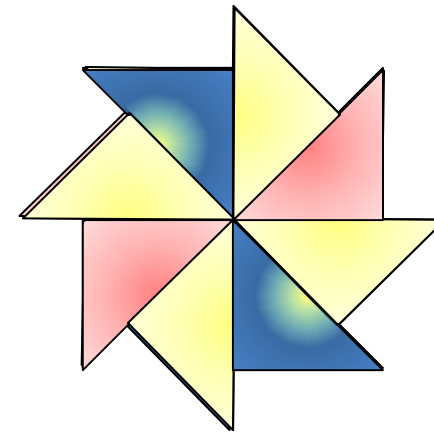
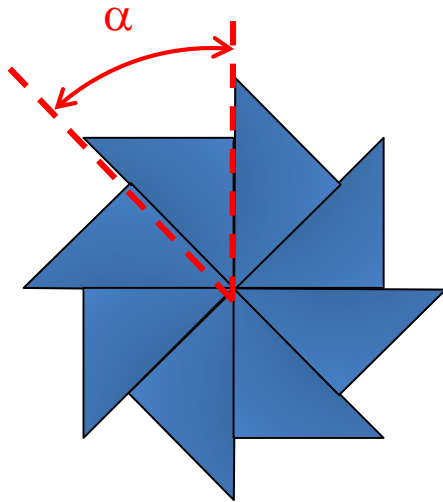
$$\delta_T(F_r) := \frac{0.84}{\left(\frac{F_r}{\text{N}}\right)^{0.16} \cdot \left(\frac{d}{\text{mm}}\right)^{0.65}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{N}} \quad \text{Rigidezza tangente}$$

## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Autovalori coincidenti*

In alcuni casi è possibile ottenere degli autovalori coincidenti (aventi quindi molteplicità maggiore di 1).

Un primo caso in cui questo può verificarsi, si ha quando la struttura presenta una simmetria di rotazione, con angolo caratteristico  $< 180^\circ$ .



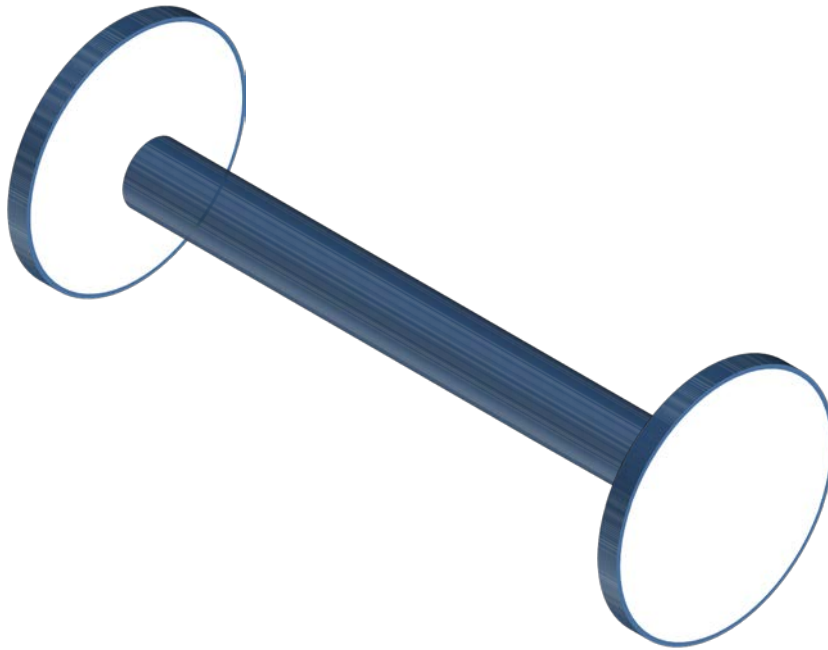


## ANALISI MODALE – Considerazioni generali

### *Autovalori coincidenti*

La coincidenza degli autovalori può inoltre verificarsi, anche tra modi di vibrare indipendenti.

Ad esempio, è possibile fare in modo che, in un albero con due volani, la prima pulsazione flessionale e la prima torsionale coincidano.



## ANALISI MODALE – Oscillazione libera

Se un sistema dinamico viene disturbato dalla sua posizione di equilibrio e poi lasciato isolato esso oscillerà con una **oscillazione libera** progressivamente smorzata nel tempo (o permanente nel caso di smorzamento nullo).

Sia nel caso di smorzamento classico che non classico, la risposta del sistema consisterà necessariamente in una combinazione di oscillazioni secondo i diversi modi propri, dato che solo questi possono avvenire senza scambio di energia con l'esterno.

Come noto, nel caso di smorzamento classico o assente (in questo caso si ha semplicemente  $\xi = 0$ ) l'oscillazione secondo il modo proprio «j» è rappresentata dalla:

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{y}^{(j)} e^{-\xi \omega_{nj} t} \left( a_j e^{i \omega_{nj} \sqrt{1-\xi_j^2} t} + b_j e^{-i \omega_{nj} \sqrt{1-\xi_j^2} t} \right)$$

che può essere posta nella forma equivalente:

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{y}^{(j)} e^{-\xi_j \omega_{nj} t} \left( a_j' e^{i(\omega_{nj} \sqrt{1-\xi_j^2} t + \varphi_j)} \right) = \mathbf{y}^{(j)} e^{-\xi_j \omega_{nj} t} a_j' e^{i\varphi_j} e^{i \omega_{nj} \sqrt{1-\xi_j^2} t}$$

## ANALISI MODALE – Oscillazione libera

da cui:

$$a_{jc} = a_j' e^{i\varphi_j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_j(t) = a_{jc} \mathbf{y}^{(j)} e^{-\xi_j \omega_{nj} t} e^{i\omega_{nj} \sqrt{1-\xi_j^2} t}$$

nella quale compare il fattore di scala complesso  $a_{jc}$  (modulo e fase) da determinarsi in base alle **condizioni iniziali**.

Il moto generale del sistema è rappresentato da:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N a_{jc} \mathbf{y}^{(j)} e^{-\xi_j \omega_{nj} t} e^{i\omega_{nj} \sqrt{1-\xi_j^2} t}$$

Le costanti  $a_{jc}$  (dipendenti da  $2N$  parametri, moduli e fasi) possono essere determinate dal sistema di  $2N$  equazioni che definiscono le condizioni iniziali (spostamenti e velocità al tempo  $t=0$ ):

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$$

## ANALISI MODALE – Oscillazione libera

Nell'imporre le condizioni iniziali non si deve dimenticare che è la parte reale del vettore rotante associato alla notazione esponenziale che rappresenta la vera oscillazione fisica, per cui:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^N a_{jc} \mathbf{y}^{(j)} \right] = \operatorname{Re} [\mathbf{Y} \mathbf{a}_c]$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^N a_{jc} \left( -\xi_j \omega_{nj} + i \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2} \right) \mathbf{y}^{(j)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \mathbf{Y} \operatorname{diag} \left[ -\xi_j \omega_{nj} + i \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2} \right] \mathbf{a}_c \right]$$

che, per un sistema non smorzato, divengono:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^N a_{jc} \mathbf{y}^{(j)} \right] = \operatorname{Re} [\mathbf{Y} \mathbf{a}_c]$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^N a_{jc} i \omega_{nj} \mathbf{y}^{(j)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \mathbf{Y} \operatorname{diag} [i \omega_{nj}] \mathbf{a}_c \right]$$



## Esercizio D16

Per la struttura analizzata nell'esercizio D5, di cui si riportano i dati, si determini la legge del moto libero a partire dalle condizioni iniziali fornite.

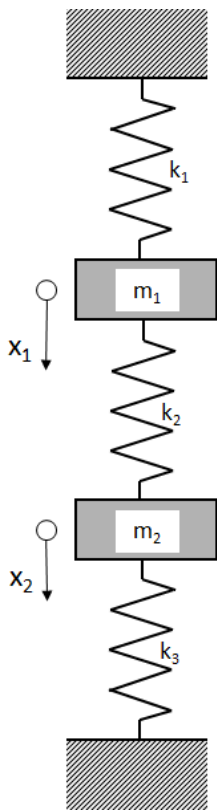
$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m_1 := 14 \cdot \text{kg}$$

$$m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$



Condizioni iniziali

$$x_{10} := 10 \cdot \text{mm}$$

$$x_{p10} := 0 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$x_{20} := x_{10} \cdot r_1 + x_{20} \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{100} \cdot x_{10} = -0.012 \text{ m}$$

$$x_{p20} := 0 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

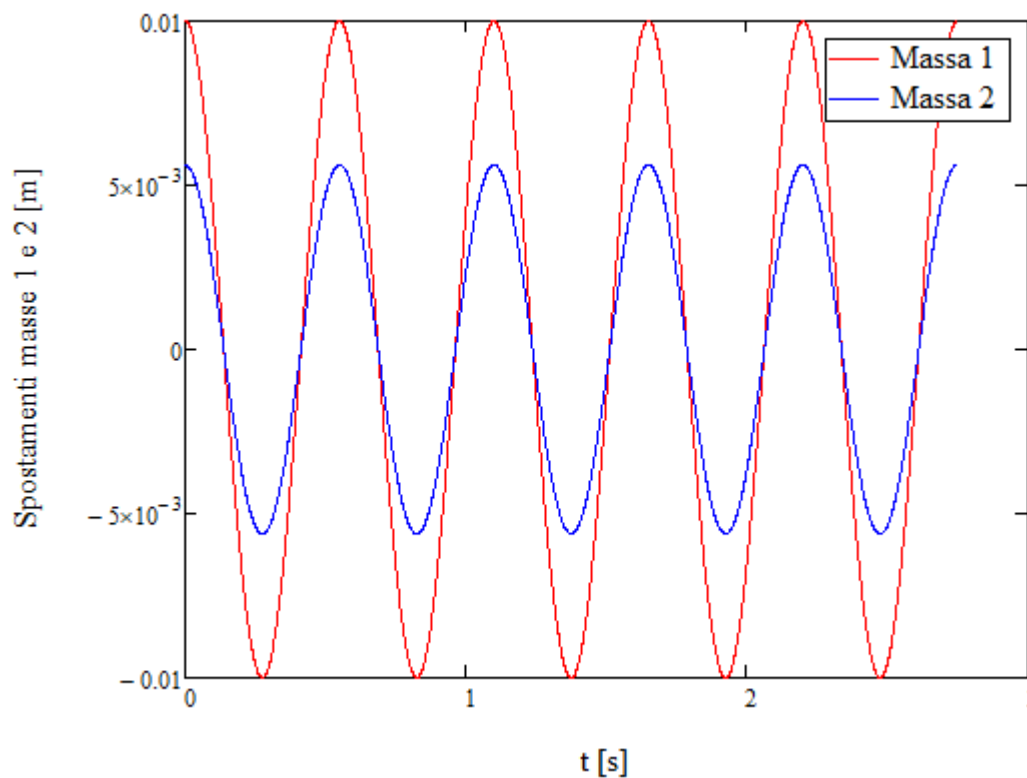
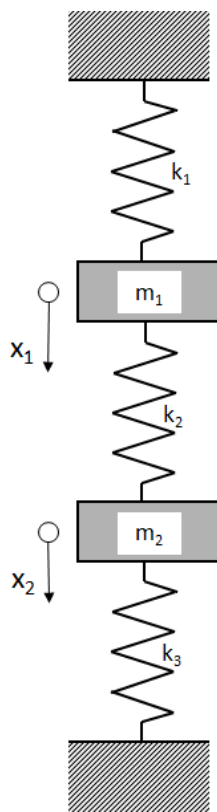
Spostamenti

Velocità

È interessante osservare l'effetto della distribuzione di spostamenti iniziali sulla oscillazione libera della struttura. Se si impone:

$$x_{20} = r_1 x_{10}$$

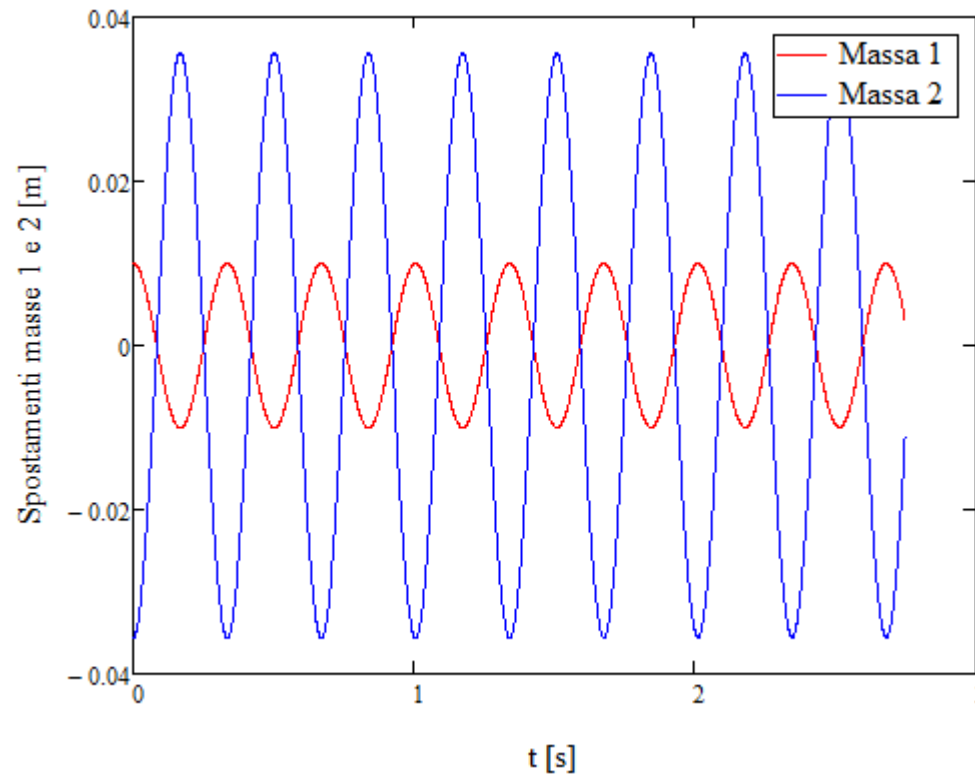
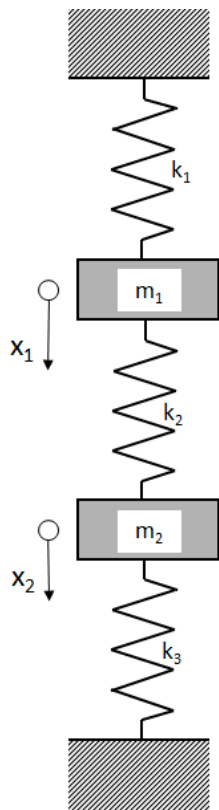
ovvero uno stato di spostamento corrispondente alla forma modale 1, si ottiene una legge del moto che coincide con il solo modo 1.



E, specularmente se si impone:

$$x_{20} = r_2 x_{10}$$

ovvero uno stato di spostamento corrispondente alla forma modale 2, si ottiene una legge del moto che coincide con il solo modo 2.



Se, infine si impone una condizione iniziale basata su velocità al tempo 0 diverse da zero:

Condizioni iniziali

$$x_{10} := 0 \text{ mm}$$

$$x_{p10} := 30 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$x_{20} := x_{10} \cdot r_1 + x_{20} \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{100} \cdot x_{10} = 0$$

$$x_{p20} := -30 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Spostamenti

Velocità

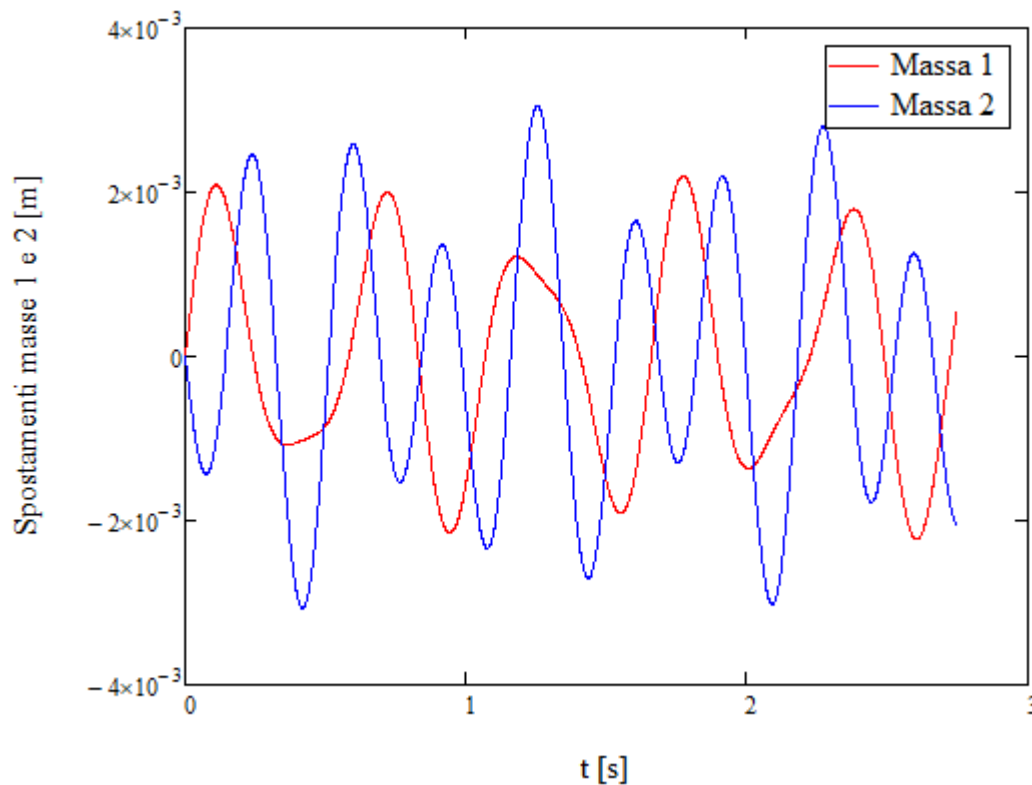
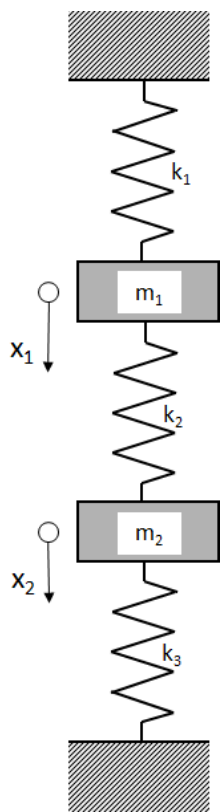
si ottiene:

$$a_1 = -1.631 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$a_2 = 6.06 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\phi_1 = -4.712$$

$$\phi_2 = -1.571$$





## ANALISI MODALE – Oscillazione libera

Nel caso di smorzamento non classico, l'oscillazione secondo il modo proprio «j» è rappresentata dalla:

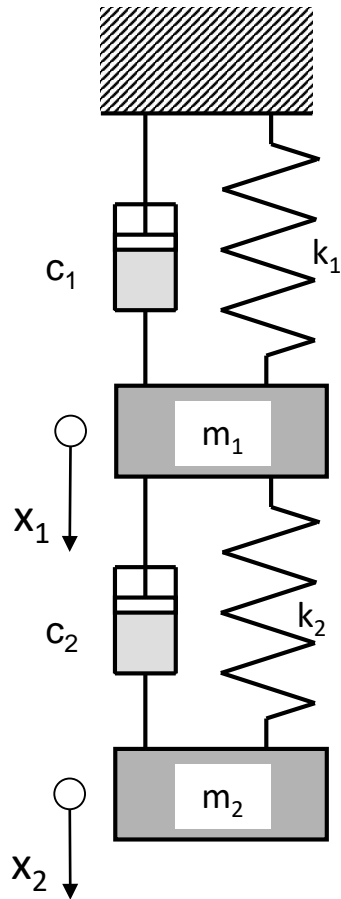
$$\mathbf{u}_j(t) = \operatorname{Re} \left( A_j \mathbf{z}^{(j)} e^{s_j t} + B_j \bar{\mathbf{z}}^{(j)} e^{\bar{s}_j t} \right)$$

che può essere posta nella seguente forma, equivalente alla precedente:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N \operatorname{Re} \left( A_j \mathbf{z}^{(j)} e^{s_j t} + B_j \bar{\mathbf{z}}^{(j)} e^{\bar{s}_j t} \right)$$

## Esercizio D17

Per la struttura analizzata nell'esercizio D15, di cui si riportano i dati, si analizzi la legge del moto a partire dalle condizioni iniziali date



### Dati iniziali

$$k_1 := 1000 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m_1 := 10 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 5 \cdot \text{kg}$$

$$c_1 := 90 \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad c_2 := 10 \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

### Condizioni iniziali

$$x_{10} := 10 \cdot \text{mm}$$

$$x_{p10} := 10 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$x_{20} := x_{10} \cdot r_1 + x_{20} \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{100} \cdot x_{10} = (-0.858662 + 4.2584998i) \text{ mm}$$

$$x_{p20} := -50 \cdot \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Spostamenti

Velocità