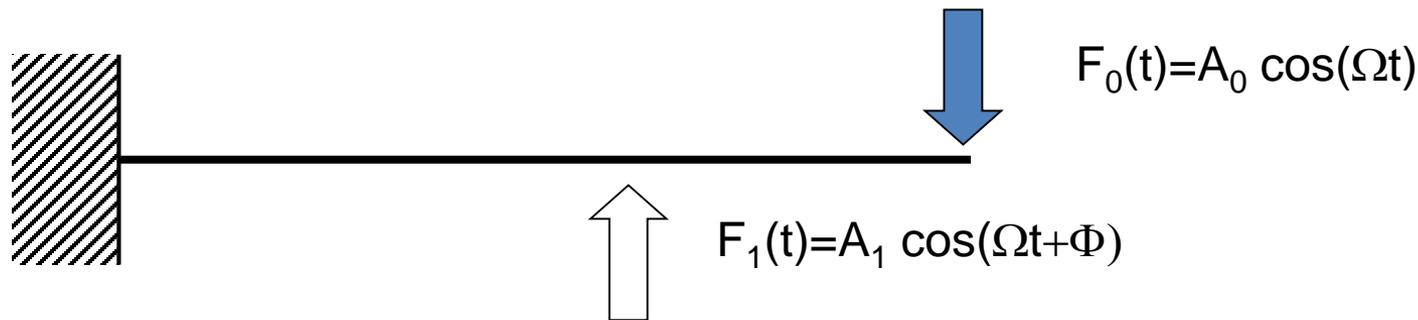


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

**SCOPO:** Valutare la risposta del sistema in presenza di una forzante esterna di tipo **sinusoidale** ed ampiezza **costante nel tempo**.



Su di una struttura, la “forzante” è in generale costituita da una o più forze esterne, aventi tutte la **stessa pulsazione**, ma **ampiezza e fase distinte**.

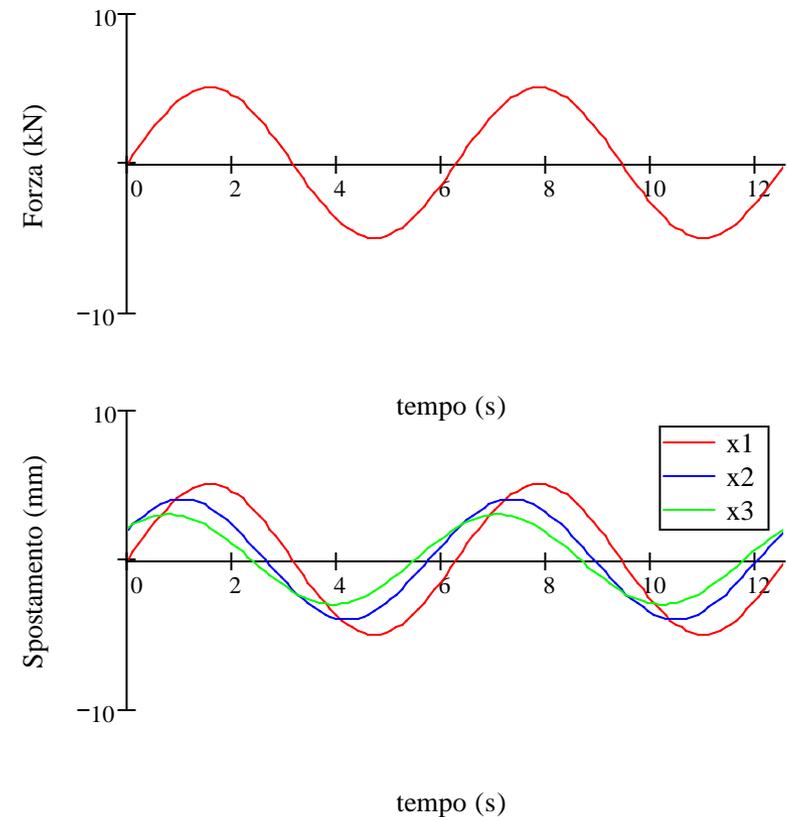
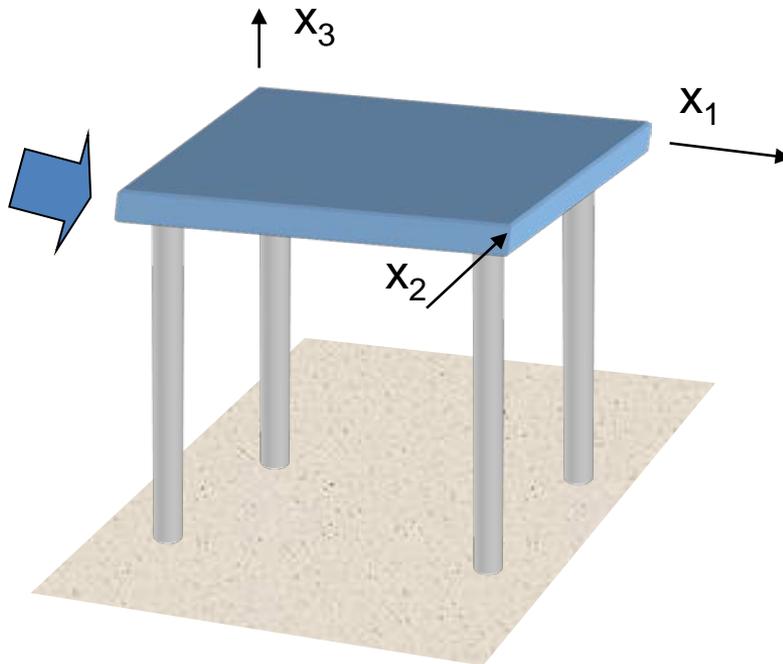
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

**Ipotesi:** comportamento lineare della struttura ( $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  costanti)



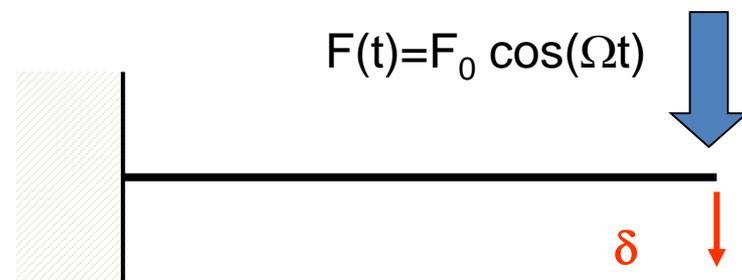
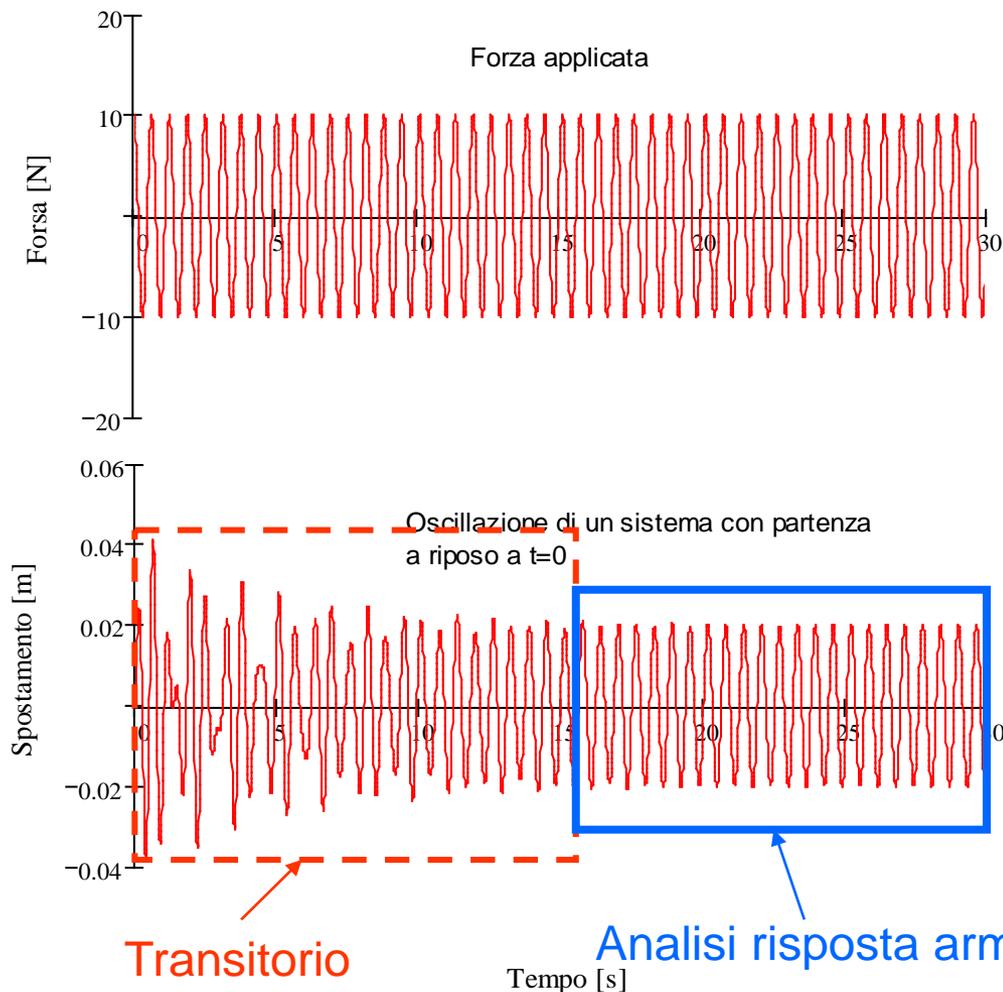
I vari g.d.l. della struttura vibrano con una legge del moto avente:

- andamento nel tempo di tipo **sinusoidale**
- **pulsazione** uguale a quella della forzante
- **ampiezza** e **fase** variabili da punto a punto



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

Se si applica la forzante a partire dall'istante  $t=0$ , con la struttura inizialmente a riposo, la risposta mostra un **transitorio** iniziale, che si esaurisce dopo un certo tempo, dopodiché la struttura oscilla con **ampiezza costante**.



Nel seguito, dopo alcuni richiami alla risposta forzata di un sistema ad 1 gdl, si analizzeranno le tecniche di soluzione tipiche di sistemi a masse concentrate o modelli FEM.

# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – RISPOSTA FORZATA

Pulsazione naturale:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Risposta forzata:

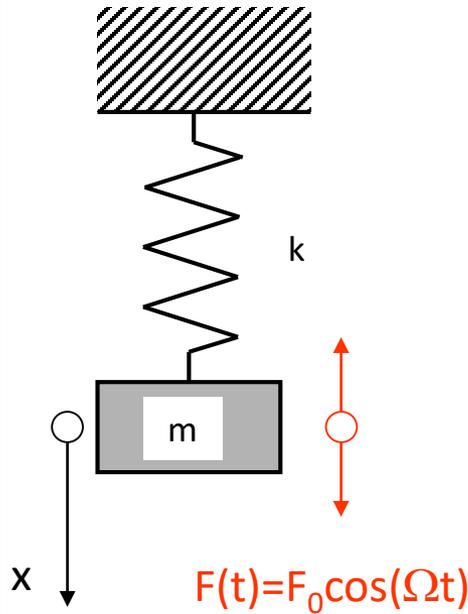
$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t} + X e^{i\Omega t}$$

Integrale generale  
omogenea associata:  
oscillazione dipendente  
dalle condizioni iniziali

Integrale particolare  
non omogenea:  
oscillazione  
dipendente da  $\Omega$

in particolare si ha:

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$



# RAPPRESENTAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

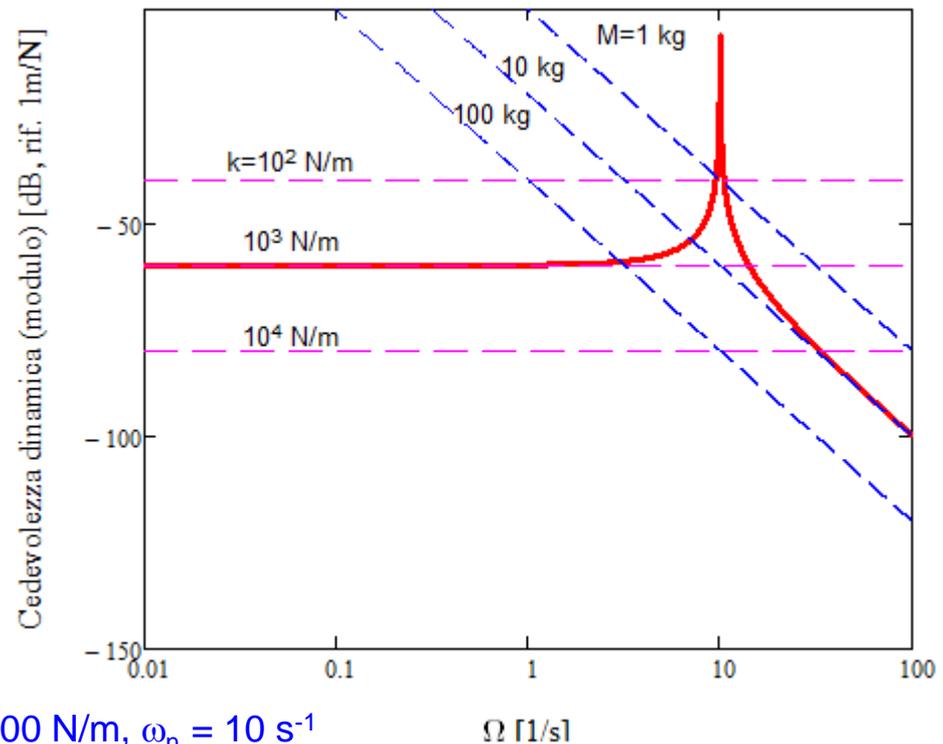
Il comportamento dei sistemi dinamici viene solitamente rappresentato tramite diagrammi nei quali alcune grandezze meccaniche rappresentative del comportamento del sistema sono riportate in funzione della pulsazione  $\Omega$  della forzante. Nel primo di tali diagrammi si rappresenta solitamente il modulo della grandezza in dB, in funzione della pulsazione, in scala logaritmica.

$$1 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{A}{A_{\text{rif}}} \right)$$

$$\alpha(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \left( \frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2}$$

Un raddoppio di  $A$  corrisponde ad un incremento di circa 6 dB, un aumento di 10 volte ad un incremento di 20 dB

dB	$A/A_{\text{rif}}$
1	1.12
10	3.16
20	10.00
40	100.00
60	1000.00
80	10000.00
100	100000.00



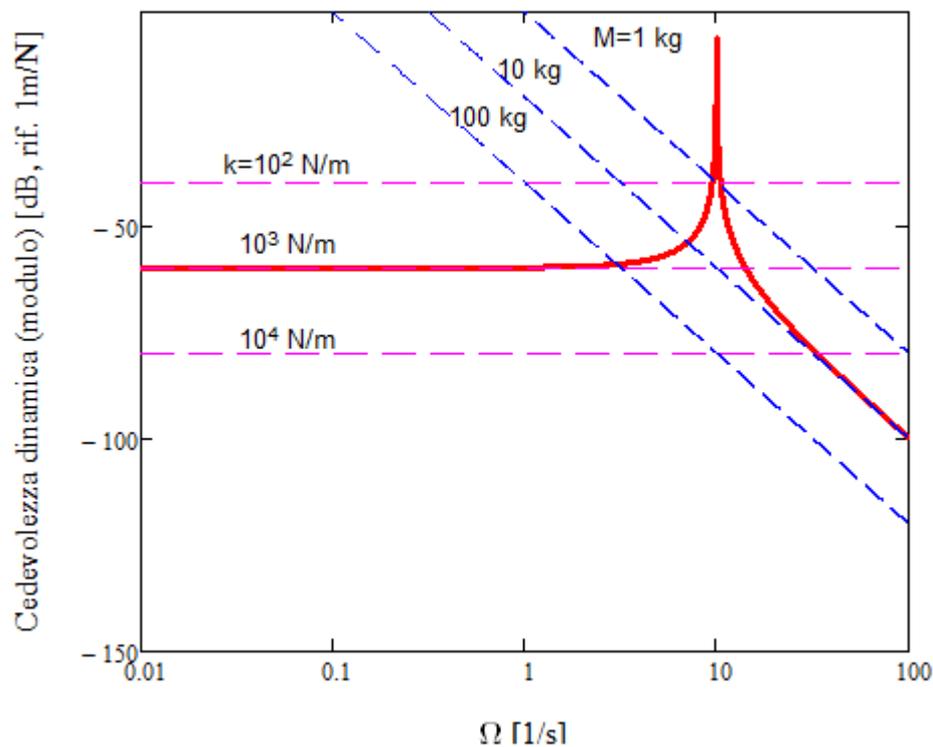
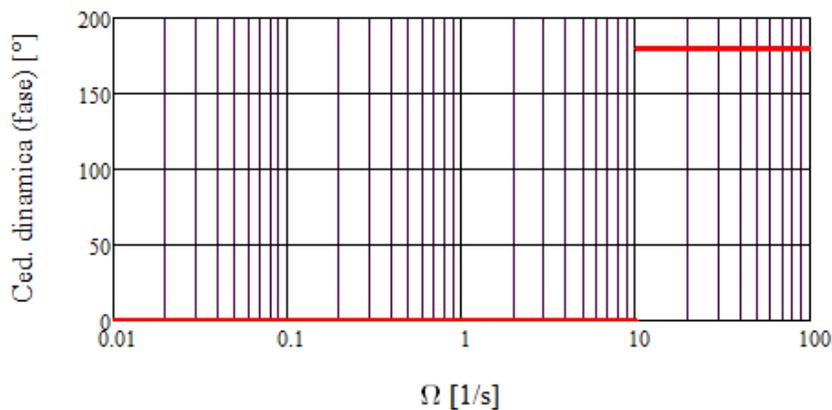
$$M = 10 \text{ kg}, k = 1000 \text{ N/m}, \omega_n = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\Omega \text{ [1/s]}$$

# RAPPRESENTAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Al grafico del modulo si abbina generalmente anche quello della fase, ottenendo il noto diagramma di Bode

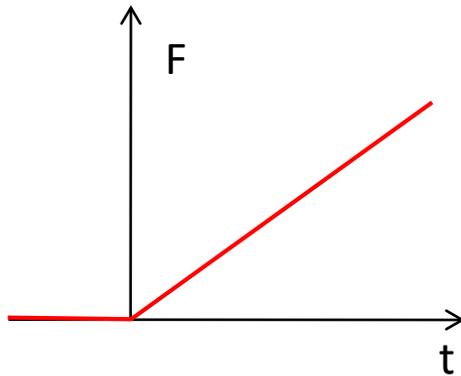
$$M=10 \text{ kg}, k = 1000 \text{ N/m}, \omega_n = 10 \text{ s}^{-1}$$



# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

Transitorio per forza applicata variabile a rampa

D: Quando si applica un carico statico ad una struttura, sotto quali condizioni si possono trascurare gli effetti dinamici?



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t} + \frac{B}{k} t$$

Integrale generale  
omogenea associata

Integrale  
particolare non  
omogenea

$$x(t) = Xt$$

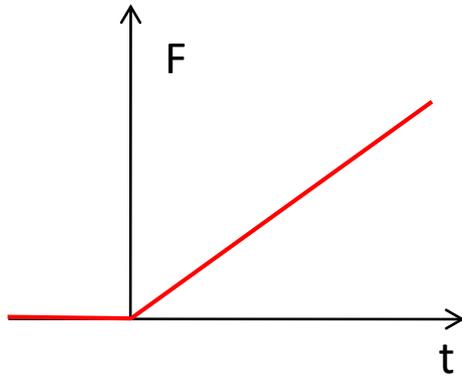
$$\dot{x}(t) = X$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$kXt = Bt \quad \Rightarrow \quad X = \frac{B}{k}$$

# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

Transitorio per forza applicata variabile a rampa



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t} + \frac{B}{k} t$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x(0) = A_1 + B_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = i\omega_n A_1 - i\omega_n B_1 + \frac{B}{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = i \frac{B}{2k\omega_n} \\ B_1 = -i \frac{B}{2k\omega_n} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{B}{k} \left( i \frac{e^{i\omega_n t}}{2\omega_n} - i \frac{e^{-i\omega_n t}}{2\omega_n} + t \right) = \frac{B}{k} \left( \frac{i}{2\omega_n} 2i \text{Sin}(\omega_n t) + t \right) = \frac{B}{k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right)$$



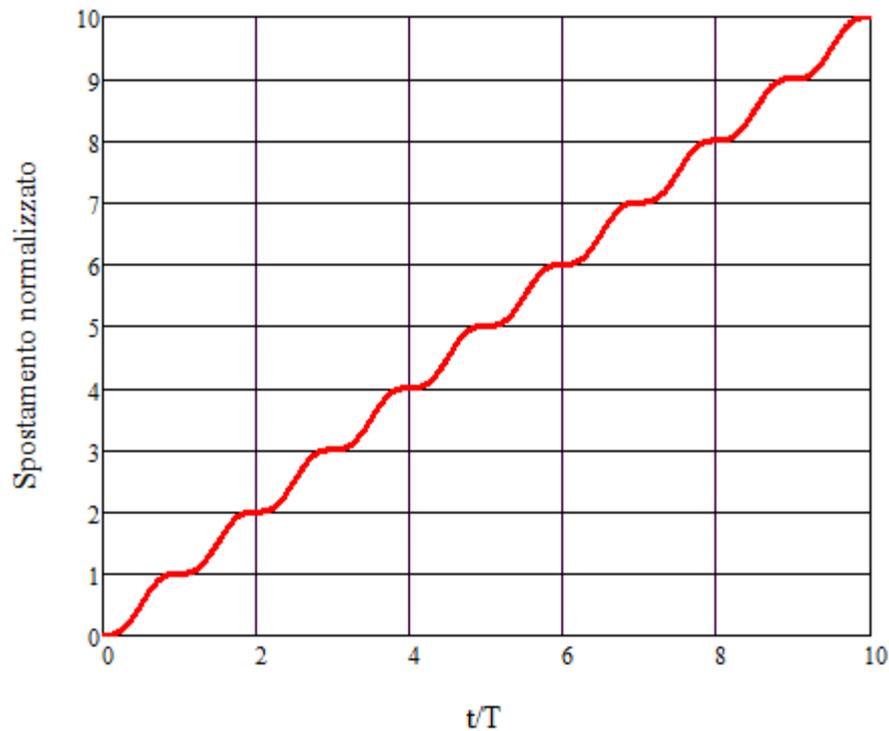
# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

Transitorio per forza applicata variabile a rampa

$$x(t) = \frac{B}{k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right) = \frac{BT}{k} \left( \frac{t}{T} - \frac{\text{Sin}(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right)$$

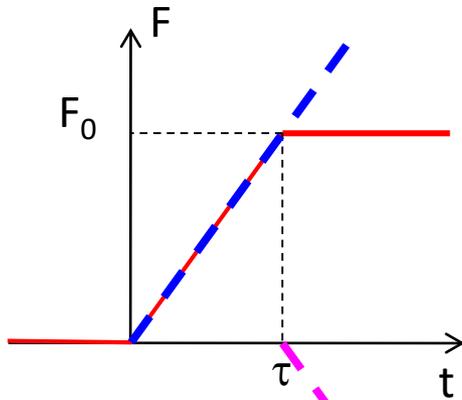
Spostamento normalizzato

$$\frac{x(t)}{\frac{BT}{k}} = \left( \frac{t}{T} - \frac{\text{Sin}(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right)$$



# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

Transitorio per forza applicata a gradino con rampa iniziale



$$F = \frac{F_0}{\tau} t = Bt$$

$$0 \leq t \leq \tau$$

$$F = Bt - B(t - \tau) = F_0$$

$$\tau < t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq \tau \\ \tau < t \end{array} \right. \quad x(t) = \frac{B}{k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right)$$

$$x(t) = \frac{B}{k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right) - \frac{B}{k} \left( (t - \tau) - \frac{\text{Sin}(\omega_n (t - \tau))}{\omega_n} \right) =$$

$$= \frac{B}{k} \left( \tau - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{\text{Sin}(\omega_n (t - \tau))}{\omega_n} \right)$$



# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

Transitorio per forza applicata a gradino con rampa iniziale

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq \tau \\ \tau < t \end{array} \right. \quad x(t) \frac{k}{F_0} = \frac{k}{F_0} \frac{\tau B}{\tau k} \left( t - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau < t \end{array} \right. \quad x(t) \frac{k}{F_0} = \frac{k}{F_0} \frac{\tau B}{\tau k} \left( \tau - \frac{\text{Sin}(\omega_n t)}{\omega_n} + \frac{\text{Sin}(\omega_n (t - \tau))}{\omega_n} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq \tau \\ \tau < t \end{array} \right. \quad x(t) \frac{k}{F_0} = \frac{1}{\tau} \frac{T}{T} \left( t - T \frac{\text{Sin}(\frac{2\pi}{T} t)}{2\pi} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau < t \end{array} \right. \quad x(t) \frac{k}{F_0} = \frac{1}{\tau} \frac{T}{T} \left( \tau - T \frac{\text{Sin}(\frac{2\pi}{T} t)}{2\pi} + T \frac{\text{Sin}(\frac{2\pi}{T} (t - \tau))}{2\pi} \right)$$

# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

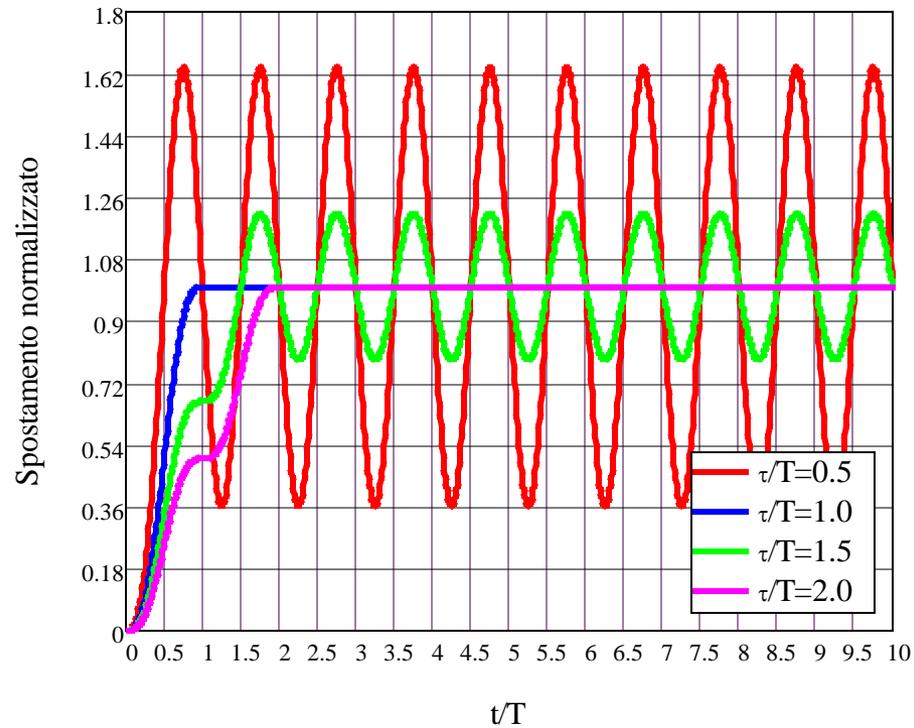
Transitorio per forza applicata a gradino con rampa iniziale

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 \leq t \leq \tau \quad x(t) \frac{k}{F_0} = \frac{1}{\tau} \frac{T}{T} \left( t - T \frac{\text{Sin}\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{2\pi} \right) \\
 \tau < t \quad x(t) \frac{k}{F_0} = \frac{1}{\tau} \frac{T}{T} \left( \tau - T \frac{\text{Sin}\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{2\pi} + T \frac{\text{Sin}\left(\frac{2\pi}{T} (t - \tau)\right)}{2\pi} \right)
 \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 \leq t \leq \tau \quad \frac{x(t)k}{F_0} = \frac{T}{\tau} \left( \frac{t}{T} - \frac{\text{Sin}\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}{2\pi} \right) \\
 \tau < t \quad \frac{x(t)k}{F_0} = 1 + \frac{T}{\tau} \left( \frac{\text{Sin}\left(2\pi \frac{(t - \tau)}{T}\right)}{2\pi} - \frac{\text{Sin}\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}{2\pi} \right)
 \end{array} \right.$$

# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

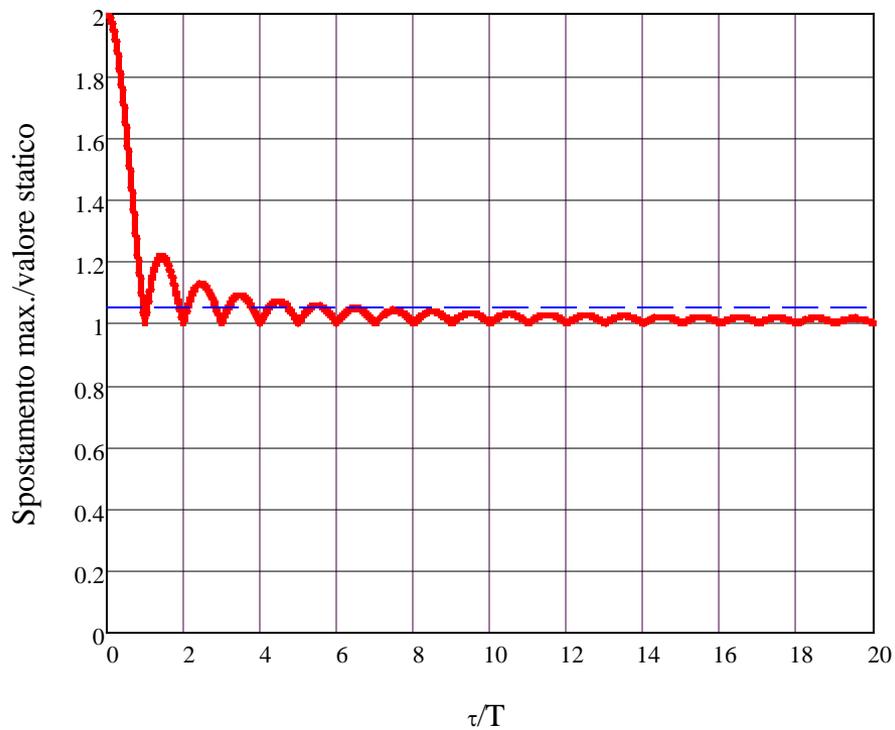
Transitorio per forza applicata a gradino con rampa iniziale





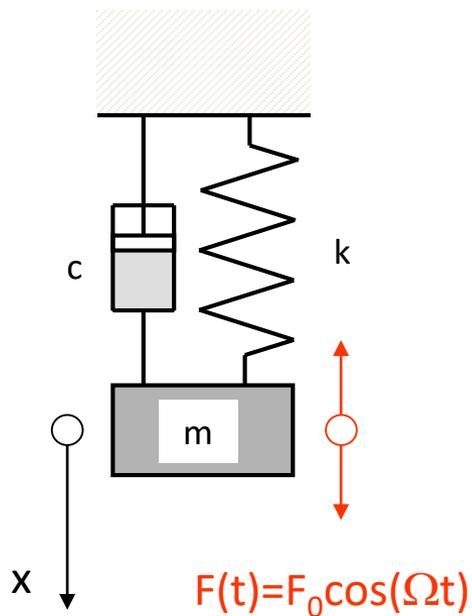
# SISTEMA A 1 GDL NON SMORZATO – Casi notevoli

Transitorio per forza applicata a gradino con rampa iniziale



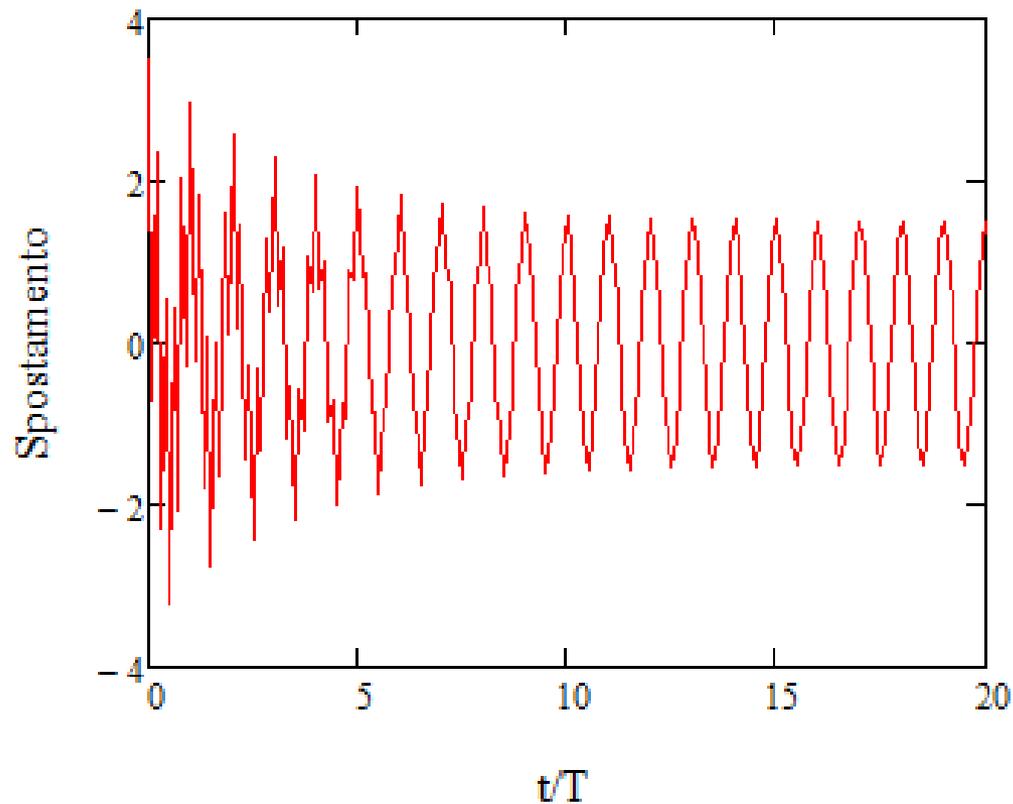
# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = X e^{-i\varphi} e^{i\Omega t} + e^{-\xi\omega_n t} A \sin(\omega_s t + \varphi)$$



# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO

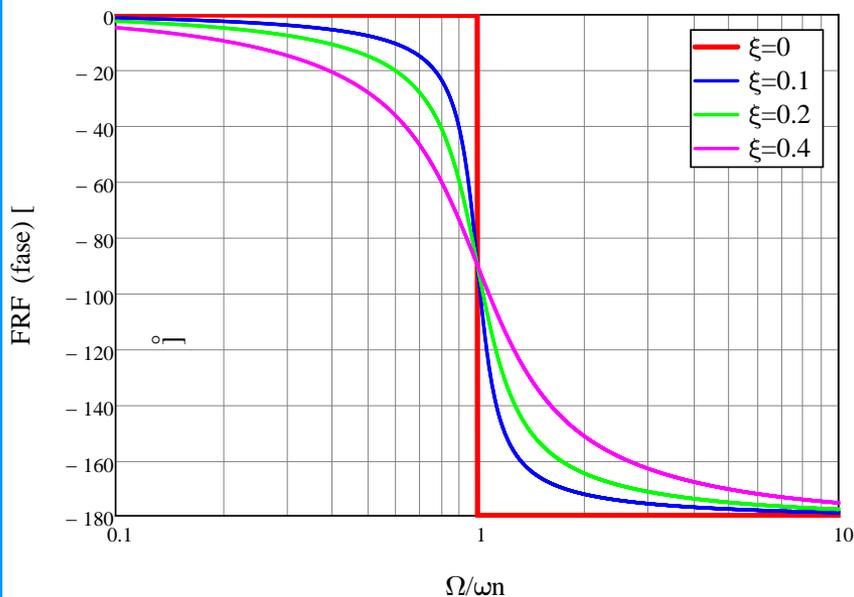
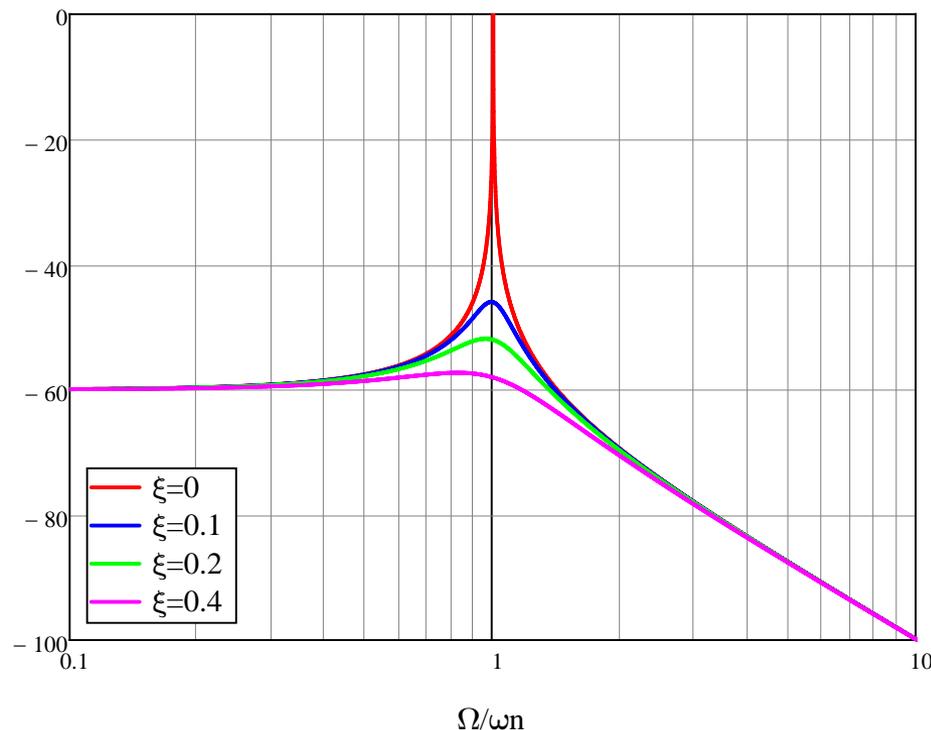
$$x(t) = X e^{-i\varphi} e^{i\Omega t}$$

Fattore di amplificazione dinamica

$$\frac{X}{F_0} = D = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$FRF = \frac{X}{F_0} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

FRF (modulo) [dB, rif. 1m/N]



$$\varphi = \arctan \left( \frac{-2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$



# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO

Risonanza di fase:  $\Omega = \omega_n$

$$D_{fase} = \frac{1}{2\xi}$$

**Risonanza di ampiezza** = rapporto di frequenza per il quale si ha il massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)_{max} = \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

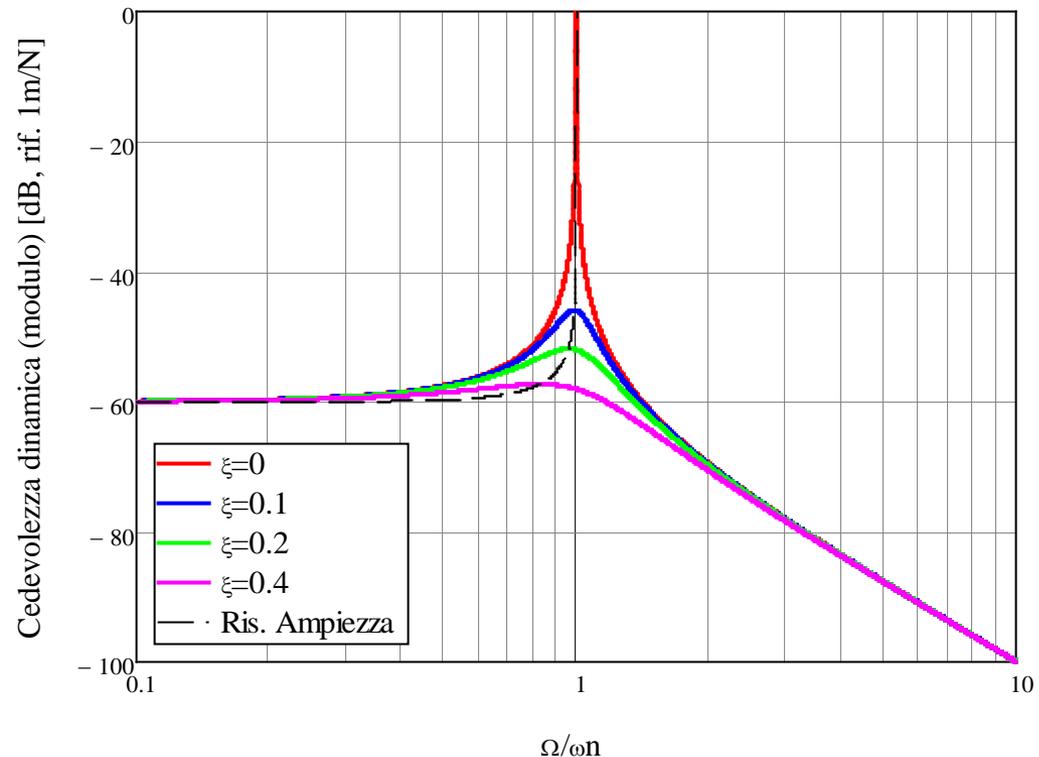
Massimo valore corrispondente del fattore di amplificazione dinamica:

$$D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Per  $\xi$  piccolo:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)_{max} \approx 1$$

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi}$$





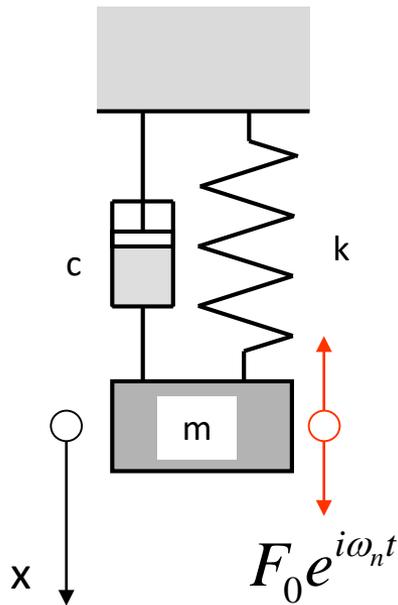
# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO – Casi notevoli

## Oscillazione in risonanza (di fase)

D: Può una struttura può «attraversare» una risonanza?

Sistema ad 1 g.d.l. (conviene usare la parte reale)

$$\ddot{x} + \xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \text{Re} \left[ \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t} \right] = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_n t)$$



$$x(t) = X \sin(\omega_n t)$$

Integrale particolare non omogenea

$$\dot{x}(t) = \omega_n X \cos(\omega_n t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 X \sin(\omega_n t)$$

$$-\omega_n^2 X \sin(\omega_n t) + 2\xi\omega_n^2 X \cos(\omega_n t) + \omega_n^2 X \sin(\omega_n t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_n t)$$

$$2\xi\omega_n^2 X \cos(\omega_n t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_n t)$$

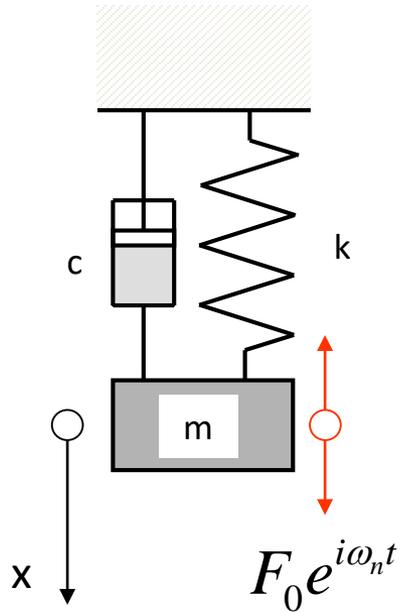
$$X = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\xi\omega_n^2} = \frac{F_0}{km} \frac{k}{2\xi\omega_n^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi}$$



# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO – Casi notevoli

## Oscillazione in risonanza (di fase)

Sistema ad 1 g.d.l.



$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_s t) + B_1 \sin(\omega_s t)) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_n t)$$

Condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(0) = A_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A_1 + \omega_s B_1 + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \omega_n = 0$$

$$B_1 = \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$A_1 = 0$$

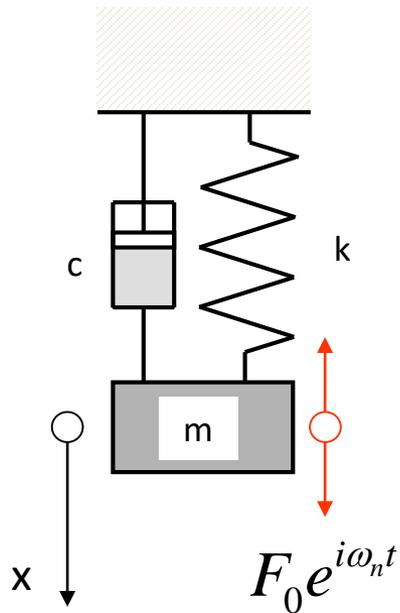
$$x(t) = -e^{-\xi\omega_n t} \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_s t) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_n t)$$



# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO – Casi notevoli

## Oscillazione in risonanza (di fase)

Sistema ad 1 g.d.l.



$$x(t) = -e^{-\xi\omega_n t} \frac{F_0}{2k\xi\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_s t) + \frac{F_0}{k} \frac{1}{2\xi} \sin(\omega_n t)$$

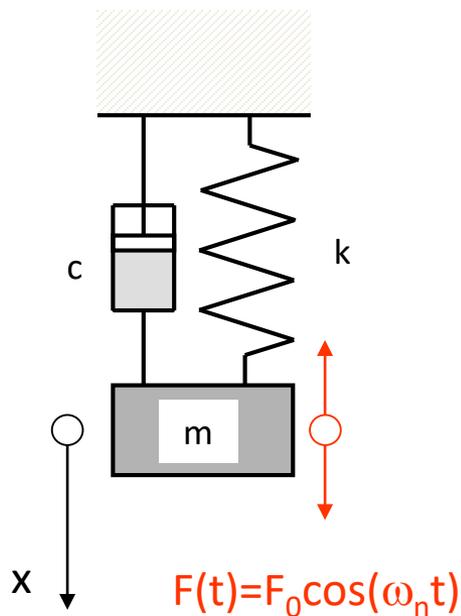
$$x(t) = \frac{F_0}{2k\xi} \left( \sin(\omega_n t) - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_s t) \right)$$

$$x(t) \approx \frac{F_0}{2k\xi} \sin(\omega_n t) \left( 1 - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

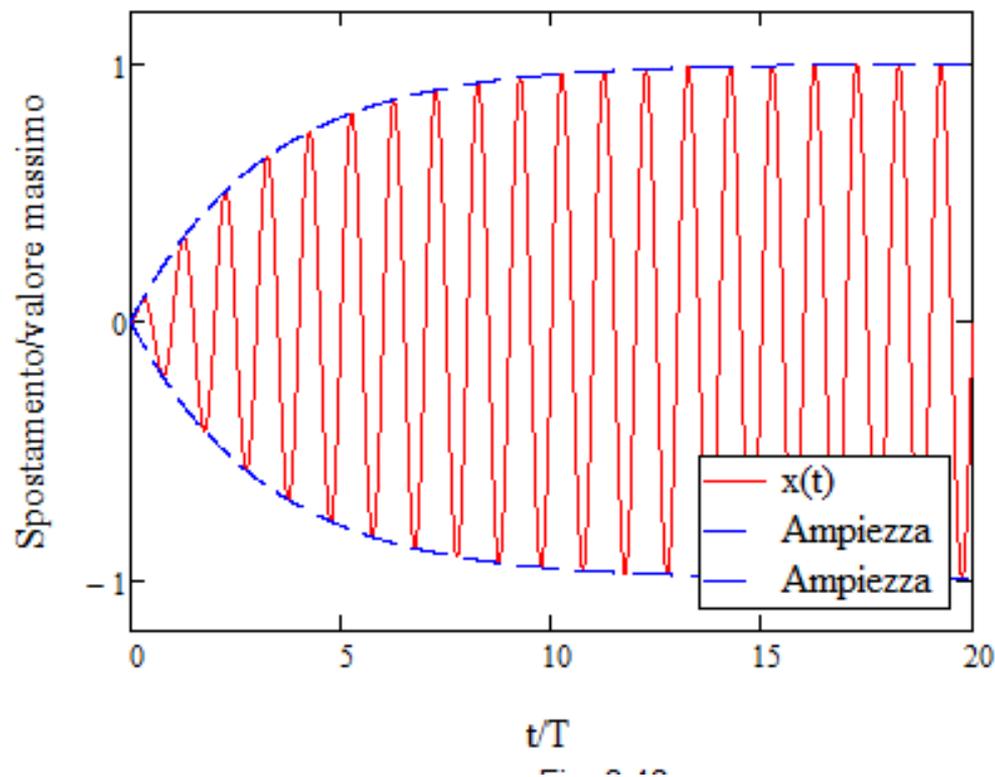
# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO – Casi notevoli

## Oscillazione in risonanza (di fase)

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\frac{x(t)}{\frac{F_0}{2k\xi}} \approx \sin(\omega_n t) \left( 1 - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

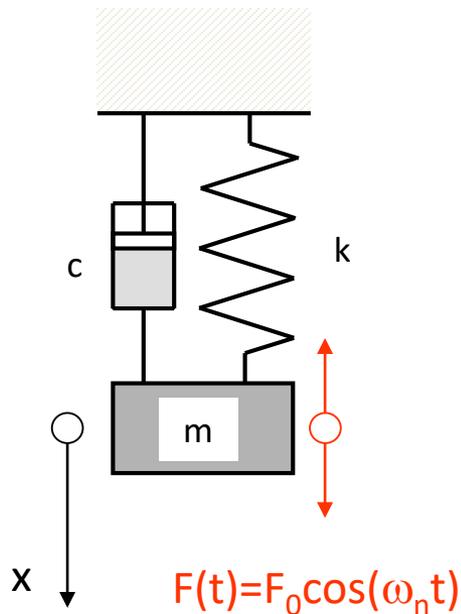




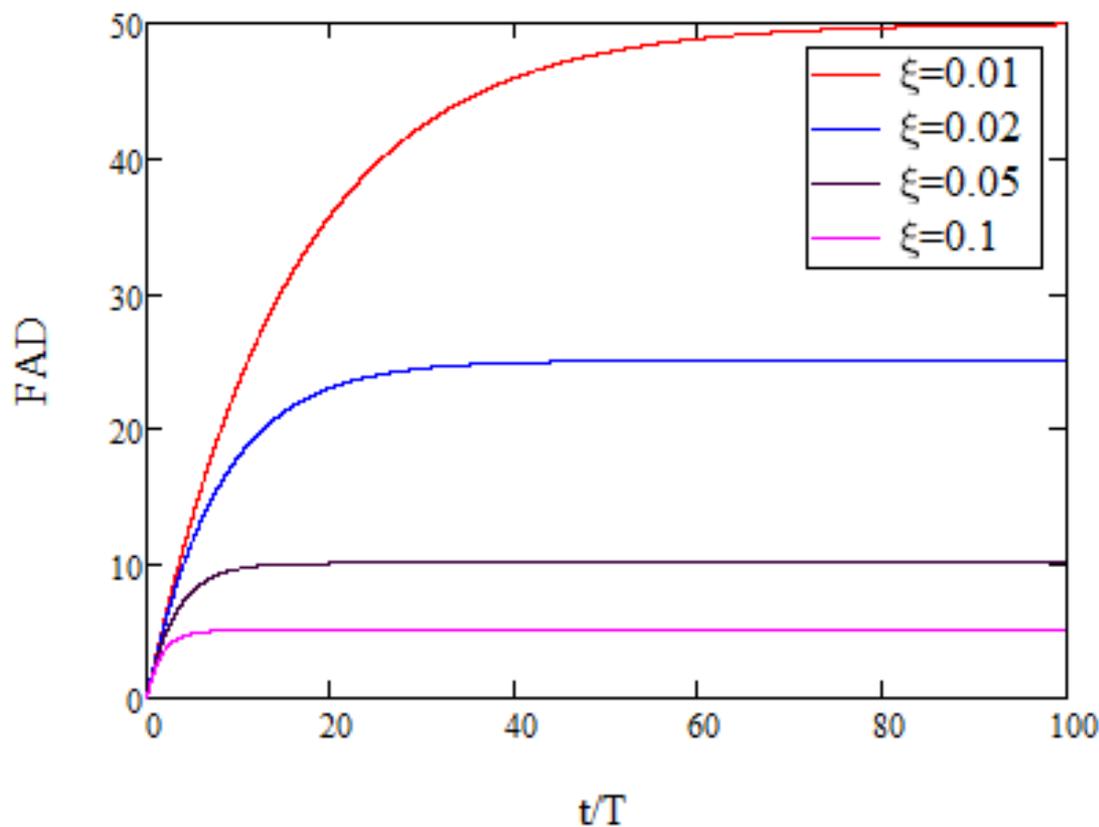
# SISTEMA A 1 GDL SMORZATO – Casi notevoli

## Oscillazione in risonanza (di fase)

Sistema ad 1 g.d.l.



$$FAD = \frac{x(t)}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{2\xi} \left( 1 - e^{-\xi\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$





## Esercizio B0

### ANALISI DI VIBRAZIONI FORZATE SISTEMA 1 GDL NON SMORZATO

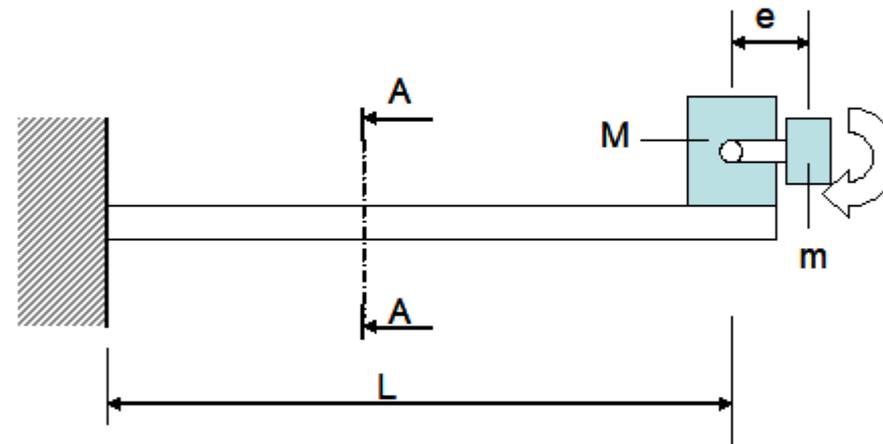
Data la trave a mensola con una massa  $M$  fissata all'estremità mostrata in Figura ed i valori delle principali grandezze indicati nel seguito, calcolare:

- la pulsazione propria del sistema trave+massa, trascurando la massa propria della trave stessa.

Ipotizzando quindi che la massa all'estremità sia un motore recante sull'asse una piccola massa eccentrica " $m$ " posta ad una distanza " $e$ " dall'asse di rotazione, calcolare:

- l'ampiezza di oscillazione verticale dell'estremità della trave.

- le tensioni massime agenti sulla trave



DATI

Unità di misura SI MKS

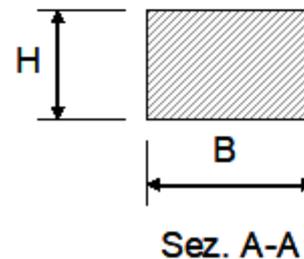
$$E := 2.1 \cdot 10^{11} \cdot \text{Pa} \quad m_e := 0.1 \cdot \text{kg}$$

$$\underline{H} := 0.04 \cdot \text{m} \quad \underline{e} := 0.05 \cdot \text{m}$$

$$B := 0.06 \cdot \text{m} \quad M := 5 \cdot \text{kg}$$

$$\underline{L} := 1 \cdot \text{m}$$

$$n := 1500 \cdot \frac{1}{\text{min}} \quad \text{Velocità di rotazione motore [giri/1']}$$





## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SISTEMA A MOLTI GDL

Si ipotizza che le forzanti applicate ai diversi gdl siano ad andamento sinusoidale e tutte con la stessa pulsazione  $\Omega$ . Esse possono invece differire per ampiezza e fase. La relativa equazione di equilibrio dinamico diviene :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}e^{i\Omega t}$$

Le principali tecniche di soluzione sono:

- **Metodo di Sovrapposizione Modale** o Modal Superposition Method (MSM, valido in caso di smorzamento classico)
- **Metodo Diretto** (valido per qualsiasi forma di smorzamento)

Ancora una volta, non si riscontrano significative differenze nelle tecniche di soluzione tra modelli a masse concentrate e FEM, per cui quanto detto nel seguito è valido per entrambi



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Equazione di equilibrio dinamico :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}e^{i\Omega t}$$

Le proprietà delle forme modali consentono di esprimere il vettore spostamento come una loro combinazione lineare:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{q}(t)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}}(t)$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$$

e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{C}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T\mathbf{K}\mathbf{Y}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$$



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Dalla:

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} \mathbf{q} = \mathbf{Y}^T \mathbf{f}(t)$$

ricordando le proprietà della matrice modale nel caso di smorzamento classico, si ottiene:

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \text{diag} \mathbf{C}_{jd} \dot{\mathbf{q}} + \text{diag} \mathbf{\Omega}_j^2 \mathbf{q} = \mathbf{Y}^T \mathbf{f}(t)$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \mathbf{Y}^T \mathbf{f} e^{i\Omega t} = \mathbf{y}^{(j)T} \mathbf{f} e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

Il termine  $f_j$  è detto «forza modale»



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Si osserva che la forzante esterna ha andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_{nj} \dot{q}_j + \omega_{nj}^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega^2 Q_j e^{i\Omega t} + i\Omega 2\xi_j \omega_{nj} Q_j e^{i\Omega t} + \omega_{nj}^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Q_j + i\Omega 2\xi_j \omega_{nj} Q_j + \omega_{nj}^2 Q_j = f_j$$

$$Q_j = \frac{f_j}{(\omega_{nj}^2 - \Omega^2) + 2i\Omega \xi_j \omega_{nj}}$$



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

La soluzione completa assume quindi una forma del tipo:

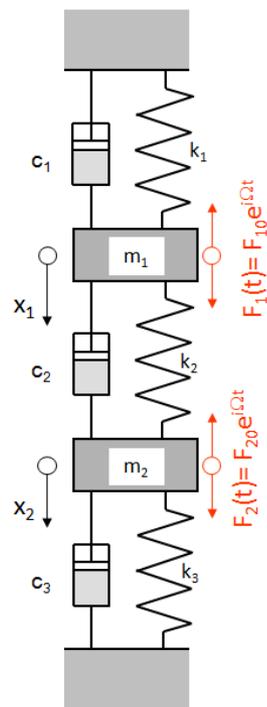
$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^N Q_j \mathbf{y}^{(j)} e^{i\Omega t} = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{\left(\omega_{nj}^2 - \Omega^2\right) + 2i\xi_j \omega_{nj} \Omega} \mathbf{y}^{(j)} e^{i\Omega t}$$

ovvero la somma del contributo di N oscillatori ad 1 gdl, ognuno corrispondente ad uno dei modi propri.

# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

**Esempio B1** – Risposta forzata di sistema a 2 gdl non smorzato (Es. D5):



$$k_1 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad k_3 := 1500 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$m_1 := 14 \cdot \text{kg} \quad m_2 := 7 \cdot \text{kg}$$

$$F_{10} := 250 \cdot \text{N} \quad F_{20} := -25 \cdot \text{N}$$

$$\omega_n := \sqrt{\omega_2} = \begin{pmatrix} 11.429 \\ 18.749 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}}$$

$$[Y] := \text{augment} \left[ [y^{(1)}], [y^{(2)}] \right] = \begin{pmatrix} 0.248 & -0.099 \\ 0.139 & 0.351 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{kg}^{0.5}}$$

Forze modali

$$\underline{F} := \begin{pmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ -25 \end{pmatrix} \text{N}$$

$$\underline{f} := [Y]^T \cdot \underline{F} = \begin{pmatrix} 58.612 \\ -33.44 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}^{0.5} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Dati

Risultati da Es. D5

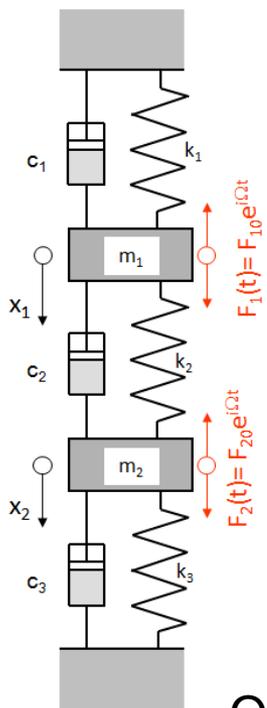
Matrice modale



# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Spostamenti di sistema a 2 gdl non smorzato:



Risposta forzata

$$Q_1(\Omega) := \frac{f_1}{[(\omega_{n1})^2 - \Omega^2]} \quad Q_2(\Omega) := \frac{f_2}{[(\omega_{n2})^2 - \Omega^2]}$$

$$Q(\Omega) := \text{stack}(Q_1(\Omega), Q_2(\Omega))$$

$$u(\Omega) := [Y] \cdot Q(\Omega)$$

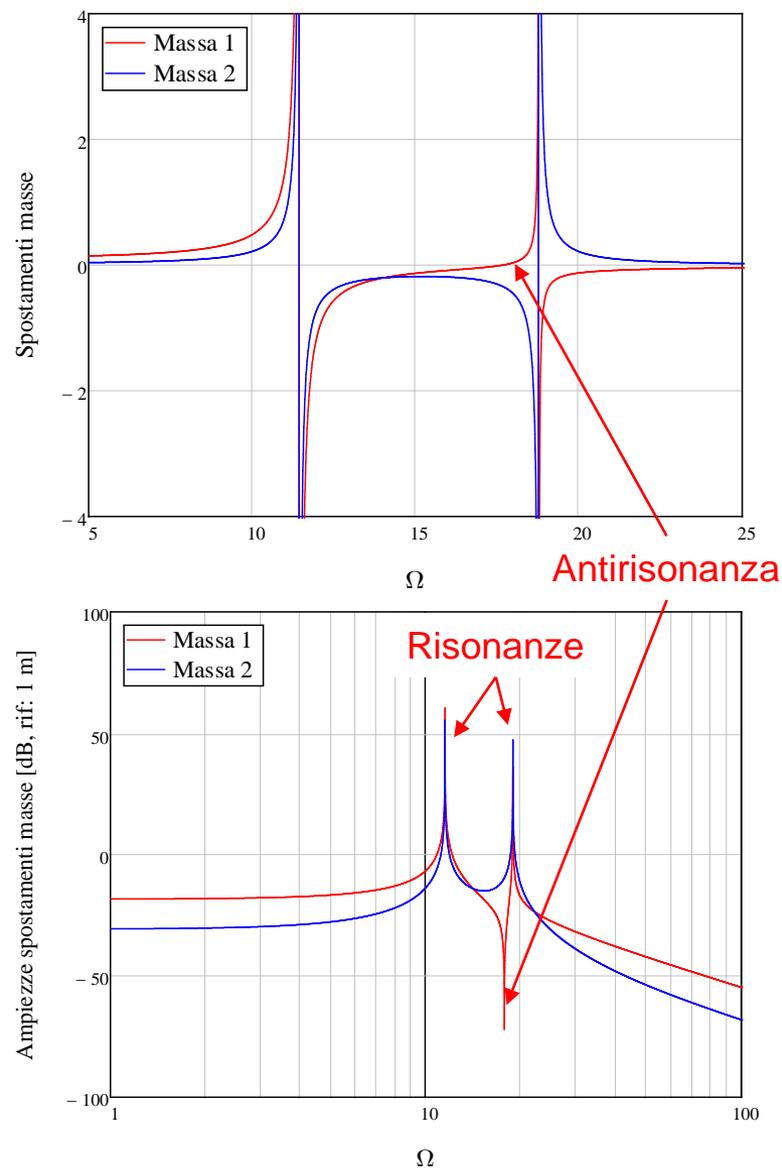
$$x_{1\text{db}}(\Omega) := 20 \cdot \log\left(|u(\Omega)_1| \cdot \frac{1}{m}\right)$$

$$x_{2\text{db}}(\Omega) := 20 \cdot \log\left(|u(\Omega)_2| \cdot \frac{1}{m}\right)$$

$$\varphi(\Omega) := \arg(u(\Omega))$$

Spostamenti in dB

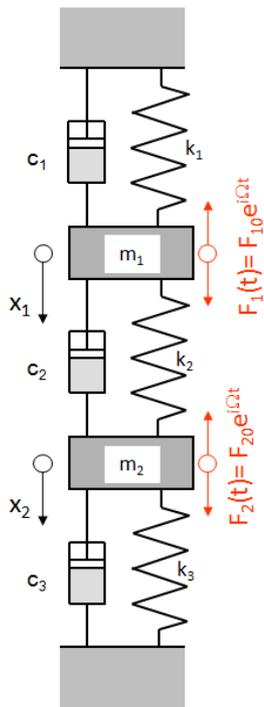
Oss: sono presenti due risonanze ed una «anti-risonanza»



# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Spostamento Massa 1: contributo dei due modi propri

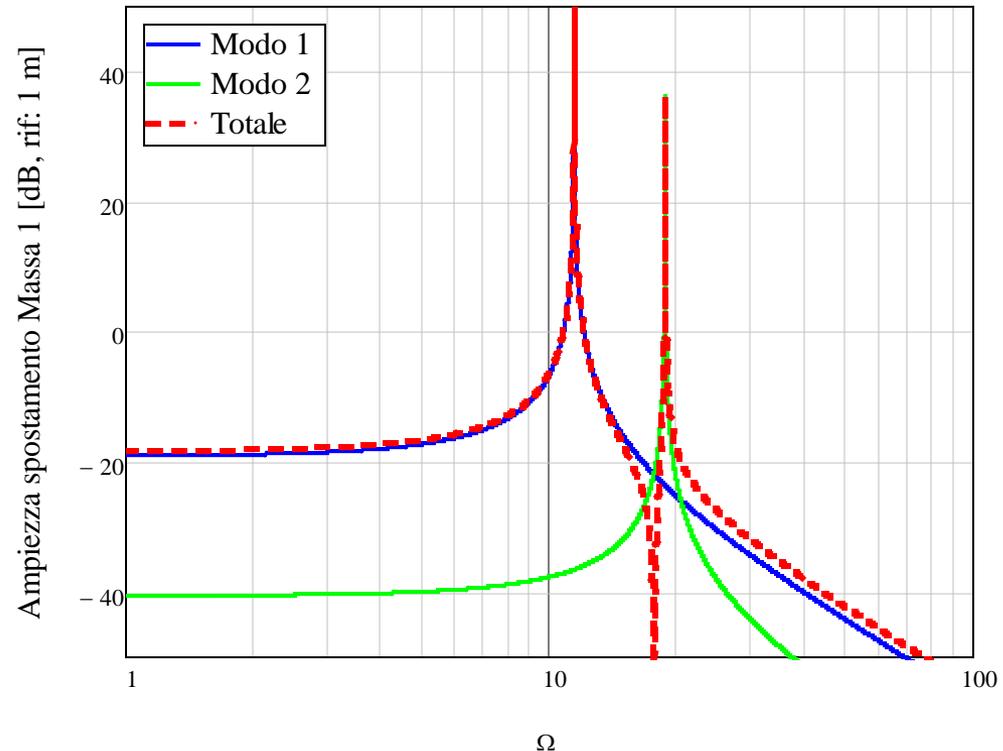


$$x_{11}(\Omega) := [y^{(1)}] \cdot Q_1(\Omega)$$

$$x_{12}(\Omega) := [y^{(2)}] \cdot Q_2(\Omega)$$

$$C_{1db}(\Omega) := 20 \cdot \log \left( \frac{|x_{11}(\Omega)|_1}{m} \right)$$

$$C_{2db}(\Omega) := 20 \cdot \log \left( \frac{|x_{12}(\Omega)|_1}{m} \right)$$



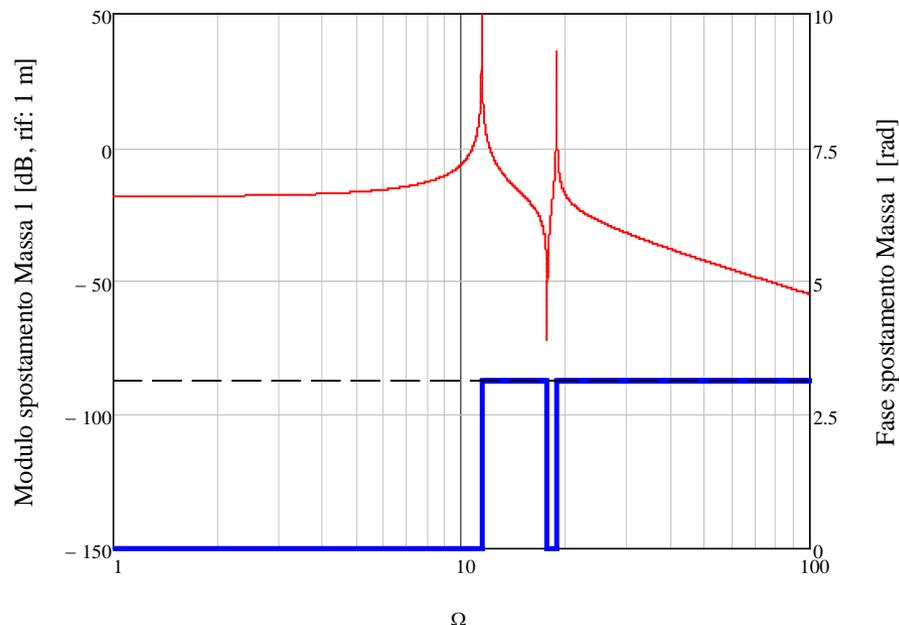
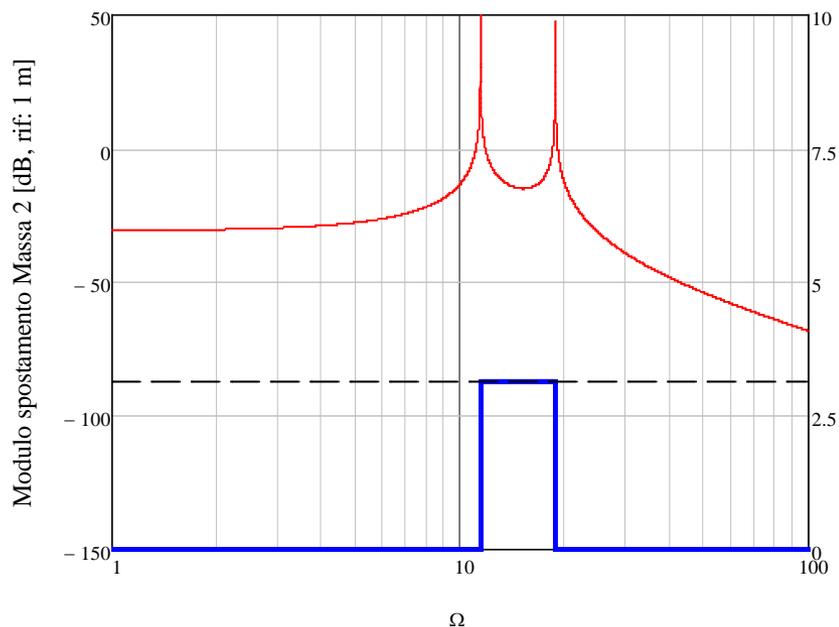
Oss: il contributo di ciascun modo è largamente dominante in prossimità della pulsazione propria corrispondente

# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Andamento modulo e fase spostamenti

Oss: cambio di fase per le due masse in corrispondenza delle due risonanze



Oss: antirisonanza per la Massa 1

Oss: cambio di fase anche in corrispondenza della antirisonanza



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

**Effetto della distribuzione «spaziale» della forzante (tra i diversi gdl)**

Si assuma una forzante tale che:

$$\mathbf{f} = \alpha \mathbf{K} \mathbf{y}^{(j)}$$

Per la ortogonalità delle forme normali rispetto alla matrice di rigidezza si ha:

$$\mathbf{y}^{(s)\text{T}} \mathbf{f} = f_s = \alpha \mathbf{y}^{(s)\text{T}} \mathbf{K} \mathbf{y}^{(j)} = \begin{cases} \alpha \omega_{nj}^2 & \text{se } s = j \\ 0 & \text{se } s \neq j \end{cases}$$

Lavoro che  $\mathbf{f}$  compirebbe su  $\mathbf{y}^{(s)}$

Altro possibile modo di interpretazione: si assume una forzante tale da produrre una **deformata statica** «proporzionale» alla forma modale:

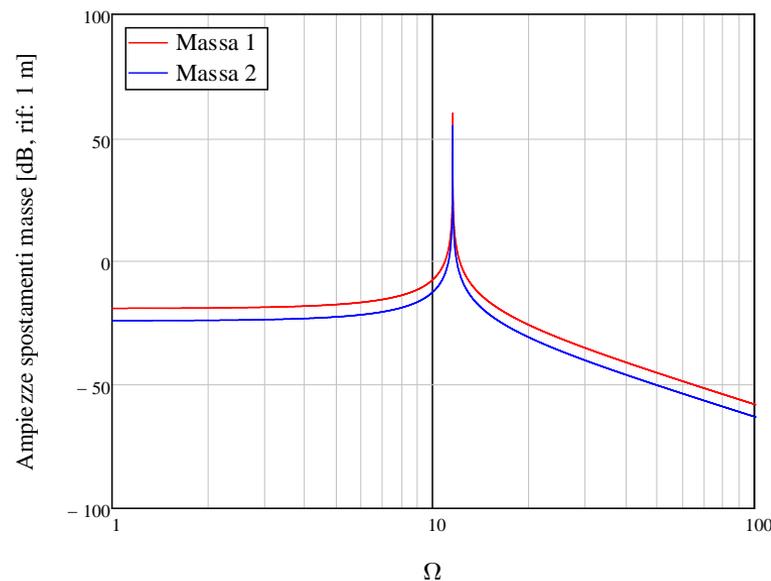
$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} = \alpha \mathbf{y}^{(j)}$$



# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

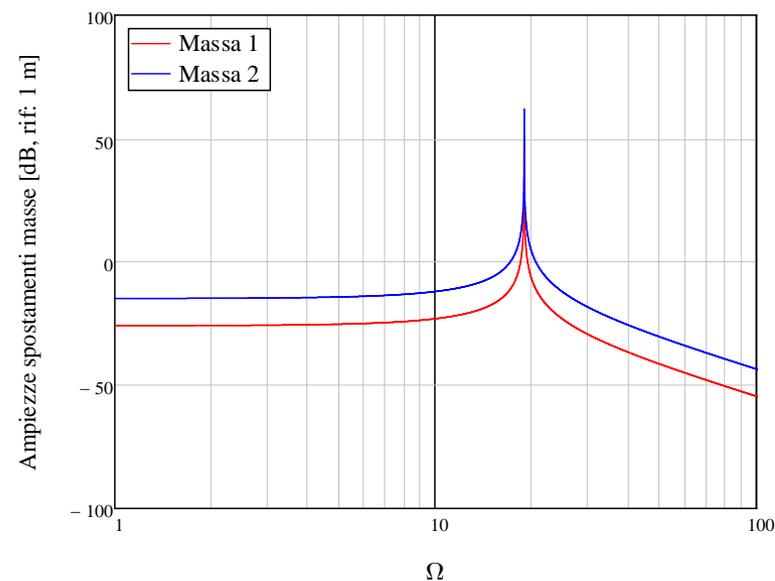
## SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{y}^{(1)}$$



Oss: compare la sola risonanza  
 $\omega_{n1} = 11.429 \text{ s}^{-1}$ .

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{y}^{(2)}$$



Oss: compare la sola risonanza  
 $\omega_{n2} = 18.749 \text{ s}^{-1}$ .

Oss: la «pericolosità» della risonanza tra una data forzante ed una specifica pulsazione propria dipende anche dalla capacità della forzante stessa di compiere lavoro sulla relativa forma modale.



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

**Esempio B2** – Risposta forzata di sistema a 2 gdl con smorzamento classico (da Es. B1). Si introduce una matrice di smorzamento principale:

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Risposta forzata

$$Q_1(\Omega, \xi) := \frac{f_1}{\left[ (\omega_{n1})^2 - \Omega^2 \right]^2 + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega_{n1} \cdot \Omega}$$

$$Q_2(\Omega, \xi) := \frac{f_2}{\left[ (\omega_{n2})^2 - \Omega^2 \right]^2 + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega_{n2} \cdot \Omega}$$

$$Q(\Omega, \xi) := \text{stack}(Q_1(\Omega, \xi), Q_2(\Omega, \xi))$$

$$\mathbf{u}(\Omega, \xi) := [\mathbf{Y}] \cdot Q(\Omega, \xi)$$

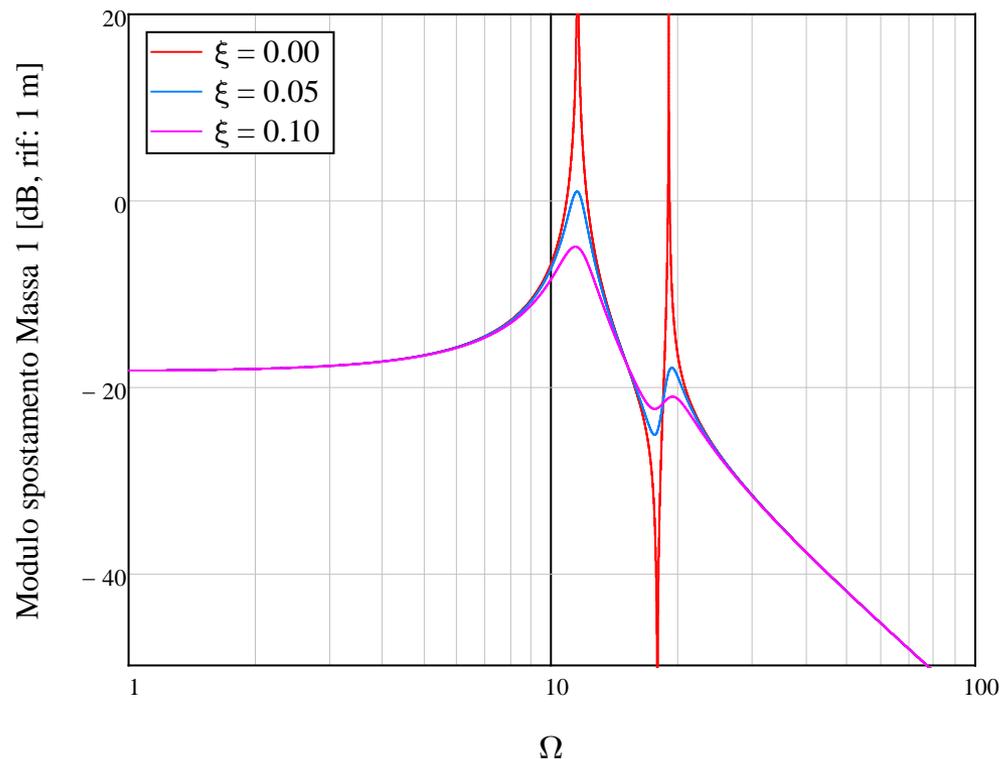
Calcolo di modulo e fase della soluzione

$$X(\Omega, \xi) := \sqrt{\text{Re}(\mathbf{u}(\Omega, \xi))^2 + \text{Im}(\mathbf{u}(\Omega, \xi))^2}$$

$$X_{1\text{db}}(\Omega, \xi) := 20 \cdot \log\left(\frac{|X(\Omega, \xi)_1|}{m}\right)$$

$$X_{2\text{db}}(\Omega, \xi) := 20 \cdot \log\left(\frac{|X(\Omega, \xi)_2|}{m}\right)$$

$$\varphi_1(\Omega, \xi) := \arg(\mathbf{u}(\Omega, \xi)_1)$$

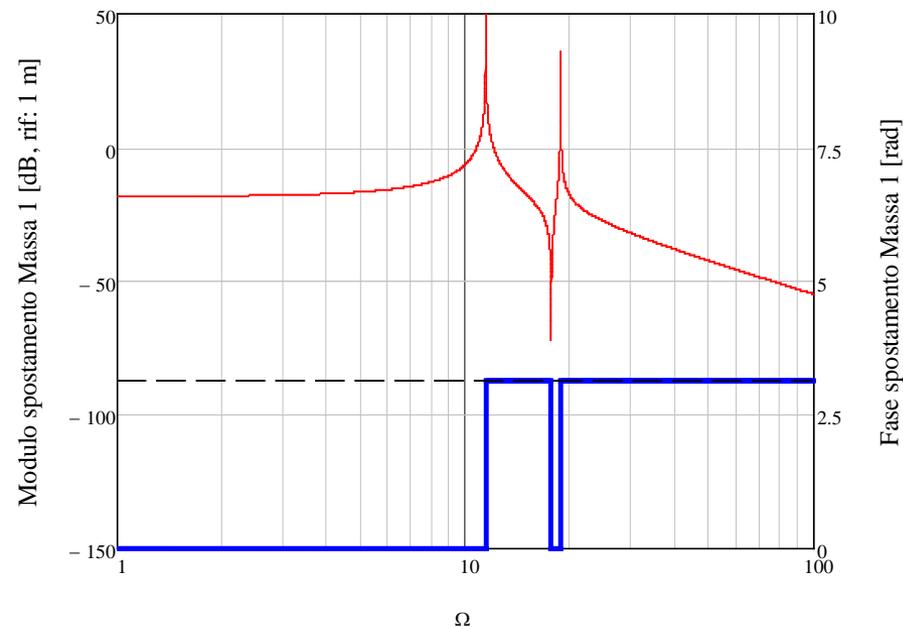
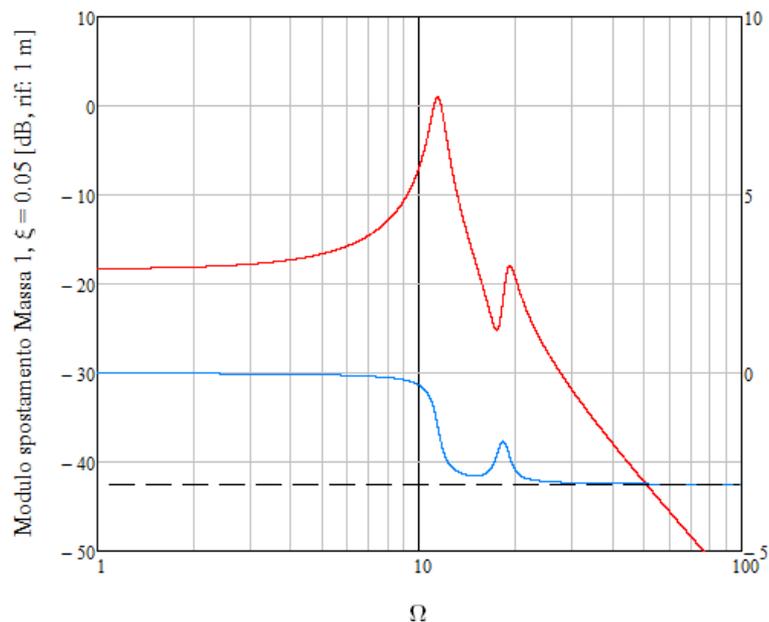


Oss: i picchi di oscillazione risultano smussati

# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

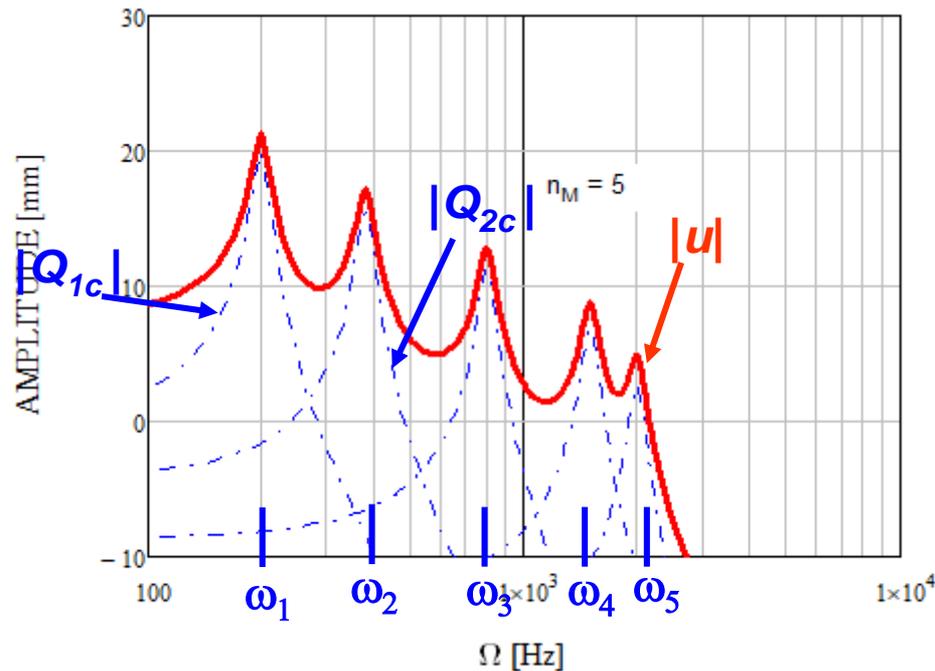
## SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Andamento modulo e fase spostamenti per il sistema non smorzato e con  $\xi = 0.05$



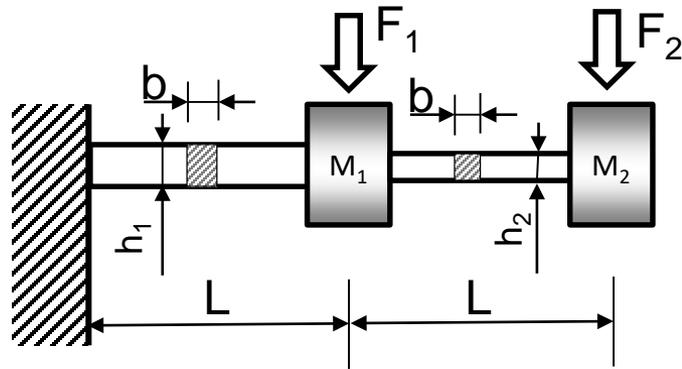
Oss: i cambi di fase tendono a divenire graduali ed a sovrapporsi

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO CLASSICO – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE



Oss: anche in questo caso si evidenziano i contributi dei diversi modi propri, ognuno dei quali è dominante in prossimità della relativa risonanza.

## Esercizio B1 – Risposta forzata di sistema a 2 gdl non smorzato:

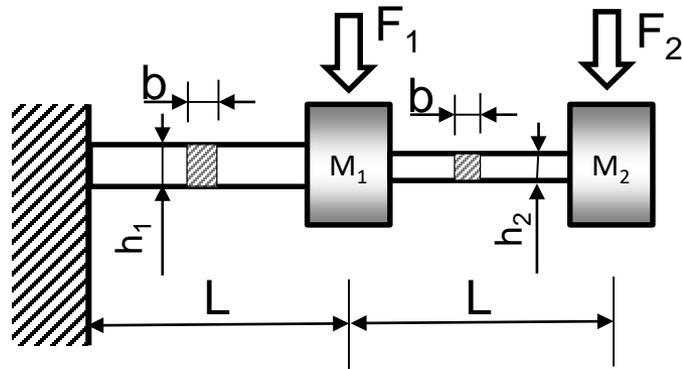


Si calcoli l'ampiezza di oscillazione della masse 1 e 2 del sistema mostrato in Figura. Le travi, in alluminio, possono assumersi prive di massa. Lo smorzamento può essere ritenuto trascurabile.

Dati

$L_0 := 1.5 \cdot \text{m}$	$M_1 := 50 \cdot \text{kg}$	$M_2 := 50 \cdot \text{kg}$	$E := 7 \cdot 10^{10} \cdot \text{Pa}$	$\nu := 0.3$
$b := 0.05 \cdot \text{m}$	$h_1 := 0.1 \cdot \text{m}$	$h_2 := 0.05 \cdot \text{m}$		
$F_1 := 250 \cdot \text{N}$	$F_2 := 200 \cdot \text{N}$	$\Omega_0 := 25 \cdot \frac{1}{\text{s}}$		

## Esercizio B2 – Risposta forzata di sistema a 2 gdl con smorzamento classico



Si calcoli l'ampiezza di oscillazione della masse 1 e 2 del sistema mostrato in Figura. Le travi, in alluminio, possono assumersi prive di massa. Si assuma uno smorzamento proporzionale.

Dati

$$L_0 := 1.5 \cdot \text{m} \quad M_1 := 50 \cdot \text{kg} \quad M_2 := 50 \cdot \text{kg} \quad E := 7 \cdot 10^{10} \cdot \text{Pa} \quad \nu := 0.3$$

$$b := 0.05 \cdot \text{m} \quad h_1 := 0.1 \cdot \text{m} \quad h_2 := 0.05 \cdot \text{m}$$

$$F_1 := 250 \cdot \text{N} \quad F_2 := 200 \cdot \text{N} \quad \Omega_0 := 25 \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

$$\alpha := 0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{\text{kg}} \quad \beta := 0.001 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{N}} \cdot \frac{1}{\text{s}}$$



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO GENERALE – SOLUZIONE DIRETTA

Equazione di equilibrio dinamico :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}e^{i\Omega t}$$

Si ipotizza una espressione dello spostamento del tipo:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}e^{i\Omega t}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = i\Omega\mathbf{x}e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\Omega^2\mathbf{x}e^{i\Omega t}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$-\Omega^2\mathbf{M}\mathbf{x}e^{i\Omega t} + i\Omega\mathbf{C}\mathbf{x}e^{i\Omega t} + \mathbf{K}\mathbf{x}e^{i\Omega t} = \mathbf{f}e^{i\Omega t}$$

da cui:

$$\left(\mathbf{K} + i\Omega\mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO GENERALE – SOLUZIONE DIRETTA

Il sistema :

$$\left( \mathbf{K} + i\Omega\mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{M} \right) \mathbf{x} = \mathbf{f}$$

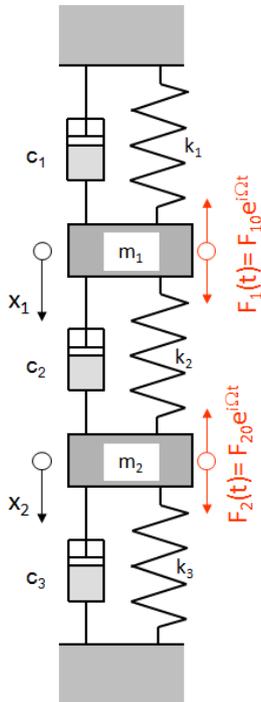
deve essere risolto in campo complesso, fornendo la soluzione:

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{K} + i\Omega\mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{M} \right)^{-1} \mathbf{f}$$

La soluzione ottenuta può risultare molto onerosa in termini computazionali al crescere del numero di gdl, anche perché si richiede una nuova inversione della matrice per ogni diverso valore di  $\Omega$ .

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO GENERALE – SOLUZIONE DIRETTA

**Esempio B3** – Risposta forzata di sistema a 2 gdl con smorzamento generale (da Es. B1). Introducendo una matrice di smorzamento principale:



Spostamento masse con soluzione completa

$$\underline{A}_0(\Omega, \xi) := \mathbf{K} + j \cdot \Omega \cdot \mathbf{C}(\xi) - \Omega^2 \cdot \mathbf{M}$$

$$\Delta(\Omega, \xi) := A_{0(\Omega, \xi)}_{1,1} \cdot A_{0(\Omega, \xi)}_{2,2} - A_{0(\Omega, \xi)}_{1,2} \cdot A_{0(\Omega, \xi)}_{2,1}$$

$$X_{10}(\Omega, \xi) := \frac{A_{0(\Omega, \xi)}_{2,2}}{\Delta(\Omega, \xi)} \cdot F_{10} + \frac{-A_{0(\Omega, \xi)}_{1,2}}{\Delta(\Omega, \xi)} \cdot F_{20}$$

$$X_{20}(\Omega, \xi) := \frac{-A_{0(\Omega, \xi)}_{2,1}}{\Delta(\Omega, \xi)} \cdot F_{10} + \frac{(A_{0(\Omega, \xi)})_{1,1}}{\Delta(\Omega, \xi)} \cdot F_{20}$$

$$\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & -\zeta\sqrt{4\xi^2\omega_{n1}\omega_{n2}} \\ -\zeta\sqrt{4\xi^2\omega_{n1}\omega_{n2}} & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Calcolo del modulo della soluzione

$$X_1(\Omega, \xi) := \sqrt{\operatorname{Re}(X_{10}(\Omega, \xi))^2 + \operatorname{Im}(X_{10}(\Omega, \xi))^2} \quad X_2(\Omega, \xi) := \sqrt{\operatorname{Re}(X_{20}(\Omega, \xi))^2 + \operatorname{Im}(X_{20}(\Omega, \xi))^2}$$

$$X_{1\text{ddb}}(\Omega, \xi) := 20 \cdot \log\left(\frac{|X_1(\Omega, \xi)|}{m}\right)$$

$$X_{2\text{ddb}}(\Omega, \xi) := 20 \cdot \log\left(\frac{|X_2(\Omega, \xi)|}{m}\right)$$

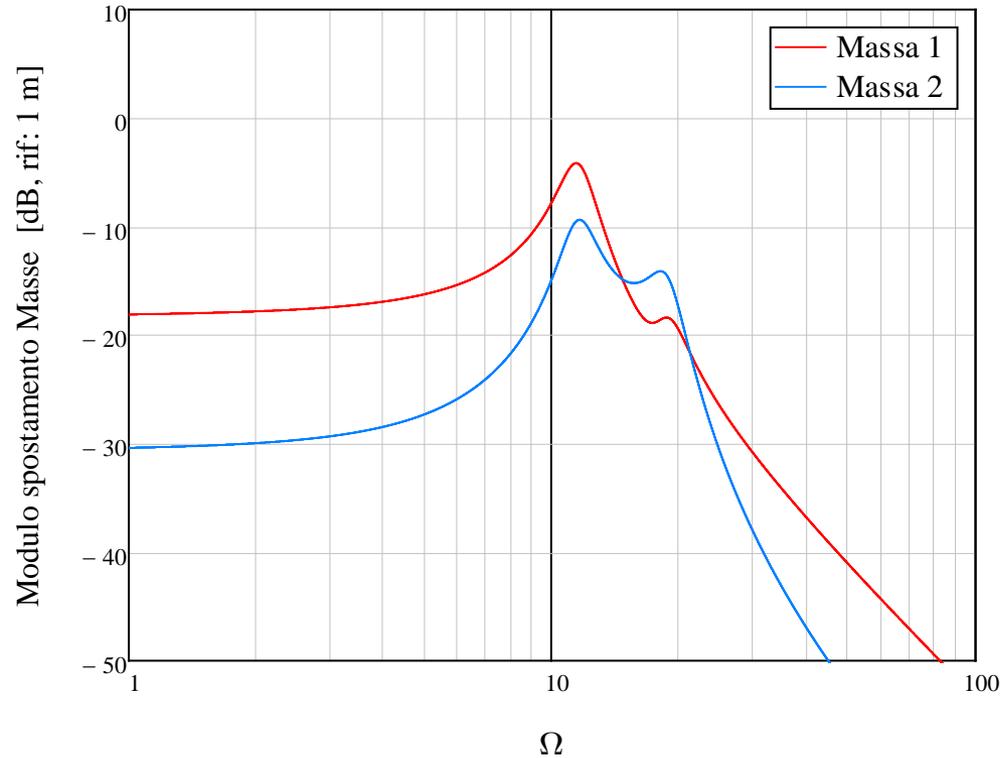


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO GENERALE – SOLUZIONE DIRETTA

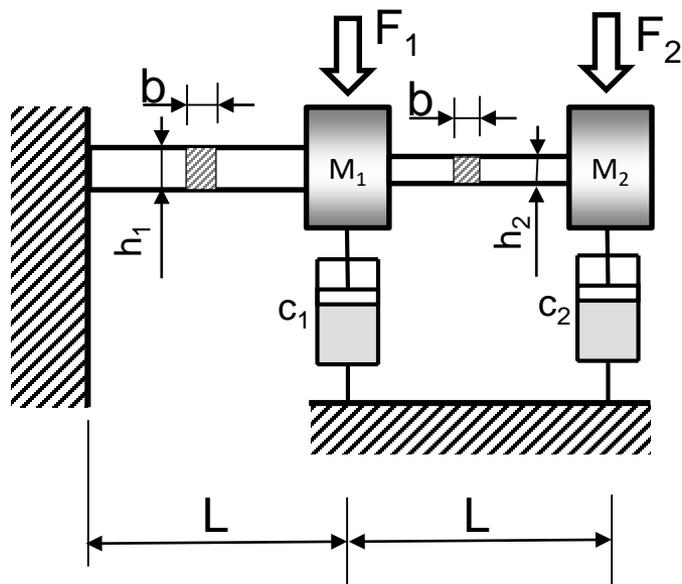
Si ottiene:

$$\xi = 0.1$$

$$\zeta = 0.5$$



## Esercizio B3 – Risposta forzata di sistema a 2 gdl con smorzamento generale



Si calcoli l'ampiezza di oscillazione della masse 1 e 2 del sistema mostrato in Figura. Le travi, in alluminio, possono assumersi prive di massa.

Dati

$$L_0 := 1.5\text{-m} \quad M_1 := 50\text{-kg} \quad M_2 := 50\text{-kg} \quad E := 7 \cdot 10^{10}\text{-Pa} \quad \nu := 0.3$$

$$b := 0.05\text{-m} \quad h_1 := 0.1\text{-m} \quad h_2 := 0.05\text{-m}$$

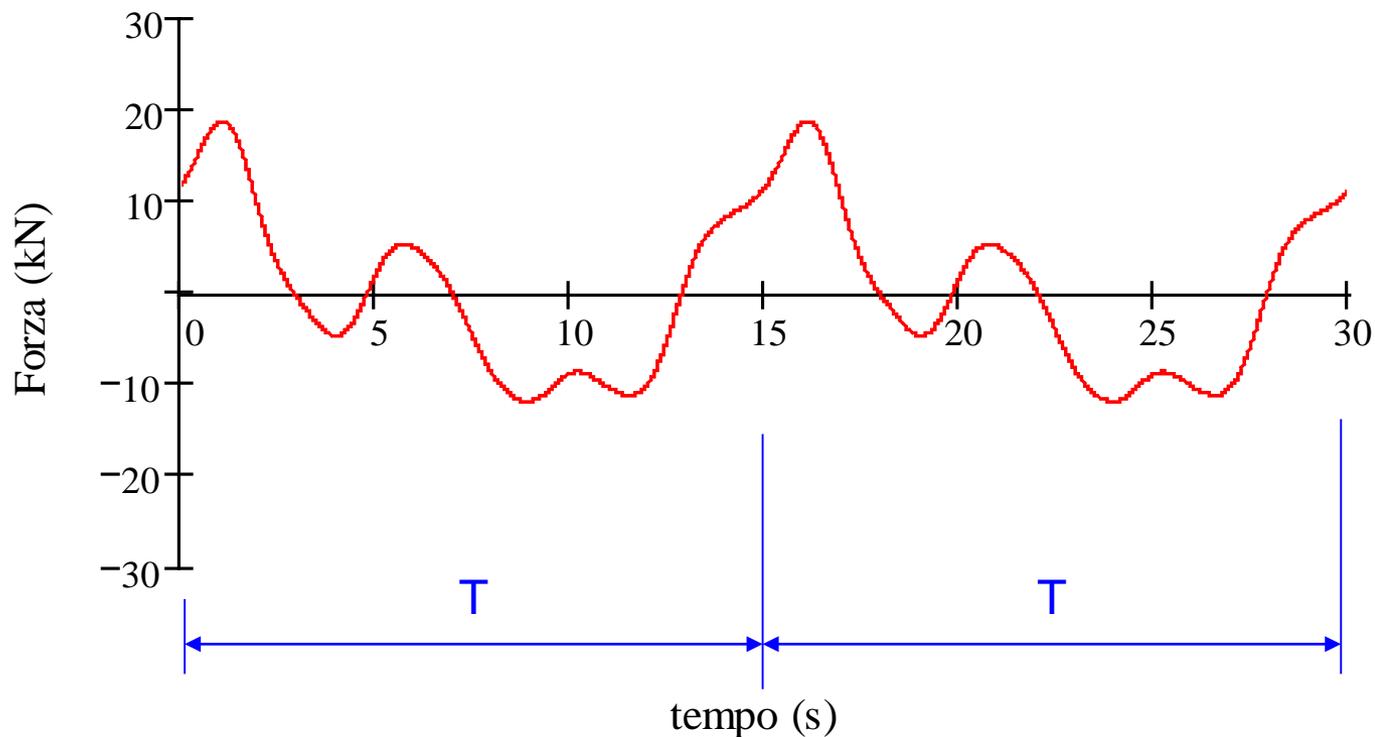
$$F_1 := 250\text{-N} \quad F_2 := 200\text{-N} \quad \Omega_0 := 25 \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

$$c_1 := 500 \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$c_2 := 750 \cdot \frac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI

**Forzanti:** le forzanti esterne agenti sulla struttura hanno generalmente un andamento nel tempo di tipo **periodico**, ma non **armonico**.



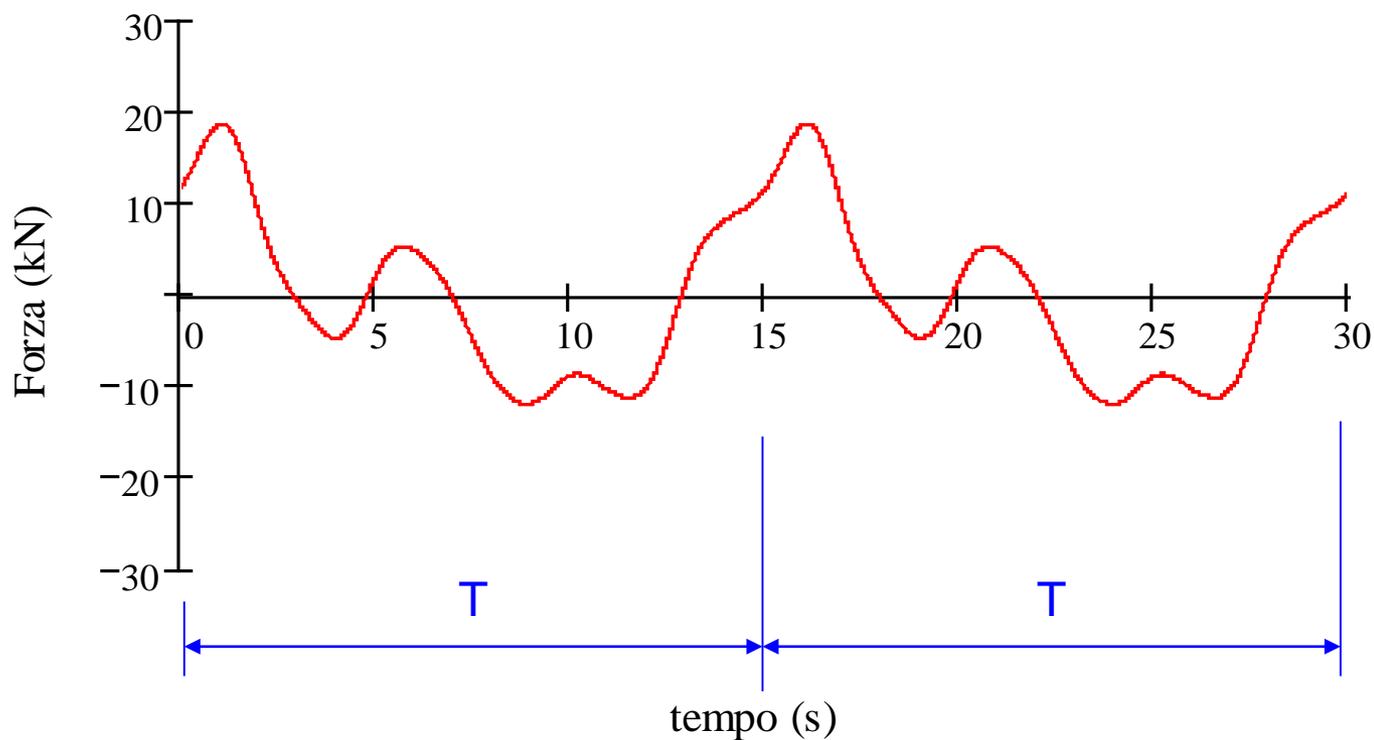
Per determinare il loro effetto sulla struttura è quindi necessario:

- scomporre la forzante in una somma di funzioni armoniche (serie di Fourier)
- ottenere la risposta complessiva tramite la sovrapposizione degli effetti

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI

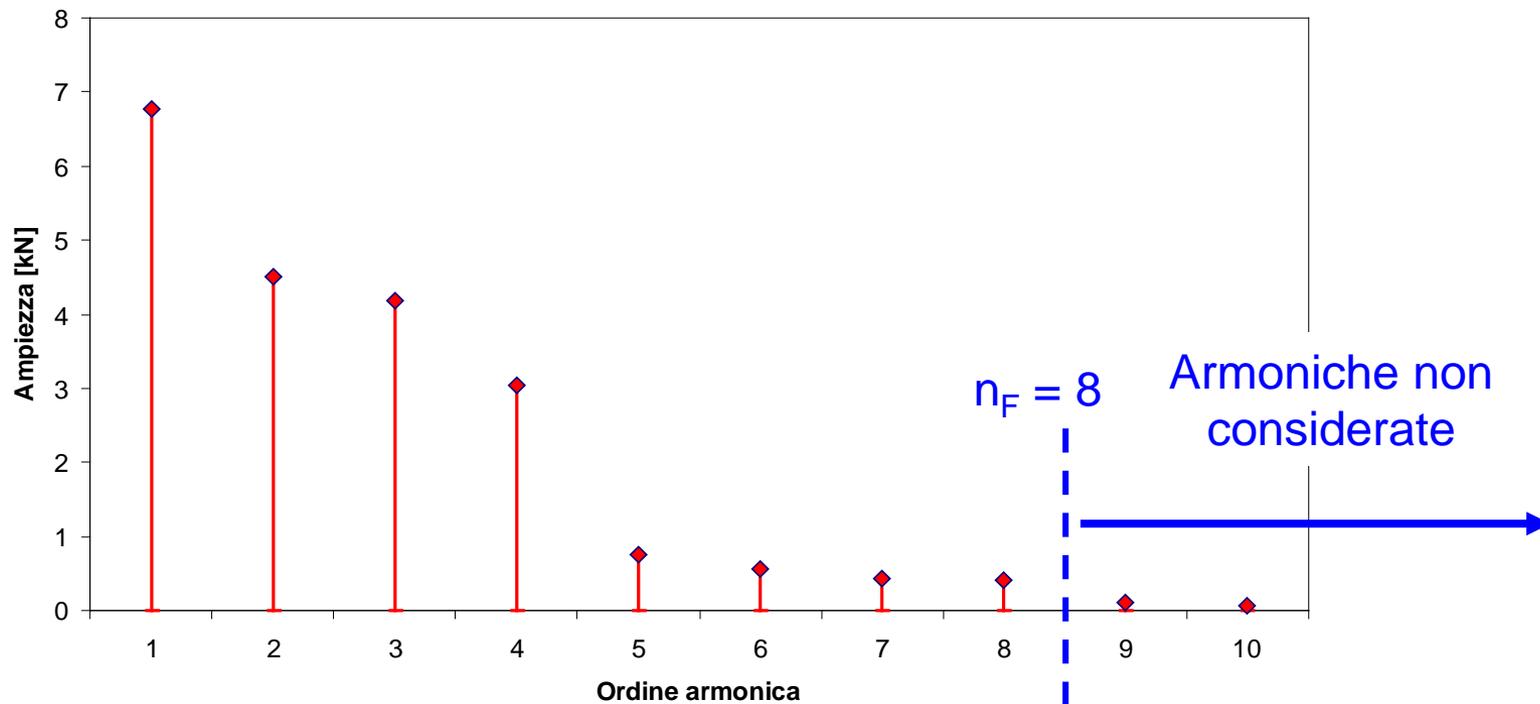
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h) \cong A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$



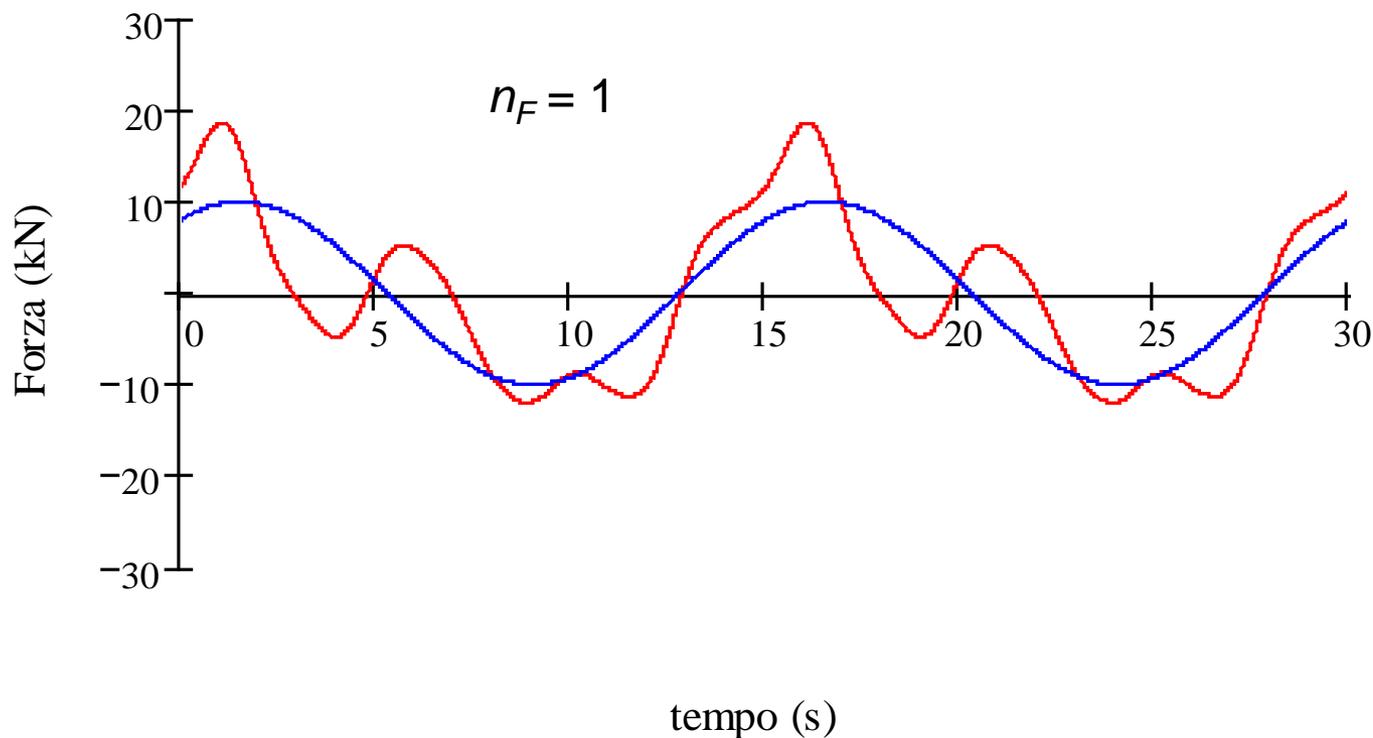
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI

Andamento tipico delle ampiezze delle diverse armoniche eccitatrici con il relativo ordine  $h$



**Oss:** al di sopra di un certo numero d'ordine l'ampiezza  $A_h$  diviene usualmente trascurabile.

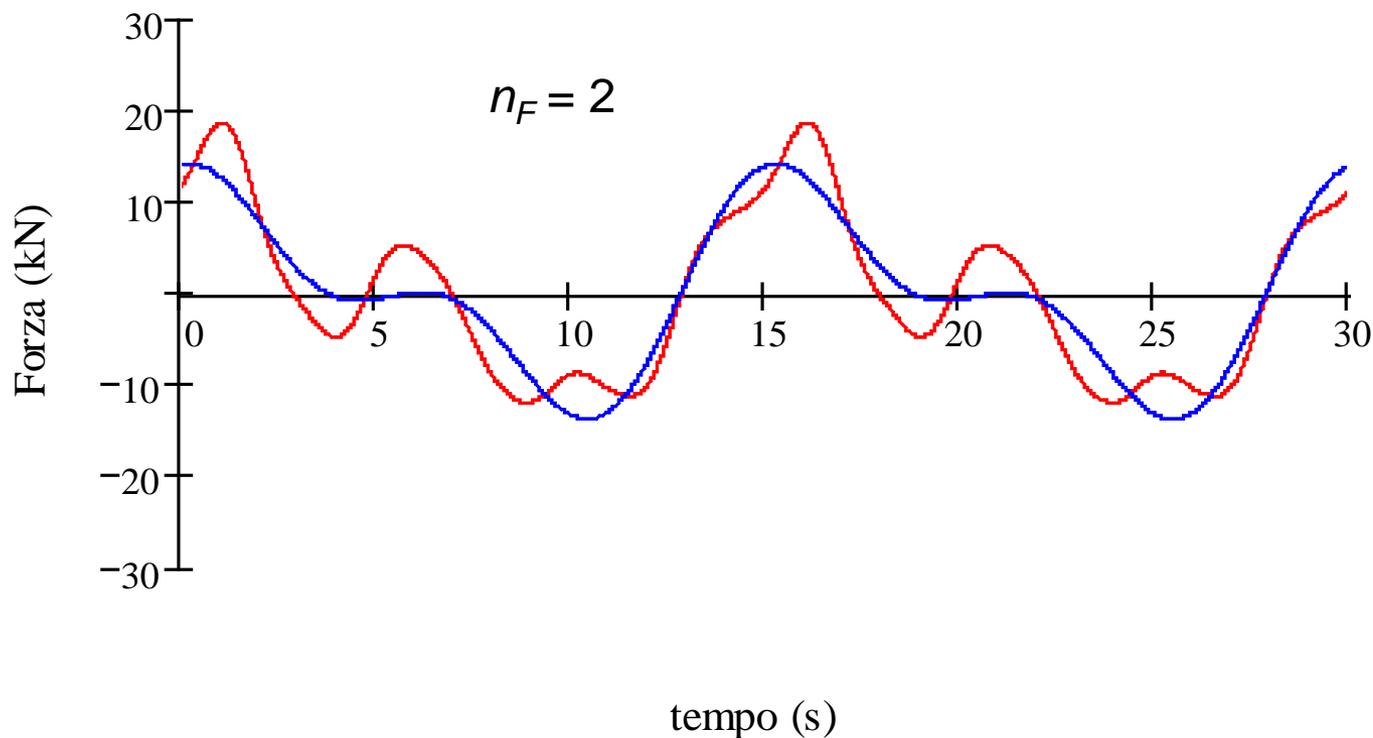
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

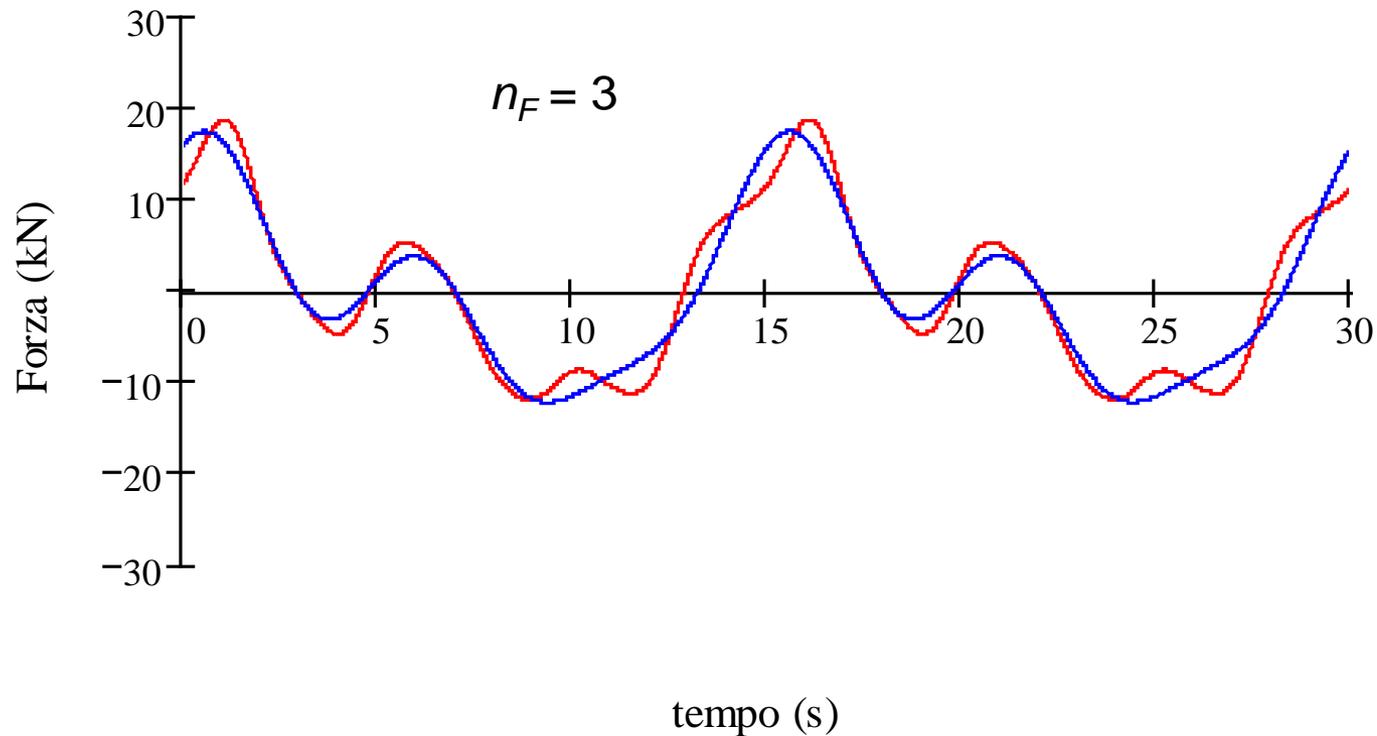
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

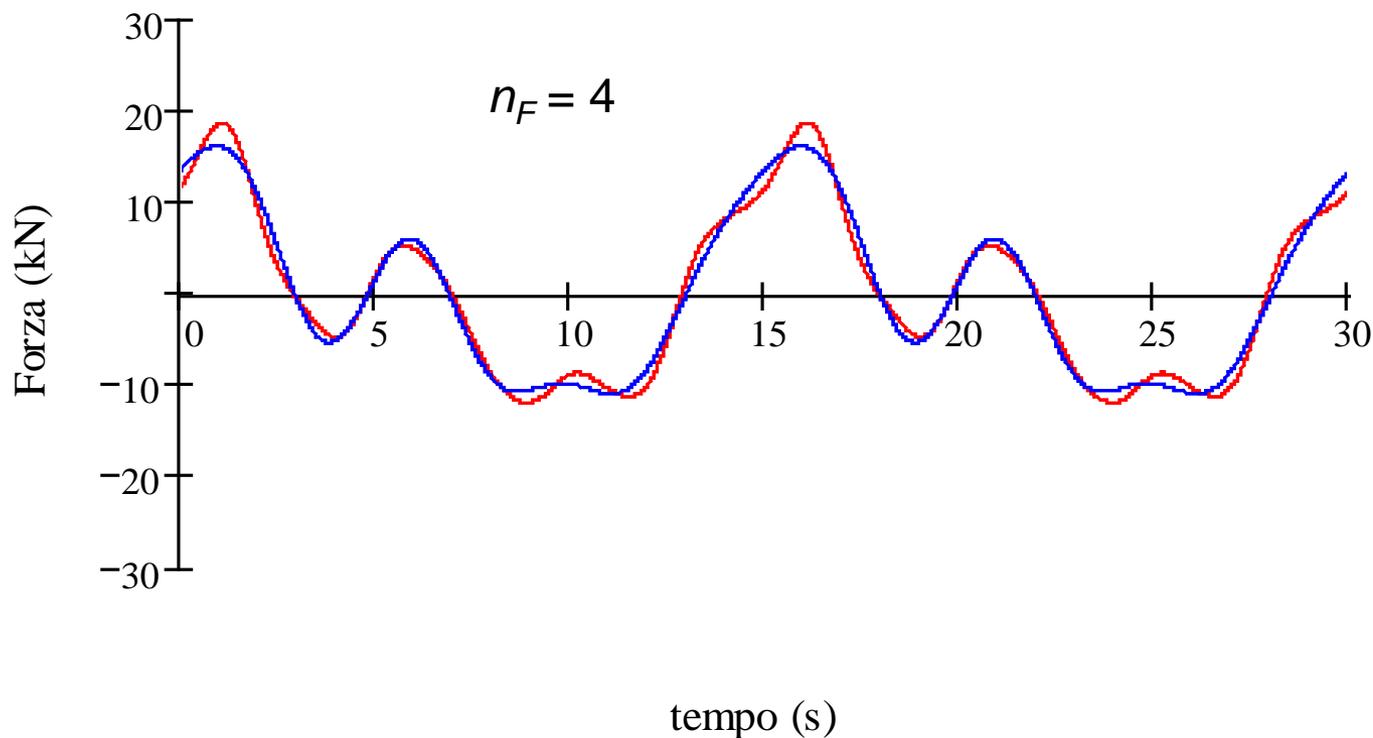
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

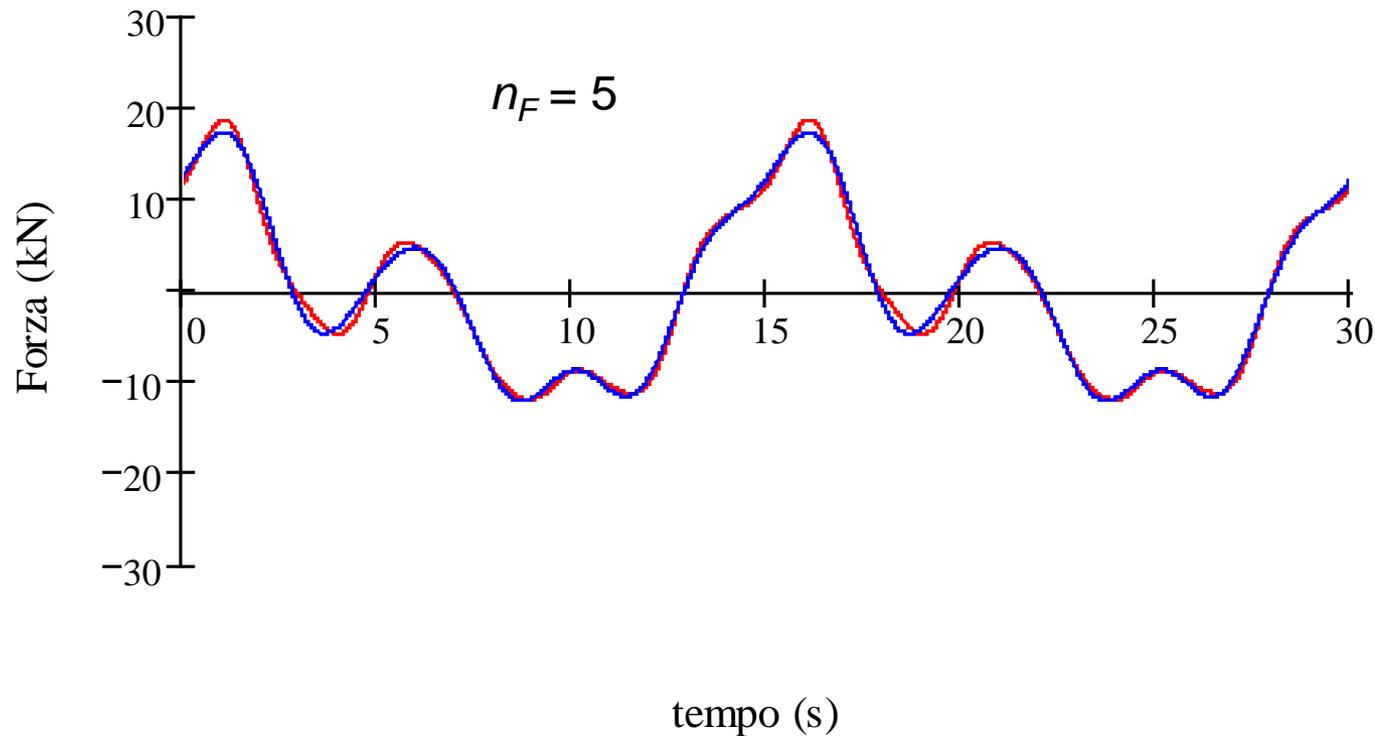
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

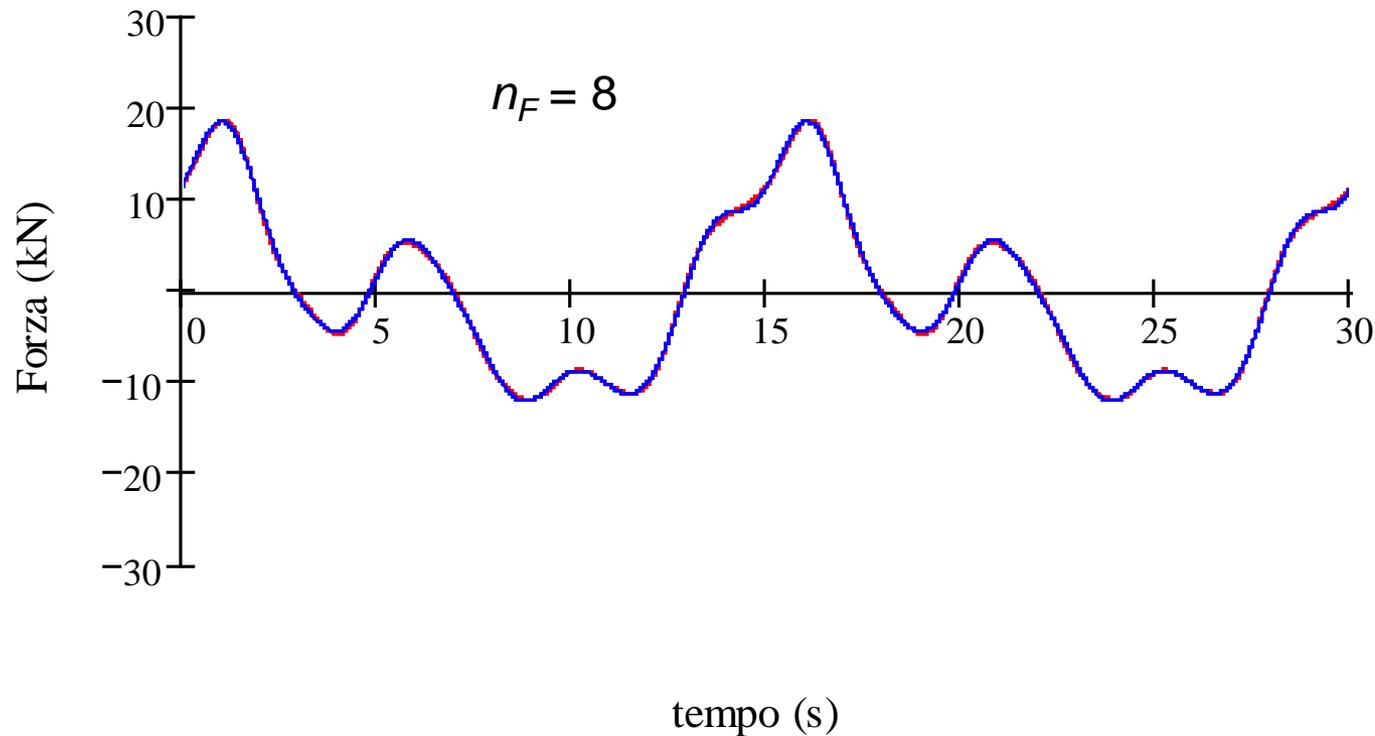
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI



Possibile verifica della corretta scelta di  $n_F$ : confronto tra  $F(t)$  e

$$F'(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{n_F} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$



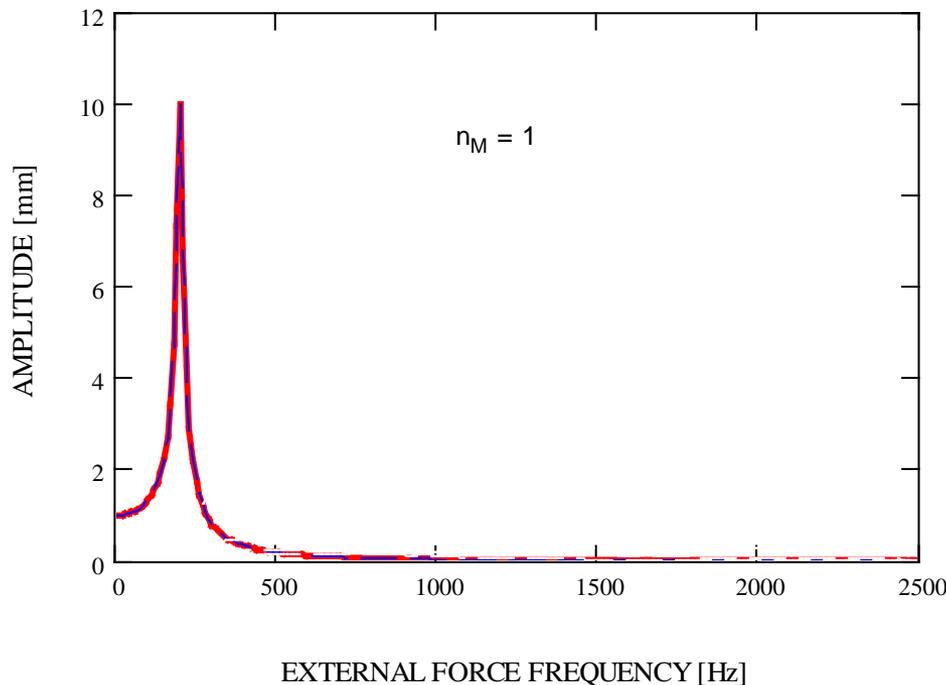
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad \cong \quad \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$





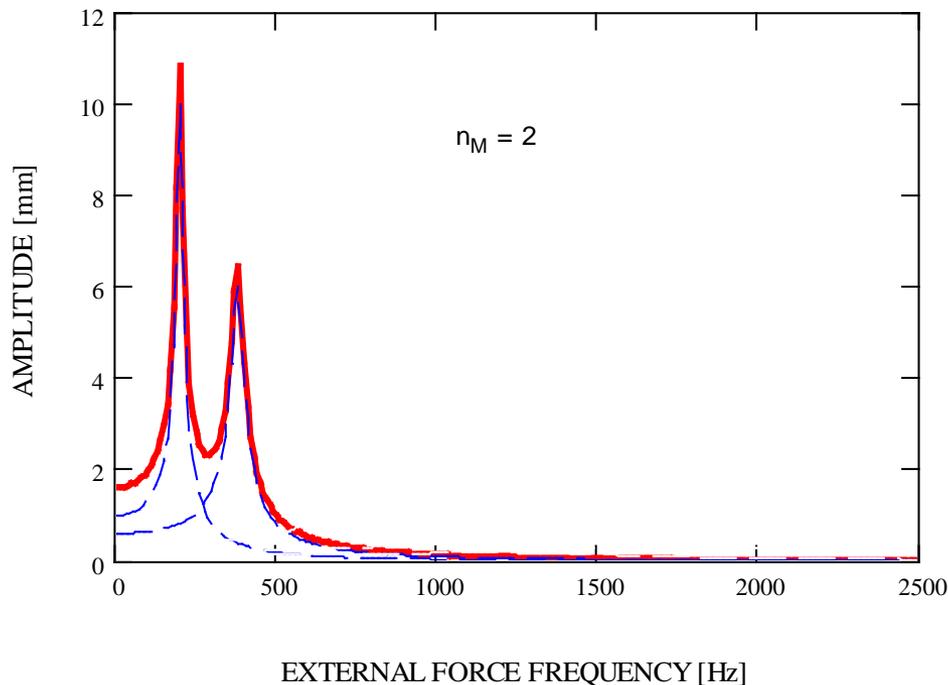
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad \cong \quad \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$



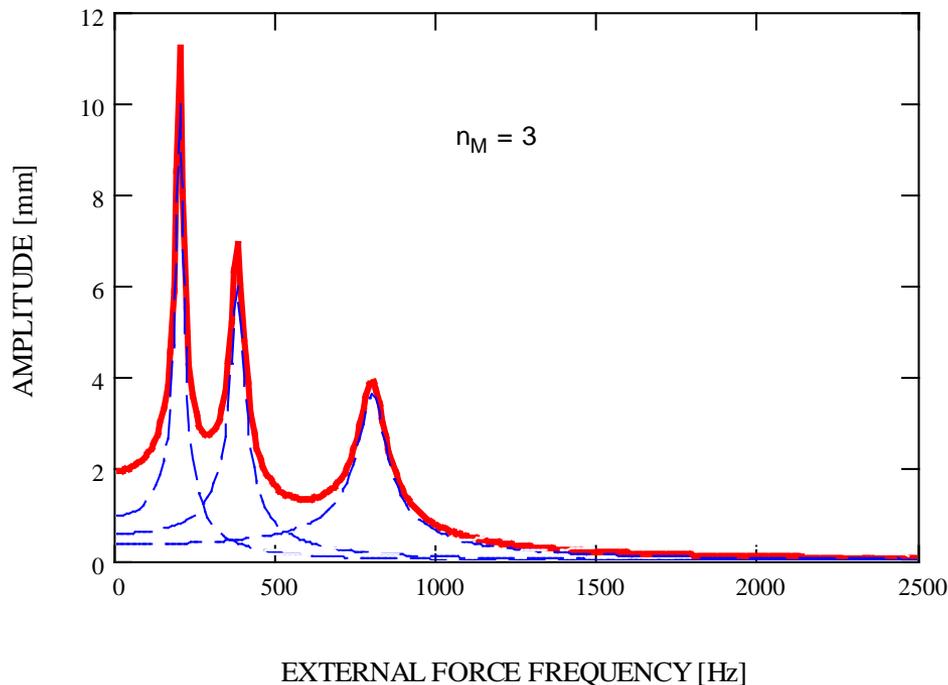
# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad \cong \quad \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$

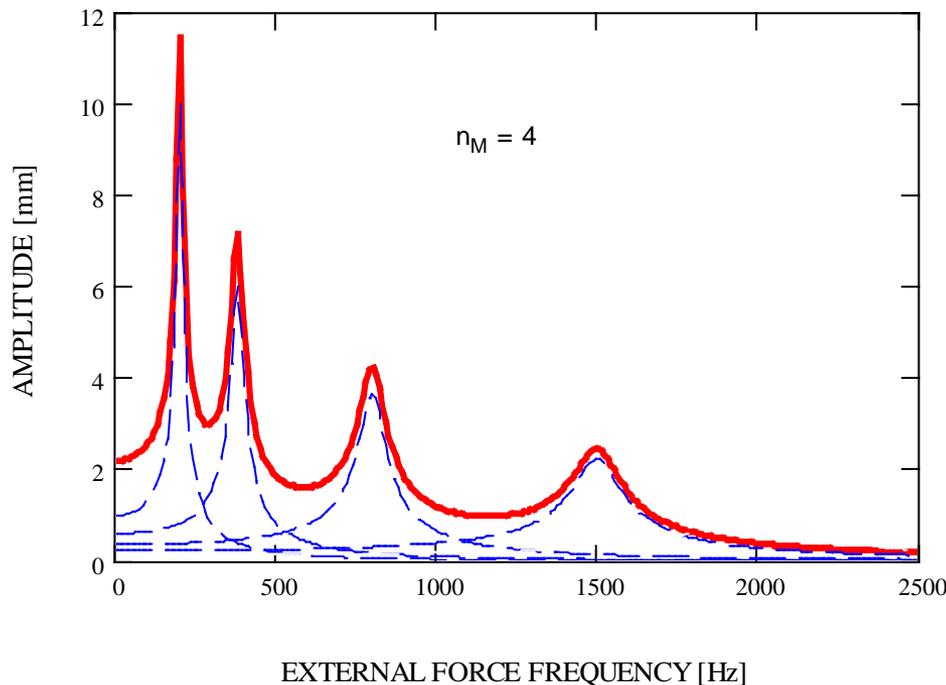


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad \cong \quad \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$



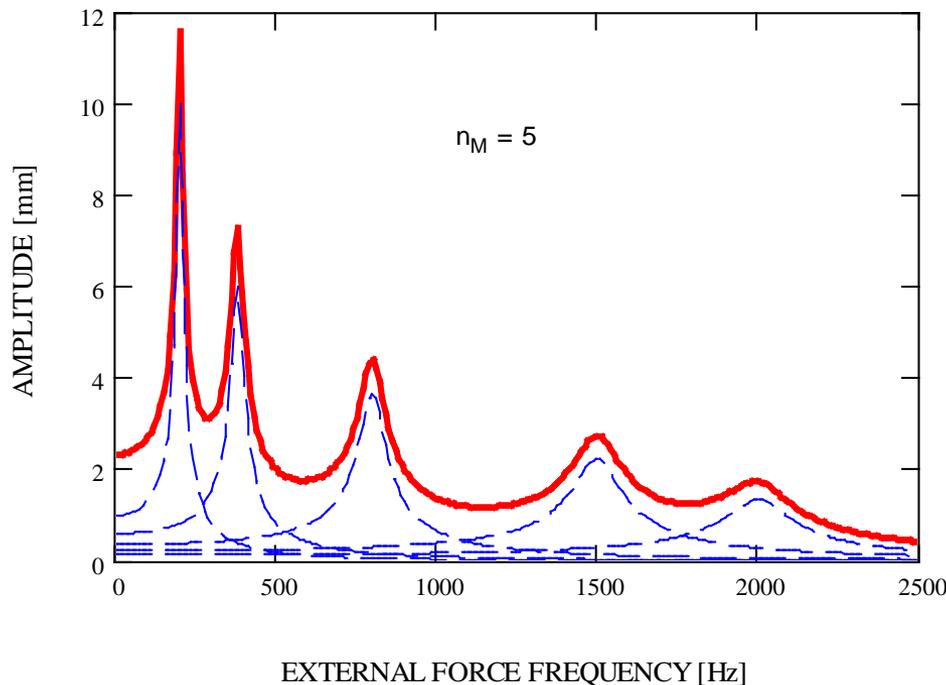
# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Non è possibile, né conveniente utilizzare tutti i modi propri:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad \cong \quad \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t) \quad n_M < n_{MP}$$

Effetto della scelta di  $n_M$ : il sistema si comporta come un **filtro passa basso**, che “taglia” la risposta alle pulsazioni della forzante maggiori di  $\omega_{n_M}$

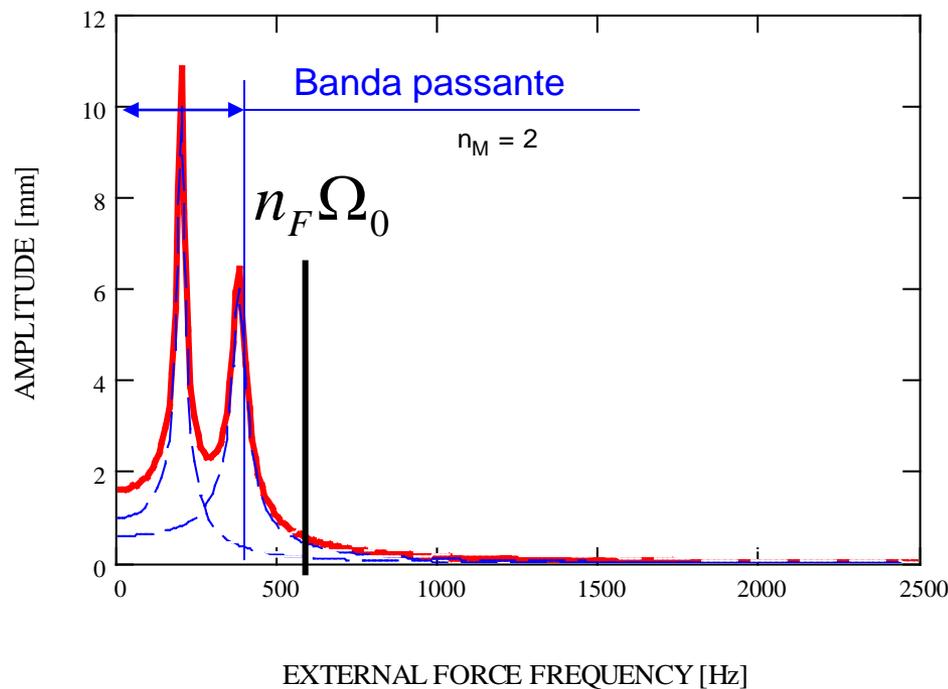


## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Condizioni da soddisfare:

- la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello





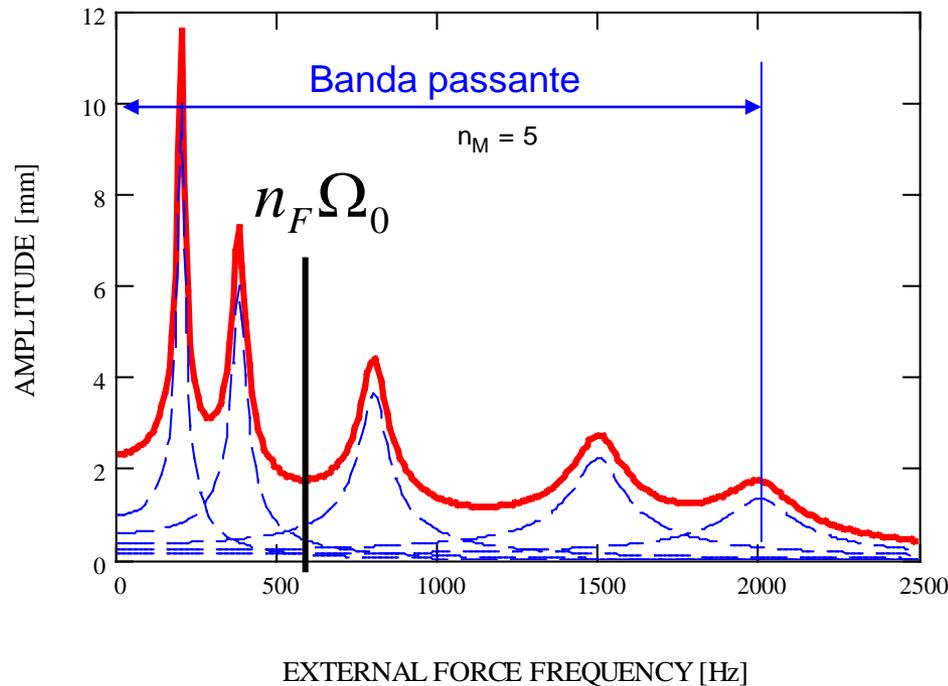
## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

### ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Condizioni da soddisfare:

- la massima armonica contenuta nella forzante deve risultare compresa nella “banda passante” del modello

$$\omega_{n_M} > n_F \Omega_0$$

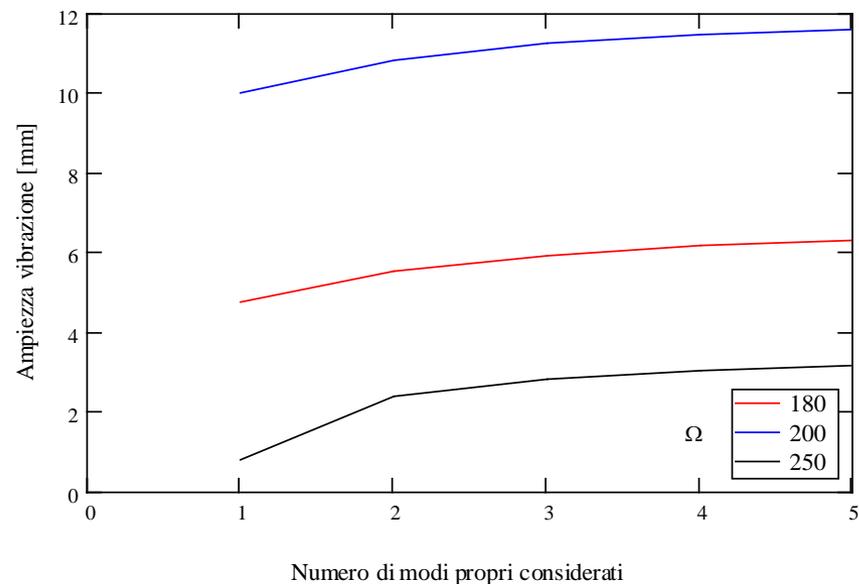
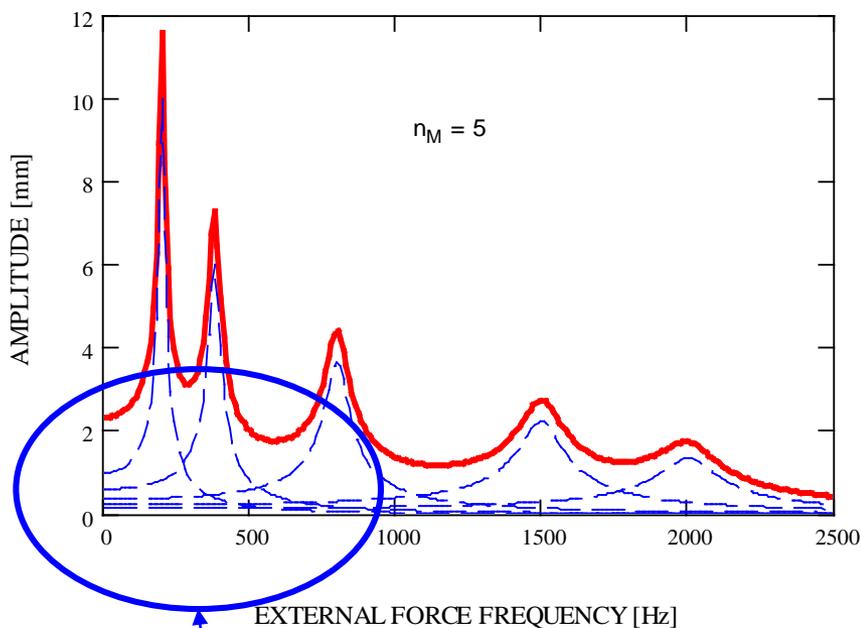


# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



I modi propri di alta frequenza mantengono un contributo anche alle basse frequenze

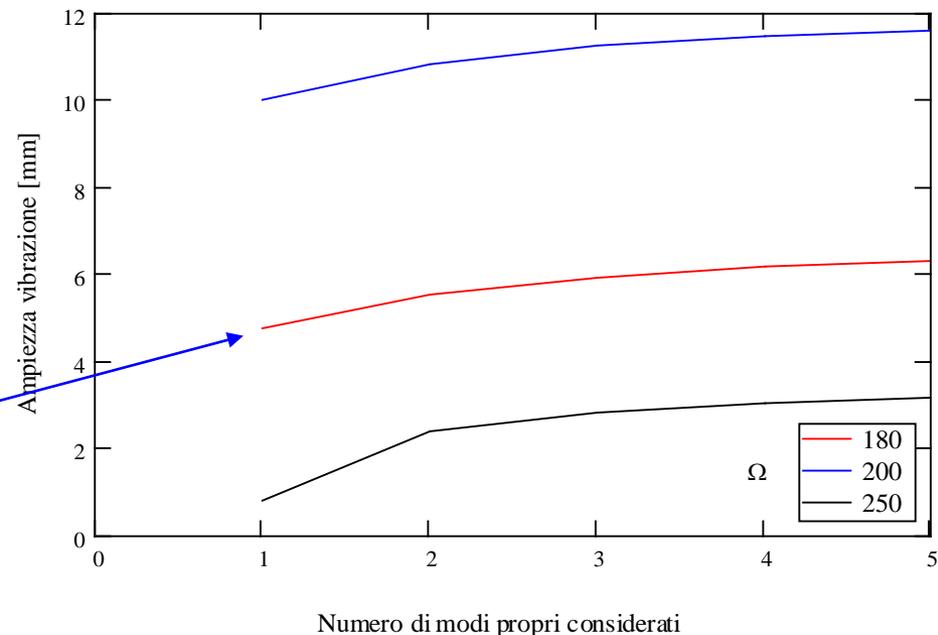
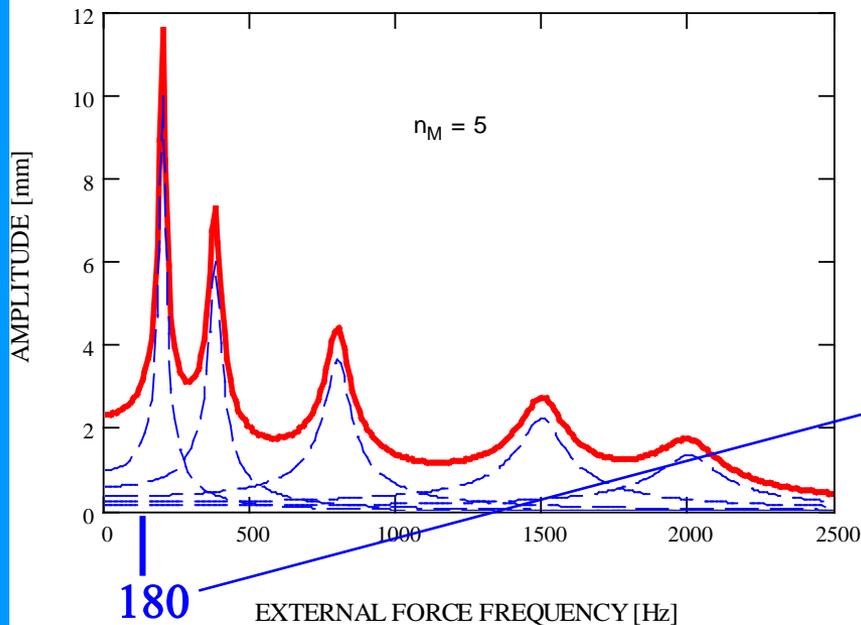


# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



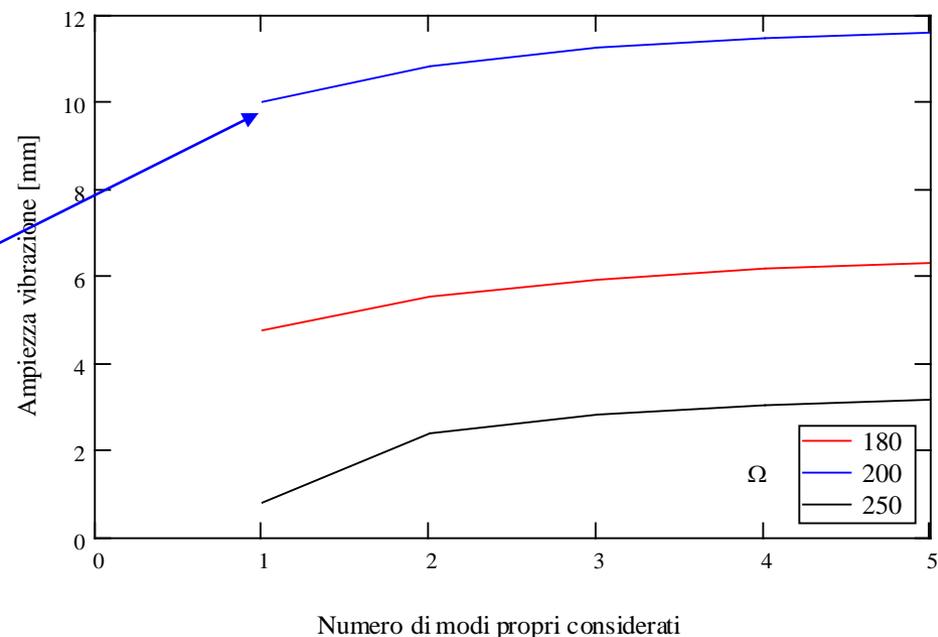
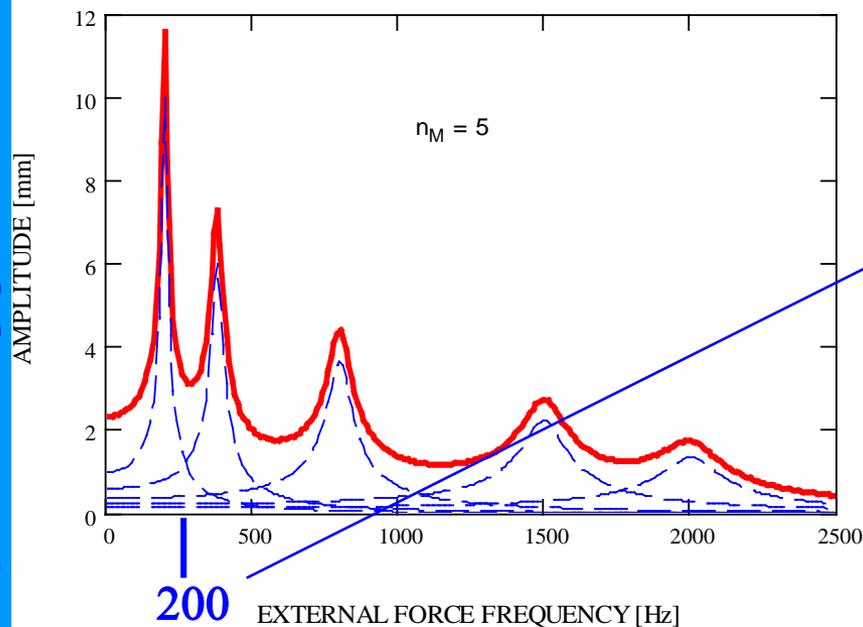


# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

## ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza



# ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA

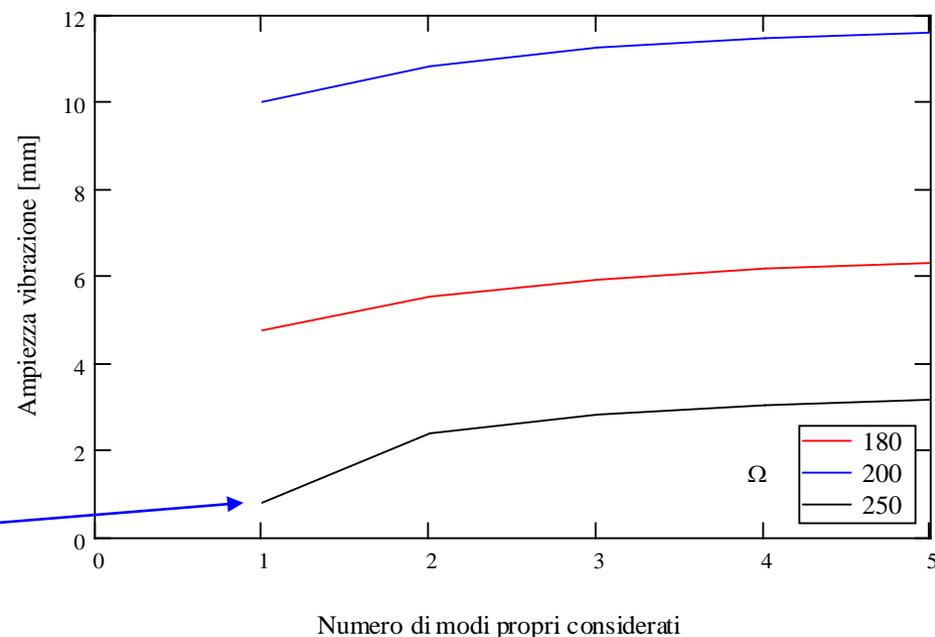
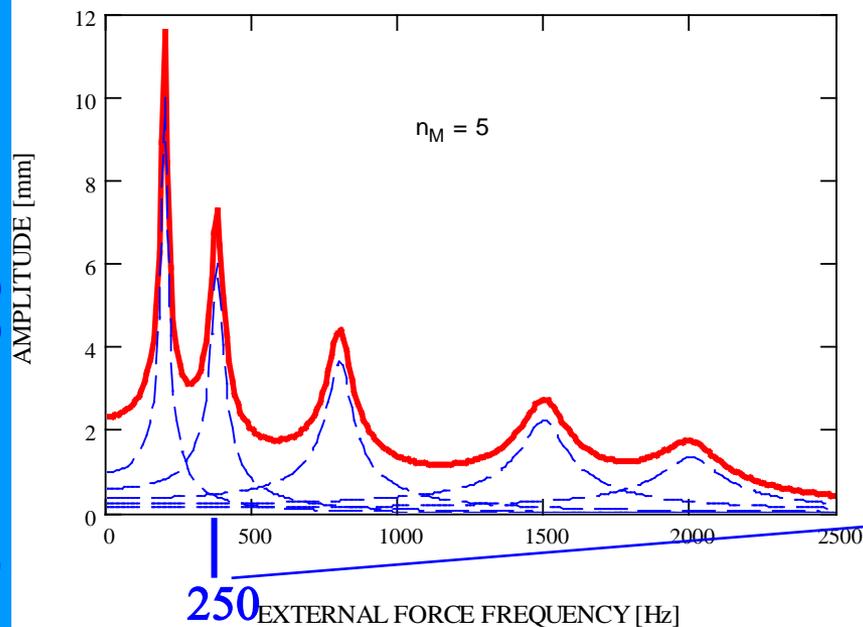
## ASPETTI APPLICATIVI – METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Condizioni da soddisfare:

- il numero di modi considerati deve essere sufficiente per la convergenza

$$\omega_{n_M} \gg n_F \Omega_0$$

$$\omega_{n_M} > 1.5 \cdot n_F \Omega_0$$





## ANALISI DELLA RISPOSTA ARMONICA SMORZAMENTO GENERALE – ASPETTI APPLICATIVI

Ulteriore requisito per MD e per MSM:

- il modello FEM deve essere costruito in maniera da rappresentare in maniera sufficientemente accurata tutti i modi che danno un contributo significativo alla risposta del sistema (tutti gli  $n_M$  modi propri nel caso del MSM)



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO DIRETTO COMPLETO

**/SOLU**

**ANTYPE, HARMIC**                      Definisce il tipo di analisi richiesta

**HROPT, FULL, .....**                      Sceglie il tipo di analisi diretto completo

**HARFRQ, FREQB, FREQE**

Frequenza iniziale e finale per l'analisi

**NSUBST, NSBSTP**

N° di "step" in cui suddividere l'intervallo di frequenze da analizzare

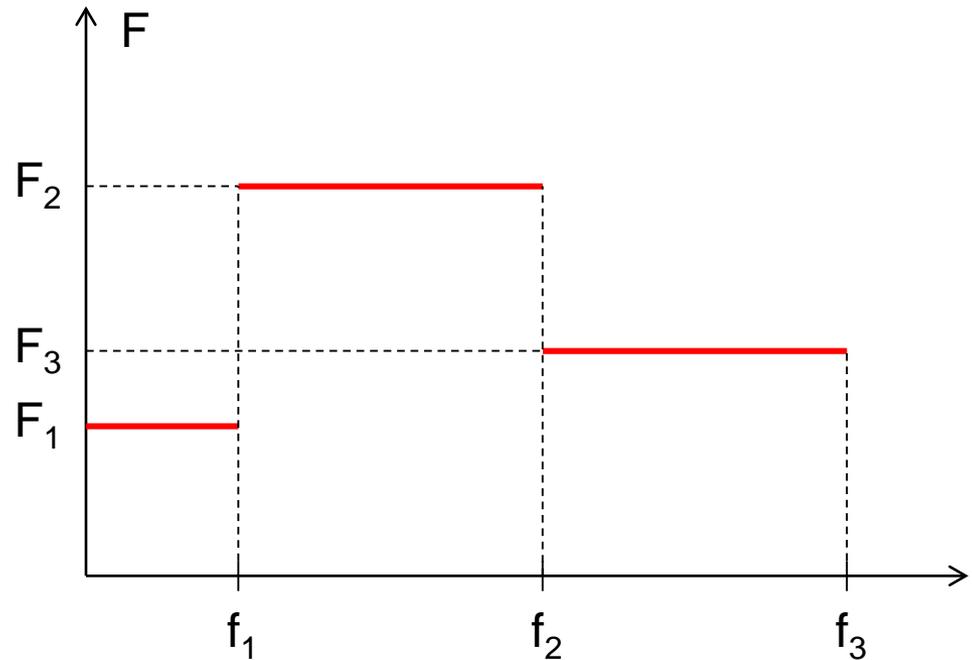
## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO DIRETTO COMPLETO

Possibile anche suddividere il campo di frequenza in intervalli contigui con variazione del carico imposto tra un intervallo e l'altro. Ogni intervallo viene trattato come un "Load Step" separato.

**HARFRQ**,  $0, f_1$   
**NSUBST**, *NSBSTP*  
**F**,  $N, F_1$   
**SOLVE**

**HARFRQ**,  $f_1, f_2$   
**NSUBST**, *NSBSTP*  
**F**,  $N, F_2$   
**SOLVE**

**HARFRQ**,  $f_2, f_3$   
**NSUBST**, *NSBSTP*  
**F**,  $N, F_3$   
**SOLVE**



Nel POST26 i risultati sono comunque disponibili come un intervallo continuo di frequenza



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO DIRETTO COMPLETO

**HROUT**, *Reimky*, *Clust*, *Mcont*

- ON Stampa i risultati come parti reale ed immaginaria
- OFF Stampa i risultati come ampiezza e fase

- OFF “Step” di frequenza equispaziati
- ON “Step” di frequenza addensati attorno ai modi propri

- OFF Non stampa il contributo dei diversi modi
- ON Stampa il contributo dei diversi modi

**F**, *NODE*, *Lab*, *VALUE*, *VALUE2*, *NEND*, *NINC*

Parti reale ed immaginaria della forza

**SOLVE**  
**FINISH**

## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO DIRETTO COMPLETO

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} + \frac{\xi}{\Omega} \mathbf{K} + \sum_k \mathbf{C}_k$$

$\alpha$ -damping (ALPHAD o MP,ALPD)

$\beta$ -damping (BETAD o MP,BETD)

Constant damping ratio (DMPRAT o MP,DMPR)

Element damping matrix (Es.: LINK11, COMBIN14, MATRIX27,...)



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

**/SOLU**

**ANTYPE, MODAL**                      Analisi modale preliminare

**MODOPT, Method, NMODE, FREQB, FREQE, ,Nrmkey**

-----

**SOLVE**

**FINISH**

**/SOLU**

Analisi armonica con MSM

**HROPT, MSUP, MAXMODE, MINMODE**

N° d'ordine finale (default e max.: NMODE) ed iniziale (default: 1) dei modi da impiegare

**HROUT, Reimky, Clust, Mcont**

**F, NODE, Lab, VALUE, VALUE2, NEND, NINC**

**SOLVE**

**FINISH**



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

```
/SOLU      Passo di espansione  
EXPASS, ON  
NUMEXP, NUM, BEGRNG, ENDRNG  
SOLVE  
FINISH
```



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE

$$\xi_k = \frac{\alpha}{\omega_k} + \beta\omega_k + \xi + \xi_{mk}$$

$\alpha$ -damping (ALPHAD o MP,ALPD)

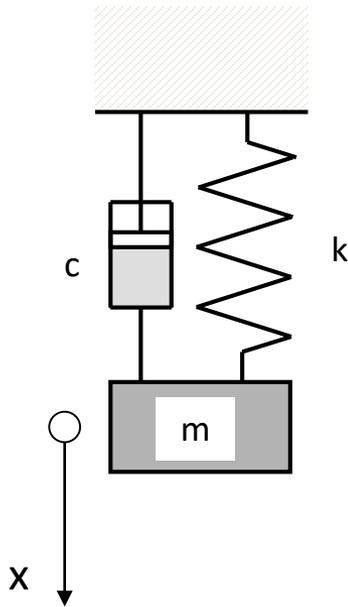
$\beta$ -damping (BETAD o MP,BETD)

Constant damping ratio (DMPRAT o MP,DMPR)

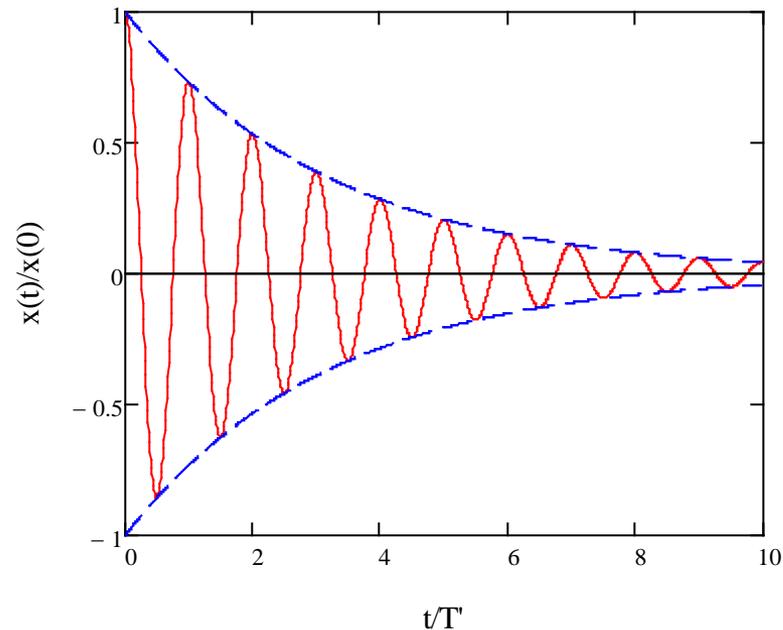
Modal damping ratio (MDAMP)

# DETERMINAZIONE SPERIMENTALE SMORZAMENTO

## Metodo del decremento logaritmico



Si basa sull'andamento delle ampiezze di oscillazione rilevate sulla struttura, in seguito ad una perturbazione iniziale.



$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t) \right)$$

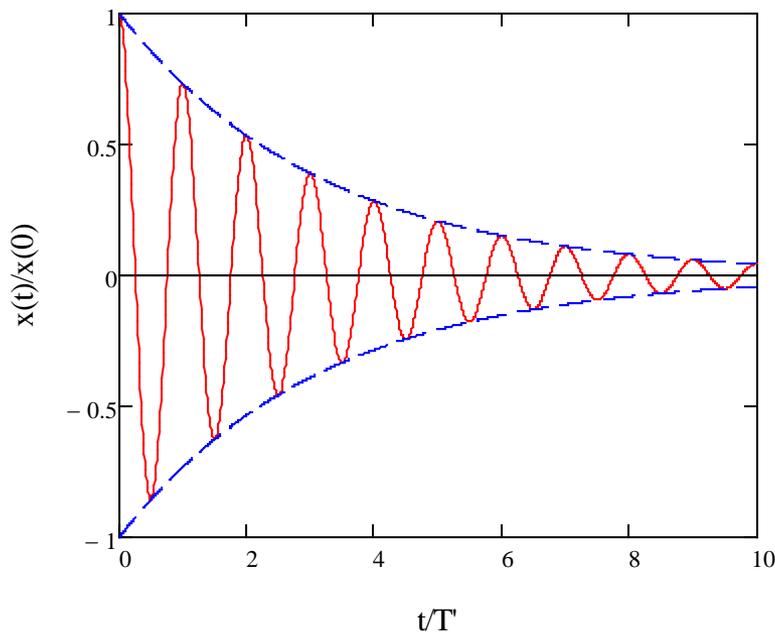
# DETERMINAZIONE SPERIMENTALE SMORZAMENTO

## Metodo del decremento logaritmico

Rapporto di ampiezza tra due picchi successivi

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$R = \frac{e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t))}{e^{-\xi\omega_n (t+T')} (A \cos(\omega_s (t+T')) + B \sin(\omega_s (t+T')))} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}}$$



Decremento Logaritmico

$$\delta = \ln \left( \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}} \right) = \xi\omega_n T' = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$= \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

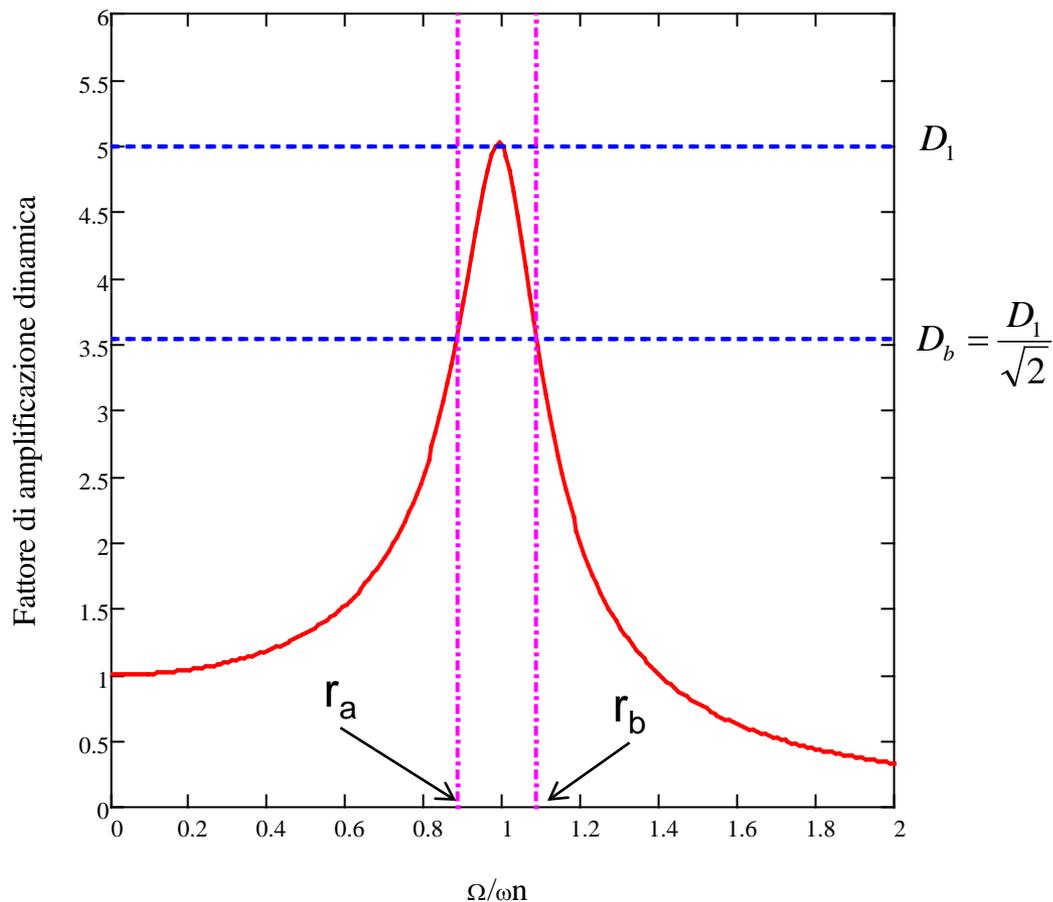


$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

# DETERMINAZIONE SPERIMENTALE SMORZAMENTO

## Metodo della larghezza di banda

Si basa sull'andamento del coefficiente di amplificazione dinamica del sistema al variare della frequenza della forzante.



# DETERMINAZIONE SPERIMENTALE SMORZAMENTO

## Metodo della larghezza di banda

Calcolo di  $r_a$  ed  $r_b$

$$D_1 = \frac{1}{2\xi}$$

$$D_b = \frac{D_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$



$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



Elevando al quadrato

$$\frac{1}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2} = \frac{1}{8\xi^2}$$

$$r^4 + 2r^2(2\xi^2 - 1) + (1 - 8\xi^2) = 0$$

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 - (1 - 8\xi^2)} = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{(4\xi^4 - 4\xi^2 + 1) - (1 - 8\xi^2)} = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

# DETERMINAZIONE SPERIMENTALE SMORZAMENTO

## Metodo della larghezza di banda

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

Per  $\xi \ll 1$

$$r_{a,b}^2 \approx 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi$$

$$r_{a,b} = \sqrt{1 - 2\xi^2 \pm 2\xi}$$

Per  $x \ll 1$  si può porre

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \dots$$



$$r_{a,b} \approx 1 - \xi^2 \pm \xi$$



$$r_a = 1 - \xi^2 - \xi$$

$$r_b = 1 - \xi^2 + \xi$$

$$\xi \approx \frac{r_b - r_a}{2}$$



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA POST26

**/POST26**

**NSOL**

**ESOL**

Definizione grandezze da estrarre dal database

**RFORCE**

etc.

**PRCPLX, *KEY***

**PRVAR**

- 0 – Stampa i risultati nella forma parte reale + parte immaginaria
- 1 – Stampa i risultati nella forma ampiezza + fase

**PLCPLX, *KEY***

**PLVAR**

- 0 — Ampiezza
- 1 — Fase
- 2 — Parte reale
- 3 — Parte immaginaria



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA POST26

**PLVAR**, *NVAR1*, *NVAR2*, *NVAR3*, *NVAR4*, *NVAR5*, *NVAR6*, *NVAR7*...

Consente di rappresentare fino a 10 variabili in funzione del tempo o della variabile definita nel comando XVAR

**XVAR**, *N*

Definisce la variabile da utilizzare per l'asse X; per default si usa la variabile 1 (tempo)

**/AXLAB**, *Axis*, *Lab*

Consente di specificare la "label" dei due assi

**/XRANGE**, *XMIN*, *XMAX*

**/YRANGE**, *XMIN*, *XMAX*

Definiscono I valori massimi e minimi per i due assi

**/GROPT**, *Lab*, *KEY*

Consente varie opzioni grafiche (es. Numero di divisioni, assi logaritmici, etc)



## COMANDI ANSYS ANALISI ARMONICA POST26

Comandi per la elaborazione  
delle grandezze definite

<u>ABS</u>	<u>IMAGIN</u>	<u>SMALL</u>
<u>ADD</u>	<u>INT1</u>	<u>SQRT</u>
<u>ATAN</u>	<u>LARGE</u>	<u>RPSD</u>
<u>CLOG</u>	<u>NLOG</u>	<u>CVAR</u>
<u>CONJUG</u>	<u>PROD</u>	<u>RESP</u>
<u>DERIV</u>	<u>QUOT</u>	
<u>EXP</u>	<u>REALVAR</u>	

## COMANDI ANSYS - USO DI MATRICI

Il programma ANSYS permette l'uso di diversi tipi di variabili dimensionate (matrici o vettori).

**\*DIM**, *Par*, *Type*, *JMAX*, *JMAX*, *KMAX*, *Var1*, *Var2*, *Var3*, *CSYSID*

Denominazione del parametro in forma di tabella

Tipo di tabella:

- ARRAY matrice standard, ad indici interi
- TABLE matrice ad indici reali

Numero di righe, colonne e "strati"



## COMANDI ANSYS - USO DI MATRICI

Matrici di tipo ARRAY (denominazione: TABI)

	1	2	3	4
1	0.25	3	2	5
2	1.25	4.3	1.2	2.5
3	2	7	12	24

TABI(2,3) → 1.2

## COMANDI ANSYS - USO DI MATRICI

Matrici di tipo TABLE (denominazione: RISU)

	0.5	1	1.5	2
0.25	0.25	3	2	5
0.5	1.25	4.3	1.2	2.5
1.00	2	7	12	24

Indici reali, inseriti dall'utente nella colonna "0" e nella riga "0" (Es.  $RISU(2,0)=0.5$ ).



## COMANDI ANSYS - USO DI MATRICI

In uscita, gli indici possono essere reali. Il valore fornito viene interpolato

	0.5	1	1.5	2
0.25	0.25	3	2	5
0.5	1.25	4.3	1.2	2.5
			6.6	
1.00	2	7	12	24

$$\text{RISU}(0.75,1.5)=1.2+(12-1.2)/(1-0.5)*(0.75-0.5)=6.6$$

## COMANDI ANSYS - USO DI MATRICI

**\*V**PLOT, *ParX*, *ParY*, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8

Parametro una delle cui colonne deve essere usata per l'asse X  
 Es. RISU(3,4) usa per l'asse X i valori della colonna 4, partendo dalla riga 3

Parametro una delle cui colonne deve essere usata per l'asse Y  
 Es. RISU(2,5) usa per l'asse Y i valori della colonna 5, partendo dalla riga 2

**/GC**COLUMN, CURVE, STRING

Consente di attribuire una denominazione ad ogni curva del grafico, che compare nella legenda

## COMANDI ANSYS - USO DI COMPONENTI

*Il comando CM consente di raggruppare in un componente tutte le entità selezionate del tipo specificato*

CM, Cname, Entity

Denominazione alfanumerica del componente

Tipo di entità da raggruppare:

**VOLU** — Volumes.

**AREA** — Areas.

**LINE** — Lines.

**KP** — Keypoints.

**ELEM** — Elements.

**NODE** — Nodes.

## COMANDI ANSYS - USO DI COMPONENTI

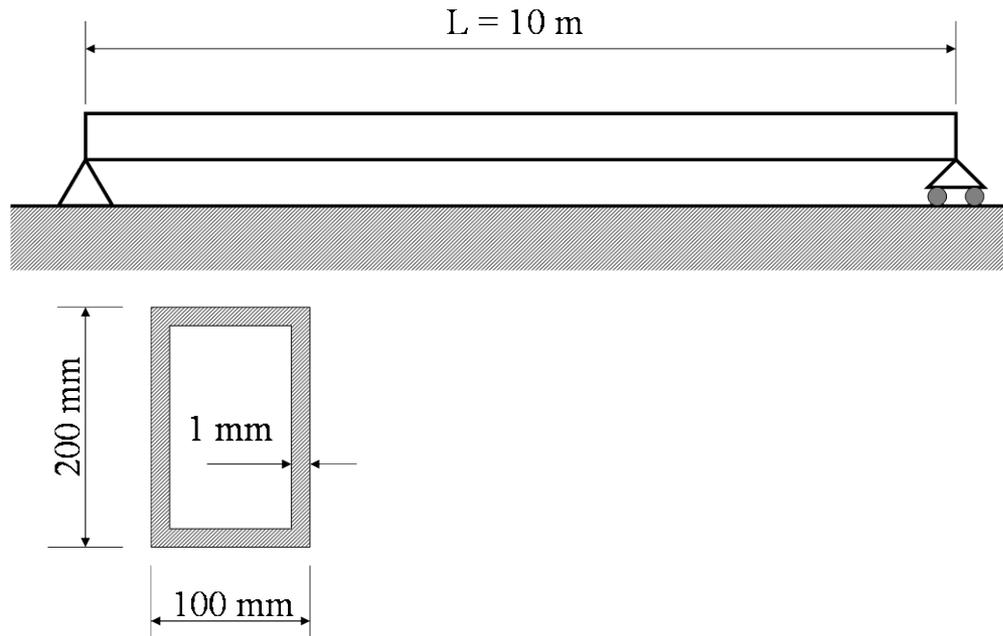
*Altri comandi per la gestione dei componenti:*

<b>CMSEL</b>	Selezione componenti
<b>CMLIST</b>	Elenco componenti
<b>CMDELE</b>	Cancellazione componenti
<b>CMGROUP</b>	Raggruppa i componenti in “assemblies”
<b>CMMOD</b>	Modifica un componente





## ESEMPIO EF1 - ANALISI ARMONICA DI TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA IN 3D



Si conduca l'analisi della risposta armonica della trave in acciaio riportata in Figura, nel "range" di frequenze da 0 a 100 Hz e considerando le seguenti condizioni di carico:

- Forza di 100 N ad andamento sinusoidale nel tempo applicata in mezzeria in direzione verticale
- Due forze di 100 N ciascuna applicate in direzione verticale a distanza  $L/4$  e  $3L/4$  dall'estremità aventi andamento sinusoidale nel tempo ed agenti:
  - in fase
  - in controfase

Si assuma uno smorzamento relativo pari 0.05 e si impieghino i seguenti metodi:

- completo (analizzando l'influenza sulla risposta del numero di elementi)
- sovrapposizione modale (analizzando l'influenza sulla risposta del numero di modi considerati)



**FILE DI INGRESSO PER METODO DIRETTO**

```

FINISH
/CLEAR
C*****
C***
C*** CLM ING. MECCANICA
C***
C*** INSEGNAMENTO DI COSTRUZIONE DI MACCHINE
C***
C*** ANALISI ARMONICA DI TRAVE APPOGGIATA AGLI ESTREMI
C***
C*** METODO DIRETTO
C***-----
C***

C***
C*** PARAMETRI INZIALI
C***
L=10          ! Lunghezza trave [m]
H=0.2        ! Dati sezione tubo quadro [m]
B=0.1
SP=0.001
NS=300              ! Numero di suddivisioni intervallo di frequenza

*ask,NE, Numero di elementi su 1/4 del modello , 5! N. di elementi
*ASK,FRQ1,Frequenza eccitazione minima [Hz],0
*ASK,FRQ2,Frequenza eccitazione massima [Hz],100
*ASK,ITC1,1-Forza mezz. 2-2 forze controf. 3-2 forze in fase,1
*ASK,SMORZ,Smorzamento relativo,0.05
    
```



```
C***
C*** GENERAZIONE MODELLO
C***
C*** KEYPOINTS
C***
/PREP7
K,1
K,2,L/4
K,3,L/2
K,4,3*L/4
K,5,L
K,7,L/2,L/2

C***
C*** LINEE
C***
L,1,2
L,2,3
L,3,4
L,4,5

C***
C*** PROPRIETA' MATERIALE
C***
MP,EX,1,2.1E11
MP,DENS,1,7.8E3

C***
C*** DEFINIZIONE ELEMENTI
C***
ET,1,188,,,3          ! FUNZIONE DI FORMA DI GRADO 3

SECTYPE,1,BEAM,HREC,TUBO QUADRO
SECDATA,B,H,SP,SP,SP,SP
```



```
C***
C*** VINCOLI
C***
DK,1,UX,0
DK,1,UY,0
DK,1,UZ,0
DK,1,ROTX,0
DK,5,UY,0
DK,5,UZ,0

C***
C*** MESH
C***
LATT,1,,1,,7,7,1
ESZ=L/(4*NE)
LESIZE,ALL,ESZ
LMESH,ALL

C***
C*** SOLUZIONE
C***
/SOLU

C*** opzioni analisi
ANTYPE,HARMIC           ! Analisi della risposta armonica
HROPT,FULL              ! Metodo diretto
HARFRQ,FRQ1,FRQ2       ! intervallo frequenza da analizzare
NSUBST,NS               ! suddivisione intervallo frequenze
DMPRAT,SMORZ           ! smorzamento
!ALPHAD,ALF            ! in alternativa smorzamento proporzionale
!BETAD,BET
HROUT,OFF               ! opzioni output
```



C\*\*\* carichi

\*IF,ITC1,EQ,1,THEN

C\*\*\* 1 forza in mezzeria

FK,3, FZ,100,0 ! Forza di 100 N applicata in mezzeria  
! parte reale = 100, parte immaginaria =0

\*ELSEIF,ITC1,EQ,2,THEN

C\*\*\* 2 forze in controfase a L/4 e 3L/4

FK,2,FZ,100  
FK,4,FZ,-100

\*ELSE

C\*\*\* 2 forze in fase a L/4 e 3L/4

FK,2,FZ,100  
FK,4,FZ,100

\*ENDIF

SOLVE

FINISH

C\*\*\*

C\*\*\* POST-PROCESSING

C\*\*\*

C\*\*\* Andamento in funzione della frequenza

/POST26 ! ingresso in POST26

NMEZZ=NODE(L/2,0,0) ! NumEro del nodo in mezzeria

NINI=NODE(0,0,0) ! iniziale

NFIN=NODE(L,0,0) ! finale

NSOL,2,NMEZZ,U,Z,SPZ ! definisce come grandezza 2 lo spostamento z del  
! nodo in mezzeria

RFORCE,4,NINI,F,Z,RZ1 ! C.S. reazione nodo iniziale

RFORCE,5,NFIN,F,Z,RZU ! C.S. reazione nodo final



```

/AXLAB,X,FREQUENZA ! Personalizzazione grafico

STORE ! estraee i valori richiesti dal file risultati

PRCPLX,1 ! sceglie tra uscita in reale/immaginario (0)
! e ampiezza-fase (1)

PRVAR,2,4,5 ! stampa risultati (finestra di output)

*ask,AA,Return per continuare,0

C*****
C**** PLOT SPOSTAMENTI NODO MEZZERIA
C****

PLCPLX,0 ! sceglie tra rappresentare il modulo (0)
! o la fase (1) o altro
/AXLAB,Y,SPOSTAMENTO NODO MEZZERIA (MODULO)
PLVAR,2
*ask,aa,Return per continuare,0

PLCPLX,1 ! sceglie tra rappresentare il modulo (0)
! o la fase (1) o altro
/AXLAB,Y,SPOSTAMENTO NODO MEZZERIA (FASE)
PLVAR,2
*ask,aa,Return per continuare,0
    
```



```

C*****
C***** PLOT SPOSTAMENTI REAZIONI VINCOLARI
C*****
/AXLAB,Y,REAZIONI VINCOLARI (MODULO)
PLCPLX,0          ! sceglie tra rappresentare il modulo (0)
                  ! o la fase (1) o altro

PLVAR,4,5
*ask,aa,Return per continuare,0
/AXLAB,Y,REAZIONI VINCOLARI (FASE)
PLCPLX,1          ! sceglie tra rappresentare il modulo (0)
                  ! o la fase (1) o altro

PLVAR,4,5
*ask,aa,Return per continuare,0
FINISH

C*** Andamento tensioni/deformazioni per una frequenza eccitatrice data
/POST1            ! ingresso in POST1
NST1=1
SET,LIST          ! elenco valori di frequenza disponibili (finestra di output)
*DOWHILE,NST1
    *ask,NST1,NUMERO SET DI DATI (<=0 TERMINA),0
    *IF,NST1,GT,0,THEN

                SET,1,NST1    ! carica in memoria i risultati per il set RICHIESTO
                /VIEW,1,0,1    ! imposta la direzione di osservazione
                PLDISP,1       ! deformata

                *ask,aa,Return per continuare,0

    *ENDIF
*ENDDO
    
```



**FILE DI INGRESSO PER METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE**

```

FINISH
/CLEAR
C*****
C***
C*** CLM ING. MECCANICA
C***
C*** INSEGNAMENTO DI COSTRUZIONE DI MACCHINE
C***
C*** ANALISI ARMONICA DI TRAVE APPOGGIATA AGLI ESTREMI
C***
C*** METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE
C***-----
C***

C***
C*** PARAMETRI INZIALI
C***
L=10           ! Lunghezza trave [m]
H=0.2         ! Dati sezione tubo quadro [m]
B=0.1
SP=0.001
NS=300              ! Numero di suddivisioni intervallo di frequenza

*ask,NE, Numero di elementi su 1/4 del modello , 5! N. di elementi
*ASK,FRQ1,Frequenza eccitazione minima [Hz],0
*ASK,FRQ2,Frequenza eccitazione massima [Hz],100
*ASK,ITC1,1-Forza mezz. 2-2 forze controf. 3-2 forze in fase,1
*ASK,NM,Numero di modi propri da impiegare,20
*ASK,SMORZ,Smorzamento relativo,0.05
    
```





C\*\*\* carichi

\*IF,ITC1,EQ,1,THEN

C\*\*\* 1 forza in mezzeria

FK,3,FZ,100,0

! Forza di 100 N applicata in mezzeria

! parte reale = 100, parte immaginaria = 0

\*ELSEIF,ITC1,EQ,2,THEN

C\*\*\* 2 forze in controfase a L/4 e 3L/4

FK,2,FZ,100

FK,4,FZ,-100

\*ELSE

C\*\*\* 2 forze in fase a L/4 e 3L/4

FK,2,FZ,100

FK,4,FZ,100

\*ENDIF

SOLVE

FINISH

C\*\*\* Terzo passo : espansione

/SOLU

EXPASS,ON

NUMEXP,NS,FRQ1,FRQ2,YES

SOLVE

FINISH

----- POST-PROCESSING COME DA ESERCIZIO PRECEDENTE -----



## ESERCIZIO FEM1 - ANALISI ARMONICA VOLANTE AUTOVETTURA



Fig. 1

Sul volante per autovettura mostrato in Fig. 1 sono state condotte (Fig. 2) misure di vibrazione durante il funzionamento tramite accelerometri posizionati nei punti indicati come 4 e 5.

Sono inoltre state condotte analoghe misure di vibrazione sul piantone dello sterzo nei punti indicati con 1, 2, 3 e 3'. L'analisi in frequenza di queste ultime misure ha evidenziato la presenza delle seguenti armoniche principali: 15 Hz, 29 Hz e 57 Hz.

Le ampiezze di oscillazione registrate nel punto 1 nelle diverse direzioni sono riportate nella Tabella I. Esse risultano sostanzialmente uguali a quelle registrate negli altri punti.

Il modello ad Elementi Finiti messo a punto (Fig. 3) è basato su elementi trave (BEAM4) aventi caratteristiche della sezione appositamente determinate per ottenere una corretta approssimazione "a tratti" del vero andamento delle sezioni dell'anima metallica.

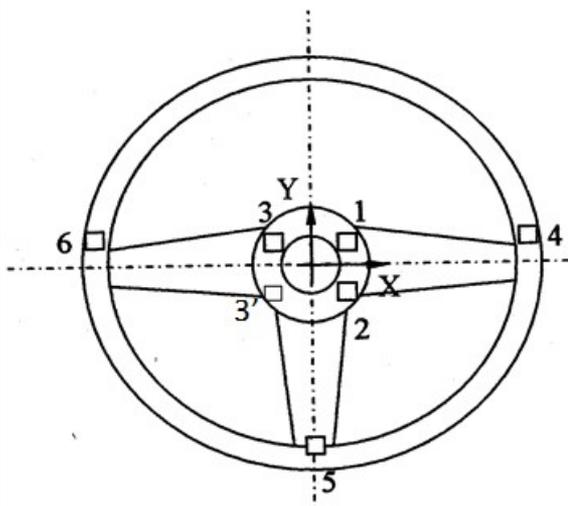


Fig. 2

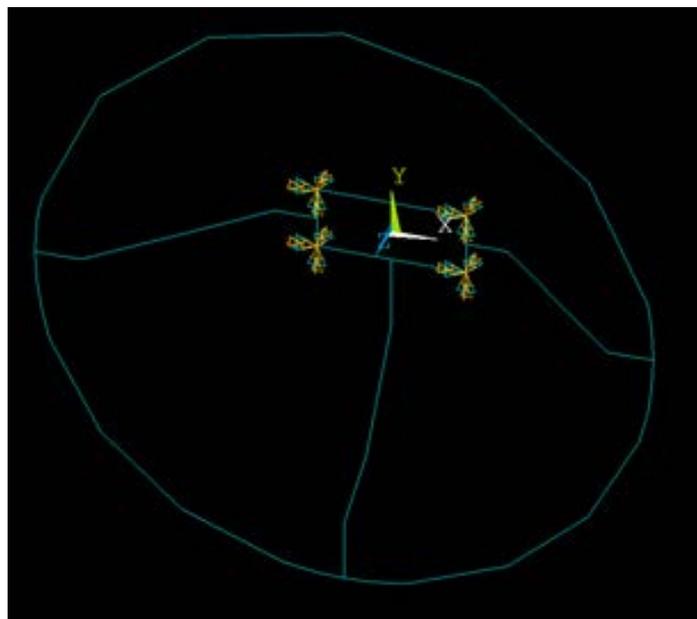


Fig. 3

## ESERCIZIO FEM1 - ANALISI ARMONICA VOLANTE AUTOVETTURA

Sulla corona sono poi stati disposti in parallelo (cioè collegandoli agli stessi nodi) degli elementi cui sono state attribuite le caratteristiche del rivestimento polimerico.

Il piantone dello sterzo è stato infine schematicamente rappresentato con una struttura quadrangolare costituita da elementi ad elevata rigidezza, avente i vertici in corrispondenza dei punti di misura.

L'analisi condotta, di tipo armonico, deve comprendere complessivamente 7 Load Steps.

Nel 2°, 4° e 6° vengono applicate alla struttura, in corrispondenza dei 4 vertici del piantone di sterzo, le ampiezze di oscillazione date dalla Tabella I, rispettivamente per frequenze di 15, 29 e 57 Hz.

Nei rimanenti Load Steps, che coprono gli intervalli di frequenza 0-15, 15-29, 29-57 e 57-70 Hz, vengono invece applicati negli stessi vertici spostamenti imposti uguali a zero. Questo permette di ottenere, all'interno del POST26, una rappresentazione continua della risposta della struttura in funzione della frequenza in presenza delle forzanti precedentemente illustrate.

**Tabella I**

Punto di misura	Frequenza [Hz]	Direzione	Ampiezza (reale) [mm]	Ampiezza (Imm.) [mm]
1	15	X	-6E-2	1.4E-2
1	29	X	-6.287E-5	-9.014E-4
1	57	X	7.425E-5	-2.378E-5
1	15	Y	4.0E-3	1.8E-2
1	29	Y	-4.128E-3	-2.486E-3
1	57	Y	4.668E-4	2.827E-4
1	15	Z	-1.3E-2	-4.087E-3
1	29	Z	1.092E-3	5.097E-4
1	57	Z	-2.132E-4	-9.625E-5

## ESERCIZIO FEM1 - ANALISI ARMONICA VOLANTE AUTOVETTURA

La risposta effettiva della struttura è stata poi ottenuta misurando, sempre con accelerometri, le ampiezze di vibrazione in corrispondenza dei punti 4 e 5 (Fig.2). I risultati di tali misure sono riportati in Tab.II. Essi possono essere posti a confronto con i valori calcolati dal modello, visualizzabili all'interno di POST26 in forma di ampiezza e fase, inserendoli in appositi vettori, successivamente trasferiti con il comando VPUT in variabili POST26.

Lo smorzamento utilizzato è di tipo proporzionale (comandi ALPHAD e BETAD). Si provi a variare i valori di smorzamento. Si noterà che la loro influenza è modesta, tranne che a 57 Hz, in cui si nota una contenuta dipendenza dei risultati dal valore dello smorzamento stesso (quota BETAD). Questo è dovuto al fatto che le frequenze di 15 e 29 Hz sono piuttosto lontane dalle condizioni di risonanza.

Si fornisce a parte il file per ANSYS «Avolante\_esercitazione\_PC.txt» **parzialmente compilato** contenente la geometria del modello ed i valori degli spostamenti in ingresso ed uscita. descrizione della storia di carico. Da inserire la storia di carico. Nella Fig. 4 è riportato un esempio di confronto tra valori numerici e sperimentali, mentre nel seguito si riporta il file di ingresso parzialmente compilato.

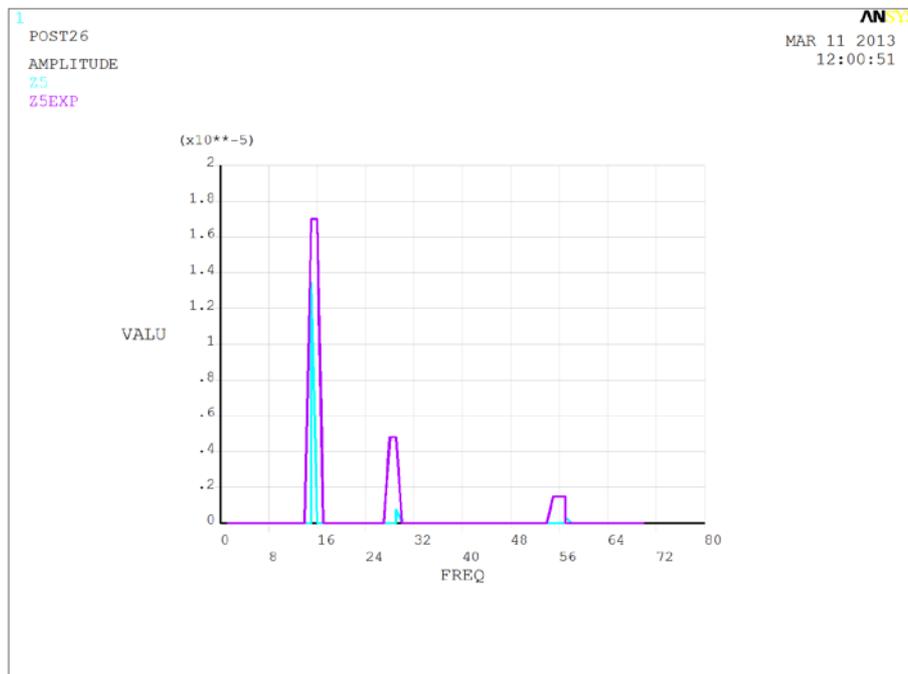


Fig. 4

Tabella II

Punto di misura	Frequenza [Hz]	Dir.	Ampiezza [mm]	Fase [gradi]
5	15	X	7.4E-2	161
5	15	Y	2.1E-2	81
5	29	Y	7.5E-3	-149
5	57	Y	1.0E-3	-127
5	15	Z	1.7E-2	-151
5	29	Z	4.8E-3	25
5	57	Z	1.5E-3	54
4	15	X	8.2E-2	163
4	29	X	3.4E-2	-127
4	15	Y	1.8E-2	87
4	29	Y	8.4E-3	-145
4	57	Y	7.0E-4	-121
4	57	Z	2.6E-3	-131

## ESERCIZIO FEM2 - SIMULAZIONE DI MACCHINA A RISONANZA PER PROVE A FATICA A FLESSIONE ROTANTE

Si conduca la simulazione del comportamento dinamico della macchina per prove di fatica alternata in piena scala su elementi tubolari leggeri per batterie di perforazione (Drill Pipes) mostrata in Fig. 1. Il provino è schematicamente mostrato in Fig. 2.



Fig. 1 – Macchina di prova a fatica in piena scala a flessione rotante per Drill Pipes.

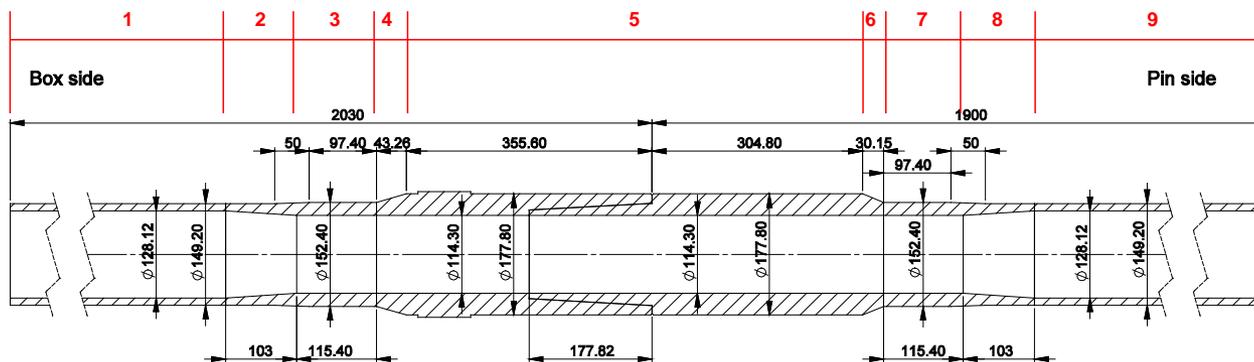


Fig. 2





## **ESERCIZIO FEM2 - SIMULAZIONE DI MACCHINA A RISONANZA PER PROVE A FATICA A FLESSIONE ROTANTE**

Si noti che, anche in questo caso, l'effettiva forza eccitatrice, derivando dalla rotazione degli eccentrici, risulta proporzionale al quadrato della frequenza (e non costante con essa).

Dato che ANSYS, nell'analisi armonica standard, non dispone di un apposito comando per la rappresentazione di un tale tipo di eccitazione, è necessario costruirla definendo una serie di "Load Steps" (ad esempio spaziate di 1 Hz), a ciascuno dei quali attribuire un diverso valore della forza eccitatrice.

Il modello è stato costruito facendo uso di elementi trave nello spazio. A parte, viene fornito un file di ingresso «macchina a risonanza a flessione rotante.txt» per lo studio del comportamento della struttura.

Il Post processing prevede l'impiego del POST26 per la rappresentazione delle tensioni nei punti critici (al termine della zona 3 ed all'inizio della zona 7) in funzione della frequenza e quella del POST1 per la rappresentazione della deformata.

Nel file di ingresso fornito, viene dapprima ricercata la frequenza corrispondente ai massimi valori di spostamento (risonanza) e, successivamente, si rappresenta la deformata per tale frequenza come spostamento risultante complessivo.

Il comando ANHARM consente poi una rappresentazione realistica della deformata del sistema nello spazio.

## ESERCIZIO FEM2 - SIMULAZIONE DI MACCHINA A RISONANZA PER PROVE A FATICA A FLESSIONE ROTANTE

Le risposte fornite dal sistema, in termini di tensione massima nominale (flessione, formula di Navier) nelle zone critiche del componente in funzione della frequenza, sono riportate nella Fig. 3.

La Figura 4 mostra invece la deformata del sistema in condizioni di risonanza.

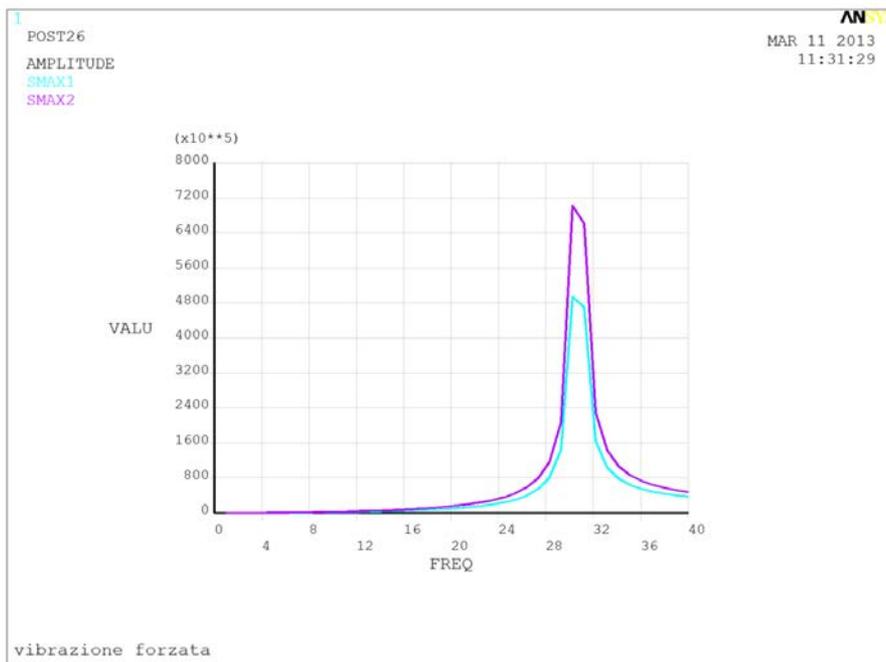


Fig. 3 – Tensione nelle zone critiche della struttura in funzione della frequenza

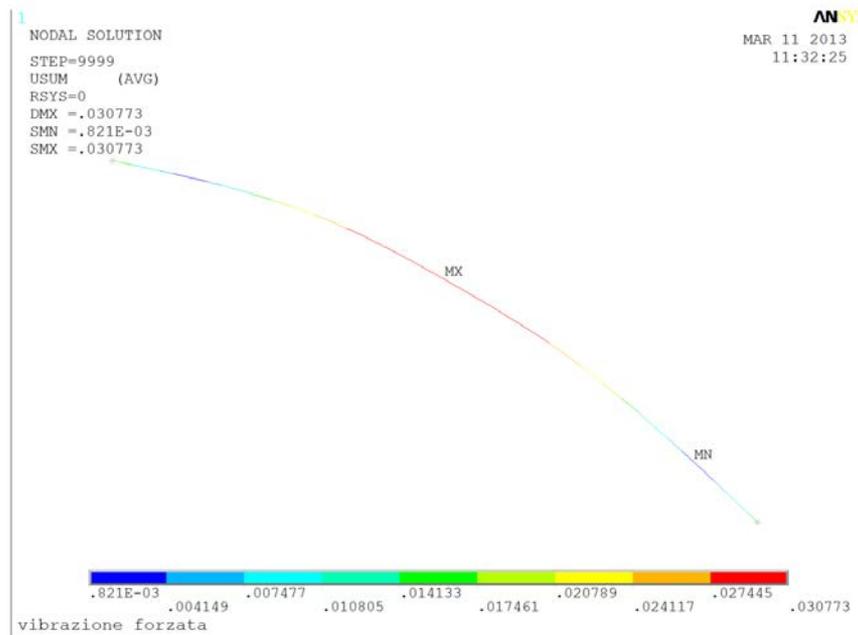
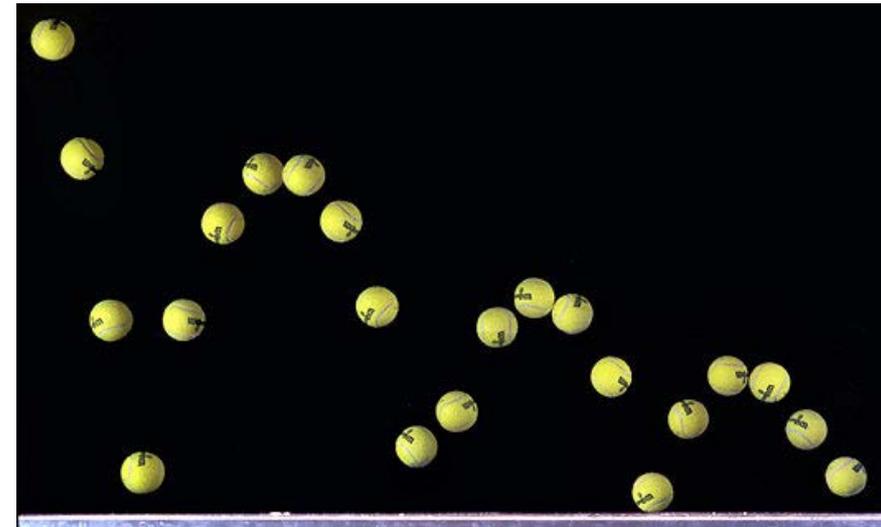


Fig. 4 – Deformata del sistema in condizione di risonanza.

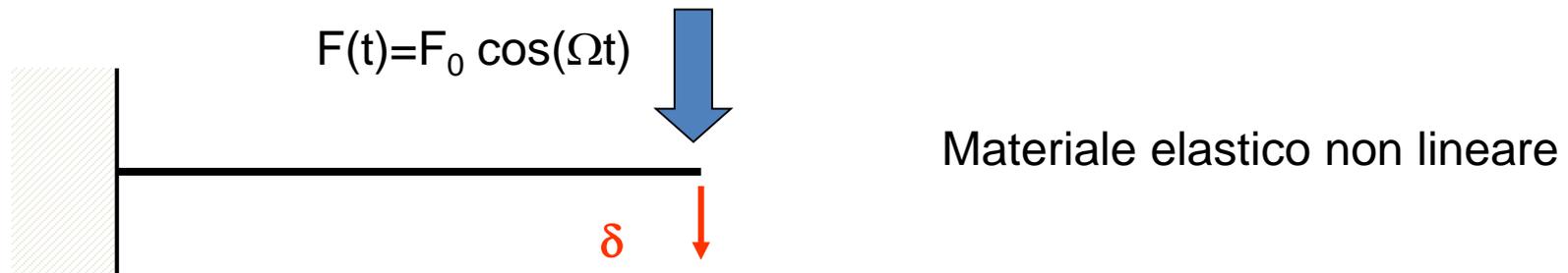
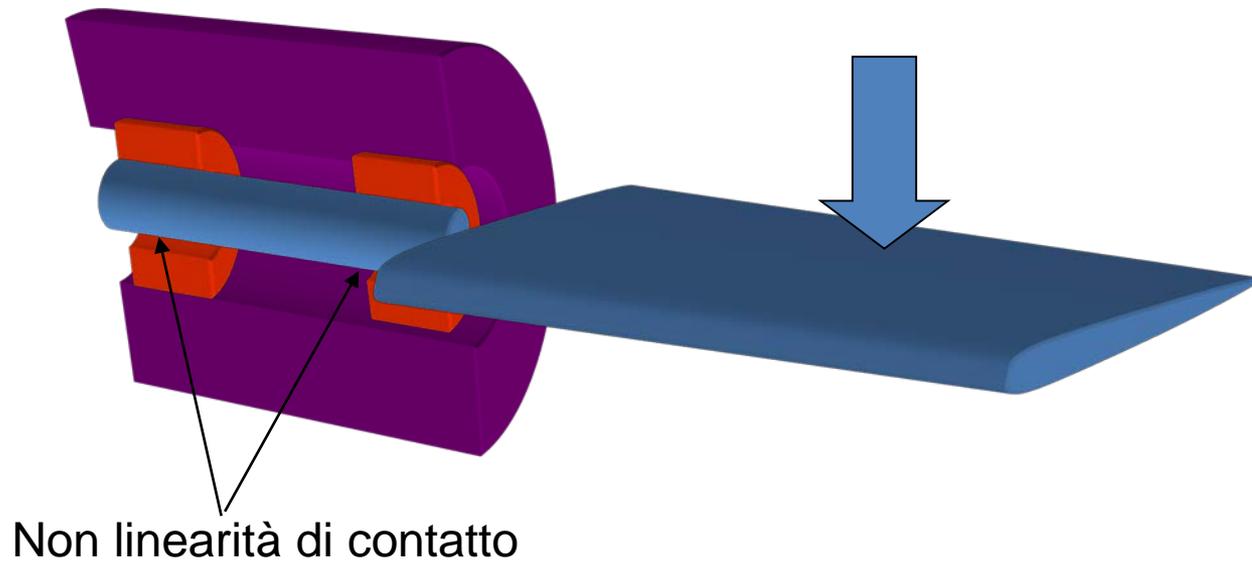
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

**SCOPO:** Valutare la risposta del sistema in presenza di forze o sollecitazioni esterne, generalmente di tipo **non periodico**, applicate abbastanza rapidamente **da rendere non trascurabili gli effetti delle forze di inerzia**.



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Può essere impiegato anche per valutare la risposta del sistema a forze o sollecitazioni esterne di tipo **periodico**, in **presenza di effetti non lineari**.



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Principali tecniche di soluzione:

➤ **Metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

▪ Ipotesi:

- *Struttura in campo lineare, con matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  costanti*
- *Matrice di smorzamento proporzionale o costante*

➤ **Metodi di integrazione diretta (MID)**

▪ Ipotesi:

- *Struttura operante anche in campo non lineare*
- *Matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  anche non costanti*
- *Matrice di smorzamento qualsiasi*

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO

Soluzione: **metodo di sovrapposizione modale (MSM)**

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^{n_{MP}} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t)$$

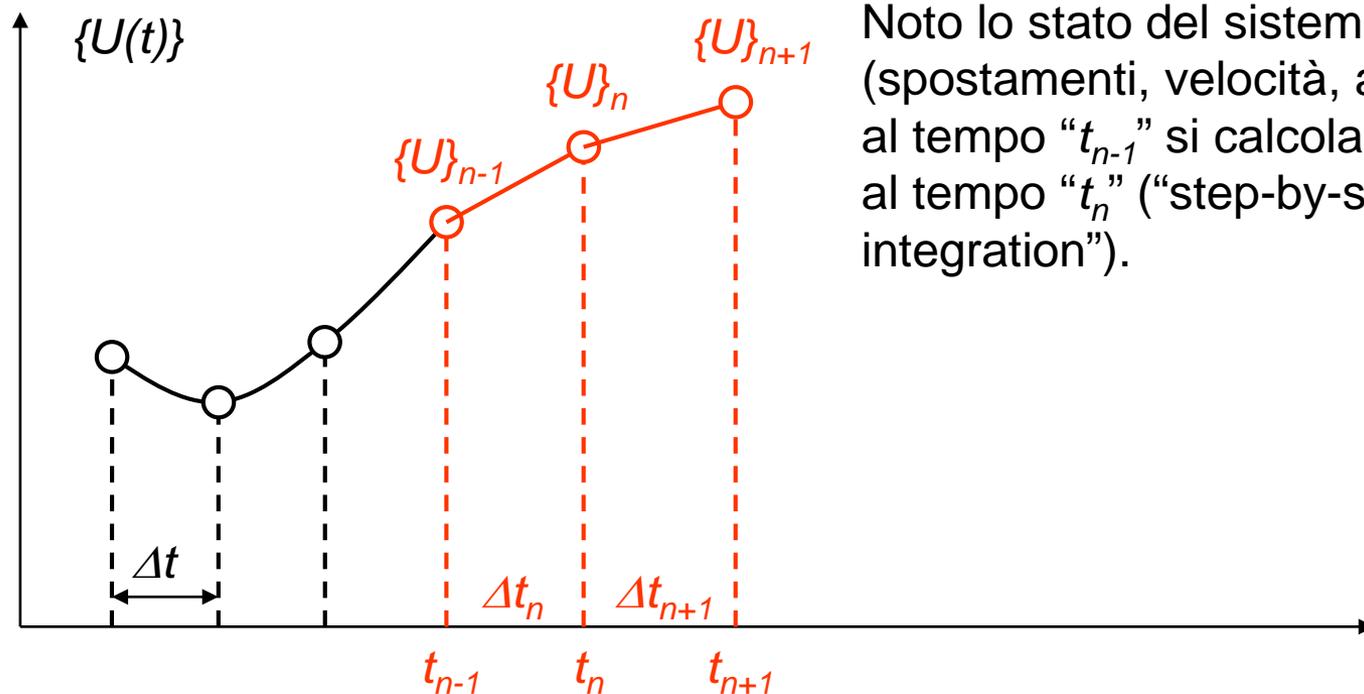
$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \mathbf{y}^{(k)\mathbf{T}} \mathbf{f}(t) = f_k(t)$$

Soluzione della equazione relativa ad ogni modo con metodi “passo-passo”  
(Es. Runge-Kutta)

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO METODI DI INTEGRAZIONE DIRETTA

**Metodi di integrazione diretta (MID):** nessuna ipotesi preliminare sulla linearità del problema, né sulle matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$

L'intervallo temporale in cui si vuole studiare il comportamento del sistema viene suddiviso in intervalli ("passi") temporali successivi.



Noto lo stato del sistema (spostamenti, velocità, accelerazioni) al tempo " $t_{n-1}$ " si calcola il nuovo stato al tempo " $t_n$ " ("step-by-step integration").

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO METODI DI INTEGRAZIONE DIRETTA (MID)

**Metodi di integrazione diretta (MID):** nessuna ipotesi preliminare sulla linearità del problema, né sulle matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$

Tra i metodi di integrazione diretta, rientrano **due tipi principali di algoritmi**:

**Algoritmi di tipo implicito:** la soluzione al passo temporale  $n+1$  è ottenuta tramite la conoscenza della **soluzione al passo  $n$**  e delle **condizioni imposte al passo  $n+1$**  (Es.: metodo di Newmark)

**Algoritmi di tipo esplicito:** la soluzione al passo temporale  $n+1$  è ottenuta tramite la conoscenza della **soluzione e delle condizioni imposte al passo  $n$**  (Es.: metodo delle differenze centrali)

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DELLE DIFFERENZE CENTRALI (ESPLICITO)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ $t_n$ ” (nota)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n = \mathbf{f}(t_n)$$

Si assume:  $\dot{\mathbf{u}} \approx \frac{1}{2} \left( \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{\Delta t_n} + \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{\Delta t_{n+1}} \right)$

$$\dot{\mathbf{u}} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t} \right) \approx \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} \approx \frac{\left( \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{\Delta t_{n+1}} - \bar{\dot{\mathbf{u}}}_{\Delta t_n} \right)}{\Delta t}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} \approx \frac{\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} - \frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t}}{\Delta t} \approx \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2}$$

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID

### METODO DELLE DIFFERENZE CENTRALI (ESPLICITO)

Sostituendo:

$$\ddot{\mathbf{u}} \approx \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2}$$

$$\dot{\mathbf{u}} \approx \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n = \mathbf{f}(t_n)$$



$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2} + \mathbf{C} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_n = \mathbf{f}(t_n)$$



$$\mathbf{u}_{n+1} = \frac{\Delta t^2 (\mathbf{f}(t_n) - \mathbf{K}\mathbf{u}_n) + 2\mathbf{M}\mathbf{u}_n - \left( \mathbf{M} - \mathbf{C} \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{u}_{n-1}}{\mathbf{M} + \mathbf{C} \frac{\Delta t}{2}}$$

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DELLE DIFFERENZE CENTRALI (ESPLICITO)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \frac{\Delta t^2 \left( \mathbf{f}(t_n) - \mathbf{K}\mathbf{u}_n \right) + 2\mathbf{M}\mathbf{u}_n - \left( \mathbf{M} - \mathbf{C} \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{u}_{n-1}}{\mathbf{M} + \mathbf{C} \frac{\Delta t}{2}}$$

Se si fa in modo che **M** e **C** siano diagonali il calcolo è immediato.

Stabilità:  $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$  Massima pulsazione propria del modello EF

L'algoritmo risulta condizionatamente stabile, vale a dire che la stabilità dipende dal passo temporale prescelto.

Possibili stime  $\Delta t$ :

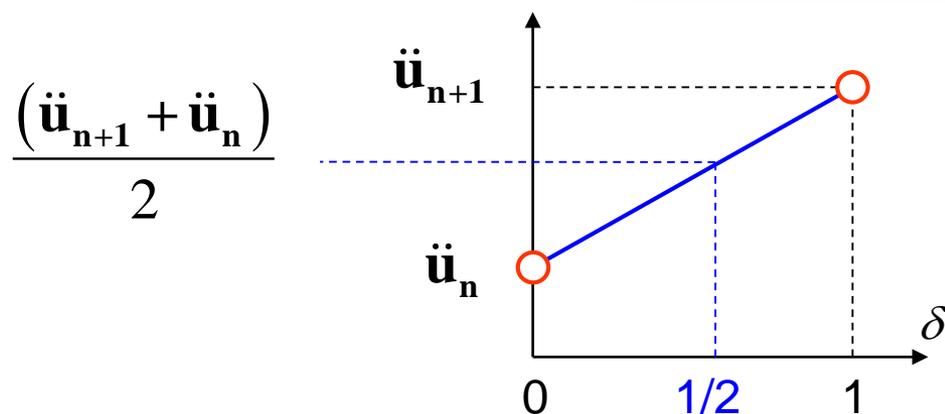
$$\Delta t \leq \mu L \left( \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ $t_{n+1}$ ” (non nota)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1})$$

Si assume:  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \approx \dot{\mathbf{u}}_n + \left( (1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \Delta t$   $\delta \in \{0,1\}$

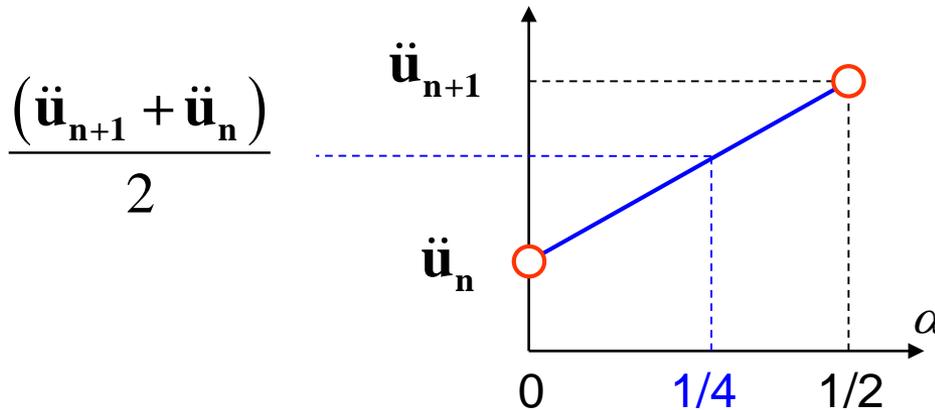


## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Si assume:

$$\mathbf{u}_{n+1} \approx \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \Delta t^2$$

$$\alpha \in \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}$$



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Eq. di eq. dinamico al tempo “ $t_{n+1}$ ” (non nota)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \approx \dot{\mathbf{u}}_n + \left( (1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \Delta t \\ \mathbf{u}_{n+1} \approx \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \Delta t^2 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}) \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \approx \dot{\mathbf{u}}_n + \left( (1-\delta)\ddot{\mathbf{u}}_n + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right) \Delta t \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \approx \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\alpha\Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}_n}{\alpha\Delta t} - \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \end{array} \right.$$

Risolvendo per

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}) \\
 \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \approx \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\ddot{\mathbf{u}}_n\Delta t + \delta\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\alpha\Delta t^2} \\
 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \approx \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\alpha\Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}_n}{\alpha\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{\mathbf{u}}_n
 \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}\left(\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\alpha\Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}_n}{\alpha\Delta t} - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{\mathbf{u}}_n\right) + \\
 & + \mathbf{C}\left(\delta\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\alpha\Delta t} + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\ddot{\mathbf{u}}_n\Delta t\right) + \\
 & + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1})
 \end{aligned}$$

## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

$$\mathbf{u}_{n+1} \left( \frac{\mathbf{M}}{\alpha \Delta t^2} + \frac{\delta \mathbf{C}}{\alpha \Delta t} + \mathbf{K} \right) = \mathbf{f}(t_{n+1}) +$$

$$+ \mathbf{M} \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{u}_n + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \right) +$$

$$+ \mathbf{C} \left( \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{u}_n + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \right)$$

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{f}}$$

Risoluzione:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{f}}$$

Oss.: se  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  sono costanti, la matrice  $\hat{\mathbf{K}}$  è anch'essa costante e può essere costruita ed invertita una sola volta.



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Condizioni di stabilità:

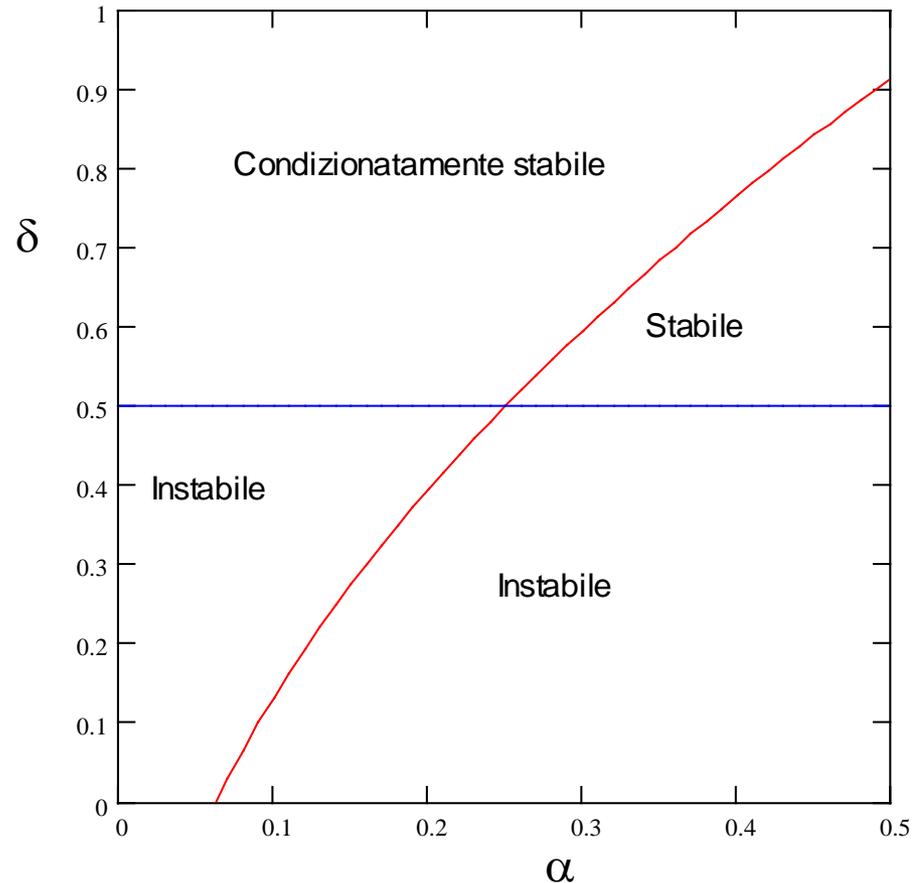
$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

All'interno del campo di stabilità  
l'algoritmo risulta  
**incondizionatamente stabile**,  
vale a dire stabile  
indipendentemente dal passo  
temporale prescelto.

Esiste anche una regione in cui  
l'algoritmo risulta  
**condizionatamente stabile**, con  
passo limite:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\Omega \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2 - 4\alpha}}$$



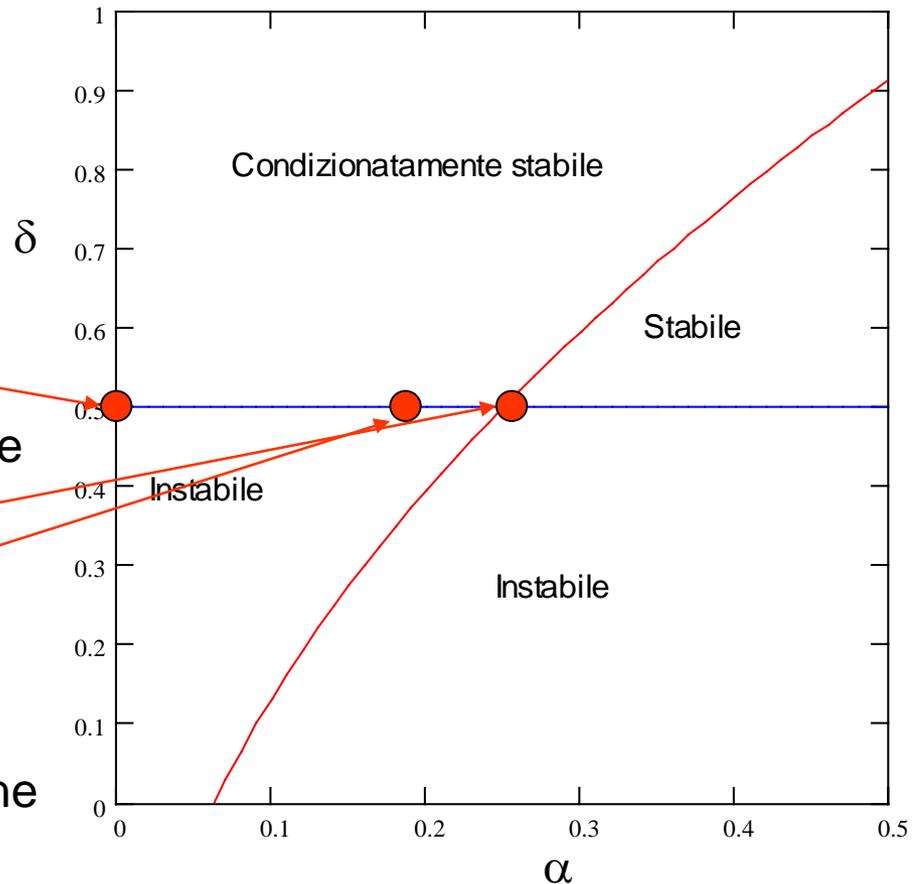
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Al variare di  $\alpha$  e  $\delta$  si ottengono altri algoritmi classici di soluzione:

$\alpha = 0$   
 $\delta = \frac{1}{2}$  Metodo delle differenze centrali

$\alpha = \frac{1}{4}$   
 $\delta = \frac{1}{2}$  Metodo dell'accelerazione media

$\alpha = \frac{1}{6}$   
 $\delta = \frac{1}{2}$  Metodo dell'accelerazione lineare





## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

In ANSYS i due parametri  $\alpha$  e  $\delta$  sono generalmente espressi in funzione di un terzo parametro  $\gamma$  (TINTP):

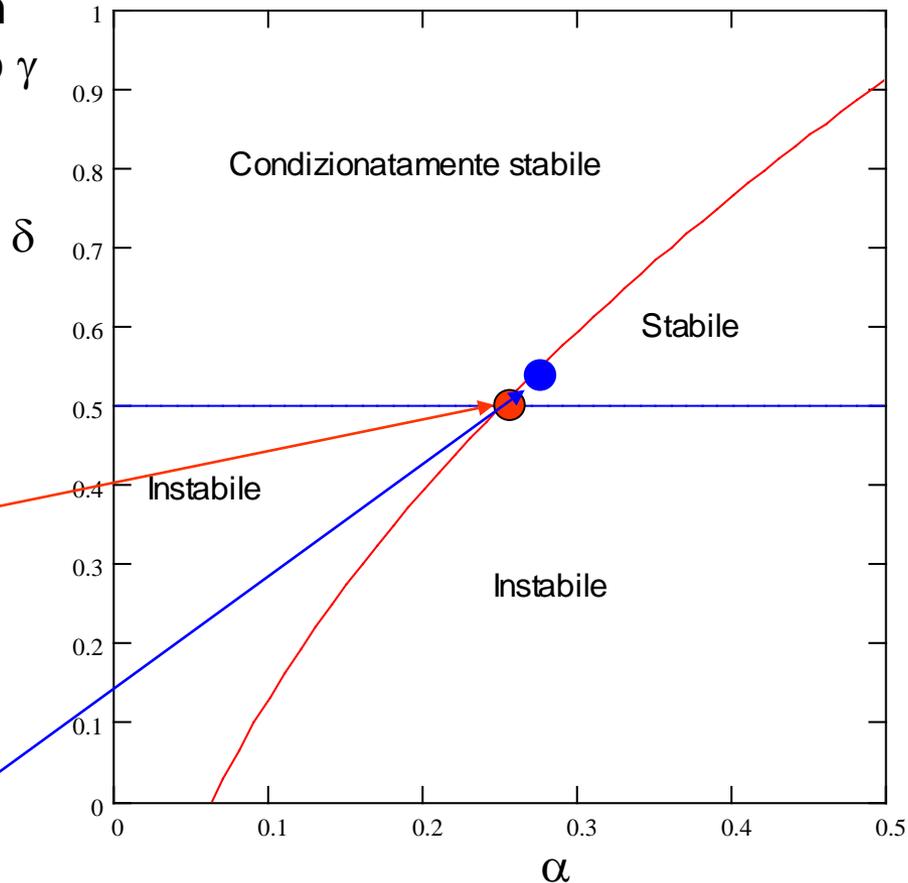
$$\alpha = \frac{1}{4}(1 + \gamma)^2$$

$$\delta = \frac{1}{2} + \gamma$$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \delta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

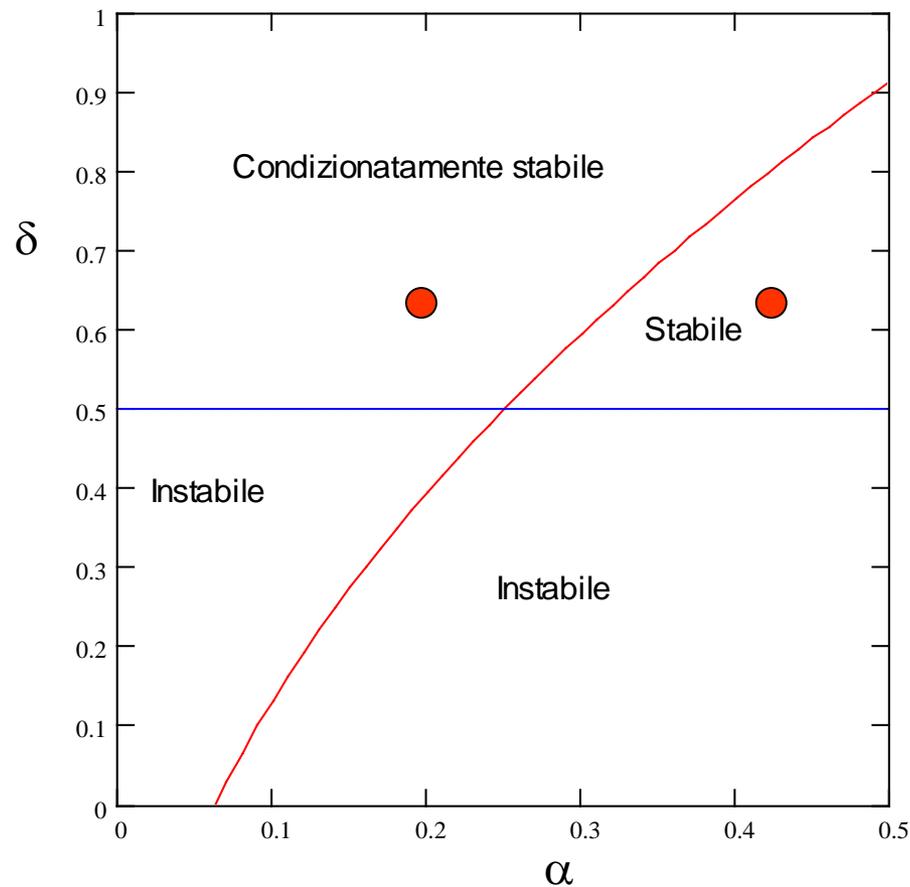
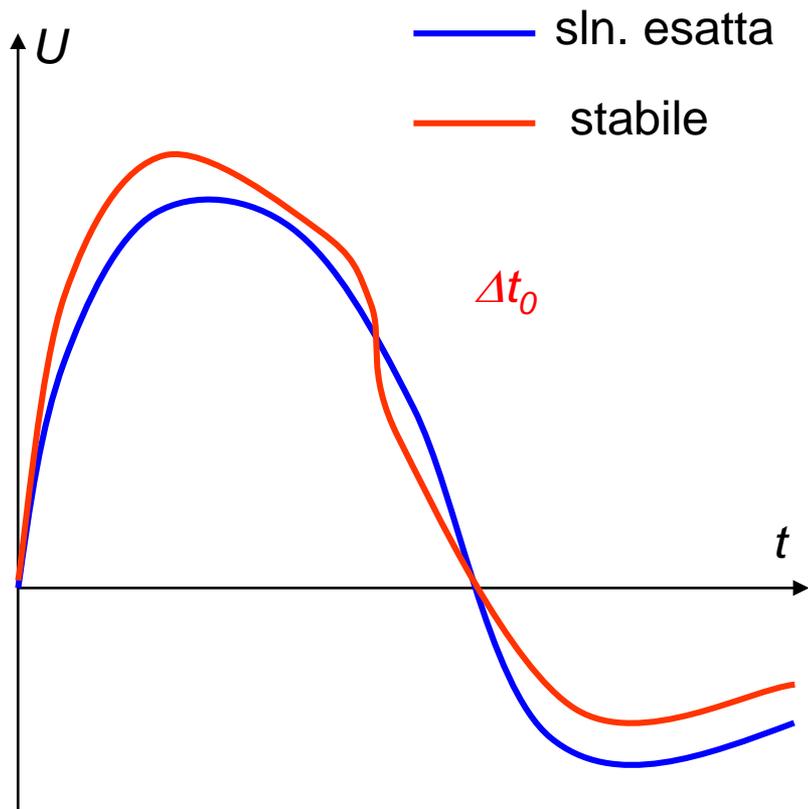
Per default

$$\gamma = 0.005 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.2525 \\ \delta = 0.505 \end{cases}$$



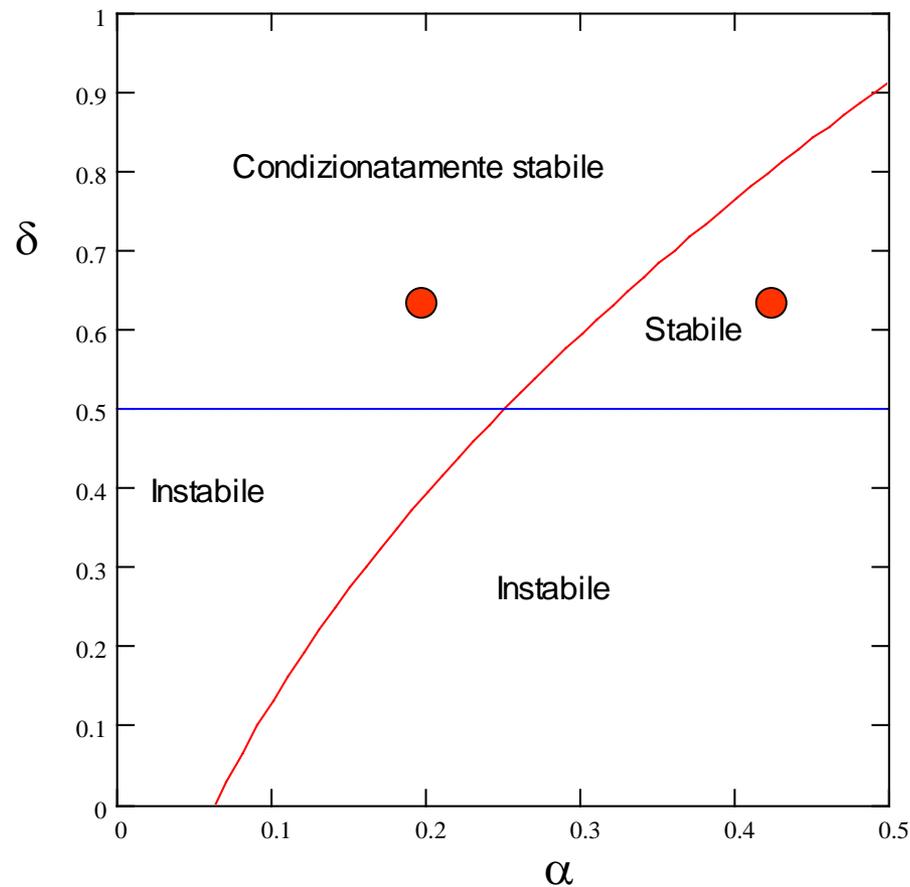
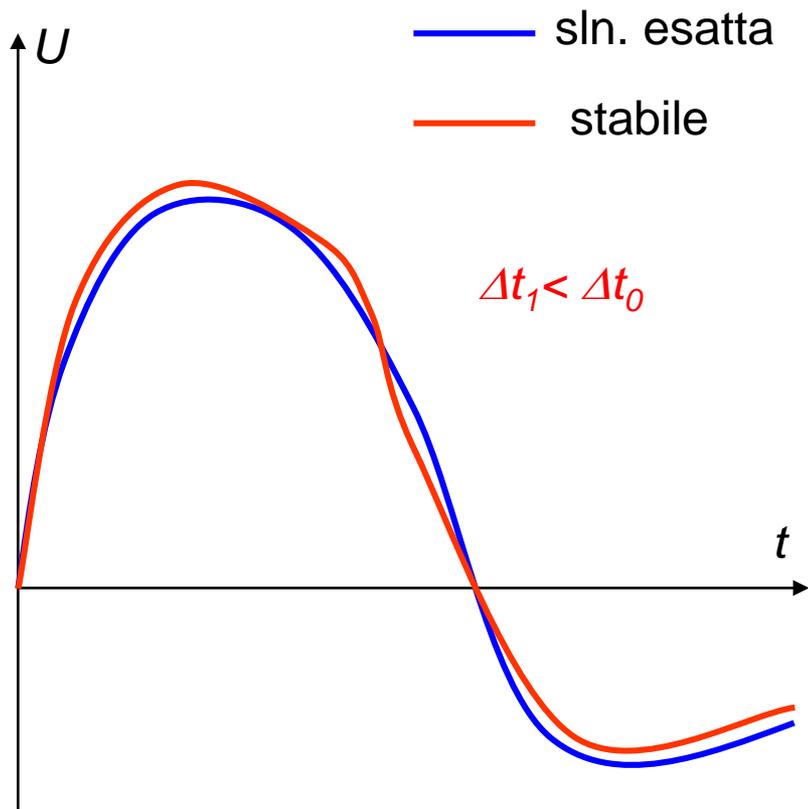
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di  $\Delta t$ .



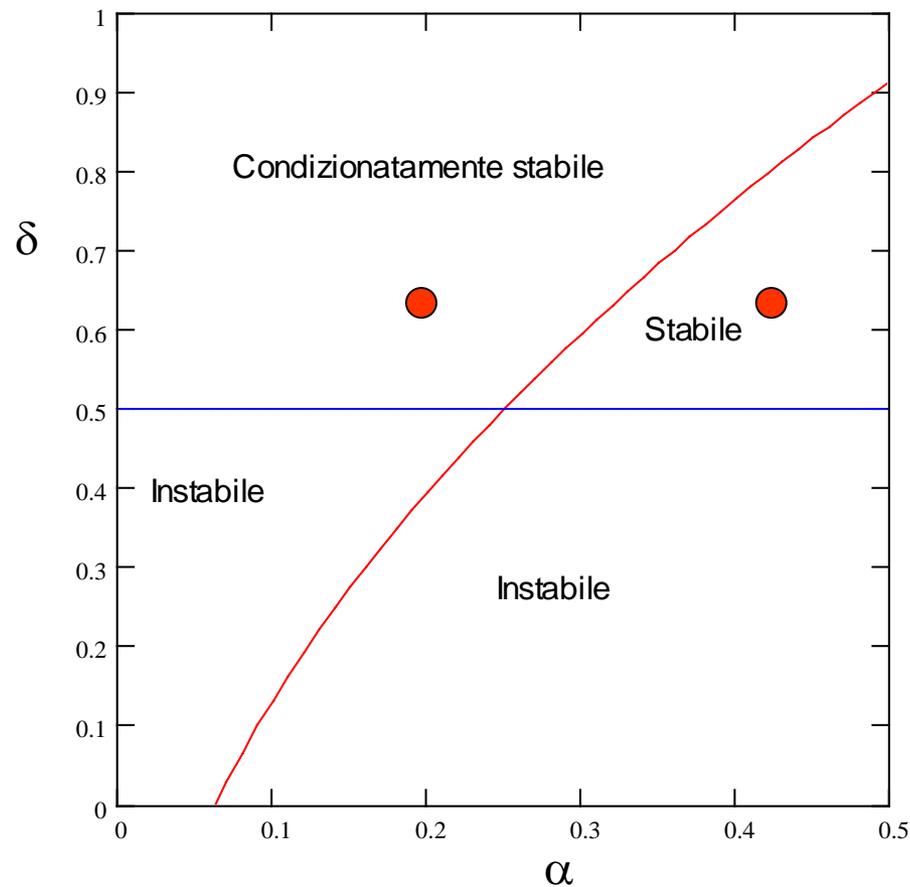
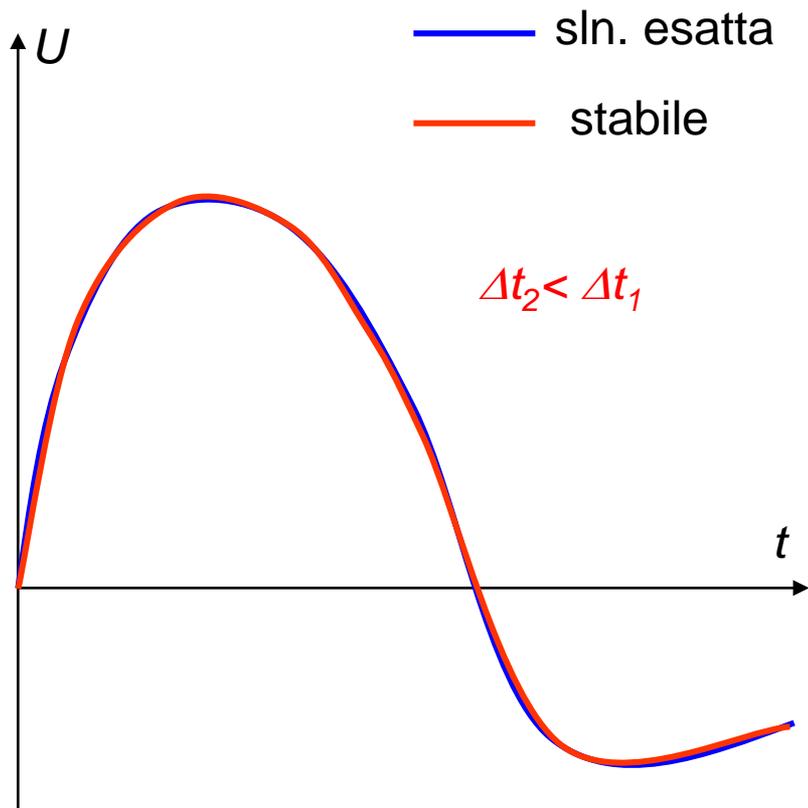
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di  $\Delta t$ .



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

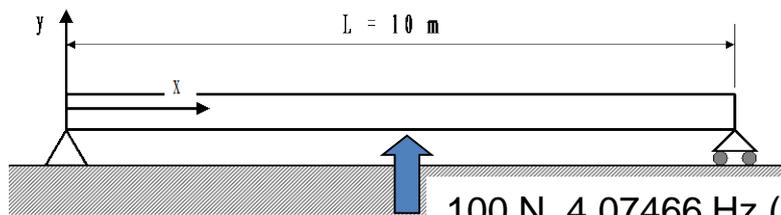
All'interno del campo di stabilità (incondizionata o condizionata), la soluzione tende a quella esatta, al tendere a zero di  $\Delta t$ .





## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

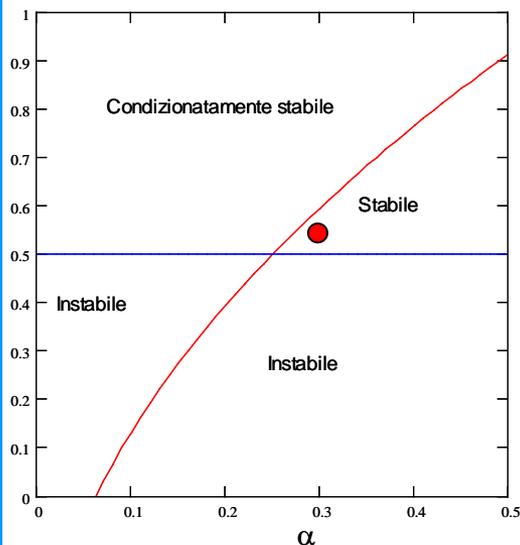
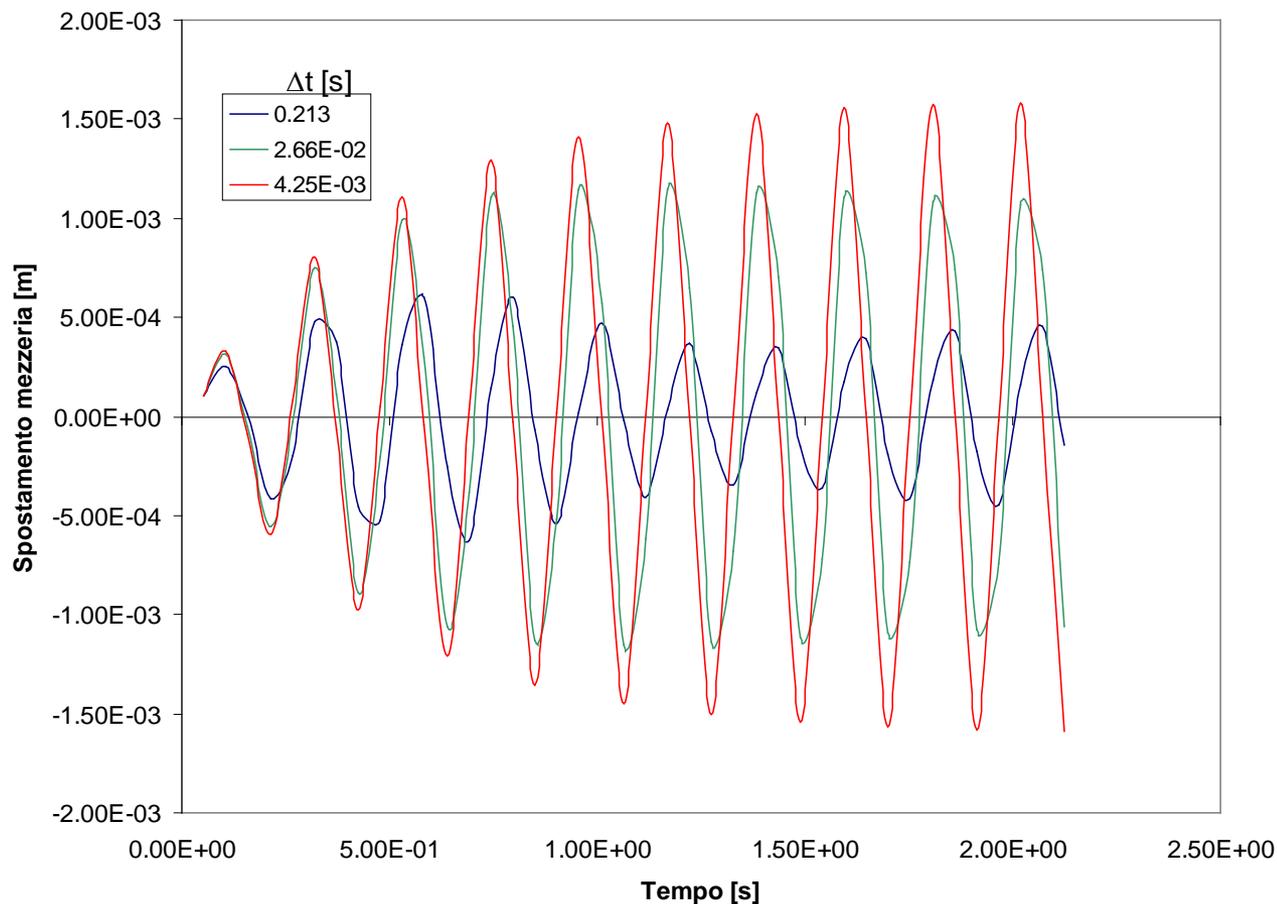
Effetto del passo di integrazione in condizioni di stabilità incondizionata



100 N, 4.07466 Hz (risonanza), onda triangolare

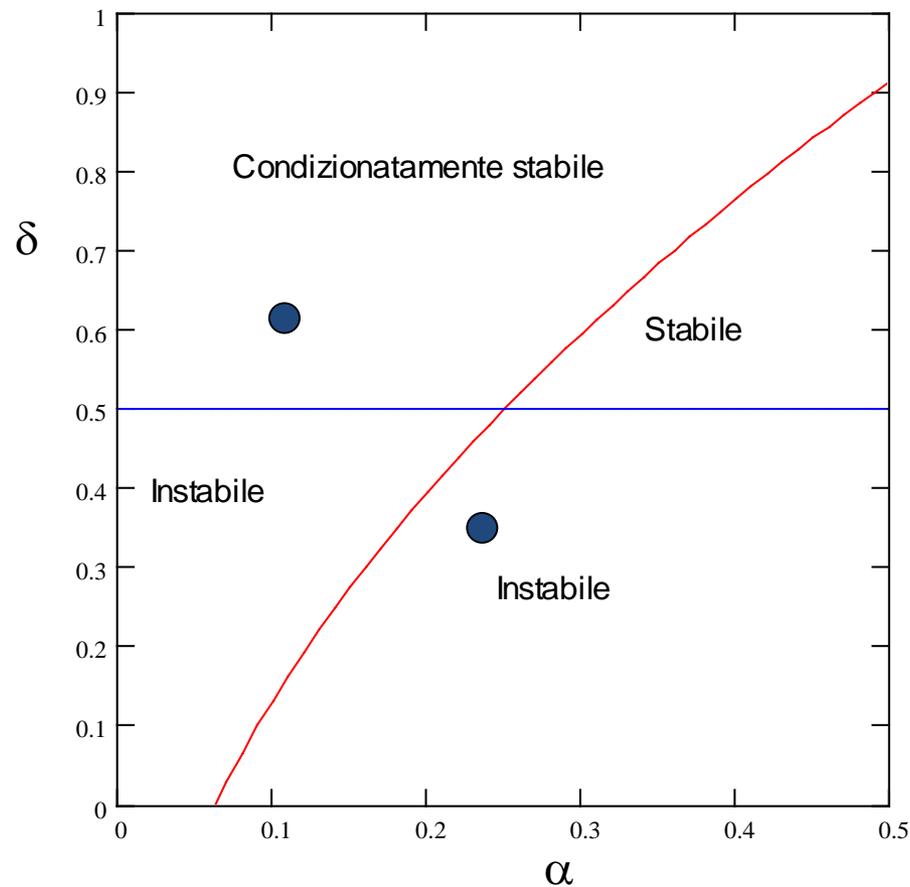
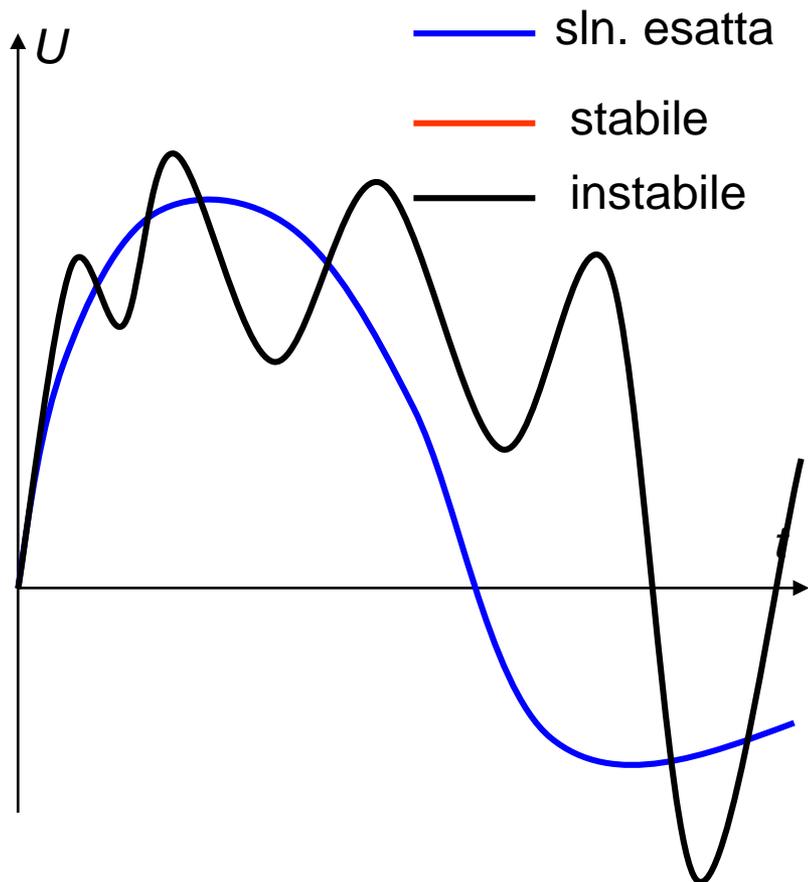
$$\alpha = 0.2525$$

$$\delta = 0.5050$$



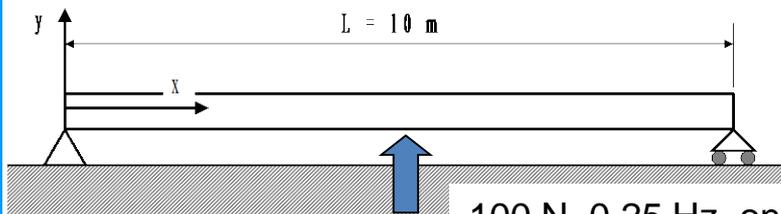
## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Al di fuori del campo di stabilità, la soluzione mostra una rapida divergenza (in genere con forti oscillazioni) da quella esatta, senza convergere su quest'ultima al tendere a zero di  $\Delta t$ .



# ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

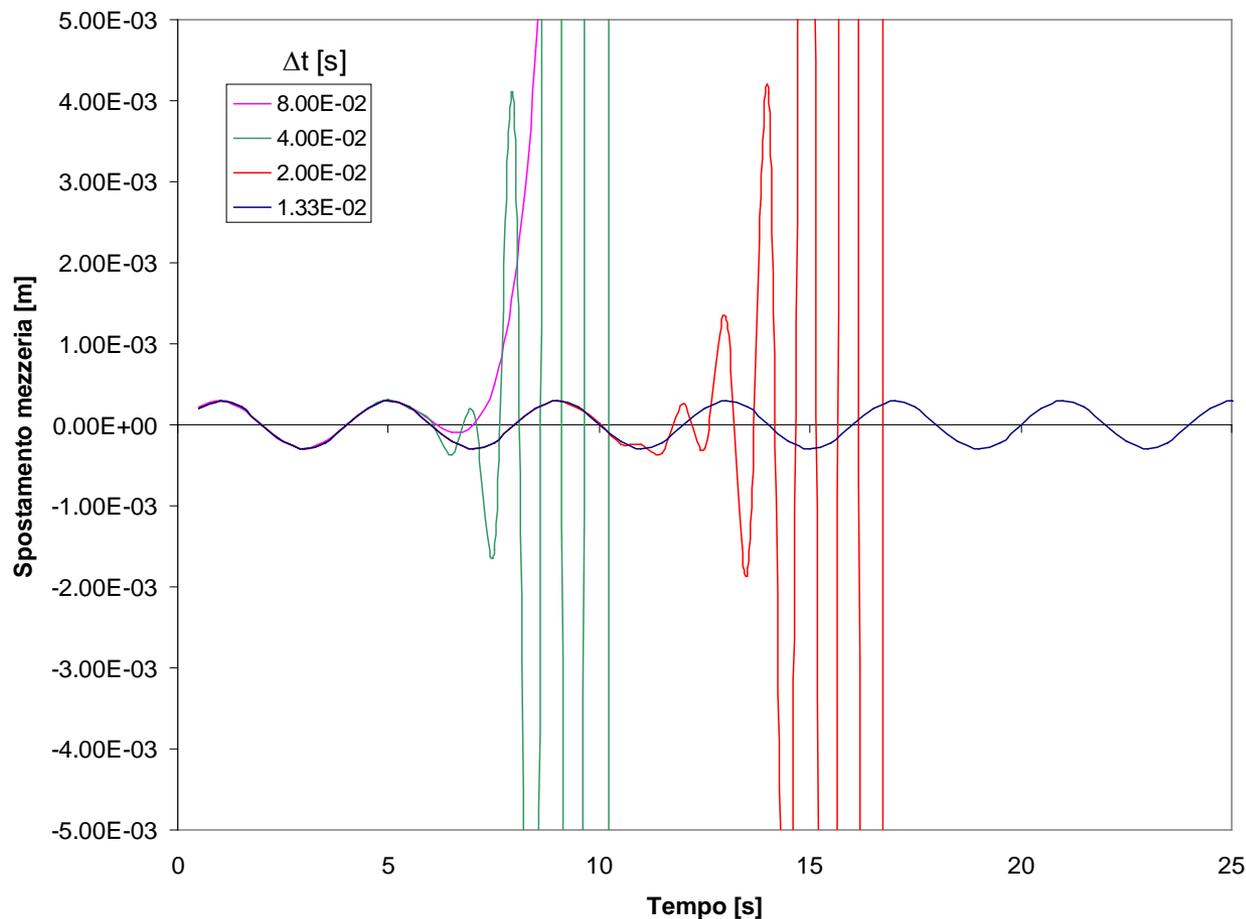
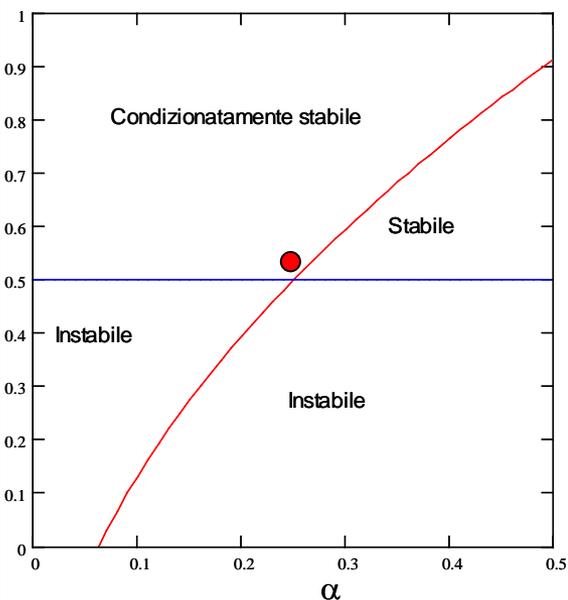
Effetto del passo di integrazione in  
condizioni di stabilità condizionata



100 N, 0.25 Hz, onda triangolare

$$\alpha = 0.25$$

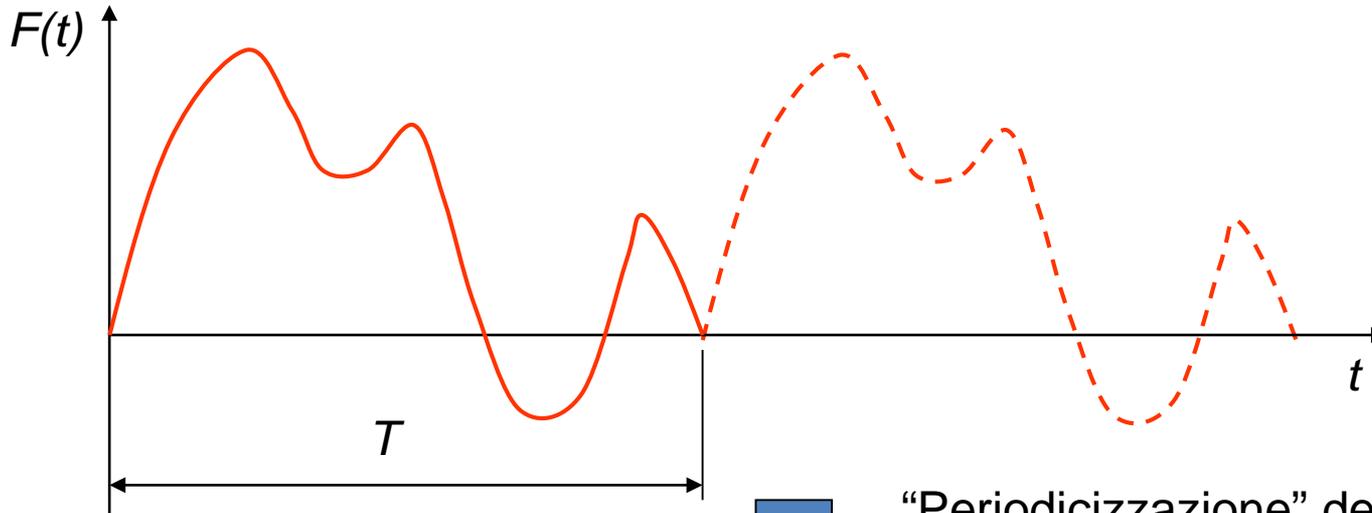
$$\delta = 0.51$$



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

### Scelta del passo di integrazione temporale.

Procedura per valori **indicativi** frequenze in gioco



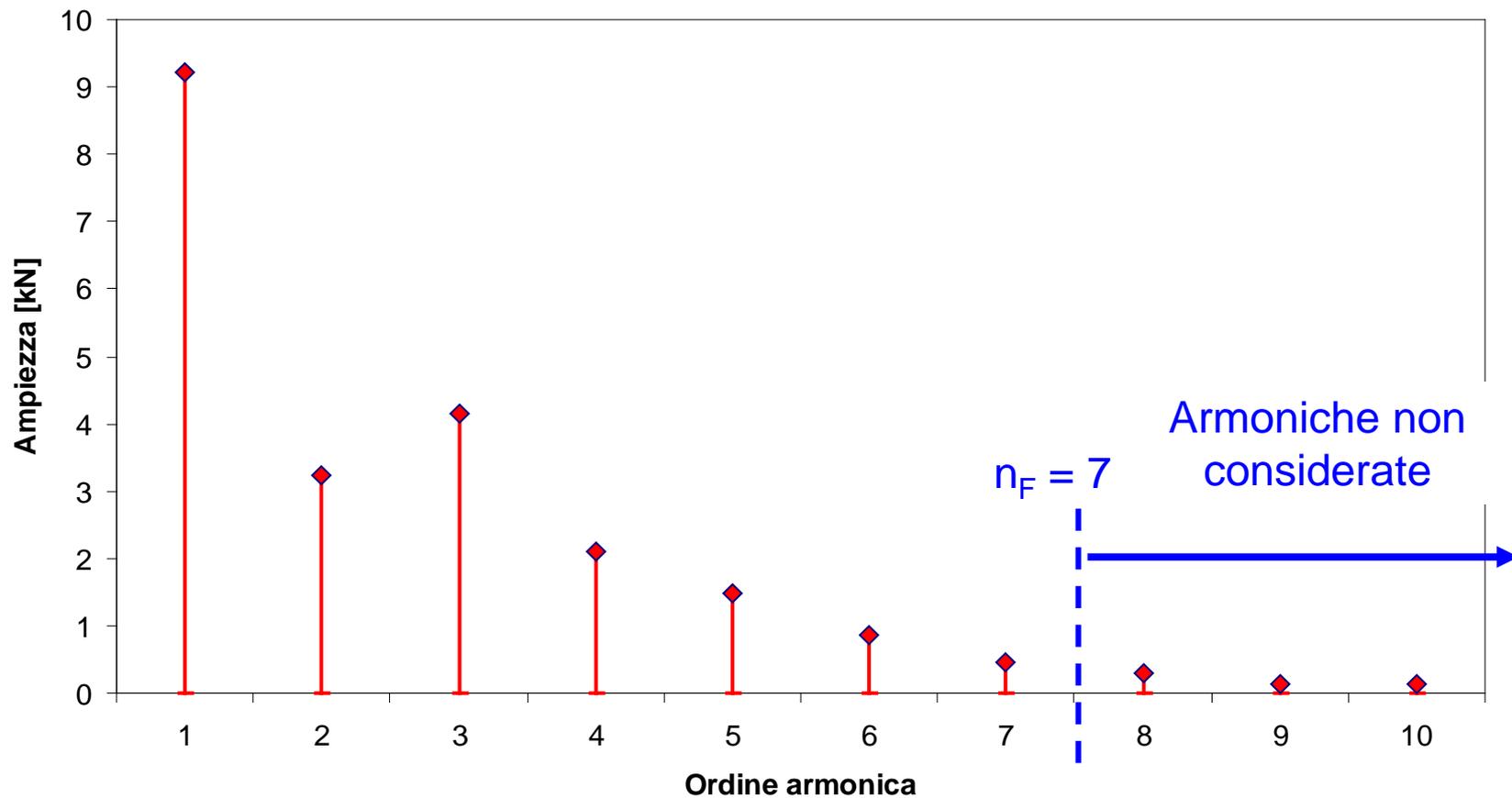
“Periodicizzazione” della storia di carico

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{h=1}^{\infty} A_h \cdot \cos(h\Omega_0 t + \lambda_h)$$

# ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO - MID METODO DI NEWMARK (IMPLICITO)

Andamento tipico delle ampiezze



## ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Metodo di sovrapposizione modale:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n_M} \mathbf{y}^{(j)} q_j(t)$$

$$\omega_{n_M} \gg n_F \Omega_0$$

Tutti i metodi di soluzione:

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{n_P n_F \Omega_0} \quad n_P > 20 \div 30$$

In ogni caso, a partire da questa prima stima, è generalmente necessario uno studio di convergenza su  $n_P$  e  $\Delta t$ .

Situazioni che possono richiedere valori particolarmente ridotti di  $\Delta t$ :

- fenomeni di contatto
- propagazione di onde elastiche (dimensioni elementi  $< 1/20$  lung. d'onda)
- non linearità geometriche, “stress stiffening”





## INTEGRAZIONE RISPETTO AL TEMPO

Tipo di problema	Algoritmi espliciti	Algoritmi impliciti
Generale	Nessuna inversione di matrici; basso tempo di calcolo per step	Inversione di matrici ad ogni step; elevato tempo di calcolo per step
Campo lineare	Stabilità condizionata; necessari passi temporali molto piccoli	Possibile stabilità incondizionata; grandi passi temporali
Campo non lineare	Soluzione diretta ad ogni passo	Soluzione tramite tecniche iterative
	Necessari passi temporali molto piccoli per la stabilità	Necessari piccoli passi temporali per la convergenza
	Verifiche di convergenza non richieste	Convergenza non sempre assicurata per forti non linearità

# INTEGRAZIONE RISPETTO AL TEMPO



Campo applicativo

Statico

Quasi statico

Dinamico



$10^{-2}$

$10^1$

Strain rate [ $s^{-1}$ ]

$10^4$

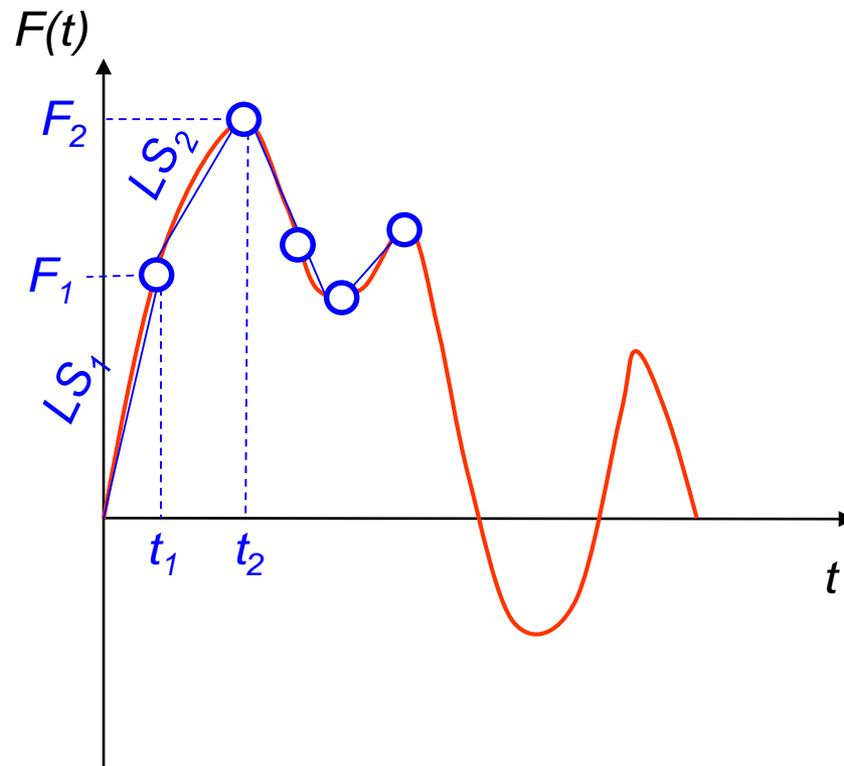


Possibili anche approcci misti Impliciti+Espliciti

# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/1

La effettiva storia di carico viene rappresentata tramite una successione di «Load Steps» (incrementi di carico), ciascuno dei quali caratterizzato da:

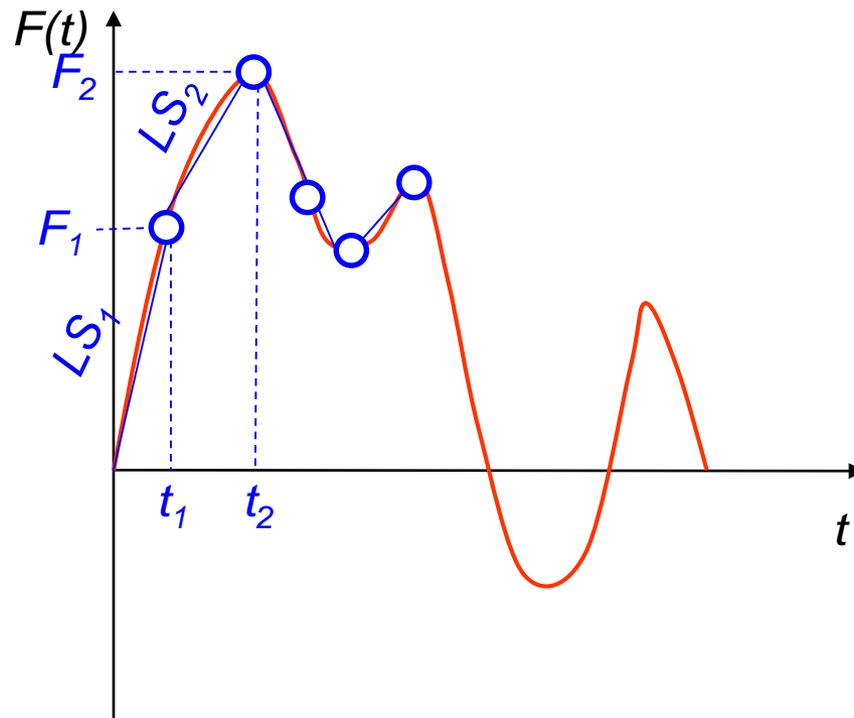
- Tempo finale
- Valore finale del carico applicato



## RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/2

In ogni «Load Step» il carico può:

- Variare linearmente nel tempo dal valore finale dello step precedente a quello finale dello step corrente
- Raggiungere immediatamente il valore finale dello step corrente







## COMANDI ANSYS/1

### ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK

**/SOLU**

**ANTYPE, TRANS**            Definisce il tipo di analisi richiesta

**TRNOPT, FULL, .....**        Sceglie il tipo di analisi diretto completo

---- comandi per la definizione dei diversi Load Steps -----



## COMANDI ANSYS/2

### ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK

Comandi per la definizione di un Load Step

**TIME**, *TIME*      *definisce il tempo finale del Load Step*

Comandi per la definizione dei carichi applicati con il valore che ciascuno assume alla fine del Load Step. NB: I carichi che non vengono ridefiniti nel LS corrente rimangono applicati con il valore che avevano alla fine del LS precedente.

**DELTIM**, *TIMESTEP*      *definisce il valore iniziale del passo di integrazione*

**TINTP**, *GAMMA*, *ALPHA*, *DELTA*,... *definisce i parametri che controllano l'algoritmo di Newmark*



## COMANDI ANSYS/3

### ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK

**AUTOTS**, *Key* attiva (ON) o disattiva (OFF) la scelta automatica dei passi di integrazione. La dimensione minima è data da DELTIM

**KBC**, *KEY* sceglie l'andamento del carico nel LoadStep

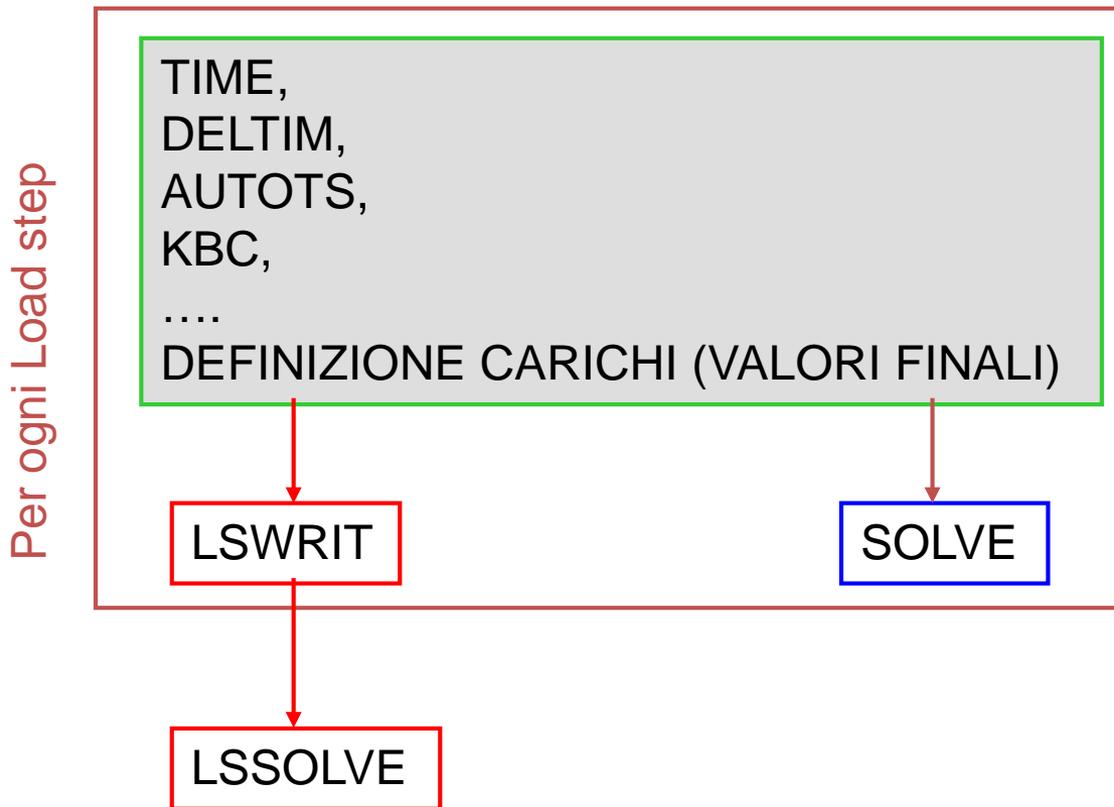
- 0 variabile linearmente nel Loadstep
- 1 a gradino (costante nel Loadstep)

**OUTRES**, *Item, Freq, Cname* Definisce il tipo di dati trasferiti nel file di output e la frequenza di scrittura.



## COMANDI ANSYS/4

### ANALISI DI TRANSITORIO – METODO DI NEWMARK





## COMANDI ANSYS/5 ANALISI DI TRANSITORIO – MSM

### Analisi modale preliminare

**/SOLU**

**ANTYPE,MODAL**

**MODOPT,QRDAMP,NMOD**

! Include lo smorzamento

**SOLVE**

**SAVE**

**FINISH**

**/SOLU**

**ANTYPE, TRANS**

Definisce il tipo di analisi richiesta

**TRNOPT, MSUP, .....**

Sceglie il tipo di analisi MSM

---- comandi per la definizione dei diversi Load Steps e per la loro soluzione (identici a quelli visti per il metodo di Newmark) -----



## COMANDI ANSYS/6 ANALISI DI TRANSITORIO – MSM

Passo di espansione della soluzione

**/SOLU**

**EXPASS,ON**

! Expansion pass

**NUMEXP,ALL**

! No. of solutions to expand; time range

**SOLVE**

**FINISH**



## ESEMPIO EF2 - ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI CIMINIERA SOGGETTA A COLPO DI VENTO

Si consideri una colonna tubolare in acciaio (vedi Fig.1), incastrata alla base ed avente le seguenti caratteristiche:

- Altezza 20 m
- Diametro 1 m
- Spessore 1 cm
- Smorzamento relativo 0.5%

La colonna viene assoggettata, in seguito ad un colpo di vento, ad una pressione uniformemente distribuita lungo l'intera altezza di valore massimo pari a 100 N/m.

Il colpo di vento ha una durata complessiva di 2 sec e si può assumere che nel corso di esso il carico aumenti linearmente da zero al valore massimo nel primo secondo e decresca poi linearmente dal valore massimo a zero, mantenendosi poi identicamente nullo (vedi Fig.1).

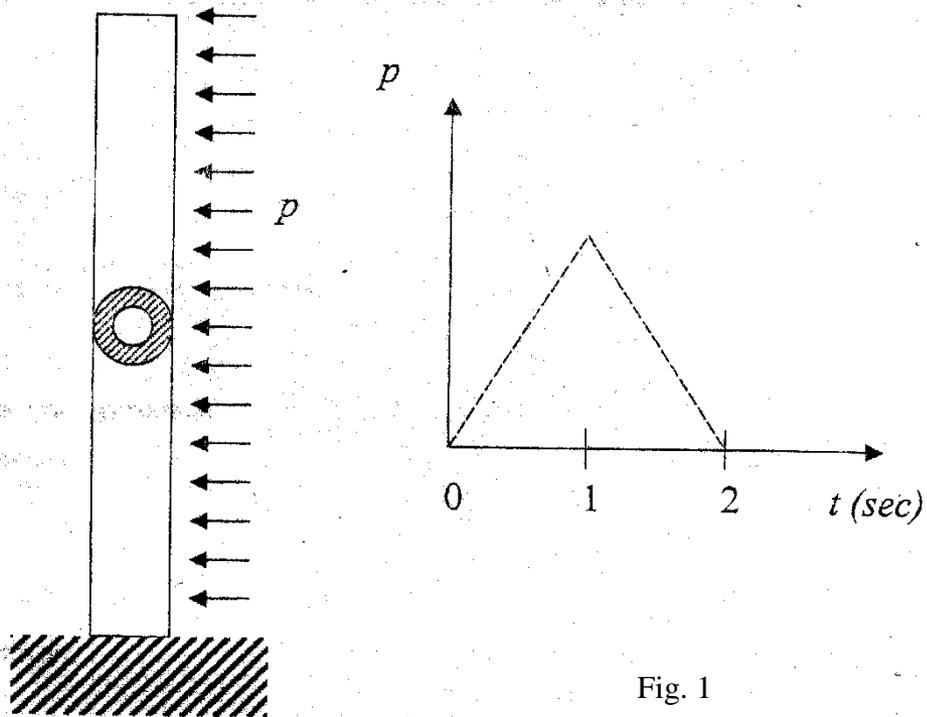


Fig. 1



## ESEMPIO EF2 - ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI CIMINIERA SOGGETTA A COLPO DI VENTO

Lo sviluppo in serie di Fourier dell'andamento temporale periodicizzato del carico fornisce la seguente relazione:

$$F_F(t) := \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cdot \left[ \sum_{m=1}^{n_A} \left[ \left[ \left( \frac{8}{\pi^2 \cdot m^2} \right) \cdot \cos \left( m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t \right) \right] \cdot \text{mod}(m, 2) \right] \right]$$

dove A= semiampiezza dell'oscillazione = 50 N/m nel caso considerato.

L'ampiezza delle singole armoniche che compaiono nella precedente relazione è mostrata nella Fig. 2.

Nel seguito sono riportati i file di ingresso utilizzabili per l'analisi di transitorio con il Metodo Completo (Newmark) e con il metodo di Sovrapposizione Modale.

Con riferimento alle oscillazioni che si sviluppano nella colonna nei primi 10 secondi, si chiede di:

1. analizzare l'effetto di variazioni del passo di integrazione a partire dal valore di 0.2 sec, anche in relazione all'andamento delle armoniche mostrato in Fig. 2
2. calcolare i modi propri del sistema
3. analizzare l'effetto di variazioni del tempo di applicazione del carico (cosa accade se il tempo di salita del carico è un multiplo intero di un periodo? perché?).

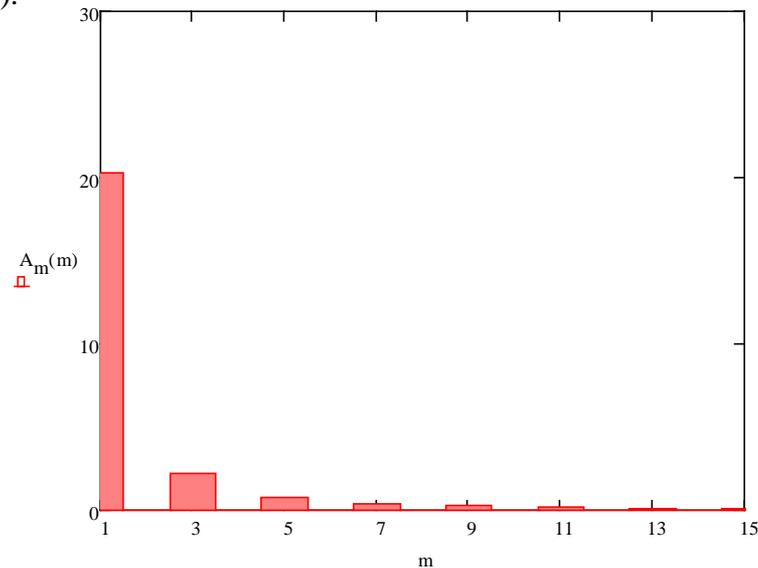


Fig. 2



FILE DI INGRESSO PER IL METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

```
C*****
C****
C**** ANALISI MODALE DI TRAVE PER TRANSITORIO DINAMICO
C**** COLONNA SOGGETTA A
C**** COLPO DI VENTO
C****
C**** METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE
C****-----
C**** CREAZIONE DEL MODELLO
C****
FINISH
/CLEAR
/CONFIG,NRES,10000 ! AUMENTA IL NUMERO DI RISULTATI SCRIVIBILI SUL FILE DI OUTPUT PER LS
/PREP7
/TITLE,ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI COLONNA SOGGETTA A COLPO DI VENTO
C***
C*** PARAMETRI
C***
NEL=50
H=20 ! Altezza colonna
D=1 ! Diametro tubo
S=0.01 ! Spessore tubo
MYOUNG=2.1E11
RO=7.8E3
NRLS=1000 ! numero totale di risultati per load-step da registrare
*ASK,TT,TEMPO APPLICAZIONE CARICO :,2

*ASK,DMP,SMORZAMENTO :,0.005

*ASK,TIMINC,PASSO TEMPORALE DI INTEGRAZIONE :,0.001

*ASK,NMOD,NUMERO DI MODI DA CONSIDERARE:,8
```



```
C***
C*** KEYPOINTS
C***
K,1
K,2,0,H
K,3,-H,H/2
C***
C*** LINEE
C***
L,1,2
C***
C*** DEFINIZIONE ELEMENTI
C***
ET,1,188,,3          ! FUNZIONE DI FORMA DI GRADO 3
SECTYPE,1,BEAM,CTUBE,TUBO
SECDATA,D/2-S,D/2
C***
C*** MESH
C***
LSEL,,LINE,,1
LATT,1,,1,,3,3,1
LSEL,ALL
LESIZE,ALL,,NEL
LMESH,ALL
C***
C*** PROPRIETA' MATERIALE
C***
MP,EX,1,MYOUNG
MP,DENS,1,RO          ! densità
MP,DAMP,1,DMP        ! smorzamento
C***
C*** VINCOLI
C***
DK,1,ALL,0
FINISH
```



```

C***
C*** SOLUZIONE
C***
/SOLU
ANTYPE,MODAL      ! ANALISI MODALE PRELIMINARE
MODOPT,QRDAMP,NMOD ! OPZIONE NECESSARIA PER INCLUDERE LO SMORZAMENTO
SOLVE
SAVE
FINISH

/SOLU
ANTYPE,TRANS      ! ANALISI DI TRANSITORIO
TRNOPT,MSUP       ! SOVRAPPOSIZIONE MODALE

AUTOTS,ON         ! Scelta automatica del passo di integrazione
DELTIM,TIMINC     ! Passo iniziale

C***
C*** LS 0 - VIENE SEMPRE COMPIUTA UN'ANALISI STATICA AL TEMPO t=0
C***
F,ALL,FX,0
TIME,0

SOLVE

C***
C*** LS 1 - PRIMO LOAD STEP DEL VERO TRANSITORIO
C***
NSEL,,NODE,,2,NEL ! I CARICHI DISTRIBUITI NON SON AMMESSI, PER CUI VENGONO TRASFORMATI IN CONCENTRATI
F,ALL,FX,100*H/NEL
NSEL,ALL
F,NEL+1,FX,50*H/NEL
KBC,0             ! Carico variabile linearmente nel LS
DELTIM,TIMINC
AUTOTS,ON
TIME,TT/2        ! Tempo finale del LS
LSWRIT           ! LSWRIT SEMBRA OBBLIGATORIO SE SI VUOLE USARE PIU' DI UN LOAD STEP
    
```



```
C***  
C*** LS 2  
C***  
FDELE,ALL,ALL  
NSEL,,NODE,,2,NEL  
F,ALL,FX,0  
NSEL,ALL  
F,NEL+1,FX,0  
KBC,0  
DELTIM,TIMINC  
TIME,TT  
LSWRIT
```

```
C***  
C*** LS 3  
C***  
TIME,TT*5  
LSWRIT  
LSSOLVE,1,3  
FINISH
```

```
C***  
C*** PASSO DI ESPANSIONE  
C***  
/SOLU  
EXPASS,ON      ! Expansion pass  
NUMEXP,ALL    ! No. of solutions to expand; time range  
SOLVE  
FINISH
```

```
C***  
C*** POST-PROCESSAMENTO  
C***  
/POST26  
NSOL,2,NEL+1,U,X,SPOST  
RFORCE,3,1,F,X,REAZIONE  
STORE,NEW  
PLVAR,2  
*ASK,IFL,RETURN PER CONTINUARE: ,0  
PLVAR,3
```



FILE DI INGRESSO PER IL METODO COMPLETO (NEWMARK)

```

C*****
C***
C*** ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI COLONNA SOGGETTA A
C*** COLPO DI VENTO
C***
C*** METODO COMPLETO
C***-----
C*** CREAZIONE DEL MODELLO
C***
FINISH
/CLEAR
/PREP7
/TITLE,ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI COLONNA SOGGETTA A COLPO DI VENTO
C***
C*** PARAMETRI
C***
NEL=50
H=20          ! Altezza colonna
D=1           ! Diametro tubo
S=0.01       ! Spessore tubo
MYOUNG=2.1E11
RO=7.8E3
NRLS=1000     ! numero totale di risultati per load-step da registrare
C***
*ASK,TT,TEMPO APPLICAZIONE CARICO :,2

*ASK,DMP,SMORZAMENTO :,0.005

*ASK,TIMINC,PASSO TEMPORALE DI INTEGRAZIONE :,0.001

-----CREAZIONE MODELLO COME DA FILE DI ESEMPIO PRECEDENTE
    
```



```
C***
C*** SOLUZIONE
C***
/SOLU,
ANTYPE,TRANS          ! Tipo di analisi
TRNOPT,FULL           ! Metodo di soluzione completo
C***
C*** LS 1
C***
SFBEAM,ALL,1,PRESS,100 ! Pressione uniforme applicata
KBC,0                 ! Carico variabile linearmente nel LS
TIME,TT/2             ! Tempo finale del LS
AUTOTS,ON             ! Scelta automatica del passo di integrazione
DELTIM,TIMINC         ! Passo iniziale
OUTRES,NSOL,-NRLS    ! Dati da memorizzare
OUTRES,RSOL,-NRLS
LSWRIT

C***
C*** LS 2
C***
SFBEAM,ALL,1,PRESS,0
KBC,0
TIME,TT
LSWRIT
C***
C*** LS 3
C***
TIME,TT*5
LSWRIT
LSSOLVE,1,3
FINISH
C***
C*** POST-PROCESSAMENTO
C***
/POST26
NSOL,2,NEL+1,U,X,SPOST
RFORCE,3,1,F,X,REAZIONE
STORE,NEW
PLVAR,2
```



## ESERCIZIO FEM3 - ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI PALO DI SOSTEGNO PER LINEA ELETTRICA SOGGETTO ALLA ROTTURA PERMANENTE DI UN CONDUTTORE

Si consideri un palo tubolare in acciaio (vedi Fig.1 ), incastrato alla base ed avente le seguenti caratteristiche:

- Altezza 20 m
- Diametro 1 m
- Spessore 1 cm
- Smorzamento relativo 0.5%

In seguito alla accidentale rottura di uno dei due rami del cavo, la colonna viene assoggettata al tiro non equilibrato del ramo contiguo, pari a 15 kN. Si può assumere che il tempo di azzeramento del tiro stesso sia trascurabile, dando luogo all'applicazione di un gradino di carico (vedi Fig. 2).

Nel seguito è riportato il file di ingresso parzialmente compilato, basato su elementi trave nello spazio, utilizzabile per l'analisi di transitorio con il metodo di Sovrapposizione Modale. Si faccia uso del comando ANTIME per ottenere una animazione della deformata in funzione del tempo.

Con riferimento alle oscillazioni che si sviluppano nella colonna nei primi 20 secondi, si chiede di:

1. analizzare l'effetto di variazioni del numero di modi propri considerati, facendo uso di un passo di integrazione di 0.001 s
2. confrontare i risultati ottenuti con quelli dell'esercitazione condotta sulla stessa struttura soggetta ad un impulso rettangolare.
3. confrontare la pulsazione dell'ultimo modo proprio necessario per la corretta ricostruzione della risposta, con la relazione (1), individuando l'armonica del gradino di ordine più alto contenuta nella banda passante del modello.
4. stimare, in base alla massima armonica della banda passante del modello, un ragionevole valore del passo di integrazione e verificarne l'efficacia.



## ESERCIZIO FEM3 - ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI PALO DI SOSTEGNO PER LINEA ELETTRICA SOGGETTO ALLA ROTTURA PERMANENTE DI UN CONDUTTORE

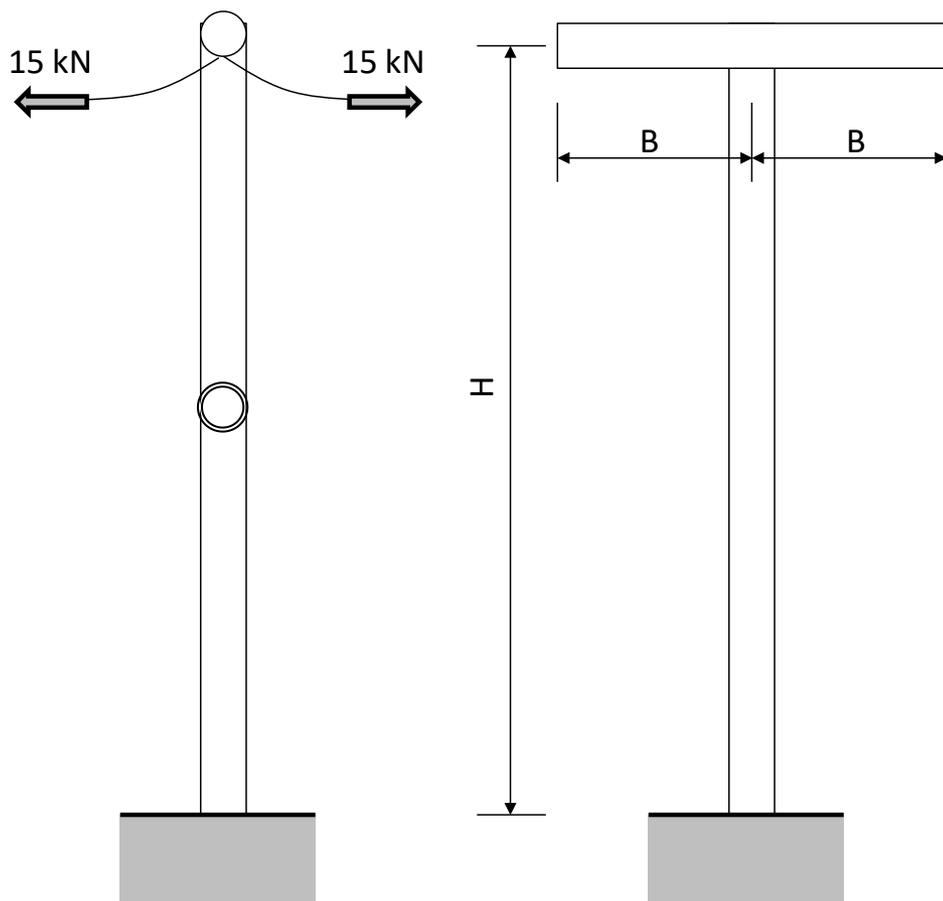


Fig. 1

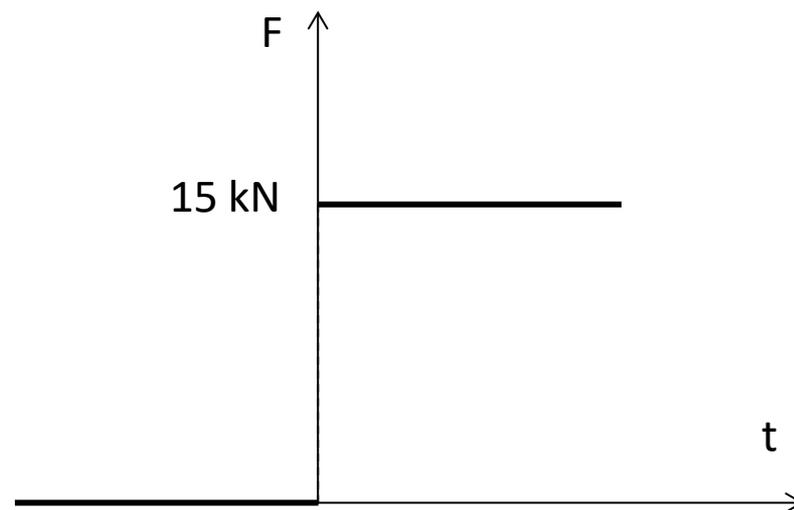


Fig. 2

FILE DI INGRESSO PER IL METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

```

C*****
C***
C*** CL MAGISTRALE IN ING. MECCANICA
C***
C*** CORSO DI COSTRUZIONE DI MACCHINE
C***
C*** ANALISI DI TRANSITORIO DI TRAVE INCASTRATA ALLA BASE
C*** SOGGETTA ALLA ROTTURA DI UN CAVO ELETTRICO APPLICATO
C*** ALL'ESTREMITA' SUPERIORE
C***
C***
C*** METODO SOVRAPPOSIZIONE MODALE
C***
C***
C***-----
C***
FINISH
/CLEAR
/CONFIG,NRES,10000      ! AUMENTA IL NUMERO DI RISULTATI SCRIVIBILI SUL FILE DI OUTPUT PER LS
/PREP7
/TITLE,ANALISI DI TRANSITORIO DINAMICO DI palo di sostegno soggetto alla rottura di cavo elettrico
C***
C*** PARAMETRI
C***
NEL=50
NELB=5
H=8          ! Altezza colonna
D=1          ! Diametro tubo
S=0.01      ! Spessore tubo
B=4          ! BRACCIO
FC=450000   ! Tiro del cavo [N]
MYOUNG=2.1E11
RO=7.85E3
NRLS=1000   ! numero totale di risultati per load-step da registrare
*ASK,DMP,SMORZAMENTO :,0.005
*ASK,TIMINC,PASSO TEMPORALE DI INTEGRAZIONE :,0.001
*ASK,NMOD,NUMERO DI MODI DA CONSIDERARE:,8
    
```





```

C***
C*** KEYPOINTS
C***
K,1
K,2,0,H
K,3,0,H,B
K,4,0,H,-B

C***
C*** LINEE
C***
L,1,2
L,2,3
L,2,4

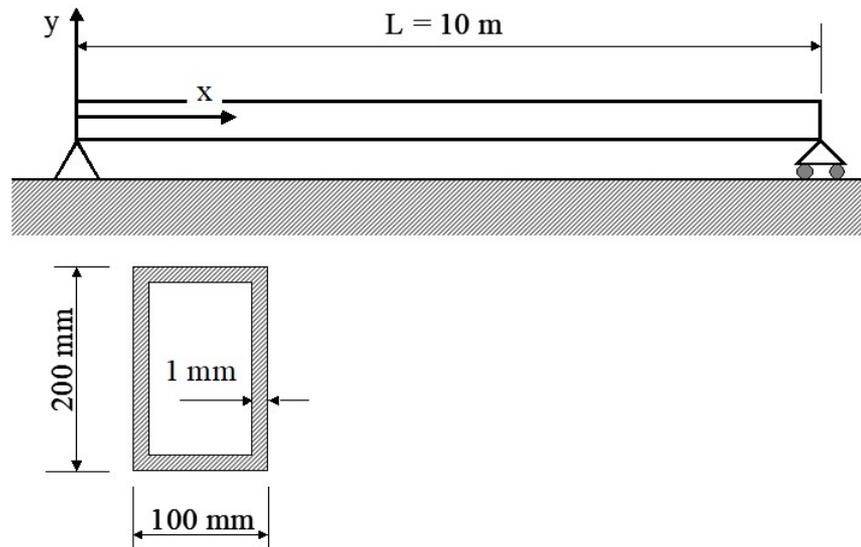
C***
C*** DEFINIZIONE ELEMENTI
C***
ET,1,188,,3 ! FUNZIONE DI FORMA DI GRADO 3
SECTYPE,1,BEAM,CTUBE,TUBO
SECDATA,D/2-S,D/2

C***
C*** MESH
C***
LSEL,,LINE,,1
LATT,1,,1,,3,3,1
LSEL,ALL
LESIZE,ALL,,NEL
LMESH,ALL
NBRAC=NODE(0,H,B)
C***
C*** PROPRIETA' MATERIALE
C***
MP,EX,1,MYOUNG
MP,DENS,1,RO          ! densità
MP,DAMP,1,DMP        ! smorzamento
C***
C*** VINCOLI
C***
DK,1,ALL,0
FINISH
    
```



```
C***  
C*** SOLUZIONE  
C***  
/SOLU  
ANTYPE,MODAL      ! ANALISI MODALE PRELIMINARE  
MODOPT,QRDAMP,NMOD ! OPZIONE NECESSARIA PER INCLUDERE LO SMORZAMENTO  
SOLVE  
SAVE  
FINISH  
  
/SOLU  
  
===== COMPLETARE =====
```

## ESERCIZIO FEM4 - ANALISI DI TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA CON FORZANTE



Sono date le seguenti caratteristiche della trave:  
Smorzamento relativo=0.005

### Esercizio 1

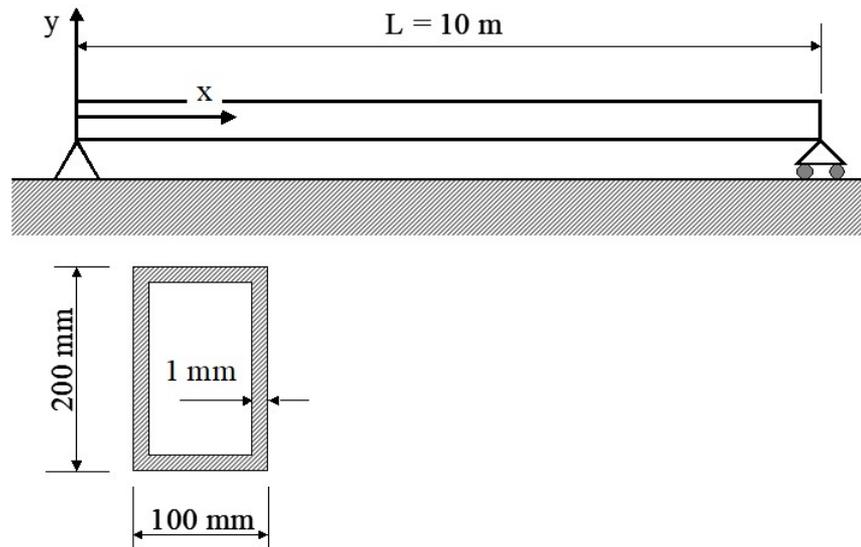
Si analizzi la risposta nel tempo della trave in presenza di una forzante con andamento nel tempo ad onda sinusoidale di 100 N di semiampiezza applicata in mezzzeria ed agente in direzione “Z”, in risonanza con il primo modo proprio flessionale della trave sul piano “Z-X” (con i dati forniti,  $f_1=3,5557$  Hz).

Si utilizzino valori dei parametri di Newmark (comando TINTP) corrispondenti a condizioni di **stabilità incondizionata** (Es.:  $a=0.2525$  e  $d=0.505$ , valori di default).

Si valuti l’andamento delle oscillazioni del sistema per i primi 10 cicli, al variare del passo temporale di integrazione (comando DELTIM) a partire da un valore di circa 0.005 s, fino a 0.035 s (valore corrispondente ad uno step di carico).

Si analizzi il comportamento del sistema anche al variare dello smorzamento relativo (provare ad esempio 0 e 0.005)

## ESERCIZIO FEM4 - ANALISI DI TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA CON FORZANTE



### Esercizio 2

Si analizzi la risposta nel tempo della trave in presenza di una forzante con andamento nel tempo ad onda sinusoidale di  $100 \text{ N}$  di semiampiezza applicata in mezzzeria ed agente in direzione “Z”, avente una frequenza di  $0.25 \text{ Hz}$ .

Si utilizzino valori dei parametri di Newmark (comando TINTP) corrispondenti a condizioni di **stabilità condizionata** (Es.:  $a=0.25$  e  $d=0.51$ ).

Si valuti l’andamento delle oscillazioni del sistema per i primi 10 cicli, al variare del passo temporale di integrazione (comando DELTIM) a partire da un valore massimo di circa  $0.08 \text{ s}$ .

In entrambi gli esercizi, si consiglia di disattivare l’opzione di ottimizzazione automatica del passo (AUTOTS,OFF) che tende a nascondere l’effetto della scelta dell’utente.