SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema non smorzato con forzante :

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione lo sviluppo in base alle forme modali:

$$\{x(t)\}=[Y]\{q_i\}$$

$$[M][Y]\{\ddot{q}\}+[K][Y]\{q\}=\{F(t)\}$$

e pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale:

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}\}+[Y]^T[K][Y]\{q\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}\}+[Y]^T[K][Y]\{q\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & - & 0\\ 0 & \omega_2^2 & - & 0\\ - & - & - & 0\\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2\end{bmatrix}\{q_i\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di “n” equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2 q_i=\{Y_i\}^T\{F(t)\}=f_i$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

Nel caso la forzante esterna abbia andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

$$-\Omega_j^2 Q_j + \omega_j^2 Q_j = f_j$$

$$\boxed{Q_j = \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right)}}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE

$$\boxed{Q_j = \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right)}}$$

La soluzione generale risulta quindi data da:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^{N} Q_j \left\{Y^{(j)}\right\} e^{i\Omega t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right)} \left\{Y^{(j)}\right\} e^{i\Omega t} =$$

ed è costituita dalla sovrapposizione di N oscillatori armonici elementari ad 1 gdl:

$$\{x(t)\} = [Y]\{Q\} e^{i\Omega t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right)} \left\{Y^{(j)}\right\} e^{i\Omega t}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE – CEDEVOLEZZA DINAMICA

Risulta utile formalizzare il comportamento generale del sistema attraverso una **matrice di cedevolezza dinamica**. Posto:

$$\{F(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t} \qquad \{x(t)\} = \{X\}e^{i\Omega t}$$

Si definisce matrice di cedevolezza dinamica la matrice α_{ij}:

$$\{X\} = \lfloor \alpha_{ij}(\Omega) \rfloor \{F\}$$

Dall'equazione di equilibrio dinamico si ha:

$$\left([K] - \Omega^2 [M]\right)\{X\} = \{F\}$$

Per cui:

$$\left([K] - \Omega^2 [M]\right) = \left[\alpha_{ij}(\Omega)\right]^{-1}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. NON SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
METODO DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE – CEDEVOLEZZA DINAMICA

$$\left([K]-\Omega^2[M]\right)=\left[\alpha_{ij}(\Omega)\right]^{-1}$$

$$[Y]^T\left[\alpha_{ij}(\Omega)\right]^{-1}[Y]=[Y]^T\left([K]-\Omega^2[M]\right)[Y]$$

$$[Y]^T\left[\alpha_{ij}(\Omega)\right]^{-1}[Y]=diag\left[\omega_j^2-\Omega^2\right]$$

$$\left[\alpha_{ij}(\Omega)\right]^{-1}=\left([Y]^T\right)^{-1}diag\left[\omega_j^2-\Omega^2\right][Y]^{-1}$$

$$\left[\alpha_{ij}(\Omega)\right]=[Y]diag\left[\omega_j^2-\Omega^2\right]^{-1}[Y]^T$$

$$\boxed{\alpha_{ij}(\Omega)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{Y_i^{(r)}\right\}\left\{Y_j^{(r)}\right\}}{\omega_r^2-\Omega^2}}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

Si dovrebbero cercare soluzioni del tipo

$$\{x\}=\{Z\}e^{\lambda t}$$
$$\{\dot{x}\}=\lambda\{Z\}e^{\lambda t}$$
$$\{\ddot{x}\}=\lambda^2\{Z\}e^{\lambda t}$$

sostituendo:

$$\lambda^2[M]\{Z\}e^{\lambda t}+\lambda[C]\{Z\}e^{\lambda t}+[K]\{Z\}e^{\lambda t}=0$$

da cui:

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\{Z\}=0$$

Per avere soluzione non banale

$$\det\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)=0$$

Da cui il polinomio caratteristico:

$$\lambda^{2N}+a_1\lambda^{2N-1}+\ldots+a_{2N-1}\lambda^1+a_{2N}=0$$

N coppie di radici (autovalori) λ_j complesse coniugate, che sostituite, forniscono N coppie di autovettori complessi $\{Z_j\}$.
Problema agli autovalori in campo complesso, risolvibile direttamente per piccoli N, o con metodi numerici per N grandi.
Nel seguito saranno presentate delle metodologie di soluzione analitica, finalizzate principalmente a evidenziare le caratteristiche generali del comportamento del sistema.

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CARATTERISTICHE GENERALI DELLA SOLUZIONE

Equazione di equilibrio dinamico

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=0$$

La procedura di soluzione, come è lecito attendersi, è fortemente influenzata dalla natura della matrice [C].

In particolare è opportuno distinguere due casi:

- la matrice [C] viene diagonalizzata dalla matrice modale [Y] **del sistema non smorzato ("Smorzamento Classico" o "Classical Damping")**
- la matrice [C] **non** viene diagonalizzata dalla matrice modale [Y] **("Smorzamento Non Classico" o "Non Classical Damping")**

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CLASSICAL DAMPING

In generale

Matrice modale sistema non smorzato

$$[Y]^T[C][Y]$$

non è una matrice diagonale, per cui le equazioni del moto non possono essere disaccoppiate .

Se lo smorzamento è molto piccolo, diviene lecito assumere forme diagonalizzabili della matrice di smorzamento. In tal caso si ha **(Smorzamento Classico o "Classical Damping"):**

$$[Y]^T[C][Y] = \begin{bmatrix} c_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{2d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{nd} \end{bmatrix}$$

$$c_{jd} = 2\xi_j \omega_j$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CLASSICAL DAMPING

Ponendo:

$$\{x(t)\} = [Y]\{q_i(t)\} \qquad \{\dot{x}(t)\} = [Y]\{\dot{q}_i\} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = [Y]\{\ddot{q}_i\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [C][Y]\{\dot{q}_i\} + [K][Y]\{q_i\} = 0$$

Premoltiplicando per la trasposta della matrice modale

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{q}_i\} + [Y]^T[C][Y]\{\dot{q}_i\} + [Y]^T[K][Y]\{q_i\} = 0$$

da cui:

$$[I]\{\ddot{q}_i\} + \mathrm{diag}[2\xi_i\omega_i]\{\dot{q}_i\} + \mathrm{diag}[\omega_i^2]\{q_i\} = 0$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CLASSICAL DAMPING

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\mathrm{diag}[2\xi_i\omega_i]\{\dot{q}_i\}+\mathrm{diag}[\omega_i^2]\{q_i\}=0$$

Sistema di N equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i\dot{q}_i+\omega_i^2 q_i=0$$

cui corrispondono autovalori

$$\lambda_i=-\xi_i\omega_i\pm i\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}=-\xi_i\omega_i\pm i\omega_{si}$$

e soluzioni del tipo:

$$q_j(t)=e^{-\xi_i\omega_i t}\left[A_{j1}e^{i\omega_{si}t}+A_{j2}e^{-i\omega_{si}t}\right]$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CLASSICAL DAMPING

Per quanto riguarda gli autovettori (forme modali) si dimostra che, **nel caso di smorzamento classico, coincidono con quelli del sistema non smorzato.**

$$\left([K]-\omega_{nj}^2[M]\right)\left\{Y^{(j)}\right\}=0$$ Sistema non smorzato

$$\left(\lambda_j^2[M]+\lambda_j[C]+[K]\right)\left\{Z^{(j)}\right\}=0$$ Sistema smorzato

Ipotizzando che valga la: $\left\{Z^{(j)}\right\}=\left\{Y^{(j)}\right\}$ si ottiene:

$$\left(\lambda_j^2[M]+\lambda_j[C]+[K]\right)\left\{Y^{(j)}\right\}=\left([K]-\omega_{nj}^2[M]\right)\left\{Y^{(j)}\right\}$$

$$\lambda_j^2[M]\left\{Y^{(j)}\right\}+\lambda_j[C]\left\{Y^{(j)}\right\}=-\omega_{nj}^2[M]\left\{Y^{(j)}\right\}$$

Premoltiplicando per la trasposta della forma modale $\{Y^{(j)}\}$:

$$\lambda_j^2\left\{Y^{(j)}\right\}^T[M]\left\{Y^{(j)}\right\}+\lambda_j\left\{Y^{(j)}\right\}^T[C]\left\{Y^{(j)}\right\}=-\omega_{nj}^2\left\{Y^{(j)}\right\}^T[M]\left\{Y^{(j)}\right\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
CLASSICAL DAMPING

$$\lambda_j^2 \left\{Y^{(j)}\right\}^T [M] \left\{Y^{(j)}\right\} + \lambda_j \left\{Y^{(j)}\right\}^T [C] \left\{Y^{(j)}\right\} = -\omega_{nj}^2 \left\{Y^{(j)}\right\}^T [M] \left\{Y^{(j)}\right\}$$

$$\lambda_j^2 + 2\xi_j \omega_{nj} \lambda_j + \omega_{nj}^2 = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_{nj} \pm \sqrt{\left(\xi_j \omega_{nj}\right)^2 - \omega_{nj}^2} = -\xi_j \omega_{nj} \pm \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

Si dimostra quindi che il problema agli autovalori del sistema smorzato è soddisfatto dagli autovettori del sistema non smorzato e da autovalori dati dalla relazione precedente.

$$\left(\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]\right) \left\{Y^{(j)}\right\} = 0$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_{nj} \pm \omega_{nj} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Si dimostra che la matrice di smorzamento è diagonalizzabile se:

$$[C] = [M]\sum_{l=0}^{m} \alpha_l \left([M]^{-1}[K]\right)^l$$

Se si pone m=1, si ottiene il cosiddetto **smorzamento proporzionale** (o di Rayleigh).

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Combinando:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

con:

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [M]\{Y_r\} = 0 & per\ "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [M]\{Y_r\} = 1 & per\ "s" = "r" \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Y_s\}^T [K]\{Y_r\} = 0 & per\ "s" \neq "r" \\ \{Y_s\}^T [K]\{Y_r\} = \omega_r^2 & per\ "s" = "r" \end{cases}$$

si ottiene:

$$c_{jd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
UN CASO DI CLASSICAL DAMPING - SMORZAMENTO PROPORZIONALE

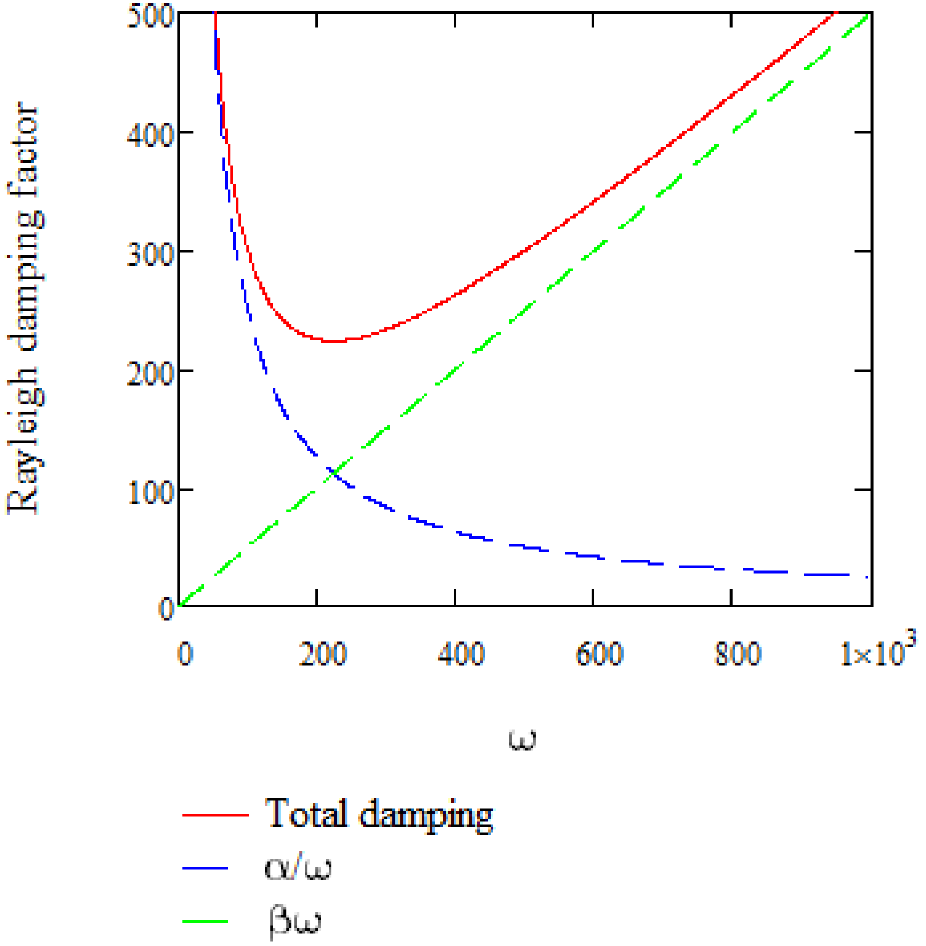
$$c_{jd} = \alpha + \beta\omega_r^2$$

Combinando con : $c_{jd} = 2\xi_j\omega_j$

si ottiene:

$$2\xi_r\omega_r = \alpha + \beta\omega_r^2$$

$$\xi_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_r} + \beta\omega_r\right)$$



SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
CLASSICAL DAMPING

L'equazione di equilibrio dinamico per il sistema smorzato con forzante esterna:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio dinamico:

$$\{x(t)\}=[Y]\{q_i\}$$

pre-moltiplicando per la trasposta della matrice modale, qualora la matrice C sia diagonalizzabile, si ottiene:

$$[I]\{\ddot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \xi_1\omega_1 & 0 & - & 0 \\ 0 & \xi_2\omega_2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n\omega_n \end{bmatrix}\{\dot{q}_i\}+\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & - & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}\{q_i\}=[Y]^T\{F(t)\}$$

che costituisce un sistema di "n" equazioni indipendenti (disaccoppiate) del tipo:

$$\ddot{q}_i+2\xi_i\omega_i q_i+\omega_i^2 q_i=\{Y_i\}^T\{F(t)\}=f_i$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
CLASSICAL DAMPING

Nel caso la forzante esterna abbia andamento nel tempo di tipo armonico:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j q_j + \omega_j^2 q_j = f_j e^{i\Omega t}$$

Assumendo una soluzione del tipo:

$$q_j(t) = Q_j e^{i\Omega t}$$

Si ottiene:

$$-\Omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} + 2i\xi_j\omega_j\Omega_j Q_j e^{i\Omega t} + \omega_j^2 Q_j e^{i\Omega t} = f_j e^{i\Omega t}$$

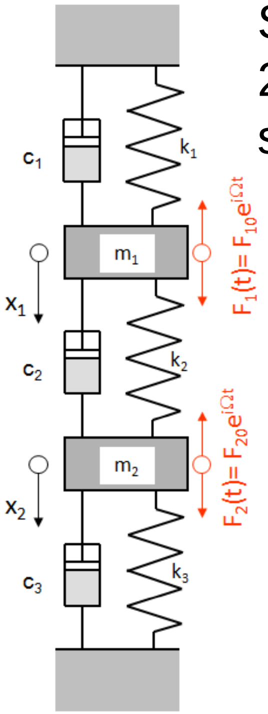
$$\boxed{Q_j = \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right) + 2i\xi_j\omega_j\Omega_j}}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
CLASSICAL DAMPING

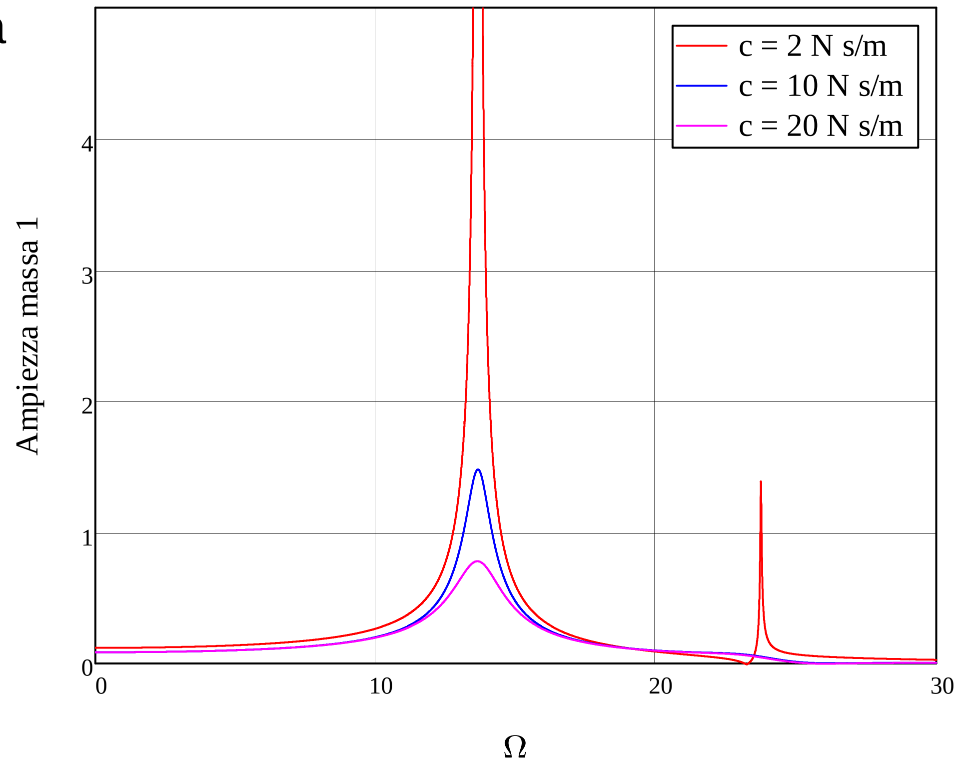
La soluzione completa assume quindi una forma del tipo:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega_j^2\right) + 2i\xi_j \omega_j \Omega_j} \left\{Y^{(j)}\right\} e^{i\Omega t}$$

ovvero la somma del contributo di N oscillatori ad 1 gdl, ognuno corrispondente ad uno dei modi propri.

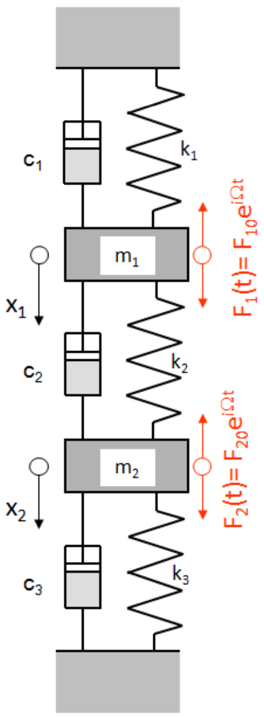


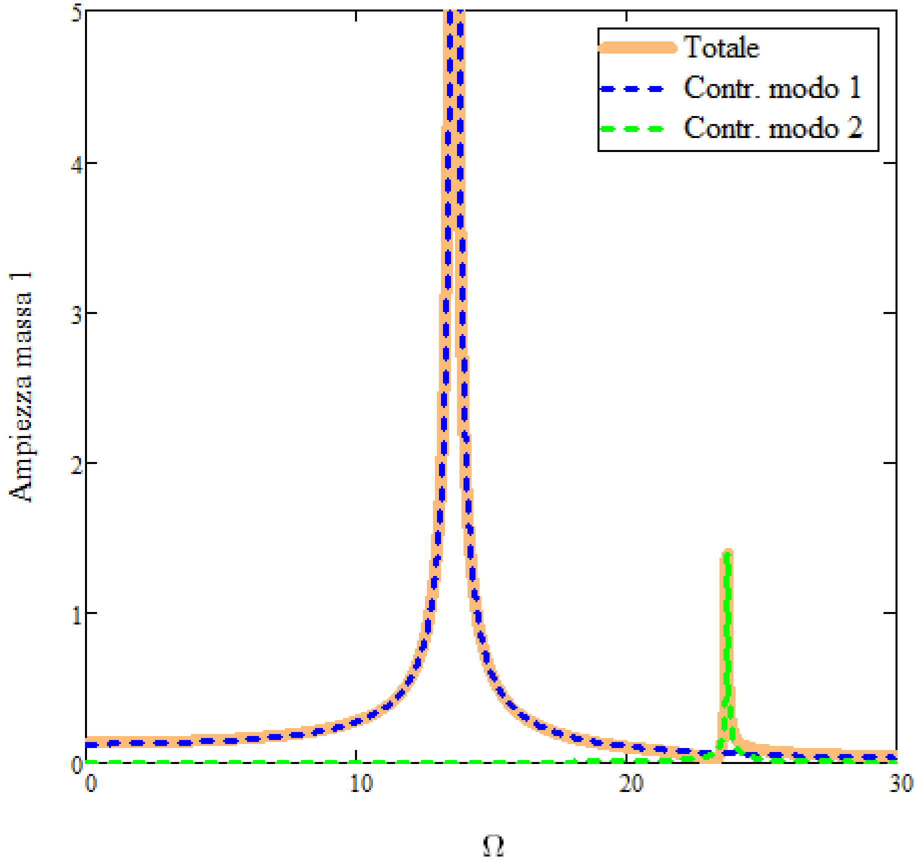
Sistema forzato a 2 gdl – effetto smorzamento



SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
CLASSICAL DAMPING

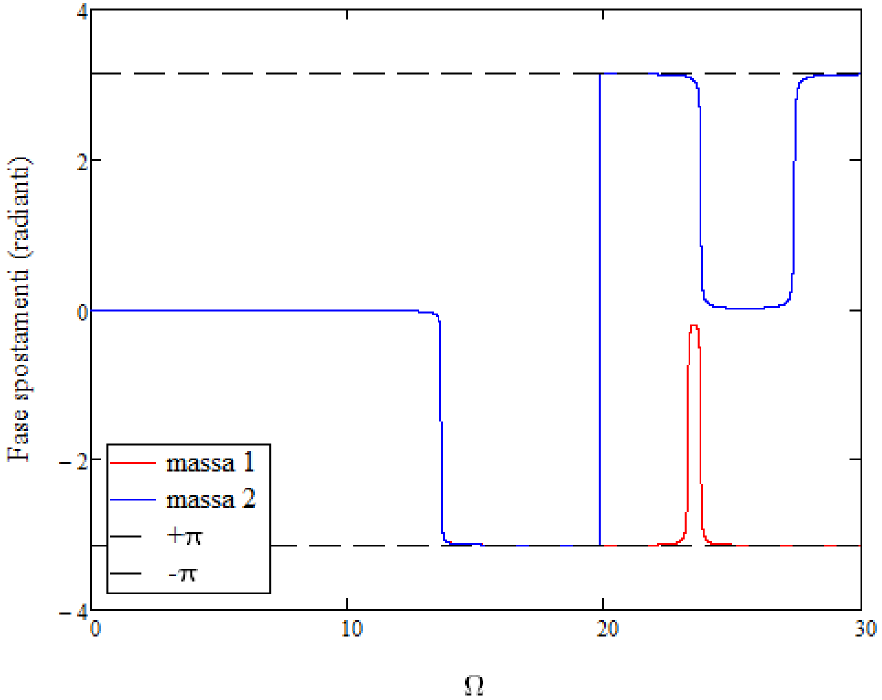
Contributo dei due modi propri

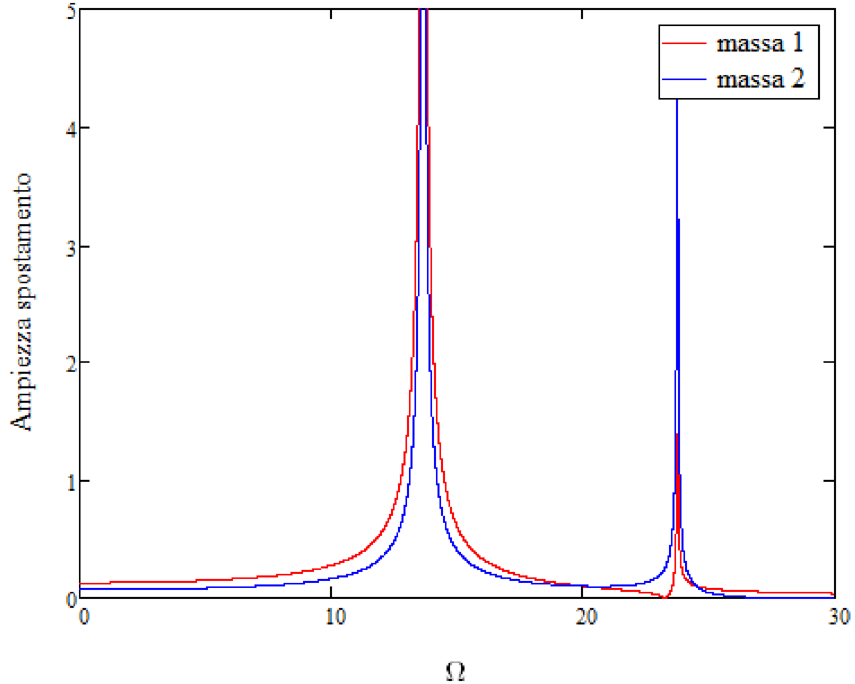


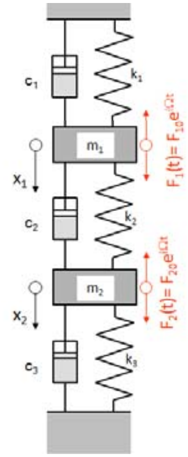


SISTEMA A MOLTI G.D.L. SMORZATO – OSCILLAZIONI FORZATE
CLASSICAL DAMPING

Andamento modulo e fase spostamenti







SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Se i termini fuori diagonale della matrice

$$[C_d] = [Y]^T [C][Y]$$

sono trascurabili, si può assumere per essa una forma diagonale, nella quale lo smorzamento di ogni modo viene generalmente ottenuto direttamente per via sperimentale

$$[C_d] \approx \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n \end{bmatrix} \qquad n \le N$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Una quantificazione dell'importanza relativa dei termini fuori diagonale è data dal cosiddetto **Coefficiente di Accoppiamento**:

$$[C_d] = \begin{bmatrix} c_{d11} & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & c_{dii} & .. & c_{dij} & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & c_{djj} & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & c_{dNN} \end{bmatrix}$$

$$\Xi = \max\left(\frac{c_{dij}^2}{c_{ii} c_{jj}} \right)$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

È possibile verificare quantitativamente l'errore commesso nel trascurare i termini fuori diagonale, nel caso del sistema forzato a 2 gdl.
Si assume una matrice di smorzamento principale del tipo:

$$[C_d] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} \\ -\sqrt{\Xi^2 4\xi^2 \omega_{n1}\omega_{n2}} & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si calcola quindi la risposta del sistema, in termini di un vettore complesso di ampiezze di spostamento, tramite soluzione diretta (esatta) delle equazioni del moto:

$$\{X_{exact}(\xi,\Omega,\Xi)\} = \left([K] + i\Omega[C] - \Omega^2[M]\right)^{-1}\{F\}$$

$$[C] = \left([Y]^T\right)^{-1}[C_d][Y]^{-1}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si calcola quindi la risposta del sistema con il MSM, utilizzando la matrice di spostamento principale seguente (nella quale sono stati trascurati i termini fuori diagonale) :

$$\left[C_d^*\right] = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_{n1} & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_{n2} \end{bmatrix}$$

Si ottiene in tal modo un altro vettore complesso di ampiezze di spostamento

$$\left\{X_{MSM}(\xi,\Omega,\Xi)\right\} = \sum_{j=1}^{N} \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \Omega^2\right) + 2i\xi_j\omega_j\Omega} \left\{Y^{(j)}\right\}$$

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Si definisce quindi un errore percentuale massimo della soluzione ottenuta trascurando i termini fuori diagonale, nella forma :

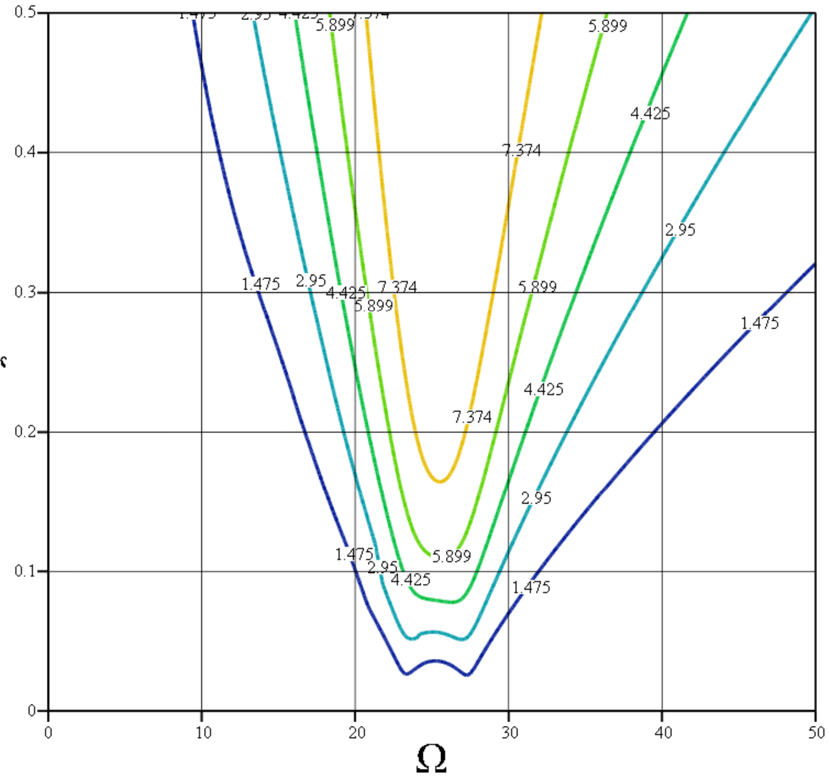
$$Err(\xi,\Omega,\Xi) = \max_{j=1,N}\left(\left|\frac{X_{exact,j}(\xi,\Omega,\Xi) - X_{MSM,j}(\xi,\Omega,\Xi)}{\max_{j=1,N}\left(X_{exact,j}(\xi,\Omega,\Xi)\right)}\right|\cdot 100\right)$$

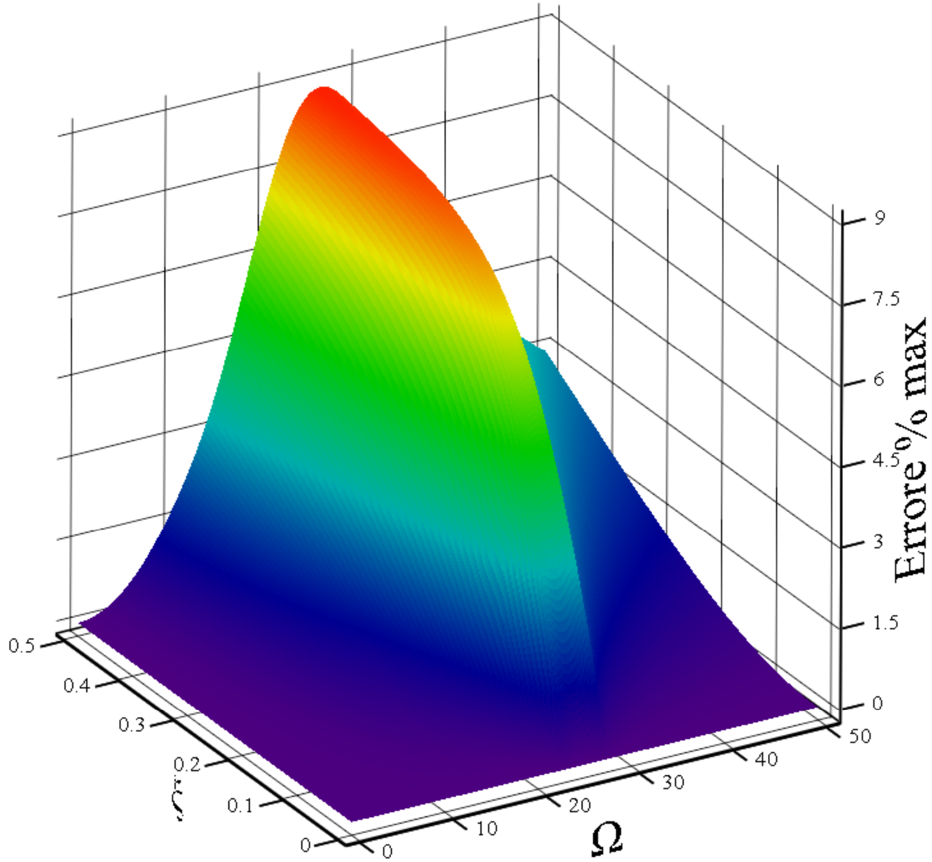
nella quale l'errore assoluto viene rapportato al massimo valore di ampiezza che si verifica, tra tutti i gradi di libertà, per i valori dati di Ω, Ξ ed ξ.

Nel seguito si analizza l'andamento dell'errore, per un sistema a 2 gdl, in un "range" di valori di smorzamento $0 < \xi < 0.5$ e di frequenza $0 < \Omega < 30$ Hz.
Le pulsazioni naturali del sistema sono:
- ω_{n1} = 13.6 Hz
- ω_{n2} = 23.7 Hz

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\Xi = 0.1$$



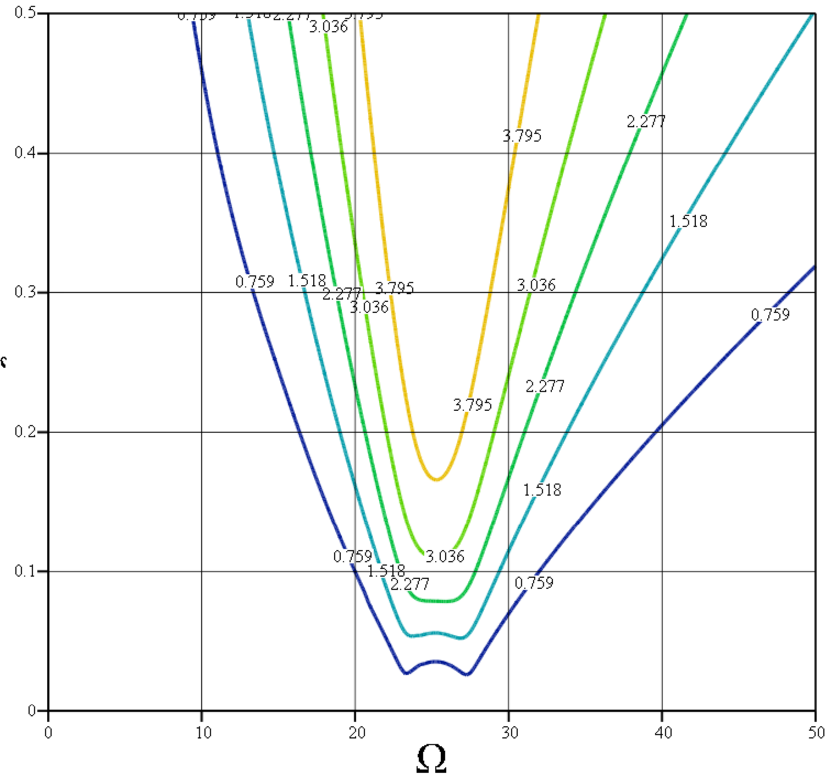


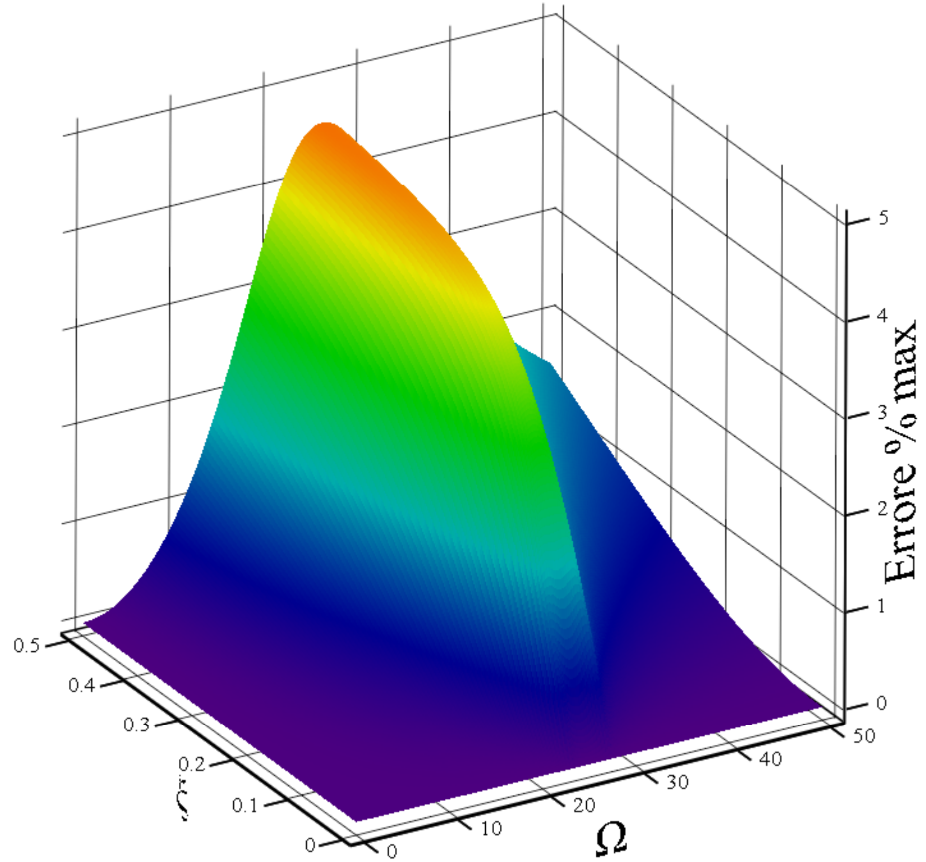
R_X

R_X

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\Xi = 0.05$$



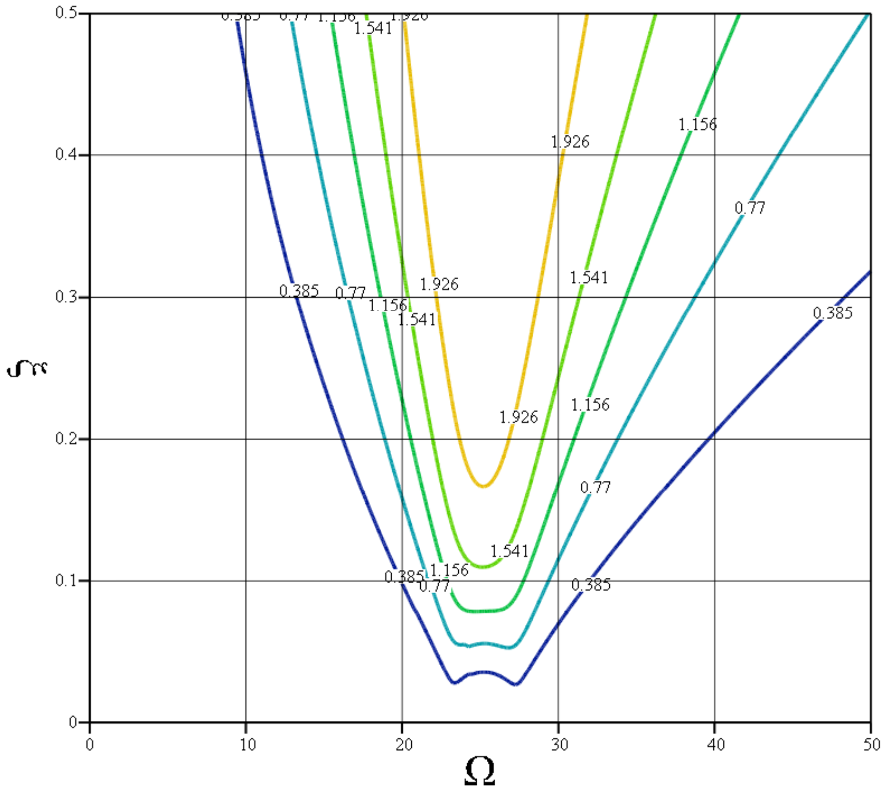


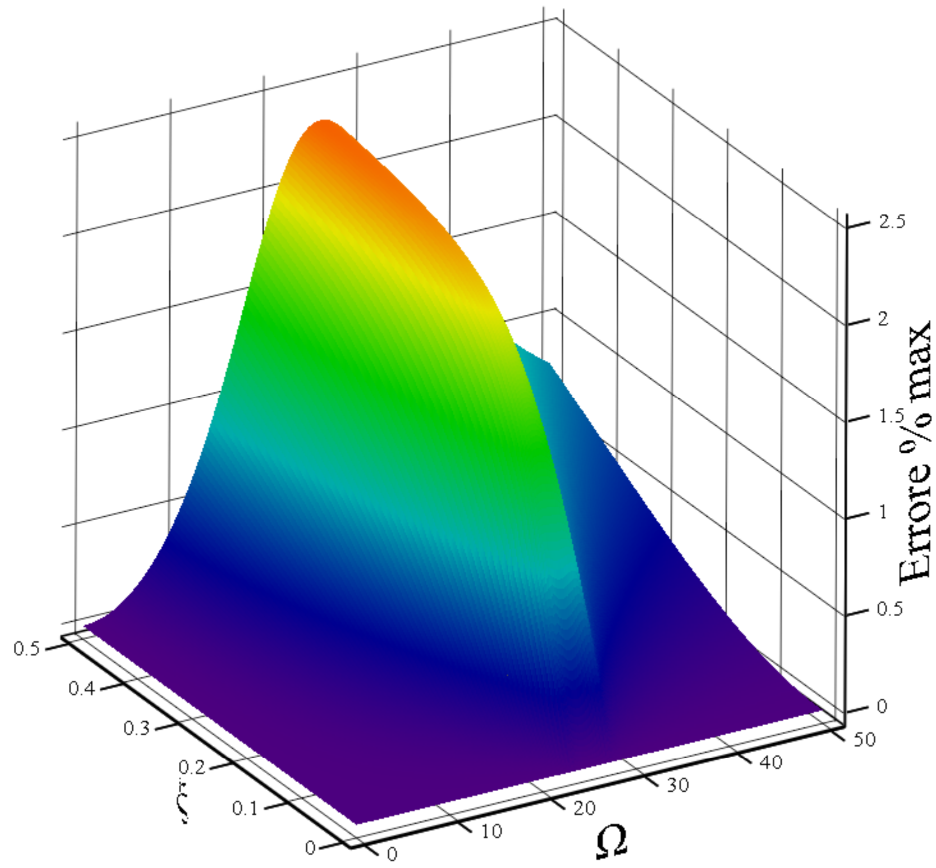
R_X

R_X

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\Xi = 0.025$$

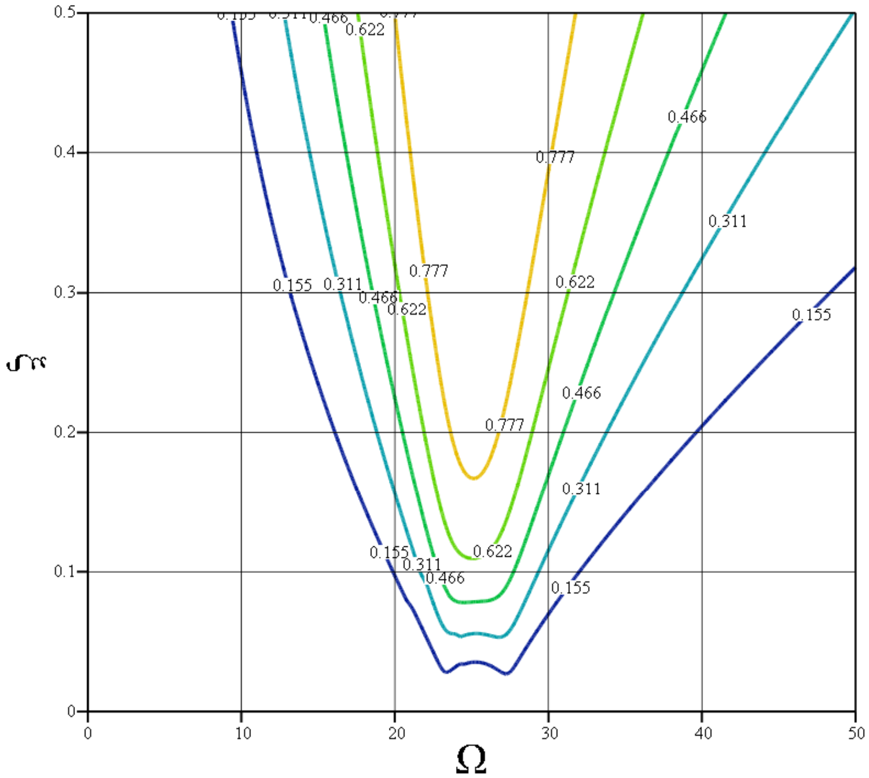


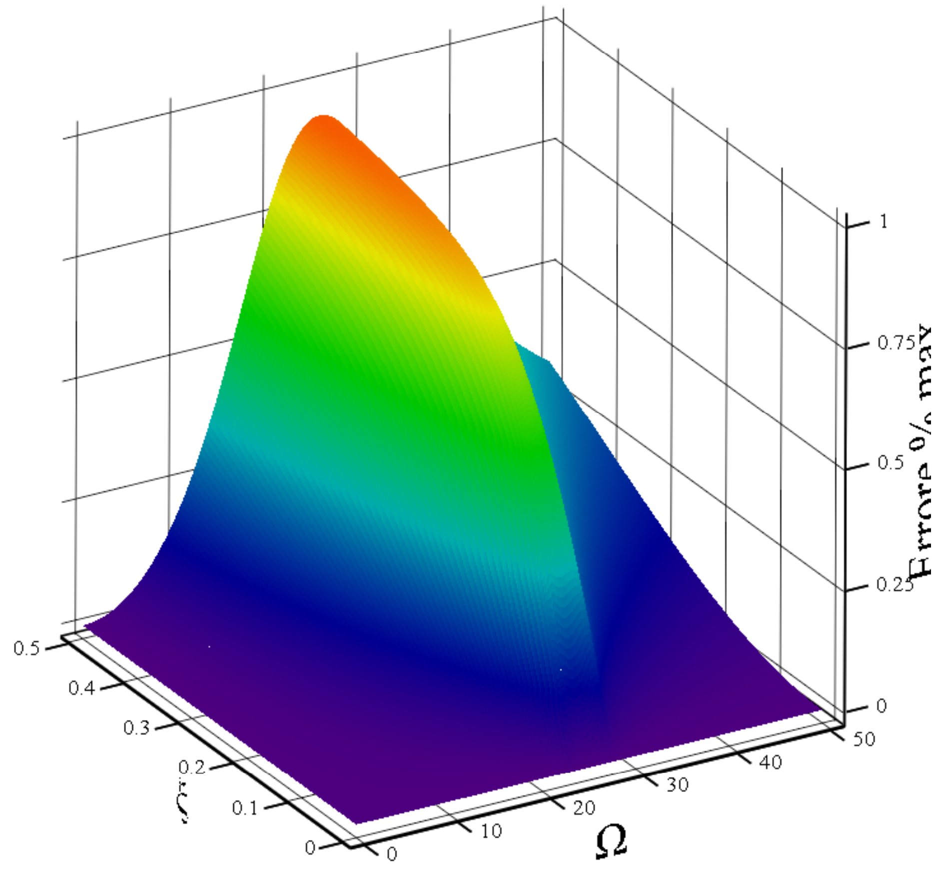


R_X R_X

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

$$\Xi = 0.01$$





R_X R_X

SISTEMA A MOLTI G.D.L. LIBERO SMORZATO
NON CLASSICAL DAMPING – EFFETTO TERMINI FUORI DIAGONALE

Osservazioni:

- l'errore percentuale massimo commesso trascurando i termini fuori diagonale appare dipendere principalmente dal Coefficiente di accoppiamento Ξ, riducendosi a poche unità percentuali su tutto il campo di frequenze e smorzamenti analizzato per $\Xi < 0.01$.
- l'errore percentuale massimo appare dipendente anche dal livello generale di smorzamento ξ, assumendo generalmente valori inferiori a poche unità percentuali per $\xi < 0.1$
- esistono tuttavia delle condizioni (Es: valori di ξ relativamente elevati >0.1-0.2) nelle quali l'errore commesso trascurando i termini fuori diagonale può risultare inaccettabile; in tali condizioni, diventa necessario risolvere direttamente le equazioni del moto accoppiate, ricorrendo all'**Analisi Modale/Armonica Non Classica**, tramite la tecnica detta dello **Spazio delle Variabili di Stato** o dello **Spazio degli Stati**.