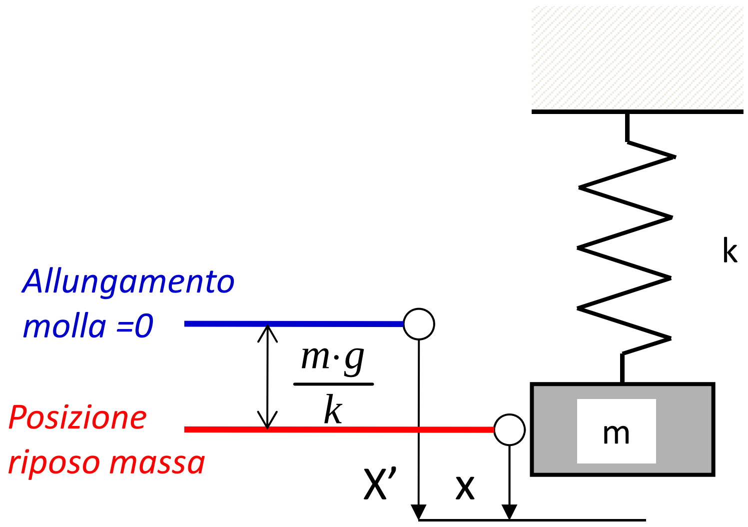
OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO



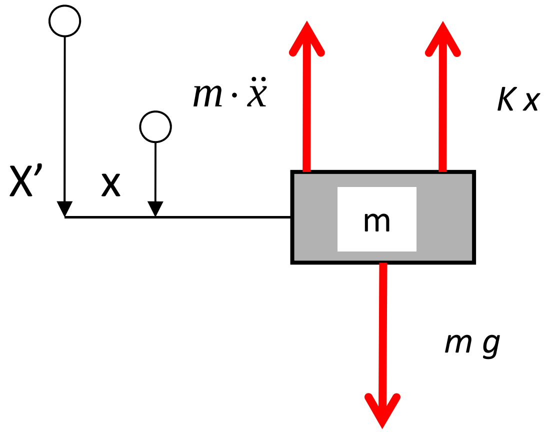
$$X' = x + \frac{mg}{k}$$

$$\ddot{X}' = \ddot{x}$$

$$-m\ddot{X}' - kX' + mg = 0$$

$$-m\ddot{x} - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) + mg = 0$$

Analisi delle forze agenti



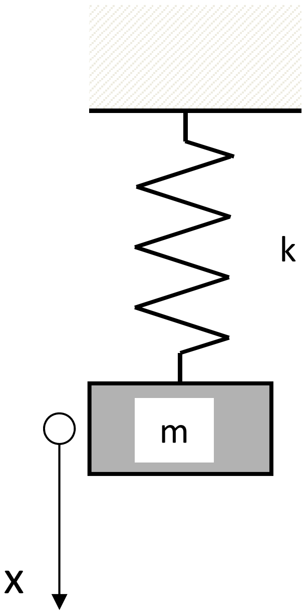
$$-m\ddot{x} - kx - mg + mg = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Equazione del moto non influenzata dalla forza peso

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

$$z^2 + \omega_n^2 = 0 \qquad z_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

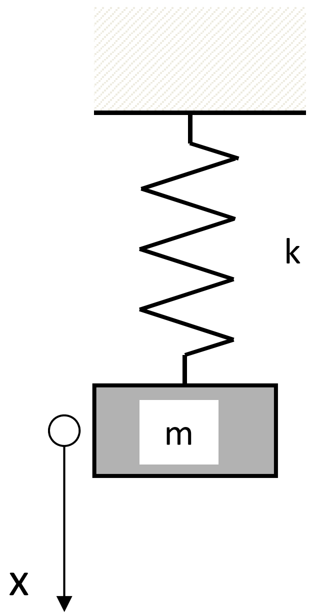
$$x(t) = C_3 \cos(\omega_n t) + C_4 \sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = C_5 \cos(\omega_n t + \varphi_6)$$

$$x(t) = C_7 \cos(\omega_n t + \varphi_8)$$

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Energia totale

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Soluzione trovata

$$x(t) = A \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t)$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \left(A\omega_n \cos(\omega_n t)\right)^2 + \frac{1}{2} k \cdot \left(A \sin(\omega_n t)\right)^2 =$$

$$= \frac{A^2}{2}\left(m\,\omega_n^2 \cos^2(\omega_n t) + k \sin^2(\omega_n t)\right)$$

$$E = \text{cost} \;\rightarrow\; m\omega_n^2 = k$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

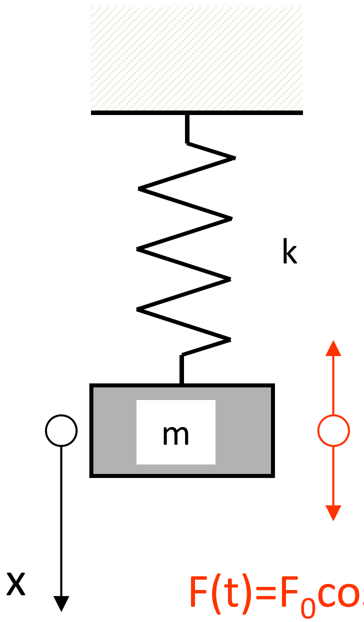
$$E = \frac{A^2}{2}\left(m\frac{k}{m}\cos^2(\omega_n t) + k \sin^2(\omega_n t)\right) =$$

$$= \frac{A^2 k}{2}\left(\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)\right) = \frac{A^2 k}{2} = \text{cost}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} = F_0 \cos(\Omega t) \qquad (\Omega \neq \omega_n)$$



F(t)=F_0cos(Ωt)

$$x(t) = \boxed{C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}} + \boxed{X e^{i\Omega t}}$$

Integrale generale omogenea associata

Integrale particolare non omogenea

Verifica validità integrale particolare non omogenea:

$$x(t) = X e^{i\Omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

$$-m\Omega^2 X e^{i\Omega t} + kX e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\Omega t}$$

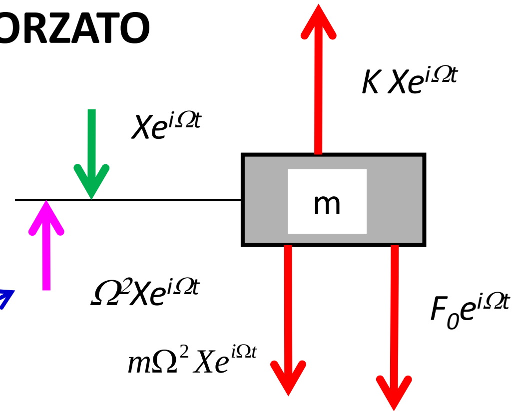
$$X = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \dfrac{m\Omega^2}{k}} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

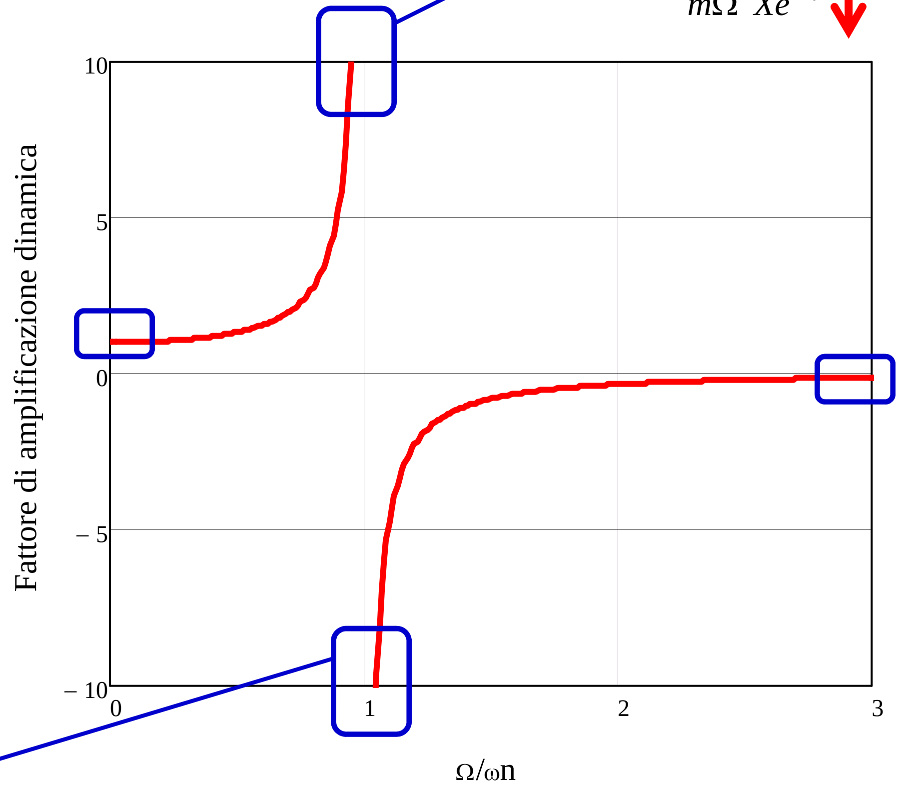
OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

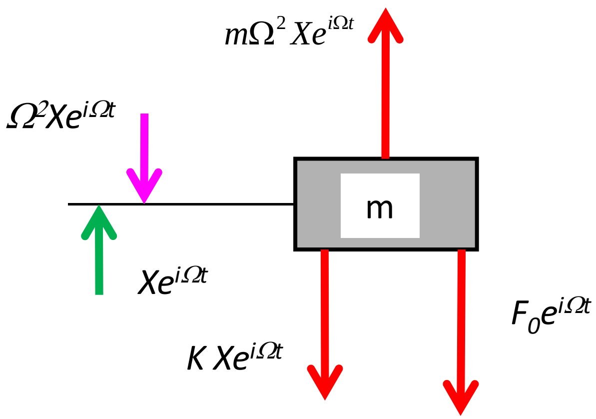
$$X = \boxed{\frac{F_0}{k}}\ \boxed{\frac{1}{1-\left(\dfrac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Freccia statica

Fattore di amplificazione dinamica



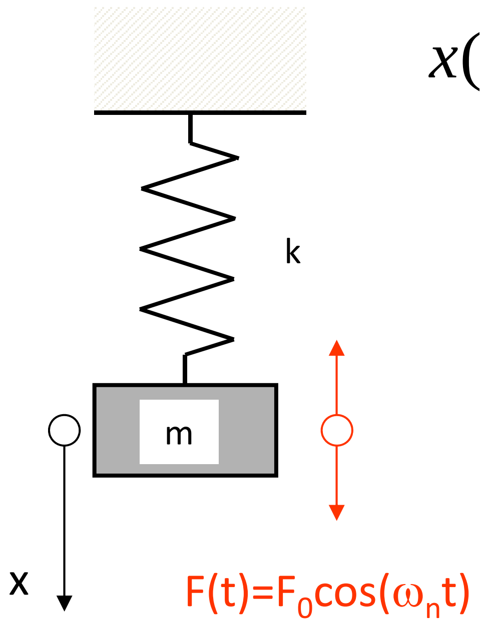




OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_n t} \qquad \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$



$$x(t) = \boxed{Xte^{i\omega_n t}}$$

Integrale particolare
non omogenea

$$\dot{x}(t) = Xe^{i\omega_n t}\left(1 + i\omega_n t\right)$$

$$\ddot{x}(t) = \omega_n Xe^{i\omega_n t}\left(2i - \omega_n t\right)$$

$$\omega_n Xe^{i\omega_n t}\left(2i - \omega_n t\right) + \omega_n^2 Xte^{i\omega_n t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$

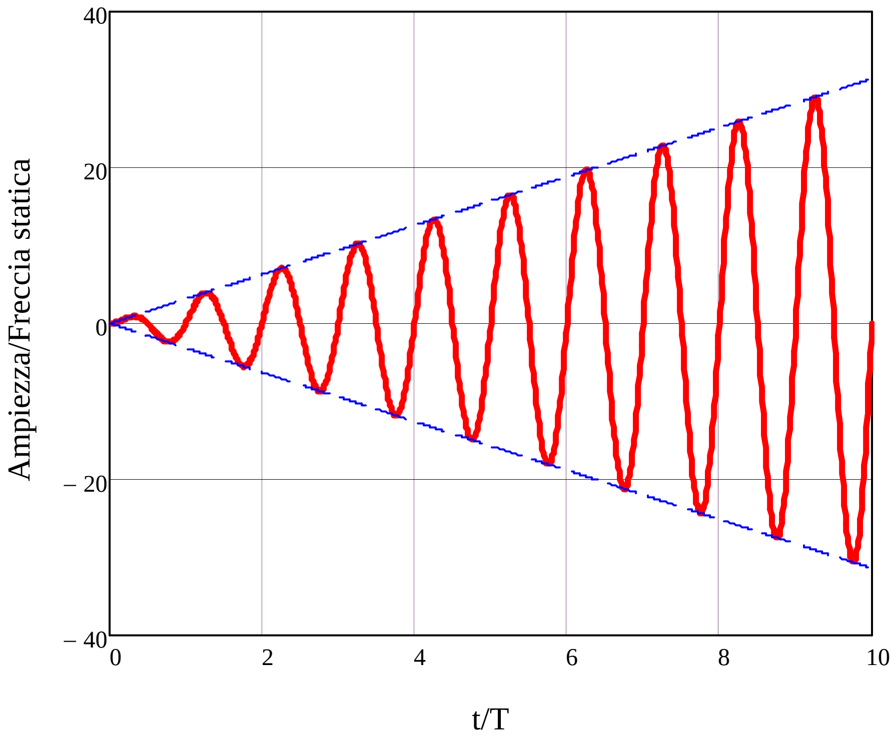
$$2i\omega_n X - \omega_n^2 Xt + \omega_n^2 Xt = \frac{F_0}{m}$$

$$X = \frac{F_0}{m}\frac{1}{2i\omega_n} = \frac{F_0}{k}\frac{\omega_n}{2i}$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\frac{\omega_n}{2i} t e^{i\omega_n t} = -i\pi \frac{F_0}{k}\frac{t}{T} e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$

Dato che, in corrispondenza di ω_n, il sistema è in grado di oscillare senza cedere energia all’esterno, tutto il lavoro fatto dalla forza applicata si tasforma in aumento del suo contenuto enegetico.



OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

$$\boxed{\ddot{x}} + \boxed{\omega_n^2 x} = \boxed{\frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}}$$

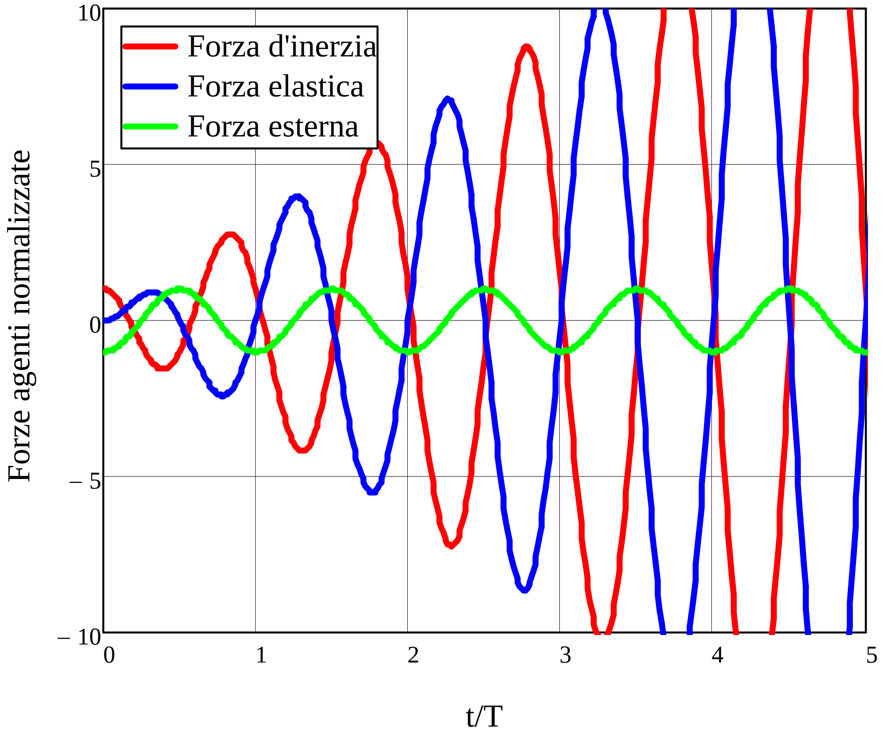
$$x(t) = -i\,\frac{F_0}{2k}\,\omega_n t e^{i\frac{2\pi}{T}t}$$

Forza d'inerzia

Forza elastica

Forza esterna

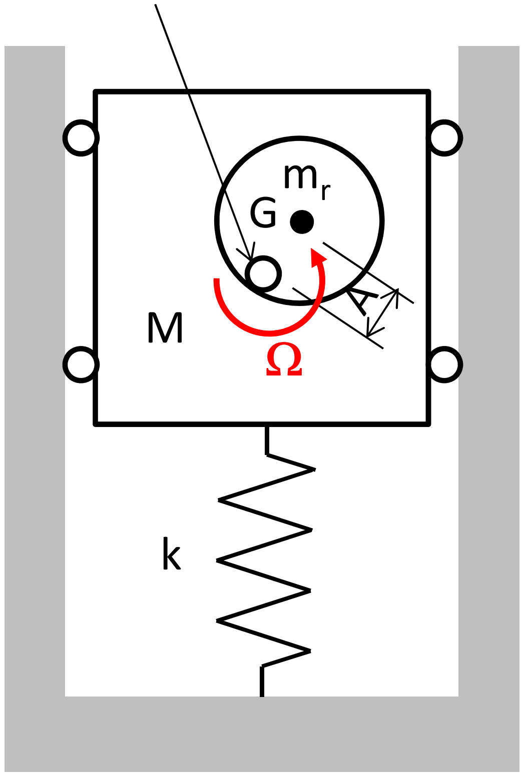
$$\boxed{\frac{F_0}{k}\,\omega_n^2 e^{i\omega_n t}\left(1 + i\,\frac{\omega_n}{2}t\right)} - \boxed{i\,\frac{F_0}{2k}\,\omega_n^3 t e^{i\omega_n t}} = \boxed{\frac{F_0}{k}\,\omega_n^2 e^{i\omega_n t}}$$



OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Forzante armonica di ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione

Asse di rotazione



$$M\ddot{x} + kx = m_r A\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{m_r A}{M}\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

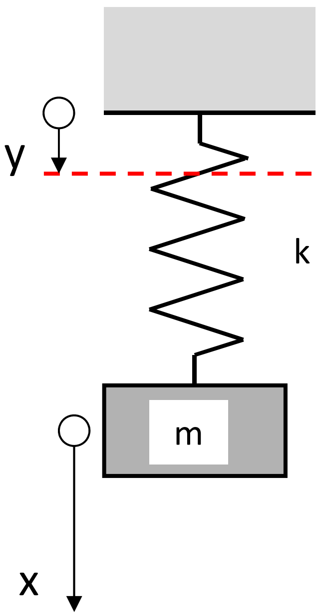
$$x(t) = Xe^{i\Omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\Omega X e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 X e^{i\Omega t} + \omega_n^2 X e^{i\Omega t} = \frac{m_r A}{M}\Omega^2 e^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{\frac{m_r A}{M}\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{\frac{m_r A}{M}}{\frac{\omega_n^2}{\Omega^2} - 1}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Eccitazione per moto del supporto



$$m\ddot{x} + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = ky = kYe^{i\Omega t} \qquad \ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{k}{m} Ye^{i\Omega t} = \omega_n^2 Ye^{i\Omega t}$$

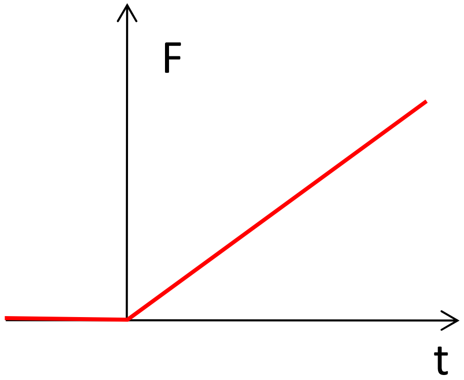
$$x(t) = Xe^{i\Omega t} \qquad \dot{x}(t) = i\Omega Xe^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 Xe^{i\Omega t}$$

$$-\Omega^2 Xe^{i\Omega t} + \omega_n^2 Xe^{i\Omega t} = \omega_n^2 Ye^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{\omega_n^2 Y}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \frac{Y}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con forza variabile "a rampa"



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = \boxed{A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t}} + \boxed{\frac{B}{k} t}$$

Integrale generale omogenea associata

Integrale particolare non omogenea

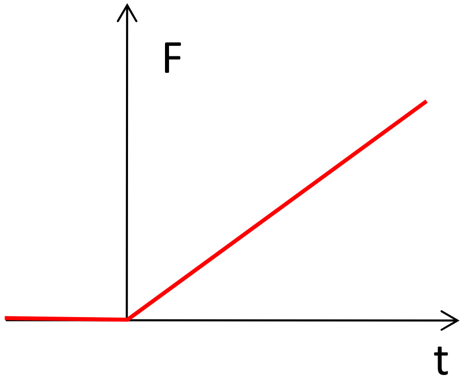
$$x(t) = Xt \qquad \dot{x}(t) = X$$

$$\ddot{x}(t) = 0$$

$$kXt = Bt \quad \Rightarrow \quad X = \frac{B}{k}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile "a rampa"



$$m\ddot{x} + kx = Bt$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t} + \frac{B}{k}t$$

Condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A_1 + B_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = i\omega_n A_1 - i\omega_n B_1 + \dfrac{B}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = i\dfrac{B}{2k\omega_n} \\ B_1 = -i\dfrac{B}{2k\omega_n} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{B}{k}\left(i\frac{e^{i\omega_n t}}{2\omega_n} - i\frac{e^{-i\omega_n t}}{2\omega_n} + t \right) = \frac{B}{k}\left(\frac{i}{2\omega_n} 2iSin(\omega_n t) + t \right) = \frac{B}{k}\left(t - \frac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right)$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile "a rampa"

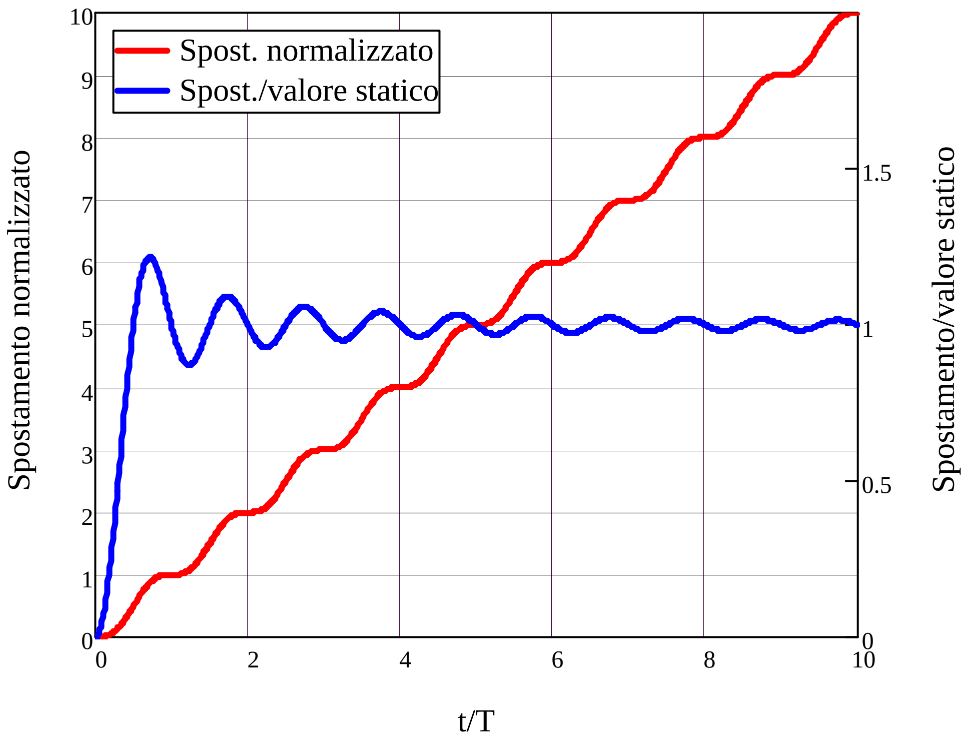
$$x(t) = \frac{B}{k}\left(t - \frac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right) = \frac{BT}{k}\left(\frac{t}{T} - \frac{Sin(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi}\right)$$

Spostamento normalizzato

$$\frac{x(t)}{\frac{BT}{k}}$$

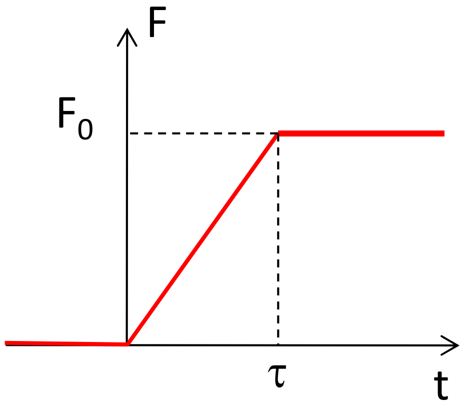
Spostamento/valore statico

$$\frac{x(t)}{\frac{Bt}{k}} = 1 - \frac{T}{t}\frac{Sin(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi}$$



OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



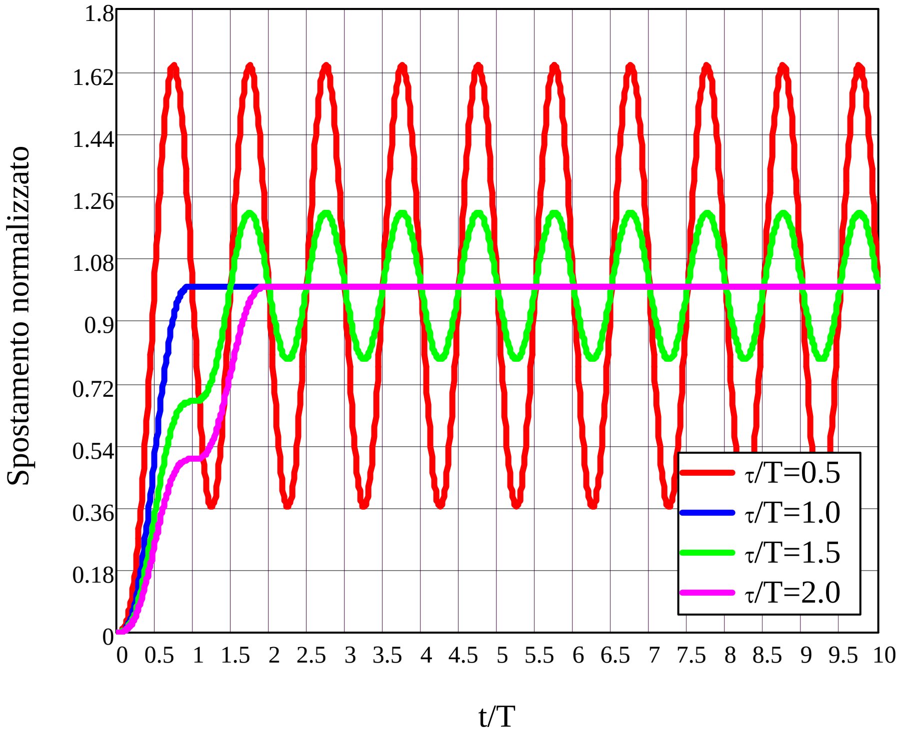
$$\begin{cases} F = \dfrac{F_0}{\tau} t = Bt & 0 \le t \le \tau \\ F = Bt - B(t-\tau) = F_0 & \tau < t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le t \le \tau & x(t) = \dfrac{B}{k}\left(t - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right) \\ \tau < t & x(t) = \dfrac{B}{k}\left(t - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n}\right) - \dfrac{B}{k}\left((t-\tau) - \dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{\omega_n}\right) = \\ & = \dfrac{B}{k}\left(\tau - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\omega_n} + \dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{\omega_n}\right) \end{cases}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale

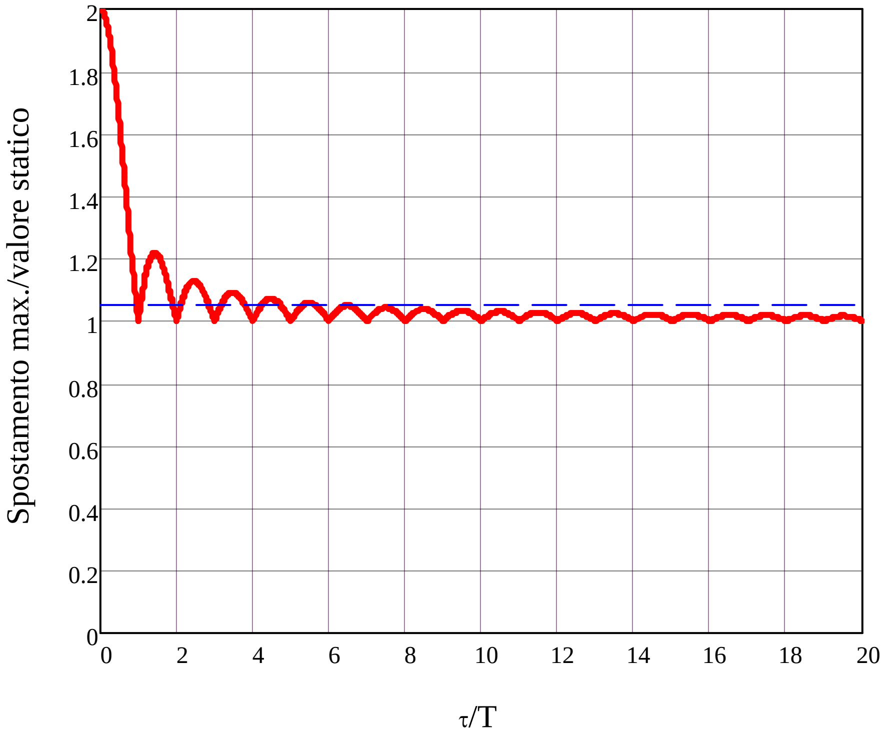
$$
\begin{cases}
0 \le t \le \tau & \dfrac{x(t)k}{F_0} = \dfrac{T}{\tau} \cdot \left(\dfrac{t}{T} - \cdot \dfrac{Sin(2\pi \frac{t}{T})}{2\pi} \right) \\[2ex]
\tau < t & \dfrac{x(t)k}{F_0} = 1 - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{\tau \omega_n} + \dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{\tau \omega_n} = \\[2ex]
 & = 1 + \dfrac{T}{\tau} \left(\dfrac{Sin(\omega_n (t-\tau))}{2\pi} - \dfrac{Sin(\omega_n t)}{2\pi} \right)
\end{cases}
$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



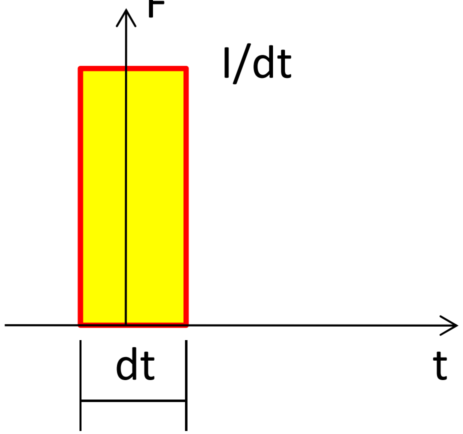
OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con forza variabile a gradino con rampa iniziale



OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO

Sollecitazione con impulso I al tempo t=0



$$F = \lim_{dt \to 0} \frac{I}{dt}$$

$$I = mv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{m}$$

Condizioni iniziali

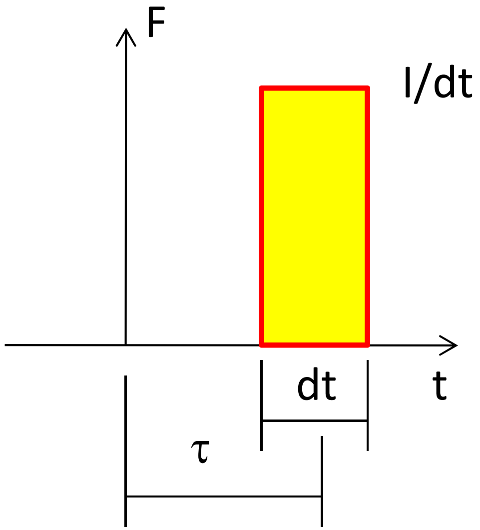
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases}$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + B_1 e^{-i\omega_n t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A_1 + B_1 = 0 \\ \dot{x}(0) = i\omega_n A_1 - i\omega_n B_1 = \dfrac{I}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -i\dfrac{I}{2m\omega_n} \\ B_1 = i\dfrac{I}{2m\omega_n} \end{cases}$$

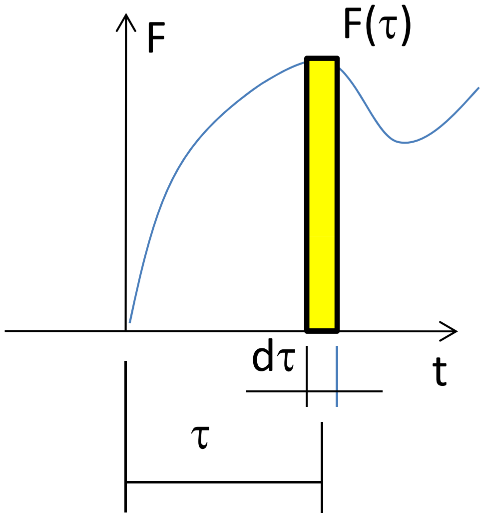
$$x(t) = \frac{I}{2\omega_n m}\left(ie^{i\omega_n t} - ie^{-i\omega_n t}\right) = \frac{I}{2\omega_n m}\left(i2iSin(\omega_n t)\right) = \frac{ISin(\omega_n t)}{2\omega_n m}$$

OSCILLAZIONE SISTEMA 1 G.D.L. NON SMORZATO
Sollecitazione con impulso I al tempo t=τ



$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{ISin(\omega_n(t-\tau))}{2\omega_n m} & t \geq \tau \\ x(t) = 0 & t < \tau \end{cases}$$

La forza di andamento generico può essere vista come una successione di impulsi di valore F(τ) dτ.

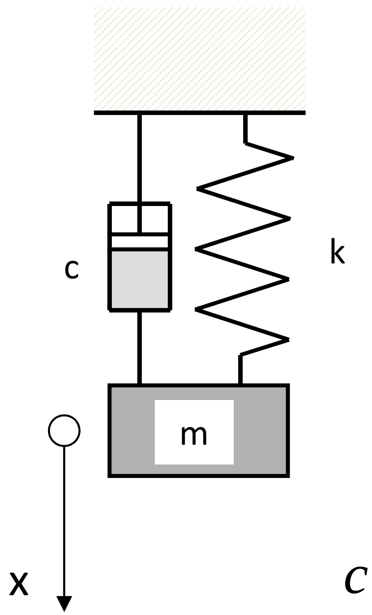


$$x(t) = \frac{1}{2\omega_n m}\int_0^t F(\tau) Sin(\omega_n(t-\tau)) \cdot d\tau$$

Integrale di convoluzione o di Duhamel

OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = A_1 \cdot e^{a_1 t} + A_2 \cdot e^{a_2 t}$$

$$\Downarrow$$

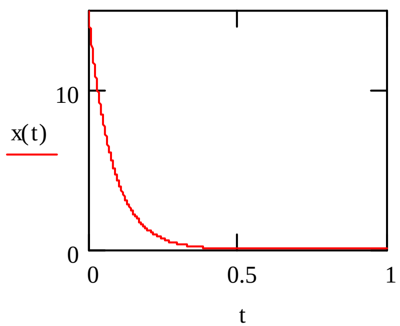
$$a^2 + \frac{c}{m}a + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Delta = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad c = c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

$$c > c_{cr} \quad \rightarrow \quad \Delta > 0$$

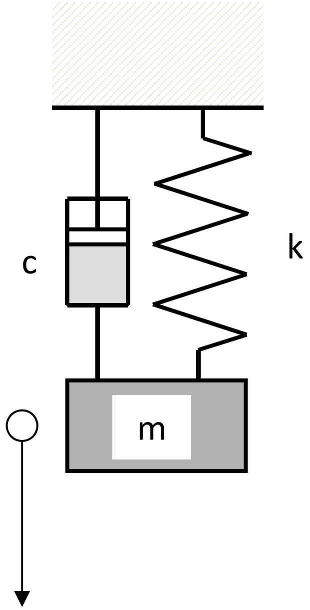
$$a_1,\ a_2 \quad reali < 0$$

$$a_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}$$



OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l. $c < c_{cr} \quad \rightarrow \quad \Delta < 0$



$$a_1,\ a_2 \quad complesse \quad coniugate = -\frac{c}{2m} \pm i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

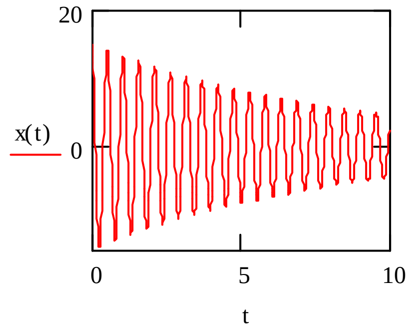
$$\frac{c}{2m} = \frac{c\sqrt{k}}{2m\sqrt{k}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{c_{cr}}\omega_n = \xi\omega_n$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \frac{c^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{c^2}{4mk}\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{cr}^2}} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \omega_s$$

$$a_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_s$$

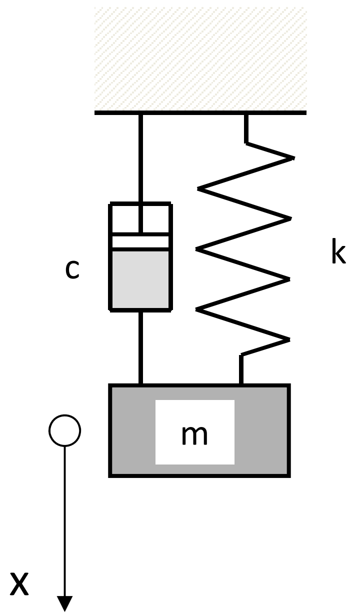
$$x(t) = A_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_s)t} + B_1 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_s)t} = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 e^{i\omega_s t} + B_1 e^{-i\omega_s t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t)\right)$$



OSCILLAZIONE LIBERA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$\xi = \frac{c}{c_{cr}}$$

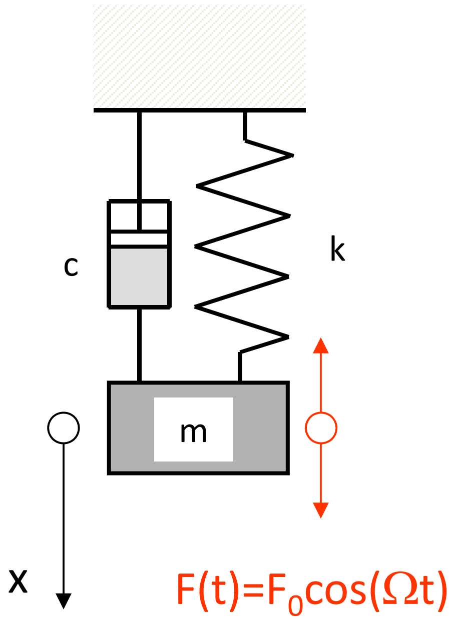
Per la maggior parte dei sistemi meccanici è piuttosto piccolo (< 0.1)

$$\left.\begin{aligned} \omega_s &= \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ \xi &= 0.1 \end{aligned}\right\rangle \omega_s = \omega_n \sqrt{1-0.1^2} = 0.99\omega_n$$

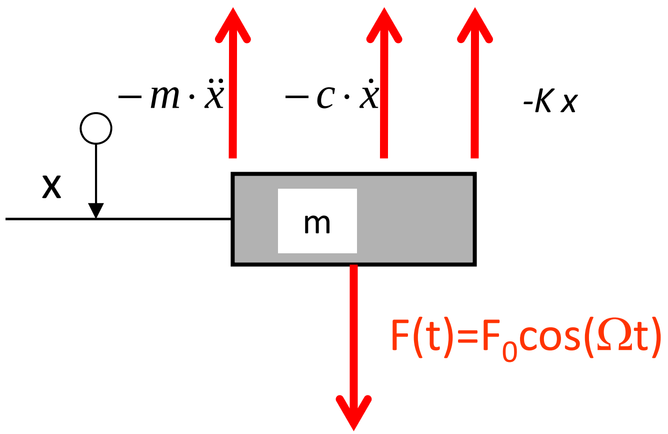
Per questo è solitamente possibile trascurare l'effetto dello smorzamento **sul valore dei modi propri**

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



Analisi delle forze agenti



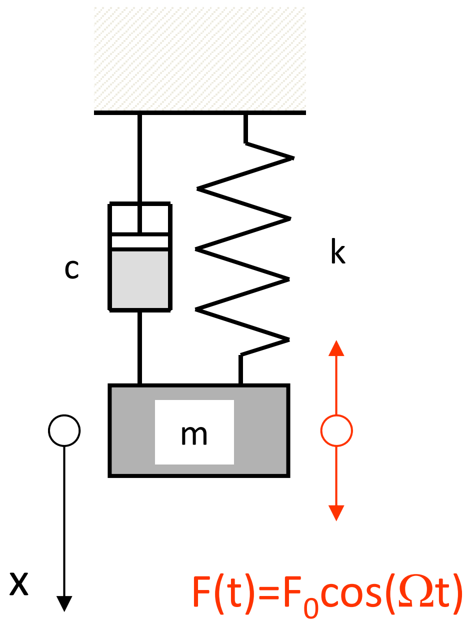
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

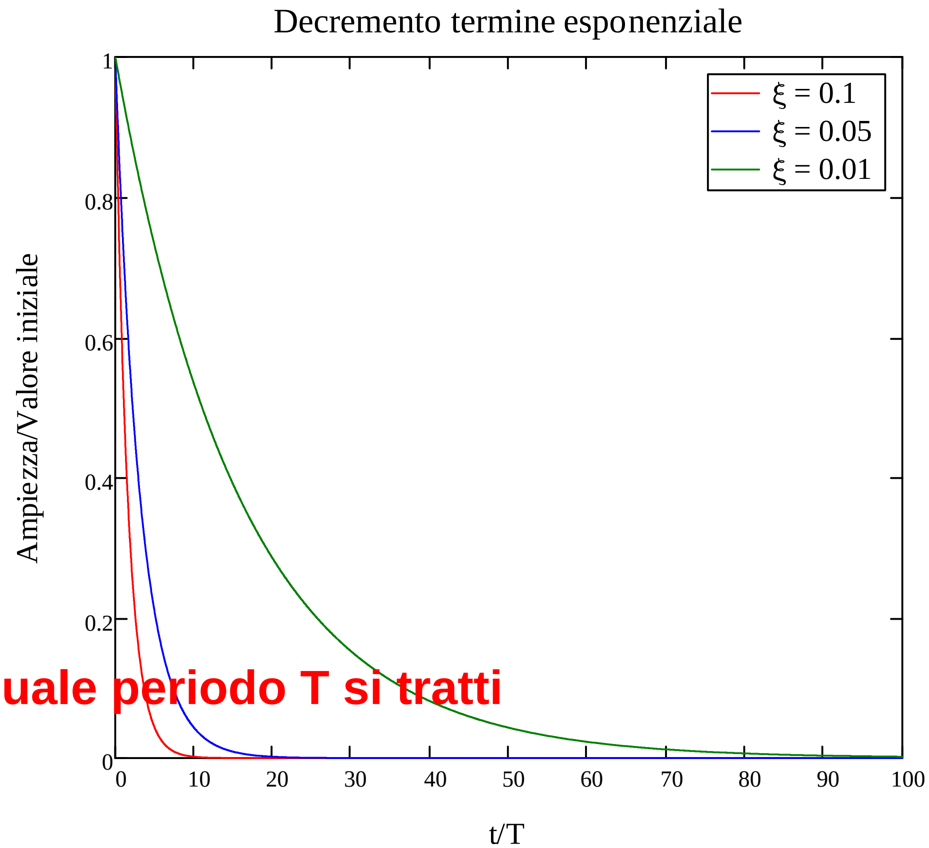
OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = \boxed{X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)} + \boxed{e^{-\xi \omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)}$$

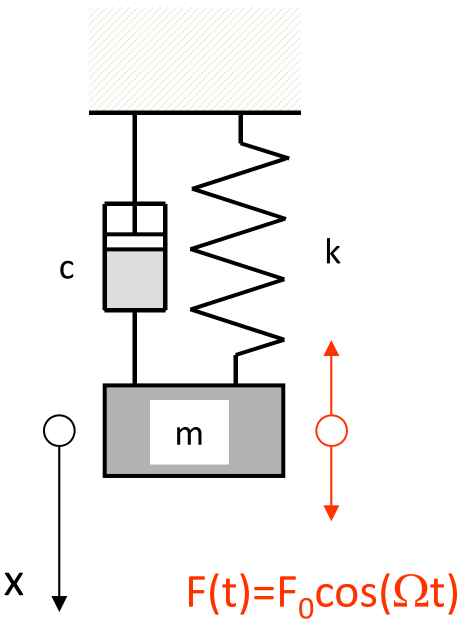




Nel grafico chiarire di quale periodo T si tratti

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = \boxed{X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)} + \boxed{e^{-\xi\omega_n t} A \sin(\omega_s t + \phi)}$$

$$x(t) \cong X \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \qquad per\ t > t_{trans}$$

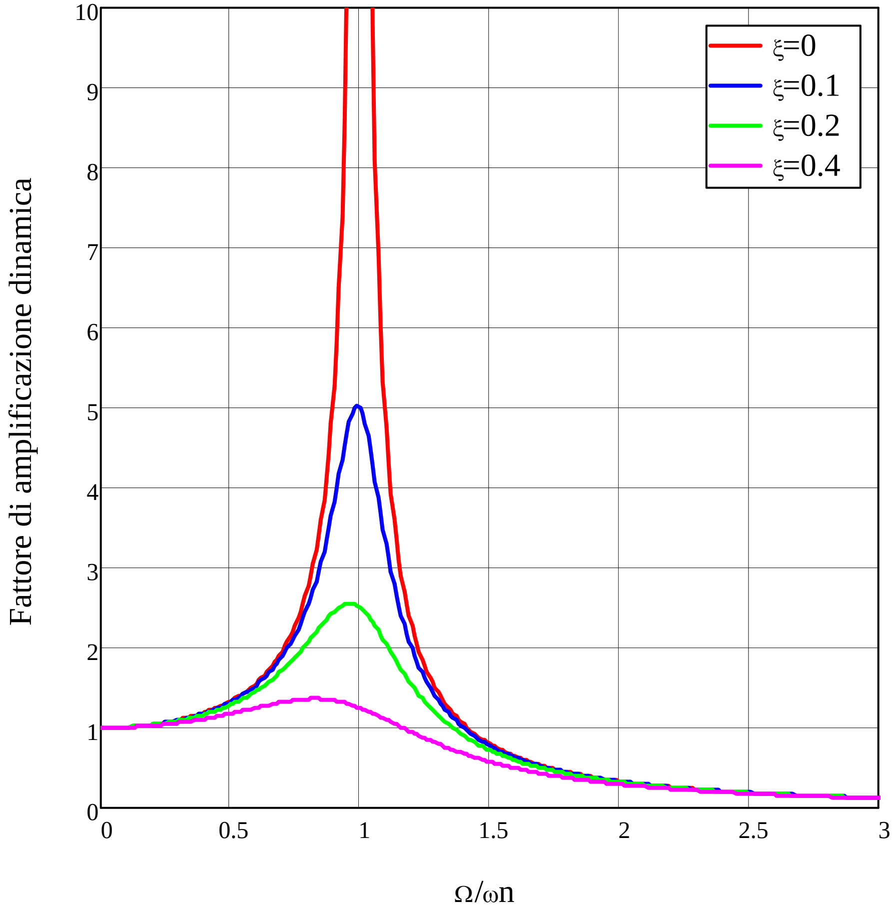
$$X = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

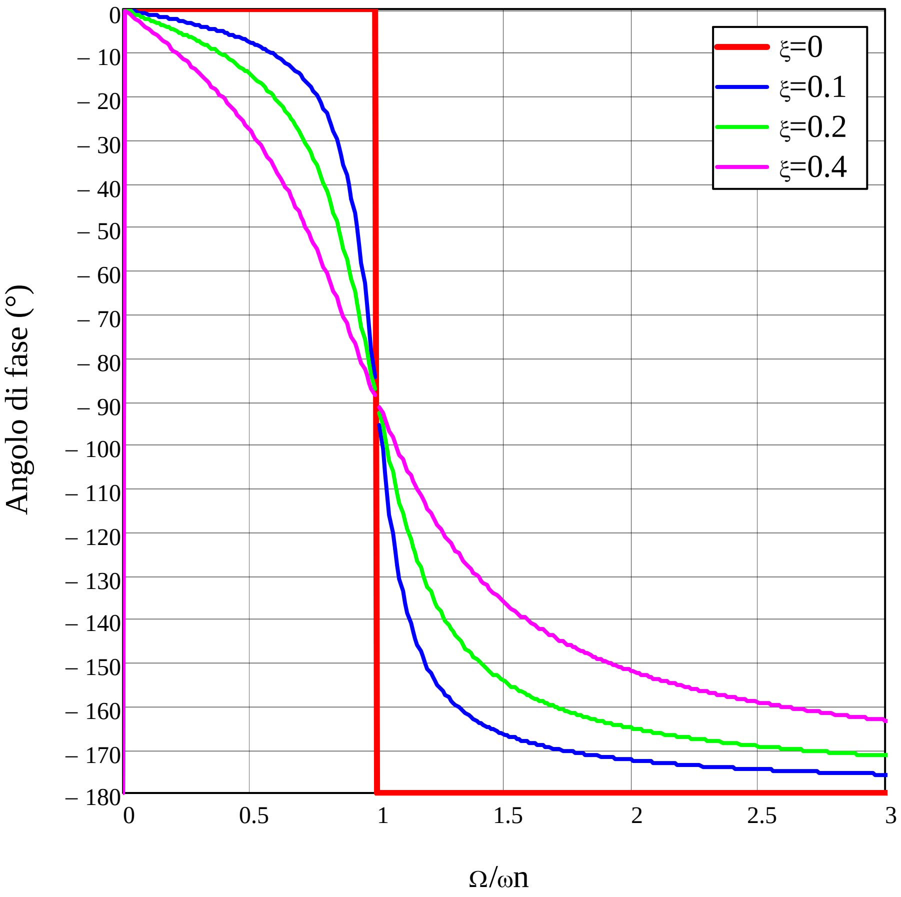
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_s = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

$$X = \frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$





$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\xi \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

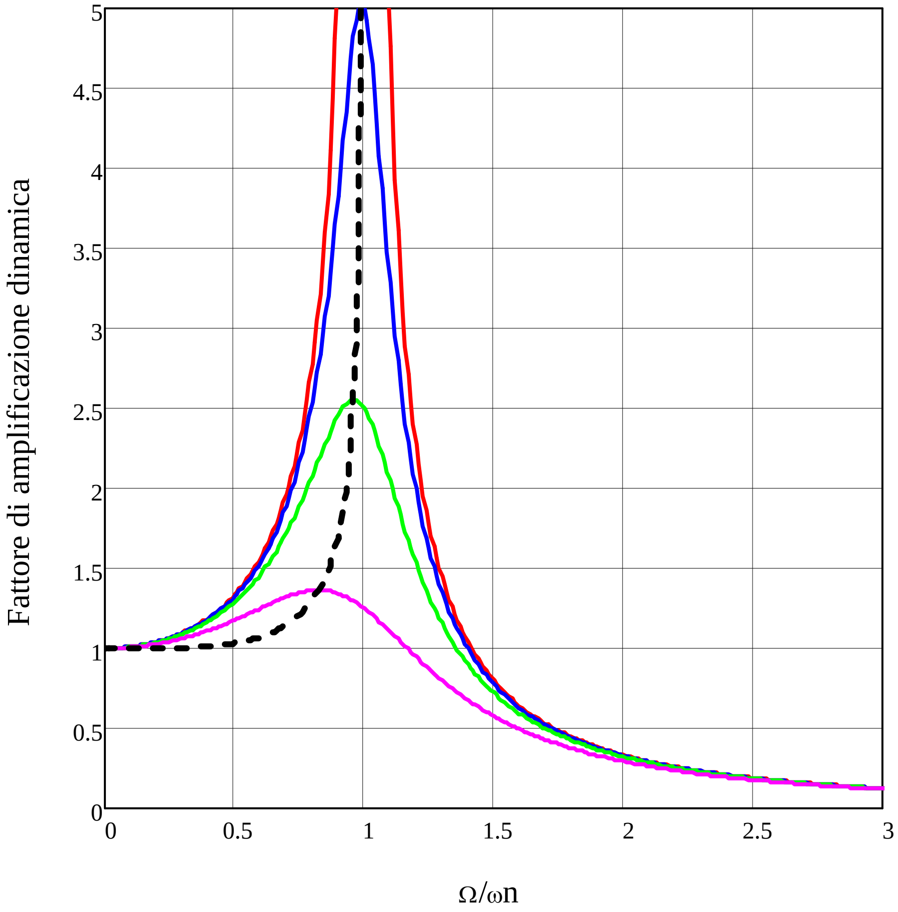
OSCILLAZIONE FORZATA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Rapporto di frequenza per il quale si ha il massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)_{\max} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

Massimo valore del fattore di amplificazione dinamica:

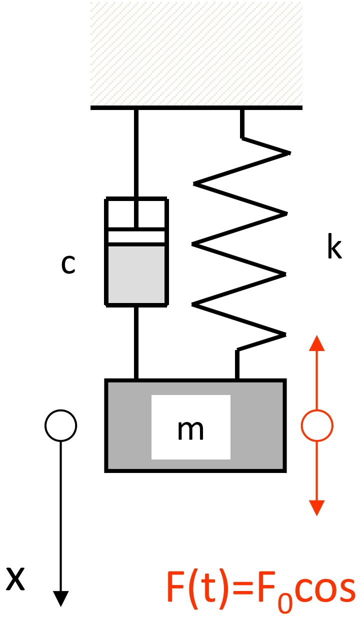
$$D_{\max} = \sqrt{1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^4}$$



OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.

$$\ddot{x} + \xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$



$F(t)=F_0\cos(\omega_n t)$

$$x(t) = \boxed{Xe^{i\omega_n t}}$$

Integrale particolare non omogenea

$$\dot{x}(t) = i\omega_n X e^{i\omega_n t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 X e^{i\omega_n t}$$

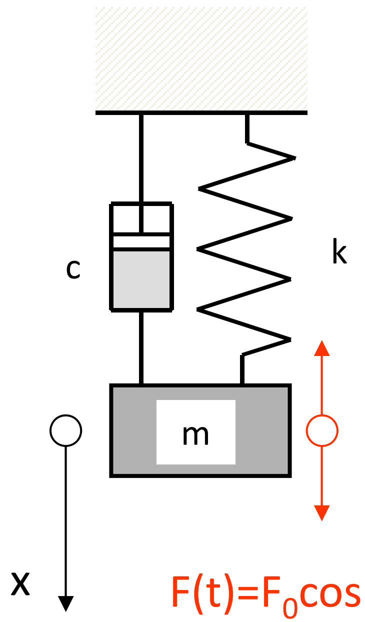
$$-\omega_n^2 X e^{i\omega_n t} + i2\xi\omega_n^2 X e^{i\omega_n t} + \omega_n^2 X e^{i\omega_n t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_n t}$$

$$-\omega_n^2 X + i2\xi\omega_n^2 X + \omega_n^2 X = \frac{F_0}{m}$$

$$X = \frac{F_0}{m}\frac{1}{2i\xi\omega_n^2} = \frac{F_0}{km}\frac{k}{2i\xi\omega_n^2} = -i\frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

OSCILLAZIONE FORZATA IN RISONANZA SISTEMA 1 G.D.L. SMORZATO

Sistema ad 1 g.d.l.



F(t)=$F_0\cos(\omega_n t)$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1 e^{i\omega_s t} + B_1 e^{-i\omega_s t}) - i\frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}e^{-i\omega_n t}$$

Condizioni iniziali
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(0) = A_1 + B_1 - i\frac{F_0}{k2\xi} = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\xi\omega_n(A_1 + B_1) + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}(A_1 - B_1) - \frac{\omega_n F_0}{2k\xi} = 0$$

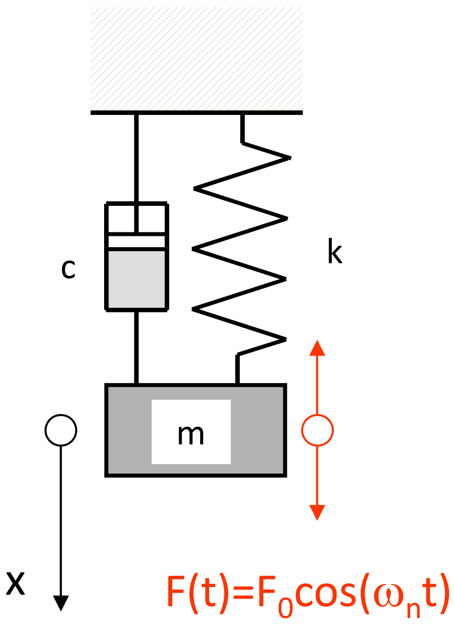
$$B_1 = \frac{F_0}{4k\xi\sqrt{1-\xi^2}}\left[-\xi + i\left(1+\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]$$

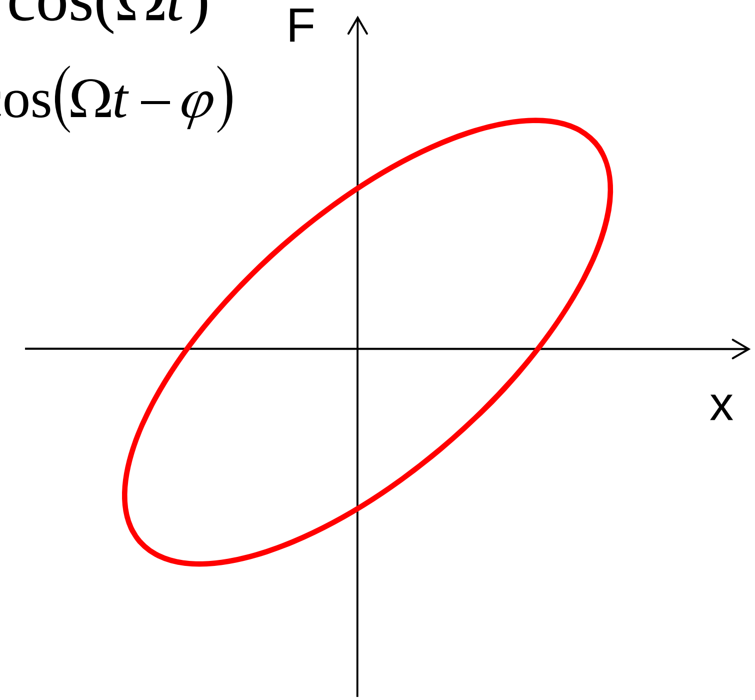
$$A_1 = \frac{F_0}{4k\xi\sqrt{1-\xi^2}}\left[\xi - i\left(1-\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

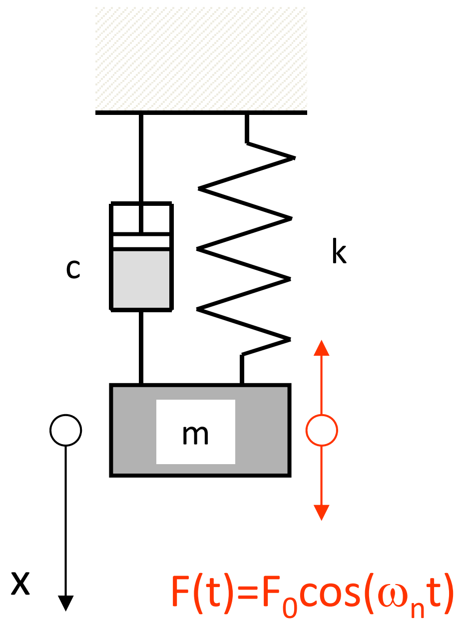


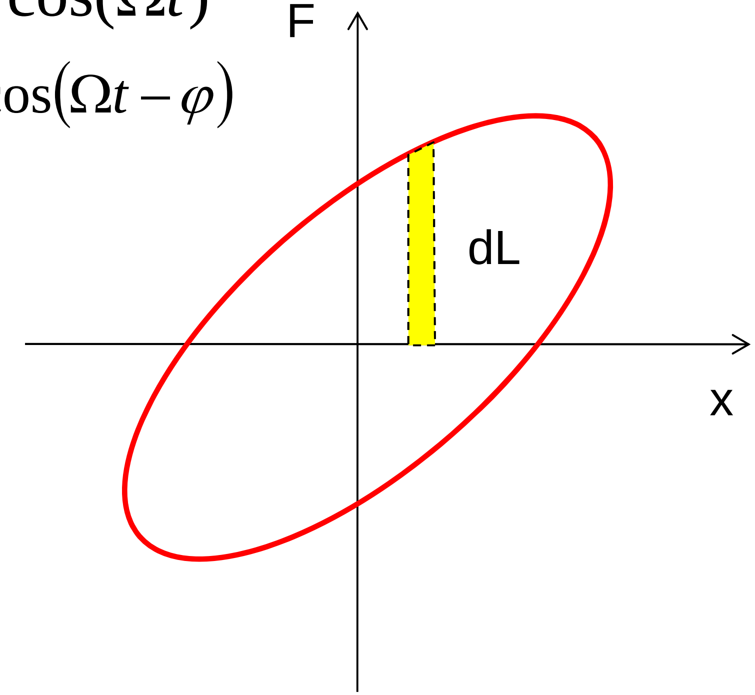


LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$



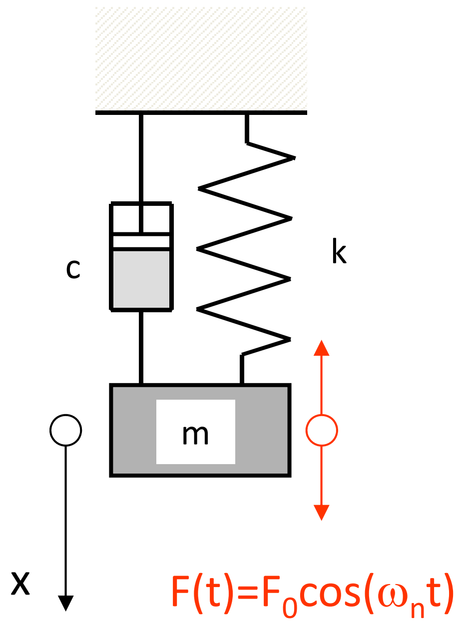


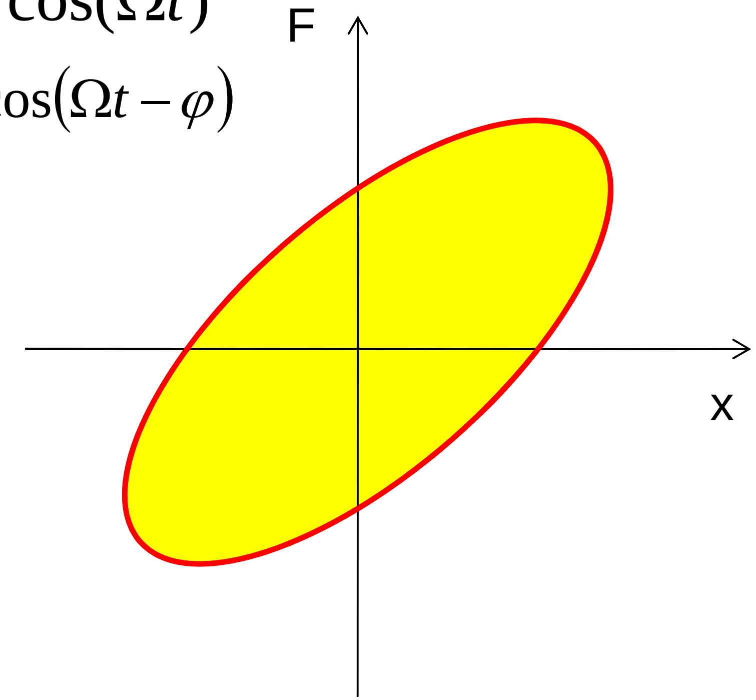
$$dL = F(t)dx = F(t)\dot{x} \cdot dt$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = X \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$





$$dL = F(t)dx = F(t)\dot{x} \cdot dt$$

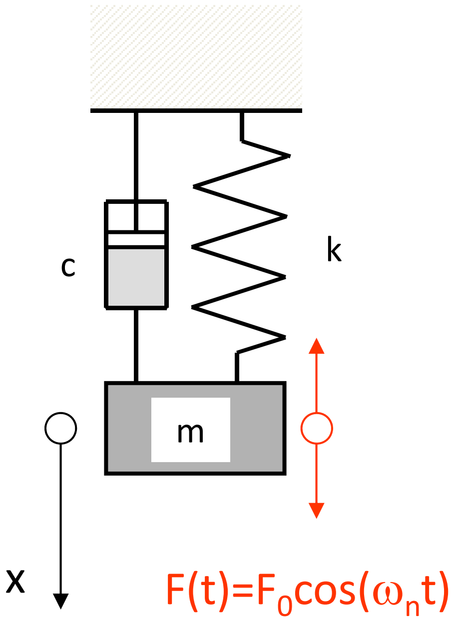
$$L = \int_0^T F(t)\dot{x} \cdot dt$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO

$$L = \int_0^T F(t)\dot{x}\cdot dt = \int_0^T F_0 \cos(\Omega t)\Omega X \sin(\Omega t - \varphi)\cdot dt$$

$$= F_0 \Omega X \int_0^T \cos(\Omega t)\sin(\Omega t - \varphi)\cdot dt$$

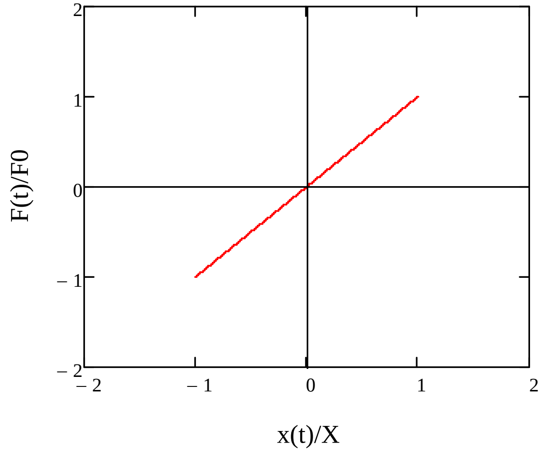
$$= F_0 \Omega X \int_0^T \frac{1}{2}\left[\sin(2\Omega t - \varphi) + \sin(-\varphi)\right]\cdot dt$$



$$= \frac{F_0 \Omega X}{2}\sin(\varphi)\int_0^T dt = \frac{F_0 \Omega X}{2}\sin(\varphi)\frac{2\pi}{\Omega} =$$

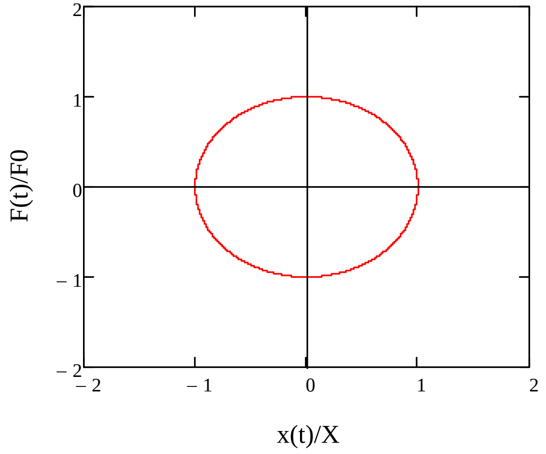
$$= \pi F_0 X \sin(\varphi)$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



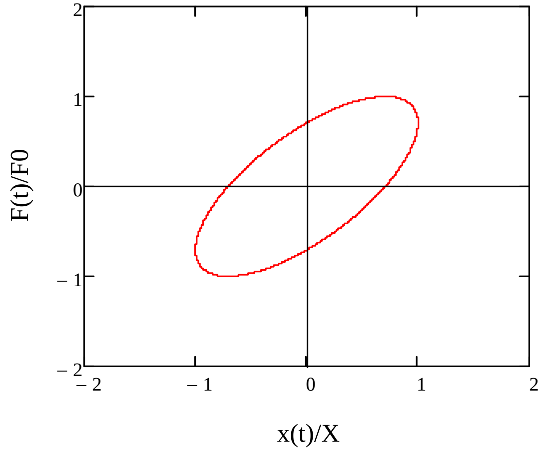
$$\varphi = 0° \; o \; 180°$$

$$L = 0$$



$$\varphi = 90°$$

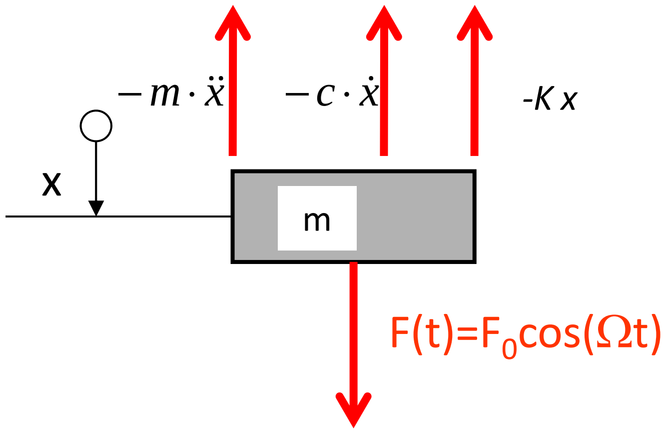
$$L = \pi F_0 X$$



$$\varphi = 45°$$

$$L = \pi F_0 X \frac{\sqrt{2}}{2}$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



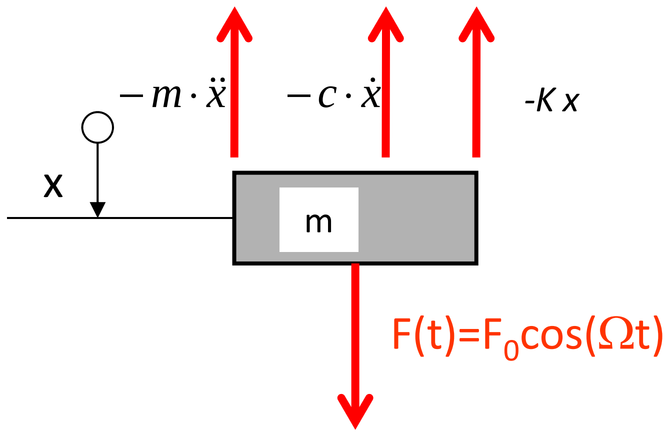
$$x(t) = X\cdot\cos(\Omega t-\varphi)$$
$$\dot{x}(t) = -\Omega X\cdot\sin(\Omega t-\varphi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 X\cdot\cos(\Omega t-\varphi)$$

$$Forza\,elastica\;\; molla = -kx \rightarrow\; fase\;\; con\;\; x(t) = 180° \rightarrow L_k = 0$$
$$Forza\,smorzatore = -c\dot{x} \rightarrow\; fase\;\; con\;\; x(t) = 270° \rightarrow L_c = \pi c\Omega X^2$$
$$Forza\,inerzia = -m\ddot{x} \rightarrow\; fase\;\; con\;\; x(t) = 0° \rightarrow L_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Lavoro\;\; F\;\; esterna = \pi F_0 X\sin(\varphi) = L_c$$

LAVORO DI UNA FORZA ARMONICA IN UN CICLO



$$\pi F_0 X \sin(\varphi) = \pi c \Omega X^2$$

$$X = \frac{F_0}{c\Omega}\sin(\varphi)$$

$$Se\ \Omega = \omega_n \rightarrow \varphi = 90°$$

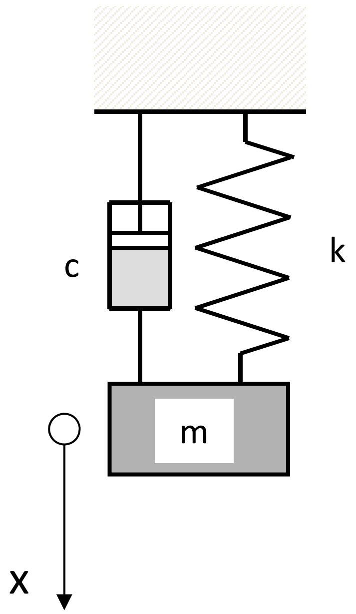
$$X = \frac{F_0}{c\omega_n} = \frac{F_0}{c\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{F_0}{\frac{c\cdot 2\cdot k}{2\sqrt{km}}} = \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

Da soluzione generale

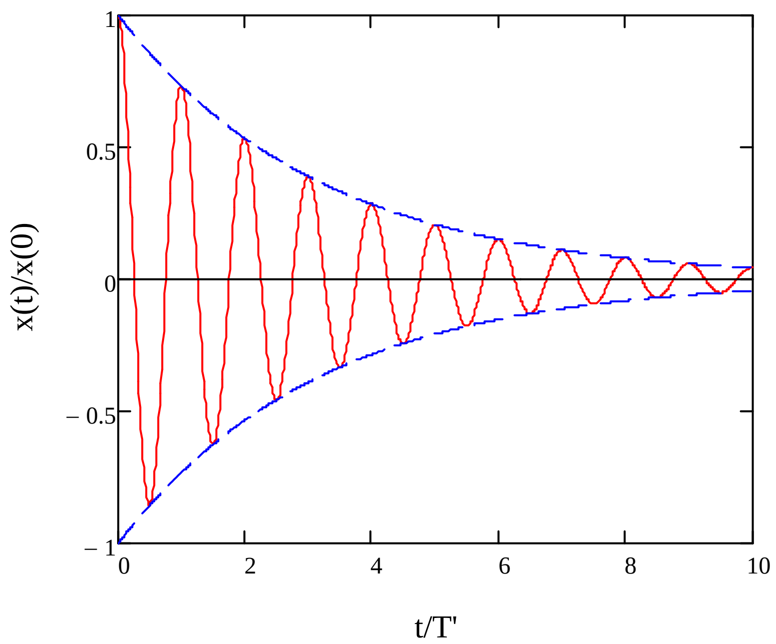
$$X = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{k}\frac{1}{2\xi}$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO



Si basa sull'andamento delle ampiezze di oscillazione rilevate sulla struttura, in seguito ad una perturbazione iniziale.



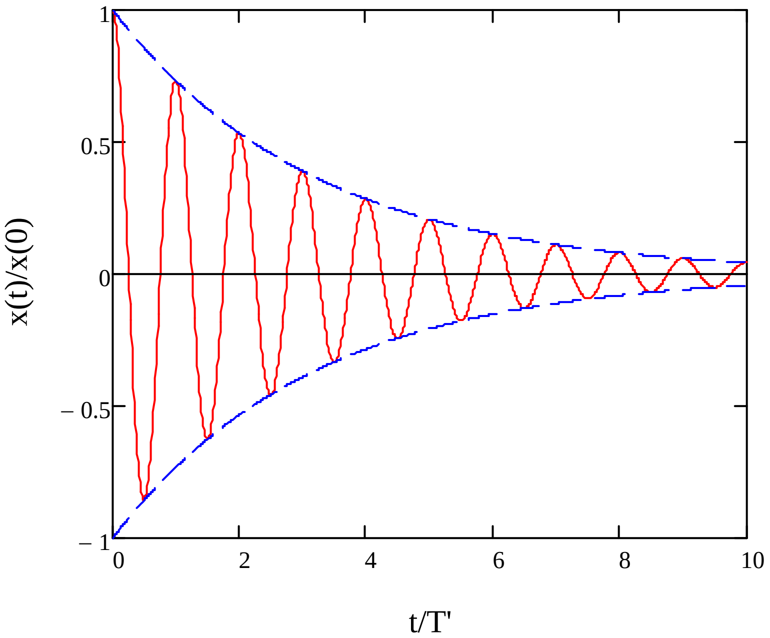
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t)\right)$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DEL DECREMENTO LOGARITMICO

Rapporto di ampiezza tra due picchi successivi

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$R = \frac{e^{-\xi\omega_n t}\left(A\cos(\omega_s t) + B\sin(\omega_s t)\right)}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}\left(A\cos(\omega_s(t+T')) + B\sin(\omega_s(t+T'))\right)} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}}$$



Decremento Logaritmico

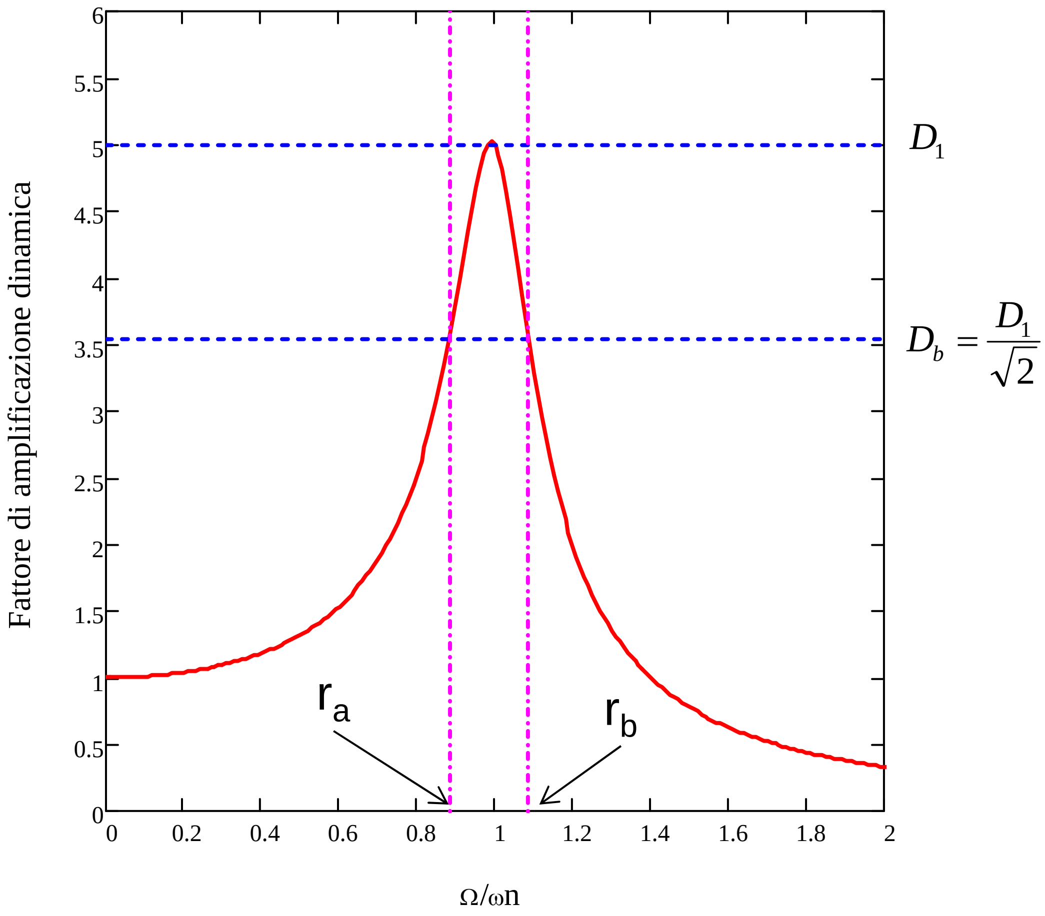
$$\delta = \ln\left(\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n (t+T')}}\right) = \xi\omega_n T' = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_s}$$

$$= \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi + \delta^2}}$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

Si basa sull'andamento del coefficiente di amplificazione dinamica del sistema al variare della frequenza della forzante.



DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

Calcolo di r_a ed r_b

$$D_1 = \frac{1}{2\xi}$$

$$D_b = \frac{D_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\xi r\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + 4\xi^2 r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi}$$

Elevando al quadrato

$$\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2 + 4\xi^2 r^2} = \frac{1}{8\xi^2}$$

$$r^4 + 2r^2\left(2\xi^2 - 1\right) + \left(1 - 8\xi^2\right) = 0$$

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{\left(2\xi^2 - 1\right)^2 - \left(1 - 8\xi^2\right)} = 1 - 2\xi^2 \pm \sqrt{\left(4\xi^4 - 4\xi^2 + 1\right) - \left(1 - 8\xi^2\right)} = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1 + \xi^2}$$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLO SMORZAMENTO RELATIVO
METODO DELLA LARGHEZZA DI BANDA

$$r_{a,b}^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2}$$

Per ξ<<1

$$r_{a,b}^2 \approx 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi$$

$$r_{a,b} = \sqrt{1 - 2\xi^2 \pm 2\xi}$$

Per x<<1 si può porre

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \ldots \quad \Rightarrow \quad r_{a,b} \approx 1 - \xi^2 \pm \xi$$

$$\Downarrow$$

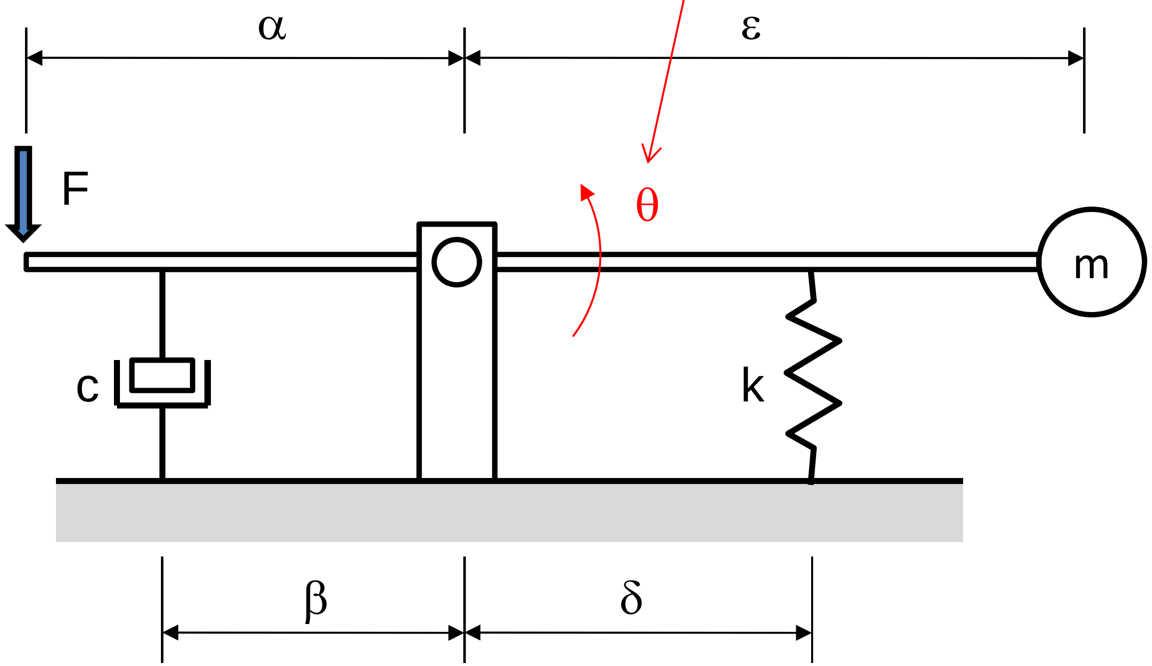
$$r_a = 1 - \xi^2 - \xi \qquad r_b = 1 - \xi^2 + \xi$$

$$\boxed{\xi \approx \frac{r_b - r_a}{2}}$$

RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

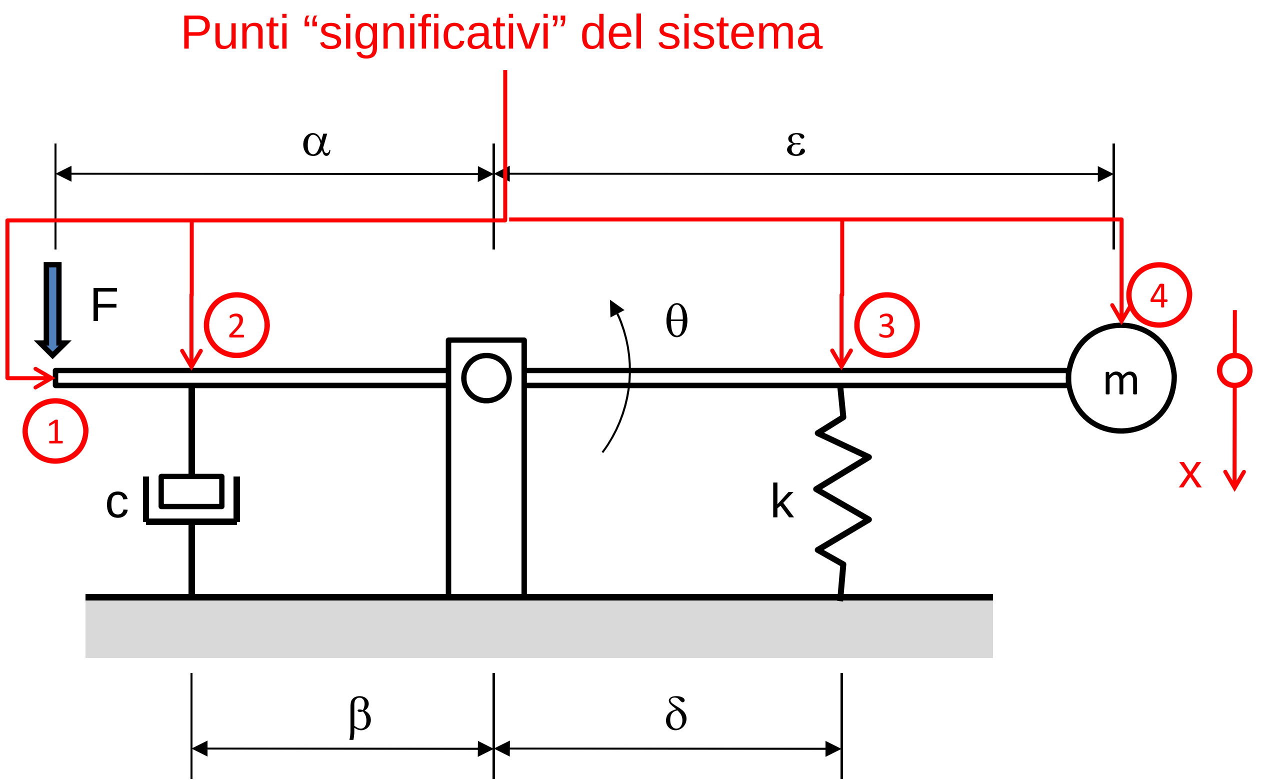
Dato un sistema meccanico formato da corpi rigidi, uniti a masse concentrate, molle e smorzatori, il cui moto sia rappresentabile con il valore di una sola grandezza.

Coordinata generalizzata
o "Lagrangiana"



RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Rappresentazione degli spostamenti



$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\} \Leftrightarrow \vartheta \ ?$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \cdot \vartheta \\ x_2 = \beta \cdot \vartheta \\ x_3 = -\delta \cdot \vartheta \\ x_4 = -\varepsilon \cdot \vartheta \end{cases}$$

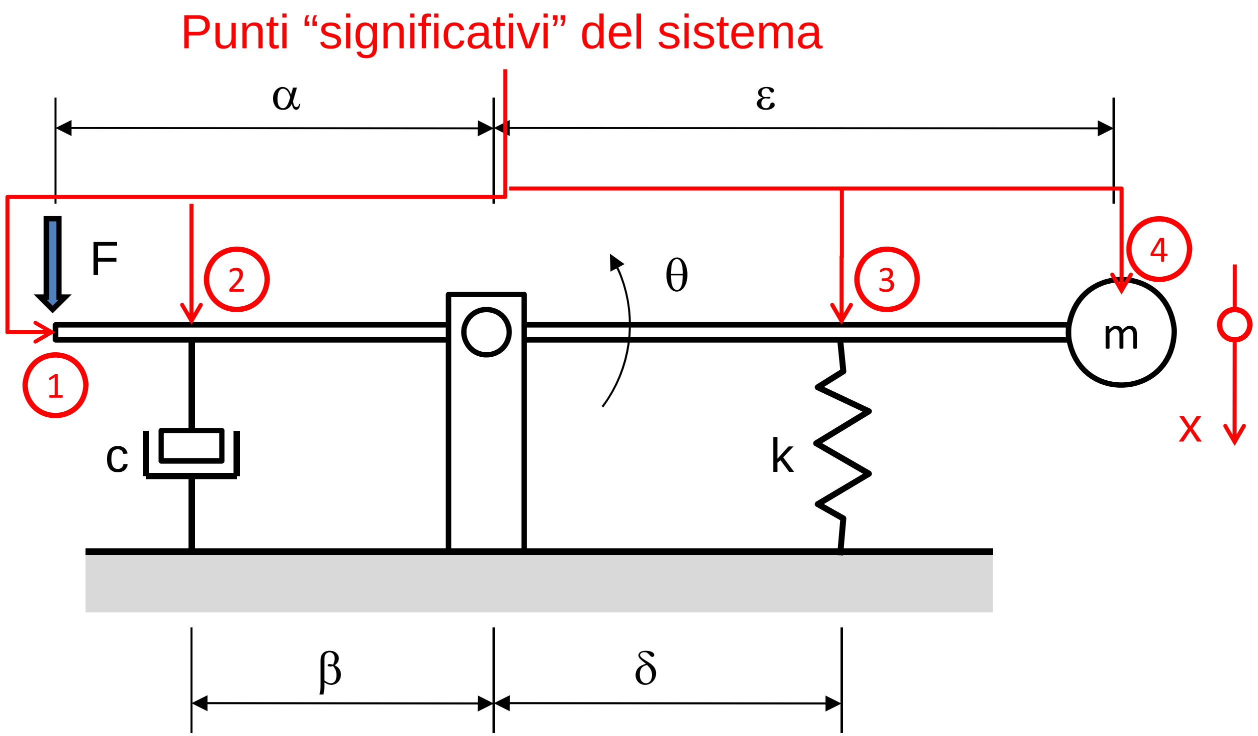
$$\{x\} = [d]\vartheta$$

$$[d] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\delta \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$$

RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

“Riduzione” delle forze

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Lavoro forze effettive x spost. effettivi = Lavoro forza ridotta x coord. lagrangiana

$$Q \cdot \vartheta = \{x\}^T \{f\}$$

$$\{x\} = [d]\vartheta$$

$$Q \cdot \vartheta = \vartheta [d]^T \{f\}$$

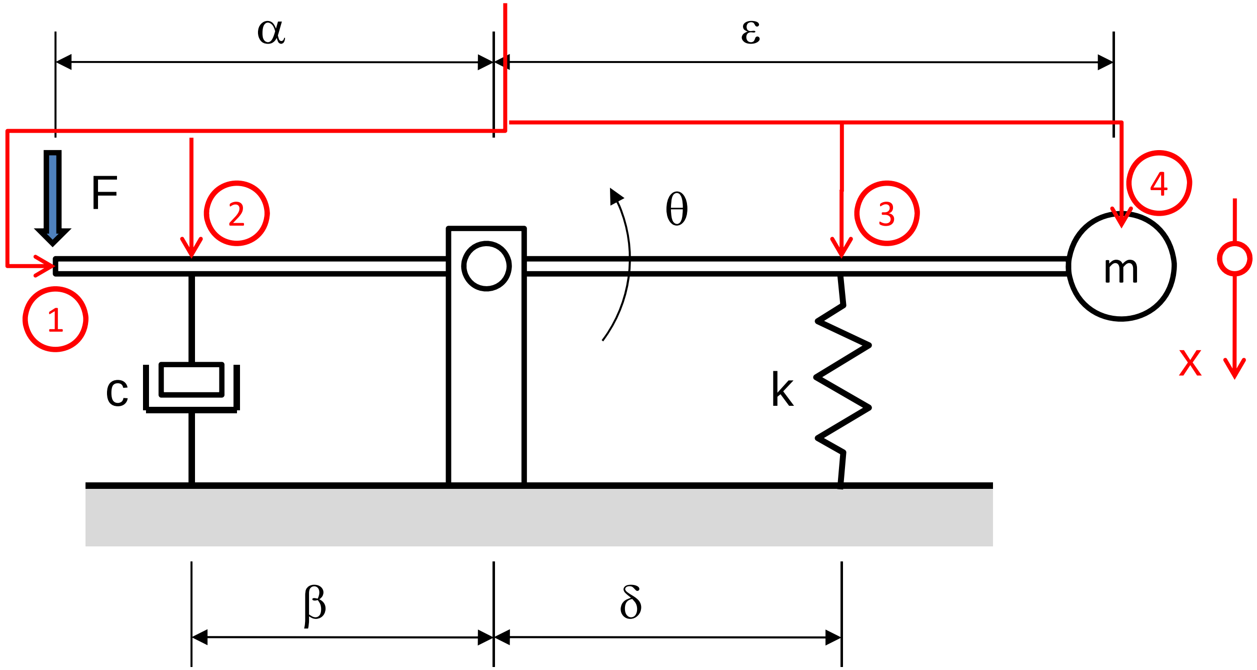
$$Q = [d]^T \{f\}$$

RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti "significativi" del sistema

"Riduzione" delle rigidezze

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Lavoro forze effettive x spost. effettivi = Lavoro forza ridotta x coord. lagrangiana

$$k^* \cdot \vartheta \cdot \vartheta = \{x\}^T [k] \{x\} \qquad \{x\} = \{d\} \vartheta$$

$$k^* \cdot \vartheta \cdot \vartheta = \vartheta \{d\}^T [K] \{d\} \vartheta$$

$$k^* = \{d\}^T [K] \{d\}$$

$$k^* = \{\alpha \quad \beta \quad -\delta \quad -\varepsilon\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\delta \\ -\varepsilon \end{Bmatrix} = \delta^2 k$$

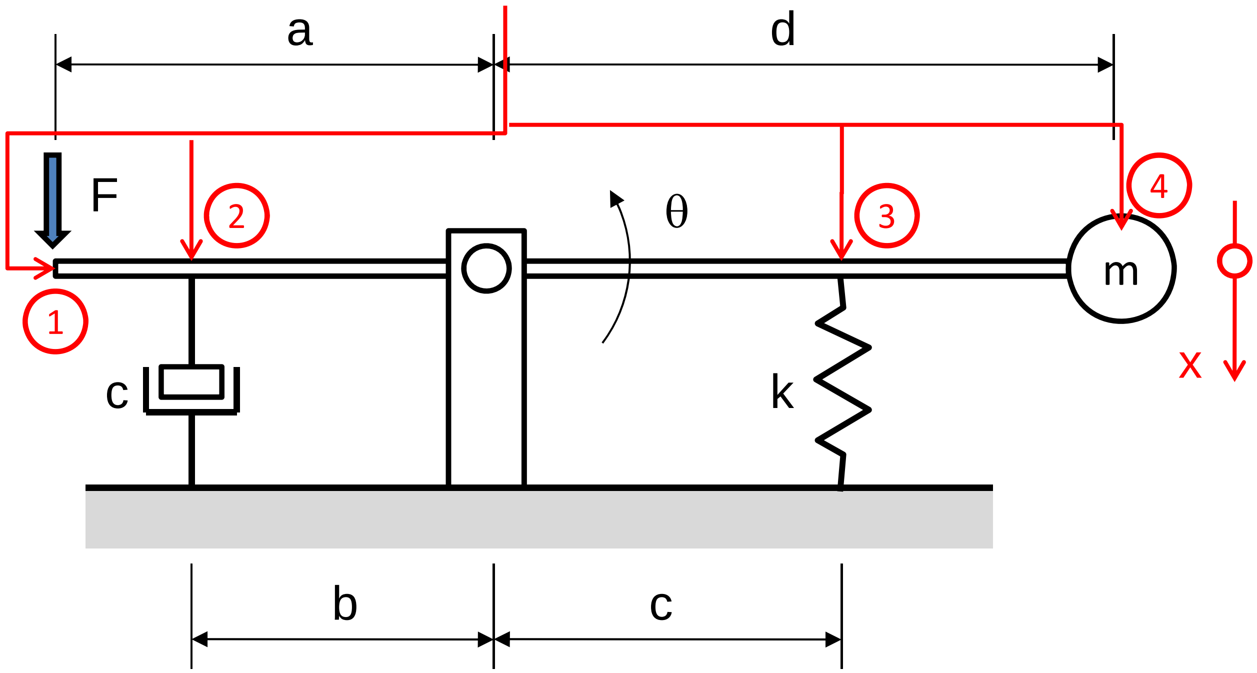
RIDUZIONE DI SISTEMI COMPLESSI AD UN SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE EQUIVALENTE - SISTEMI DI CORPI RIGIDI AD 1 GDL

Punti "significativi" del sistema

"Riduzione" delle masse e degli smorzamenti

$$m^* = \{d\}^T [M]\{d\}$$

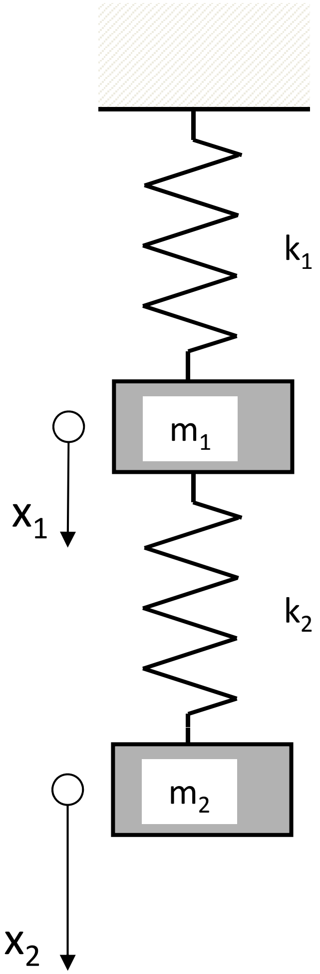
$$c^* = \{d\}^T [C]\{d\}$$



Equazione di equilibrio dinamico del sistema ridotto

$$m^* \ddot{\vartheta} + c^* \dot{\vartheta} + k^* \vartheta = Q$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



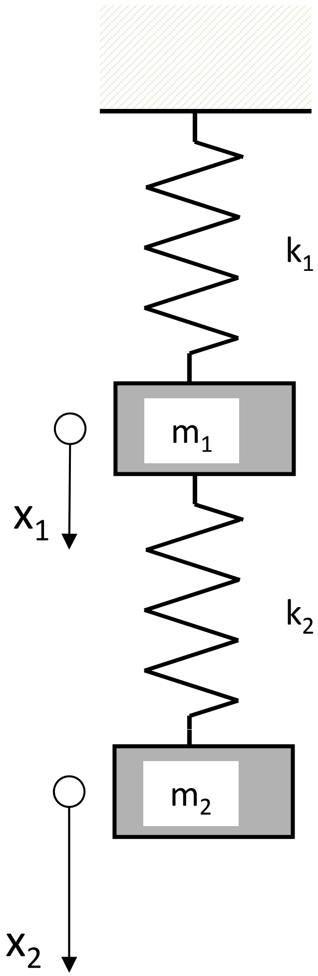
Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{i\omega t} \\ X_2 e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$
$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}=0$$

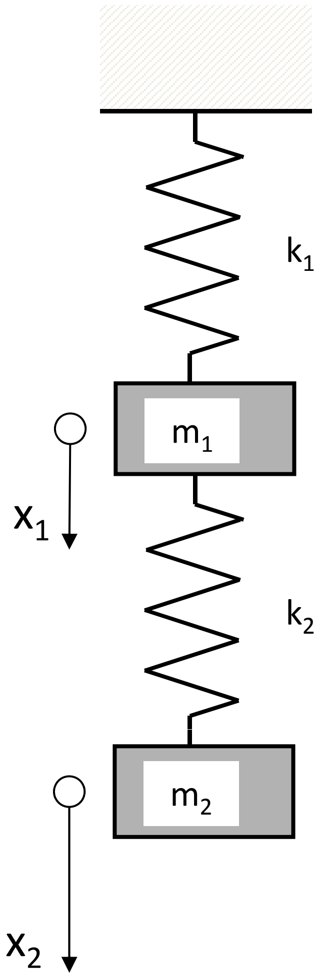
$$-\omega^2[M]\{X\}e^{i\omega t}+[K]\{X\}e^{i\omega t}=0$$

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}=0$$

$$\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

$$\det\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}=0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$\det\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 - \omega^2 m_2\right) - k_2^2 =$$

$$= k_1 k_2 - \omega^2 m_2 k_1 + k_2^2 - \omega^2 m_2 k_2 - \omega^2 m_1 k_2 + \omega^4 m_1 m_2 - k_2^2 =$$

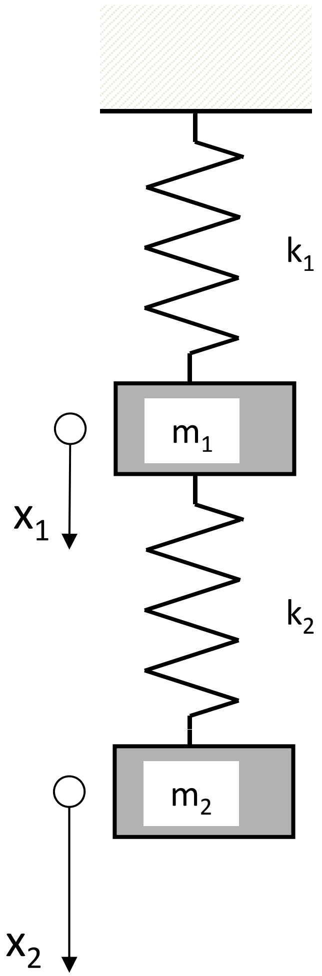
$$= k_1 k_2 - \omega^2 m_2 k_1 - \omega^2 m_2 k_2 - \omega^2 m_1 k_2 + \omega^4 m_1 m_2 =$$

$$= \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 \left(m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2\right) + k_1 k_2 =$$

$$= \omega^4 - \omega^2 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}}{2}$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Esempio di sistema a 2 g.d.l.

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}}{2}$$

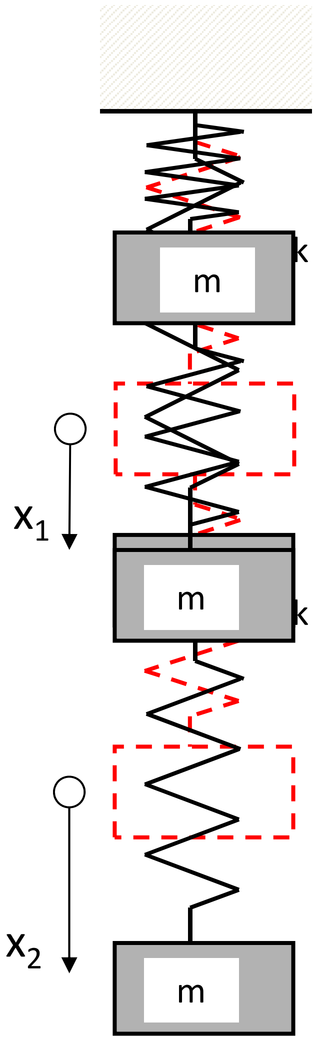
Caso particolare: $k_1=k_2=k$, $m_1=m_2=m$

$$\omega^2 = \frac{\frac{3k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{3k}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right)^2}}{2} = \frac{k}{m}\frac{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Calcolo ampiezze di oscillazione

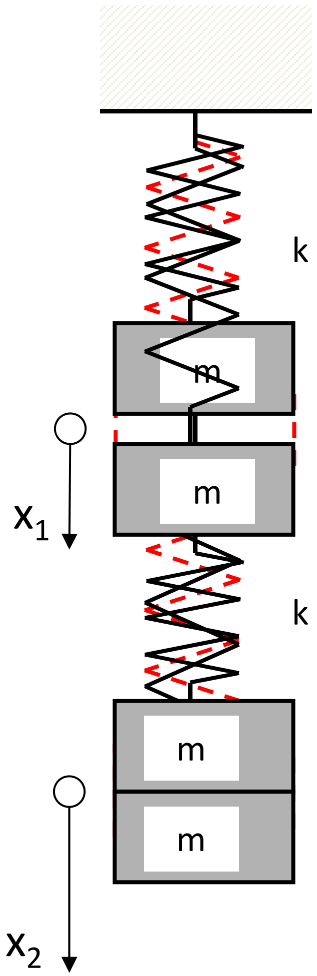


$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0.618$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \left(2-\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx 1.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



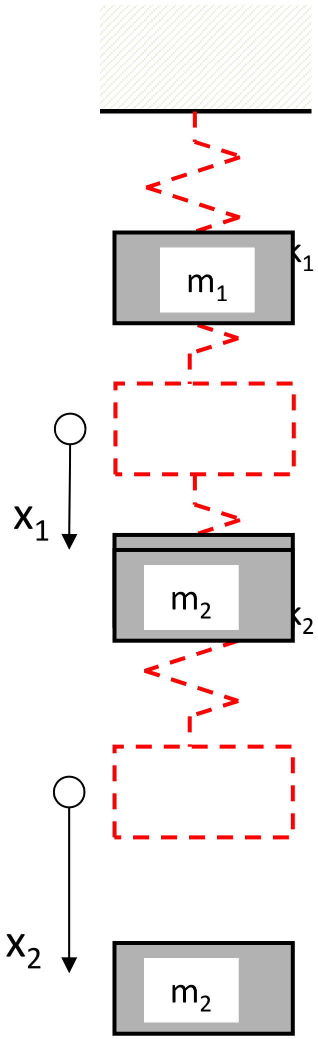
Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 1.62$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx -0.62$$

SISTEMA A 2 G.D.L. LIBERO NON SMORZATO



Calcolo ampiezze di oscillazione

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 1.62$$

$$\begin{bmatrix} k\left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) & -k \\ -k & k\left(1-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \left(2-\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}\right) \approx -0.62$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si cercano soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{X\}e^{i\omega t}$$

$$\{\ddot{x}\}=-\omega^2\{X\}e^{i\omega t}$$

Sostituendo

$$-\omega^2[M]\{X\}e^{i\omega t}+[K]\{X\}e^{i\omega t}=0$$

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Condizione per avere una soluzione non banale

$$\det\left([K]-\omega^2[M]\right)=0$$

$$\left(\omega^2\right)^n + a_{n-1}\left(\omega^2\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\omega^2\right) + a_n = 0$$ “Polinomio caratteristico”

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$$ n radici (autovalori) tutte reali (K ed M simmetriche)

Sostituendo un autovalore ω_j è possibile determinare il relativo autovettore Y_j (forma modale), soluzione di:

$$\left([K]-\omega_j^2[M]\right)\{Y_j\}=0$$

Dato che il determinante è uguale a 0, la soluzione è nota a meno di una costante e deve essere normalizzata, ad esempio:

$$\{Y_j\}^T[M]\{Y_j\}=1$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Problema agli autovalori in forma standard:

$$[K]\{X\} = \omega^2 [M]\{X\}$$

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \omega^2 \{X\}$$

$$[A] = [M]^{-1}[K]$$

$$\lambda = \omega^2$$

$$[A]\{X\} = \lambda \{X\}$$

$$\det([A] - \lambda [I]) = 0$$

$$\det\left([M]^{-1}[K] - \omega^2 [I]\right) = 0$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO

Gli autovalori ω_j ed i relativi autovettori Y_j sono solitamente organizzati in due matrici n x n

$$\left[\omega_j^2\right]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & - & 0\\ 0 & \omega_2^2 & - & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & - & \omega_n^2\end{bmatrix}$$

$$\left[Y\right]=\left[\{Y_1\} \quad \{Y_2\} \quad - \quad \{Y_n\}\right]$$

“Matrice modale”

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa :

$$[Y]^T[M][Y]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

masse modali

Matrice di massa principale

$$[Y]^T[K][Y]=\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

rigidezze modali

Matrice di rigidezza principale

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Se, in particolare, si normalizzano le forme modali in modo che risulti:

$$\{Y_r\}^T [M] \{Y_r\} = 1$$

si ha:

$$\{Y_r\}^T [K] \{Y_r\} = \omega_r^2$$

Il prodotto della matrice modale per la matrice di massa diviene:

$$\{Y\}^T [M] \{Y\} = [I]$$

$$\{Y\}^T [K] \{Y\} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Presi due modi propri qualsiasi:

$$\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

$$\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_s\}=0$$

Premoltiplicando la prima per $\{Y_s\}^T$

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

Trasponendo la seconda e postmoltiplicando per $\{Y_r\}$

$$\{Y_s\}^T\left([K]^T-\omega_s^2[M]^T\right)\{Y_r\}=0$$

Dato che M e K sono simmetriche

$$\{Y_s\}^T\left([K]^T-\omega_s^2[M]^T\right)\{Y_r\}=\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_r\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Ortogonalità rispetto alle matrici M e K

Si ha:

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

$$\{Y_s\}^T\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{Y_r\}=0$$

Sottraendo

$$\left(\omega_s^2-\omega_r^2\right)\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}=0 \qquad \begin{cases}\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}=0 & se\ \omega_s\neq\omega_r\\ \{Y_s\}^T[M]\{Y_r\}\neq 0 & se\ \omega_s=\omega_r\end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}=\omega_r^2\{Y_s\}^T[M]\{Y_r\} \qquad \begin{cases}\{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}=0 & se\ \omega_s\neq\omega_r\\ \{Y_s\}^T[K]\{Y_r\}\neq 0 & se\ \omega_s=\omega_r\end{cases}$$

Infine:

$$\omega_r^2=\frac{\{Y_r\}^T[K]\{Y_r\}}{\{Y_r\}^T[M]\{Y_r\}}=\boxed{\frac{k_r}{m_r}}$$

Rapporto di Rayleigh
(k_r, m_r rigidezza e massa "modali" per il modo r)

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Indipendenza lineare

Un sistema di vettori è linearmente indipendente se la condizione:

$$\sum_i a_i \{Y_i\} = 0$$

implica che tutti gli a_i siano uguali a 0.
Si osserva che la condizione è equivalente al sistema lineare, omogeneo:

$$[Y]\{a_i\} = 0$$

Dato che si ha:

$$[Y]^T [M][Y] = [I]$$

$$\det([Y]^T [M][Y]) = \det[Y]^T \det[M] \det[Y] = \det[I] = 1$$

Per cui:

$$\det[Y] \neq 0$$

e di conseguenza si ha la sola soluzione banale $\{a_i\} = 0$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Forme modali come base

Date le proprietà di indipendenza ed ortogonalità, le forme modali costituiscono una "base", per cui qualsiasi vettore dello spazio vettoriale può essere espresso come combinazione lineare di essi:

$$V = \sum_i b_i \{Y_i\} = [Y]\{b_i\}$$

con i coefficienti b, scalari univocamente determinati

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori nulli

Dato che risulta :

$$[Y]^T[K][Y] = [\omega_i^2]$$

si ha:

$$\det\left([Y]^T[K][Y]\right) = \det[Y]^T \det[K]\det[Y] = \det[\omega_i^2] = \prod_i \omega_i^2$$

Se la struttura è labile, si ha:

$$\det[K] = 0$$

il che implica che alcuni degli autovalori siano nulli. Il numero di autovalori nulli è pari al grado di labilità della struttura

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

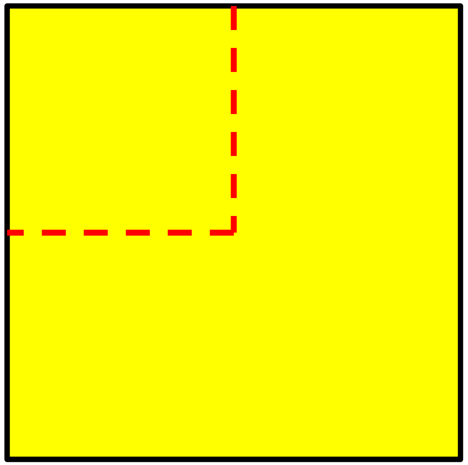
In alcuni casi è possibile ottenere degli autovalori coincidenti (aventi quindi molteplicità maggiore di 1).
Un primo caso in cui questo può verificarsi, si ha quando la struttura presenta una simmetria di rotazione, con angolo caratteristico < 180°.

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

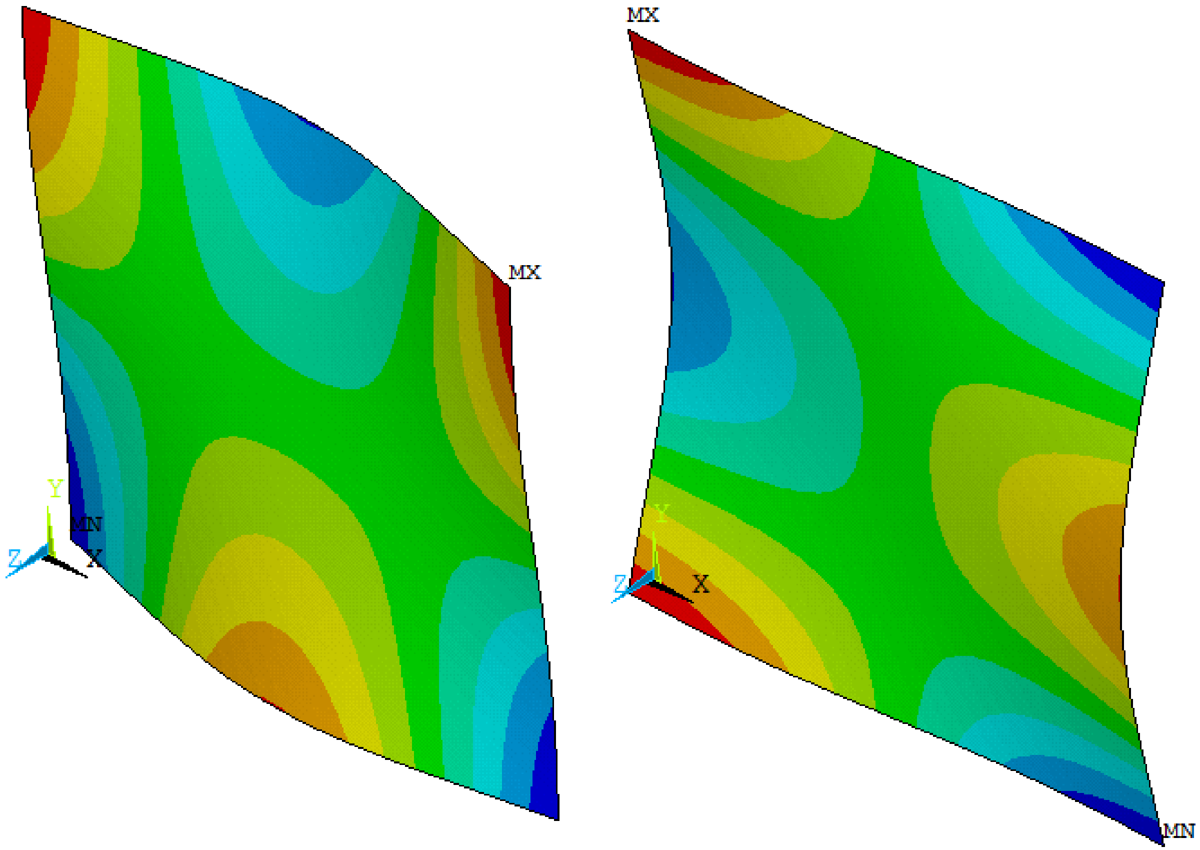
Autovalori coincidenti

Il numero di autovalori coincidenti effettivamente individuati dal metodo numerico di ricerca può dipendere dal "mesh", risultando comunque minore o uguale di n = 360°/α.

Esempio:
piastra
quadrata, α=90°



Due autovalori uguali, con autovettori distinti per una rotazione di 90°

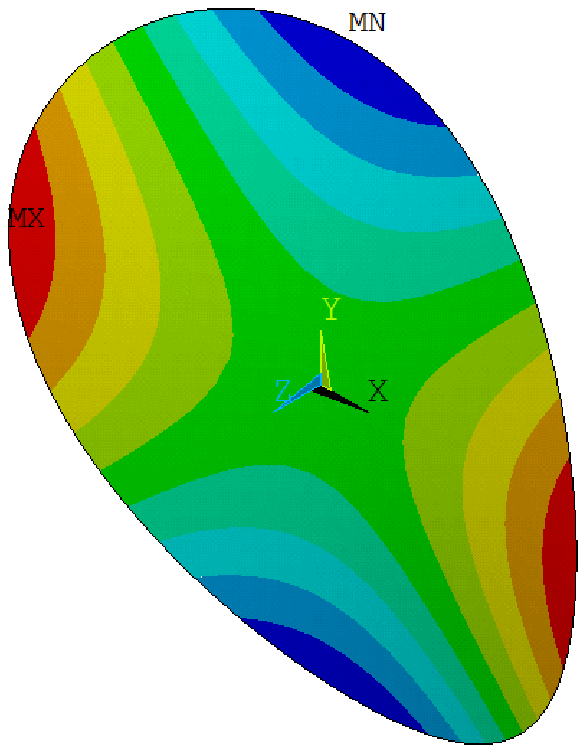


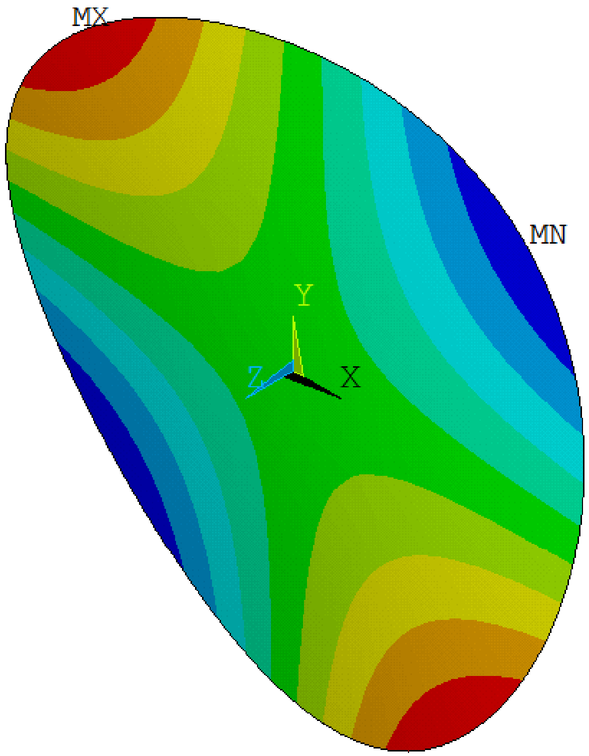
SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

Esempio:
piastra circolare

Due autovalori uguali, con autovettori distinti per una rotazione di 45°



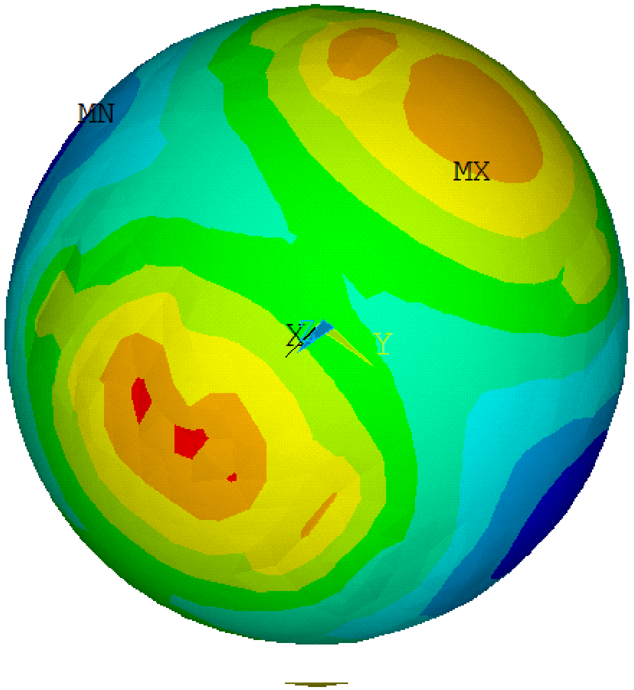


SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

Esempio:
Guscio sferico

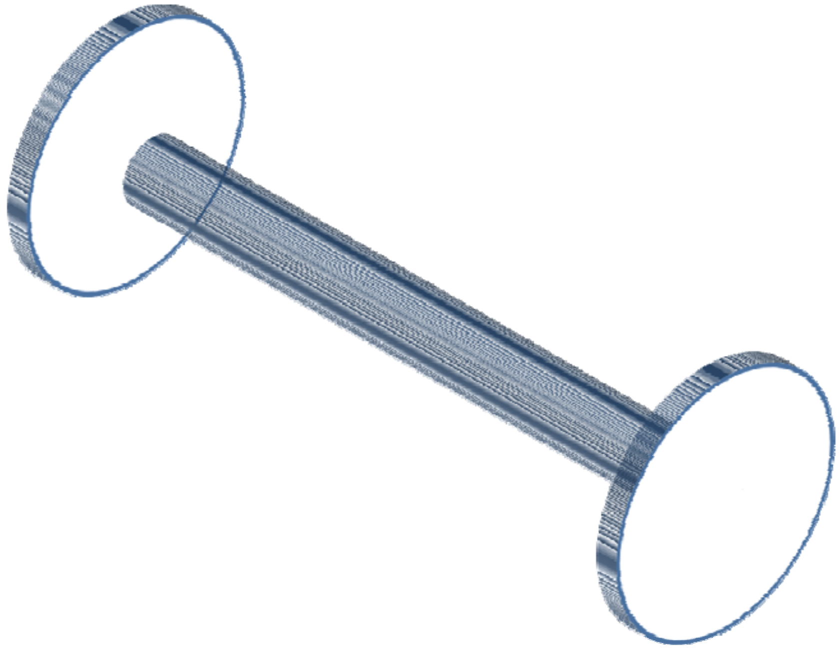
Cinque autovalori uguali



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
PROPRIETA' DELLE FORME MODALI

Autovalori coincidenti

La coincidenza degli autovalori può inoltre verificarsi, anche tra modi di vibrare indipendenti.
Ad esempio, è possibile fare in modo che, in un albero con due volani, la prima pulsazione flessionale e la prima torsionale coincidano.



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO NON SMORZATO
DISACCOPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Le proprietà delle forme modali consentono di esprimere il vettore spostamento come una loro combinazione lineare:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i\} \qquad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}_i\} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [K][Y]\{q_i\} = 0$$

Pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [Y]^T[K][Y]\{q_i\} = [I]\{\ddot{q}_i\} + [\omega_i^2]\{q_i\} = 0$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si dovrebbero cercare soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{Z\}e^{\lambda t}$$

con autovalori ed autovettori soluzione della:

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

Se lo smorzamento è piccolo, si può ritenere che gli autovalori e gli autovettori differiscano poco da quelli del sistema non smorzato:

$$\lambda_i \approx i\omega_i + \Delta\lambda_i$$
$$\{Z_i\} \approx \{Y_i\} + \{\Delta Z_i\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Sostituendo si ottiene:

$$\left\{\left(-\omega_i^2+2i\omega_i\Delta\lambda_i+\Delta\lambda_i^2\right)[M]+\left(i\omega_i+\Delta\lambda_i\right)[C]+[K]\right\}\left(\{Y_i\}+\{\Delta Z_i\}\right)=0$$

$$\cancel{-\omega_i^2[M]\{Y_i\}}-\omega_i^2[M]\{\Delta Z_i\}+2i\omega_i\Delta\lambda_i[M]\{Y_i\}+2i\omega_i\Delta\lambda_i[M]\{\Delta Z_i\}+$$
$$+\cancel{\Delta\lambda_i^2[M]\{Y_i\}}+\cancel{\Delta\lambda_i^2[M]\{\Delta Z_i\}}+i\omega_i[C]\{Y_i\}+\cancel{i\omega_i[C]\{\Delta Z_i\}+\Delta\lambda_i[C]\{Y_i\}}+$$
$$\cancel{+\Delta\lambda_i[C]\{\Delta Z_i\}}+\cancel{[K]\{Y_i\}}+[K]\{\Delta Z_i\}=0$$

Trascurando i termini di secondo ordine, i prodotti C$\Delta\lambda$ e CΔZ e tenendo conto che:

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{Y_i\}=0$$

$$\left([K]-\omega_i^2[M]\right)\{\Delta Z_i\}+i\omega_i\left(2\Delta\lambda_i[M]+[C]\right)\{Y_i\}=0$$

Se lo smorzamento è piccolo, si può ritenere che gli autovalori e gli autovettori differiscano poco da quelli del sistema non smorzato:

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Pre-moltiplicando per la trasposta della forma modale:

$$\{Y_i\}^T\left(\left[K\right]-\omega_i^2\left[M\right]\right)\{\Delta Z_i\}+i\omega_i\{Y_i\}^T\left(2\Delta\lambda_i\left[M\right]+\left[C\right]\right)\{Y_i\}=0$$

$$\{Y_i\}^T\left(2\Delta\lambda_i\left[M\right]+\left[C\right]\right)\{Y_i\}=0$$

Da cui si ottiene:

$$\Delta\lambda_i=-\frac{\{Y_i\}^T\left[C\right]\{Y_i\}}{2\{Y_i\}^T\left[M\right]\{Y_i\}}=-\frac{d_{ii}}{2}$$

$$\lambda_i=-\frac{d_{ii}}{2}+i\omega_i$$

Termine reale negativo, che produce una riduzione esponenziale nel tempo dell'ampiezza delle oscillazioni

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Espandendo ΔZ in termini delle forme modali del sistema non smorzato:

$$\Delta Z_i = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \{Y_s\}$$

Sostituendo e pre-moltiplicando per la trasposta della forma modale “j”:

$$\{Y_j\}^T ([K] - \omega_i^2 [M]) \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \{Y_s\} + i\omega_i \{Y_j\}^T (2\Delta\lambda_i [M] + [C]) \{Y_i\} = 0$$

Tenendo conto della ortogonalità e del fatto che:

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{Y_i\} = 0$$

$$\{Y_j\}^T ([K] - \omega_i^2 [M]) \{Y_j\} \alpha_j + i\omega_i \{Y_j\}^T [C] \{Y_i\} = 0$$

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) \alpha_j + i\omega_i d_{ji} = 0$$

$$\{Z_i\} \approx \{Y_i\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{i\omega_i d_{ji}}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)} \{Y_j\}$$

La correzione è immaginaria, per cui introduce una differenza di fase tra i diversi gdl.

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
DISACCOPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Introducendo lo smorzamento:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\}+[C][Y]\{\dot{q}_i\}+[K][Y]\{q_i\}=0$$

Pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\boxed{[Y]^T[C][Y]}\{\dot{q}_i\}+[\omega_i^2]\{q_i\}=0$$

in generale non diagonale, per cui le equazioni non sono disaccoppiabili.

È possibile rendere diagonalizzabile la matrice di smorzamento attraverso opportune ipotesi semplificative:

- assumere che i termini fuori diagonale di $[Y]^T[C][Y]$ siano trascurabili

$$[Y]^T[C][Y]=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & - & 0 \\ 0 & d_{22} & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$d_{ii}=\{Y_i\}^T[C]\{Y_i\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
DISACCOPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

- assumere uno smorzamento “proporzionale” o di Rayleigh:

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M]$$

$$[Y]^T[C][Y] = [Y]^T(\alpha[K] + \beta[M])[Y] = \alpha\left[\omega_j^2\right] + \beta[I]$$

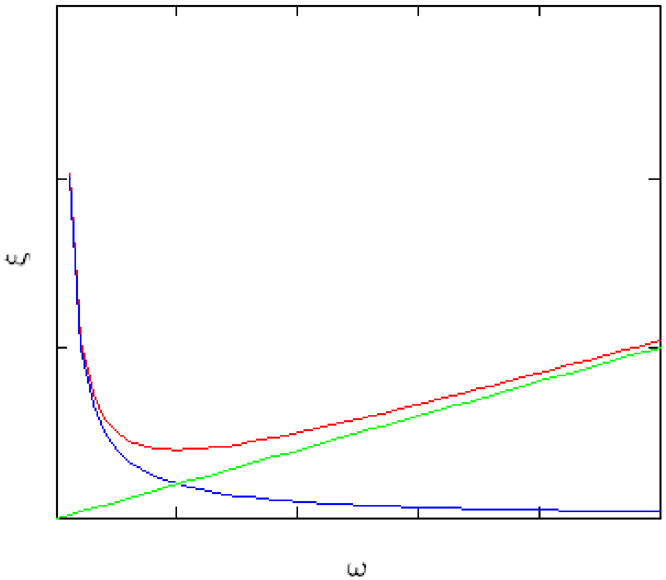
$$d_{ii} = \alpha\omega_i^2 + \beta$$

$$\{\ddot{q}_i\} + d_{ii}\{\dot{q}_i\} + \left[\omega_i^2\right]\{q_i\} = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$2\xi_i\omega_i = d_i$$

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(\alpha\omega_i + \frac{\beta}{\omega_i}\right)$$



SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
DISACCOPIAMENTO DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Se la matrice C è diagonalizzabile, si ottengono n equazioni disaccoppiate :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0$$

per cui la risposta a condizioni iniziali fissate si ottiene come combinazione delle forme modali della struttura non smorzata:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE EQUAZIONI DISACCOPPIABILI

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\}=[Y]\{q_i\}$$

pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, qualora la matrice C sia diagonalizzabile, si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \xi_1\omega_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \xi_2\omega_2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n\omega_n \end{bmatrix}\{\dot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}\{q_i\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i q_i+\omega_i^2 q_i=\{Y_i\}^T\{F(t)\}=f_i$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
EQUAZIONI DISACCOPPIABILI

Nel caso la forzante esterna abbia andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j q_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$\boxed{Q_j = \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right) + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j}}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO
EQUAZIONI NON DISACCOPPIABILI

Una possibile procedura di soluzione, prevede l'introduzione di una relazione aggiuntiva, ovviamente verificata:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$
$$[M]\{\dot{x}\}-[M]\{\dot{x}\}=0$$

Si ottiene in tal modo il sistema di 2n equazioni:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}=0$$

Posto:

$$\{r\}=\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \qquad [A]=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$[A]\{r\}+[B]\{\dot{r}\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – MATRICE C DI FORMA GENERALE
RISPOSTA LIBERA

Una possibile procedura di soluzione, prevede l'introduzione di una relazione aggiuntiva, ovviamente verificata:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$
$$[M]\{\dot{x}\}-[M]\{\dot{x}\}=0$$

Si ottiene in tal modo il sistema di 2n equazioni:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}=0$$

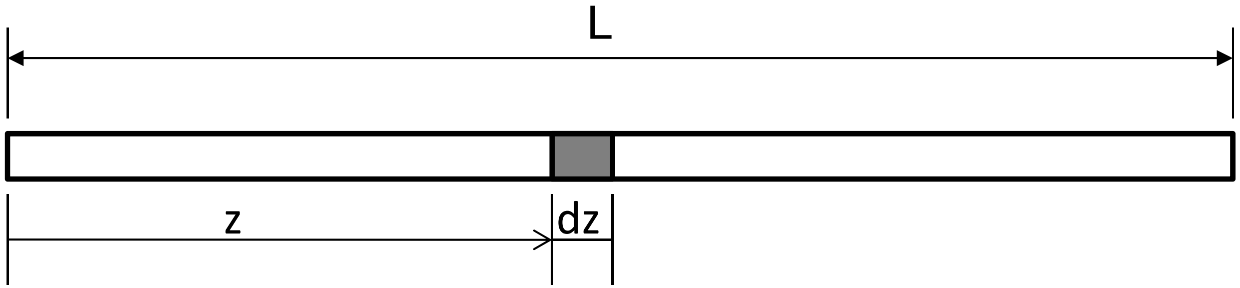
Posto:

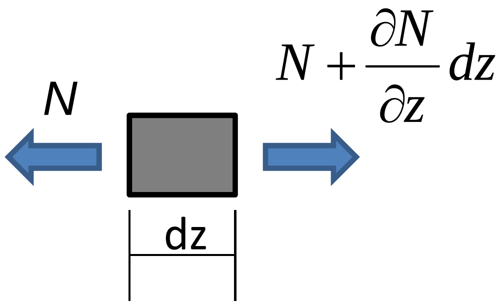
$$\{r\}=\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \qquad [A]=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$[A]\{r\}+[B]\{\dot{r}\}=0$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI





Equazione di equilibrio:

$$\rho A dz \cdot \ddot{u} = N + \frac{\partial N}{\partial z} dz - N$$

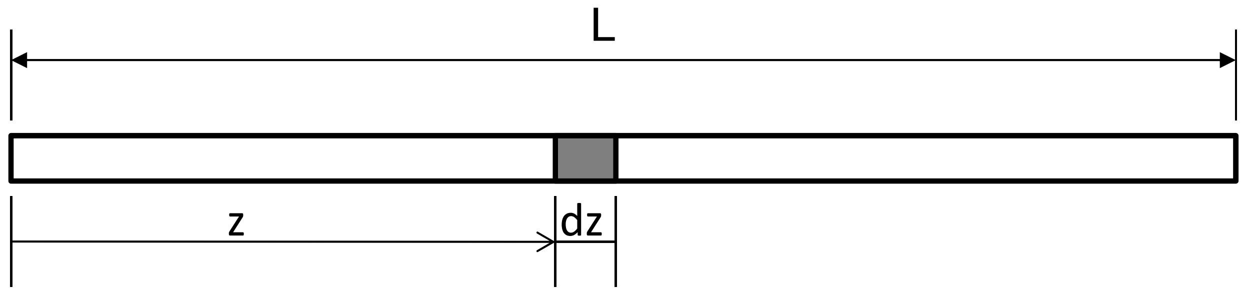
$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

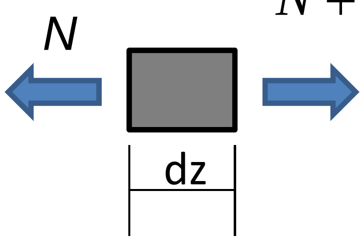
$$N = EA\varepsilon = EA\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho A \ddot{u} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



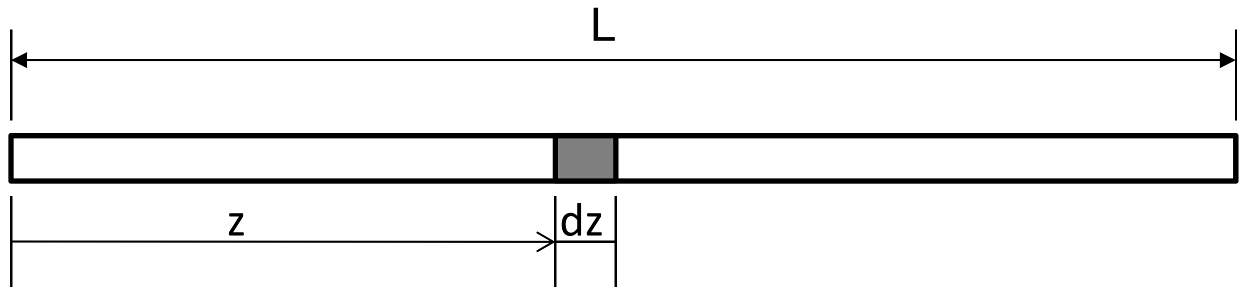


$$N + \frac{\partial N}{\partial z} dz$$

$$\rho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\ddot{u} = \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI

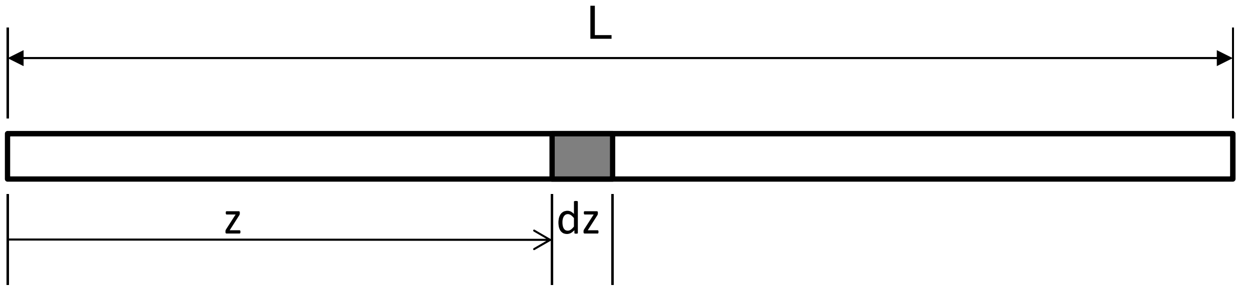


$$\ddot{u} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad u(z,t) = Z(z)T(t) \rightarrow \begin{array}{l} \ddot{u}(z,t) = Z(z)\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = T(t)\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \end{array}$$

$$Z(z)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 T(t)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} = v^2 \frac{\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} \rightarrow \frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \frac{Z^{II}}{Z}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



$$\ddot{T} - aT = 0$$

$$\nu^2 Z^{II} - aZ = 0$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

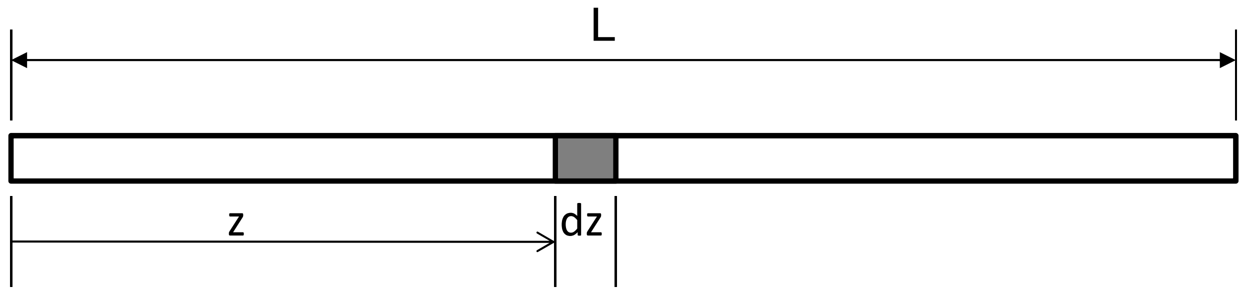
$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$Z^{II} + \frac{\omega^2}{\nu^2} Z = 0$$

$$Z(z) = C \cdot \cos(\chi z) + D \cdot \sin(\chi z)$$

$$\chi = \frac{\omega}{\nu}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI ESTENSIONALI



Trave bloccata agli estremi

$$u^I(0,t) = Z^I(0)T(t) = 0 \qquad\qquad u^I(L,t) = Z^I(L)T(t) = 0$$

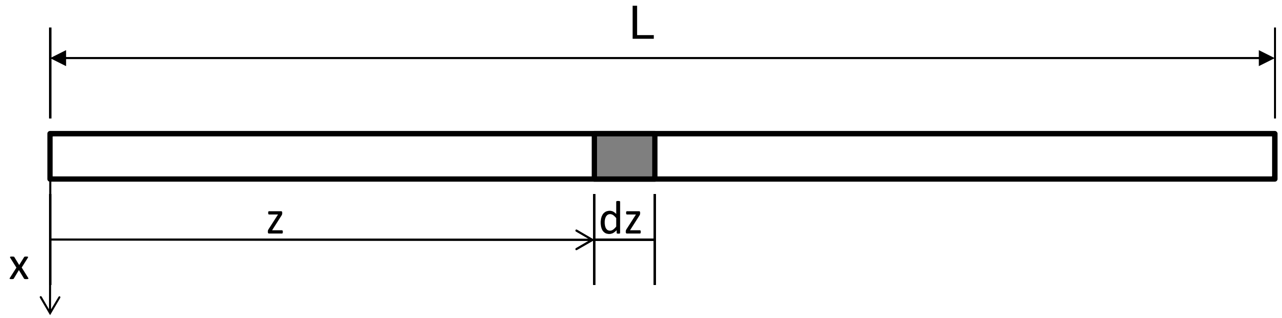
$$Z^I(0) = 0 \qquad\qquad C = 0$$

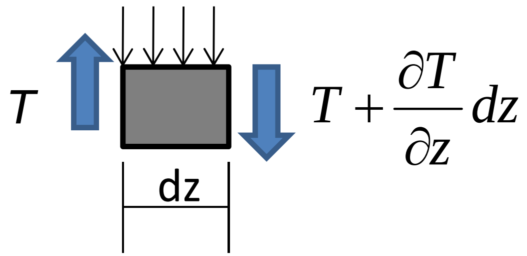
$$Z^I(L) = 0 \qquad\qquad D \cdot \sin(\chi L) = 0$$

$$\chi L = k\pi \qquad\qquad \frac{\omega}{\nu} L = k\pi$$

$$\omega = \frac{k\pi\nu}{L}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI





Equazione di equilibrio:

$$\rho A dz \cdot \ddot{v} = T + \frac{\partial T}{\partial z}dz - T$$

$$T = -EJv^{III}$$

$$\rho A \ddot{v} = \frac{\partial T}{\partial z}$$

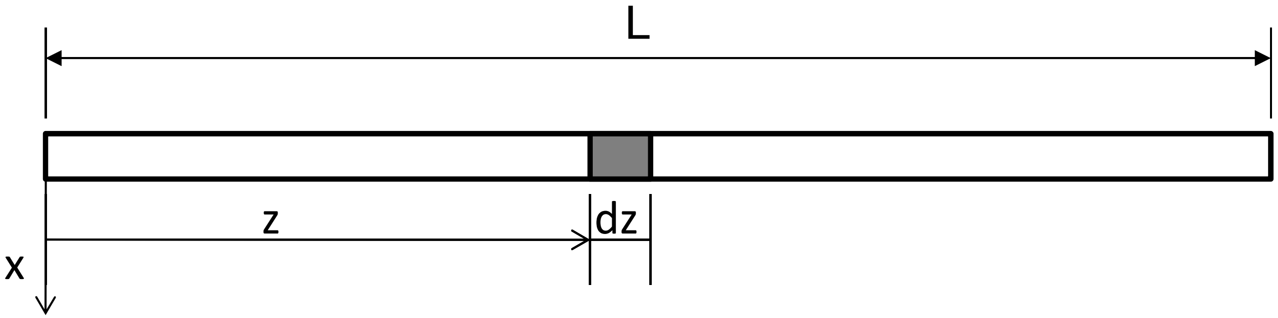
$$\frac{\partial T}{\partial z} = -EJv^{IV}$$

$$\rho A \ddot{v} = -EJv^{IV}$$

$$\ddot{v} = -k^2 v^{IV}$$

$$k = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

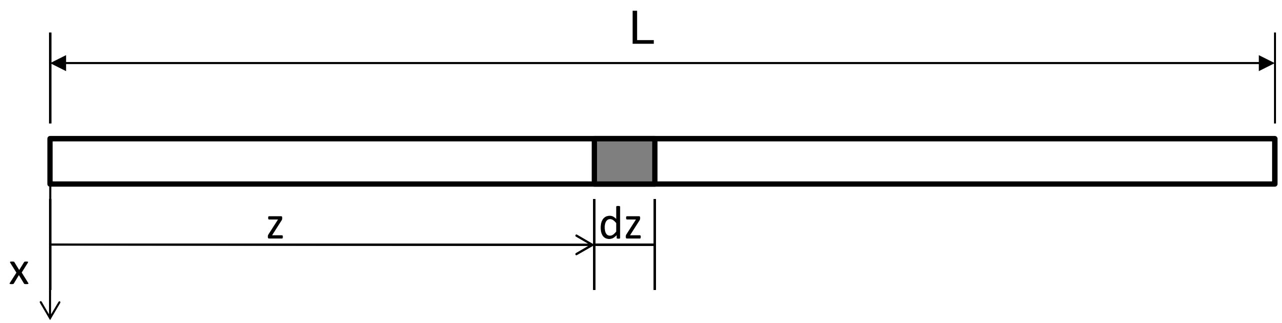
SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$\ddot{v} = k^2 v^{IV} \longrightarrow v(z,t) = Z(z)T(t)$$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2 \frac{Z^{IV}}{Z}$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$k^2 Z^{IV} - \omega^2 Z = 0$$

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$T(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$$

$$Z^{IV} - \frac{\omega^2}{\nu^2} Z = Z^{IV} - \chi^4 Z = 0 \qquad dove \ \chi = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

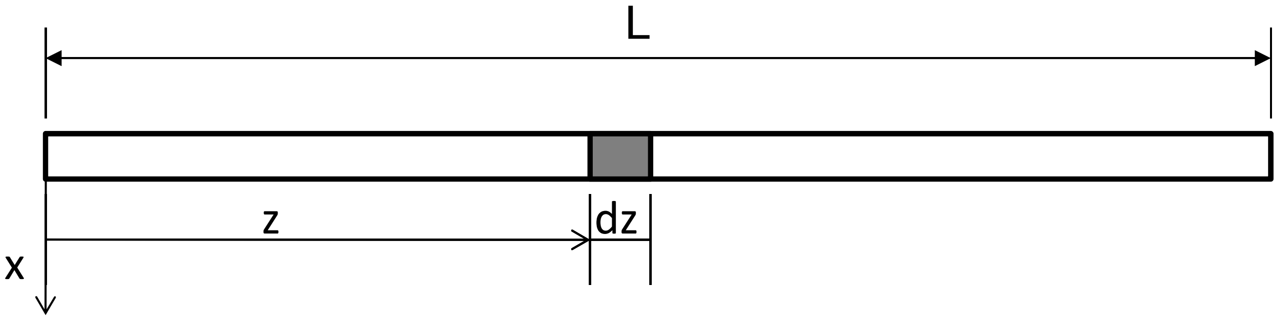
$$s^4 - \chi^4 = 0$$

$$s = \pm\chi; \pm i\chi$$

$$Z(z) = C_1 \cdot e^{\chi z} + D_1 \cdot e^{-\chi z} + E_1 \cdot e^{i\chi z} + F_1 \cdot e^{-i\chi z}$$

$$Z(z) = C \cdot \cos(\chi z) + D \cdot \sin(\chi z) + E \cdot \cosh(\chi z) + F \sinh(\chi z)$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave incastrata agli estremi

$$v(0) = v^{I}(0) = v(L) = v^{I}(L) = 0$$

$$Z(0) = Z^{I}(0) = Z(L) = Z^{I}(L) = 0$$

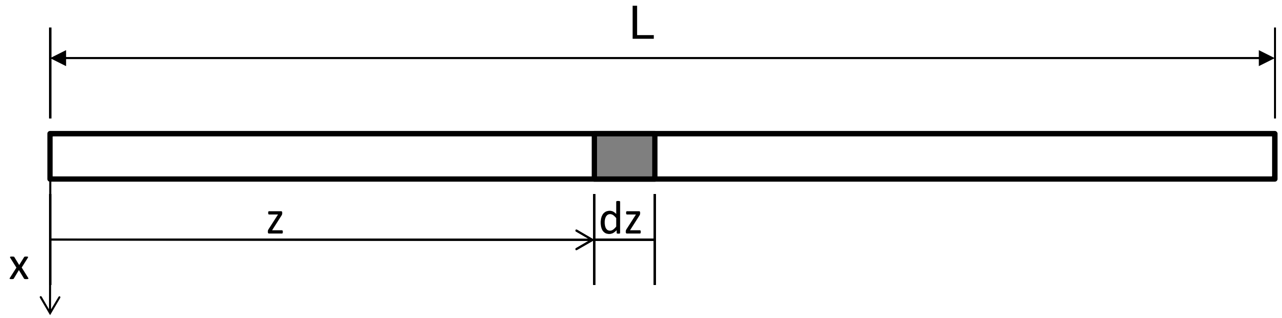
$$Z(0) = C + E = 0 \qquad\qquad C = -E$$

$$Z^{I}(0) = D + F = 0 \qquad\qquad D = -F$$

$$C(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L)) + D(\sin(\chi L) - \sinh(\chi L)) = 0$$

$$\chi\left[-C(\sin(\chi L) + \sinh(\chi L)) + D(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L))\right] = 0$$

SISTEMI CONTINUI
TRAVE SOGGETTA A VIBRAZIONI FLESSIONALI



Trave libera nello spazio

$$v^{II}(0) = v^{III}(0) = v^{II}(L) = v^{III}(L) = 0$$

$$Z^{II}(0) = Z^{III}(0) = Z^{II}(L) = Z^{III}(L) = 0$$

$$Z^{II}(0) = -C + E \;\; = 0 \qquad\qquad C = E$$

$$Z^{III}(0) = -D + F \;\; = 0 \qquad\qquad D = F$$

$$\chi^2\left[C(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L)) + D(\sin(\chi L) - \sinh(\chi L))\right] = 0$$

$$\chi^2\left[-C(\sin(\chi L) + \sinh(\chi L)) + D(\cos(\chi L) - \cosh(\chi L))\right] = 0$$