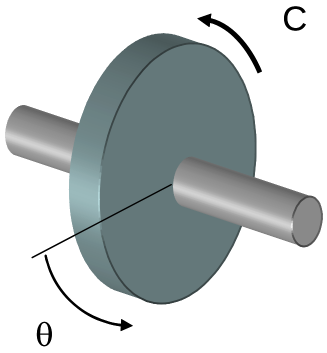
OSCILLAZIONI TORSIONALI

Introduzione
Come è noto, per un corpo di dimensione estesa vincolato a ruotare attorno ad un asse (volano), vale la seguente relazione tra l'accelerazione angolare ed il momento della forze esterne agenti attorno all'asse di rotazione

$$J\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta\right) := C$$



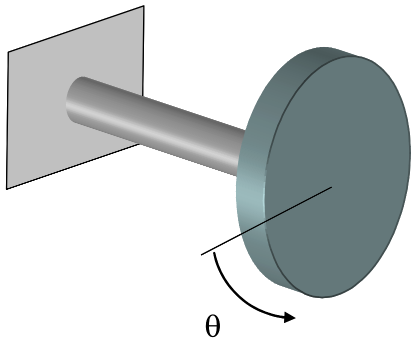
dove:

θ = angolo di rotazione del volano attorno al suo asse
C = momento delle forze esterne attorno all'asse di rotazione
J = momento di inerzia del volano attorno all'asse di rotazione, dato da:

$$J := \int_V \rho \cdot r^2 \, dv$$

in cui: V = volume del corpo
ρ = densità
r = distanza dall'asse di rotazione dell'elemento di volume

Volano con albero incastrato ad un estremo
Si consideri adesso un volano, posto ad uno dei due estremi di un albero privo di massa, vincolato all'altro estremo con un incastro.



Se si sposta il volano dalla sua posizione di equilibrio imprimendogli una rotazione attorno all'asse della trave, quest'ultima reagirà applicando al volano stesso una coppia di reazione data da:

$$C := -k_\theta \cdot \theta$$

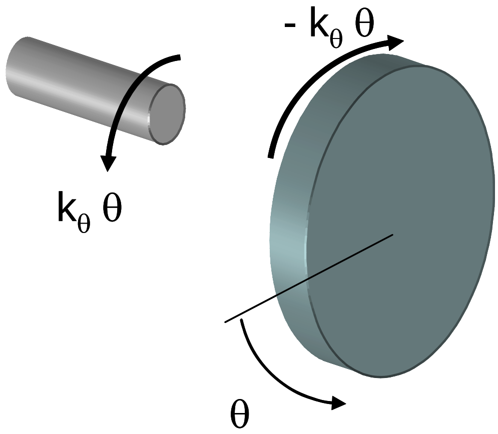
dove: θ = angolo di rotazione

k_θ = rigidezza torsionale dell'albero;

Nel caso di albero a sezione circolare piena di diametro *d* costante e lunghezza totale *L* risulta, come noto dalla teoria delle travi elastiche:

$$k_\theta := \frac{G \cdot J_p}{L}$$

con Jp = momento di inerzia polare della sezione
G = modulo di taglio del materiale dell'albero



Se adesso il volano viene lasciato libero, per esso varrà la seguente equazione di equilibrio dinamico:

$$J \cdot \frac{d^2}{dt^2}\theta := -k_\theta \cdot \theta$$

$$J \cdot \frac{d^2}{dt^2}\theta + k_\theta \cdot \theta := 0$$

L'equazione differenziale trovata può essere facilmente risolta ponendo:

$$\theta(t) := \Theta \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta := -\Theta \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Sostituendo si ottiene:

$$-J \cdot \Theta \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) + k_\theta \cdot \Theta \cdot \cos(\omega \cdot t) := 0$$

semplificando e raccolgiendo a fattor comune Θ:

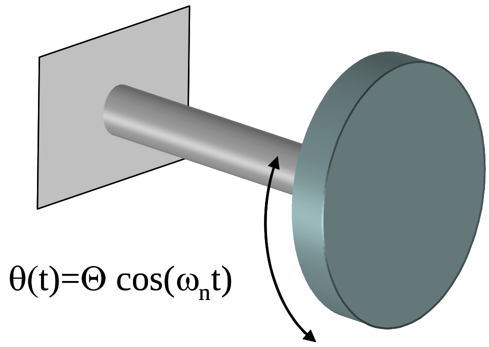
$$\Theta \cdot \left(k_\theta - J \cdot \omega^2\right) := 0$$

Questa equazione può essere soddisfatta per valori non nulli di Θ se e solo se :

$$\omega := \sqrt{\frac{k_\theta}{J}} = \omega_n$$

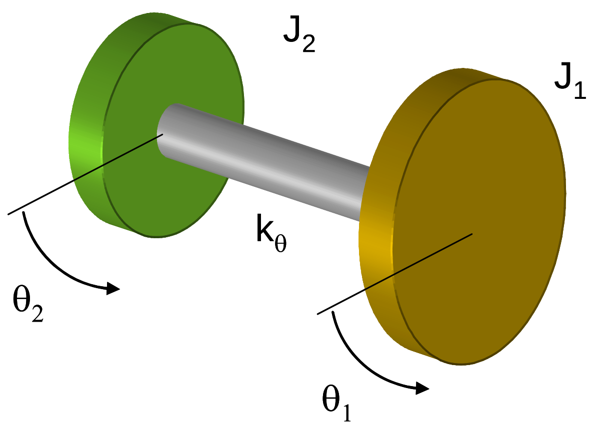
Il volano, disturbato dalla sua posizione di equilibrio, inizia quindi ad oscillare con legge del moto data da :

$$\theta(t) := \Theta \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$



Analogamente al caso del sistema massa-molla, anche in questo caso le oscillazioni sono possibili solo per una particolare pulsazione detta **pulsazione propria (o naturale) torsionale** del sistema.
Allo stesso modo dell'oscillatore armonico lineare ad 1 g.d.l., anche l'oscillatore torsionale può andare incontro a fenomeni di amplificazione dinamica del moto e di risonanza se assoggettato ad una coppia esterna periodica, che funge da forzante.

Coppia di volani connessi da albero
E' interessante studiare poi il caso di due volani connessi da un albero, che può ritersi rappresentativo, almeno in prima approssimazione, del sistema costituito da un motore e da un utilizzatore collegati tra loro.



Se immaginiamo che i due volani, ad un certo istante, mostrino ciasuno una propria rotazione misurata a partire dalla condizione di equilibrio, è possibile scrivere, per ciascuno di essi, una equazione di equilibrio dinamico:

$$J_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\theta_1 + k_\theta \cdot (\theta_1 - \theta_2) := 0$$

$$J_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\theta_2 + k_\theta \cdot (\theta_2 - \theta_1) := 0$$

Assumendo come legge di rotazione nel tempo:

$$\theta_1(t) := \Theta_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\theta_2(t) := \Theta_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

da cui:

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) := -\omega^2 \cdot \Theta_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) := -\omega^2 \cdot \Theta_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Sostituendo nelle equazioni di equilibrio, si ottiene poi:

$$-J_1 \cdot \omega^2 \cdot \Theta_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + k_\theta \cdot (\Theta_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \Theta_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) := 0$$

$$-J_2 \cdot \omega^2 \cdot \Theta_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) + k_\theta \cdot (\Theta_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) - \Theta_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)) := 0$$

Semplificando e risolvendo per le ampiezze di oscillazione:

$$\left(k_\theta - J_1 \cdot \omega^2\right) \cdot \Theta_1 - k_\theta \cdot \Theta_2 := 0$$

$$-k_\theta \cdot \Theta_1 + \left(k_\theta - J_2 \cdot \omega^2\right) \cdot \Theta_2 := 0$$

Il sistema è lineare ed omogeneo, per cui ha soluzione non banale solo se ildeterminante della materice dei coefficienti risulta pari a 0:

$$\left(k_\theta - J_1 \cdot \omega^2\right) \cdot \left(k_\theta - J_2 \cdot \omega^2\right) - k_\theta^2 := 0$$

$$k_\theta^2 - k_\theta \cdot J_1 \cdot \omega^2 - k_\theta \cdot J_2 \cdot \omega^2 + J_1 \cdot J_2 \cdot \omega^4 - k_\theta^2 := 0$$

$$J_1 \cdot J_2 \cdot \omega^4 - k_\theta \cdot (J_1 + J_2) \cdot \omega^2 := 0$$

da cui:

$\omega_0 := 0$ soluzione corrispondente all'albero fermo

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_\theta \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}}$$

Anche il sistema costituito da due volani può quindi oscillare con una propria pulsazione di valore particolare. Sostituendo nelle equazioni di equilibrio il valore di ω_n trovato si ottiene:

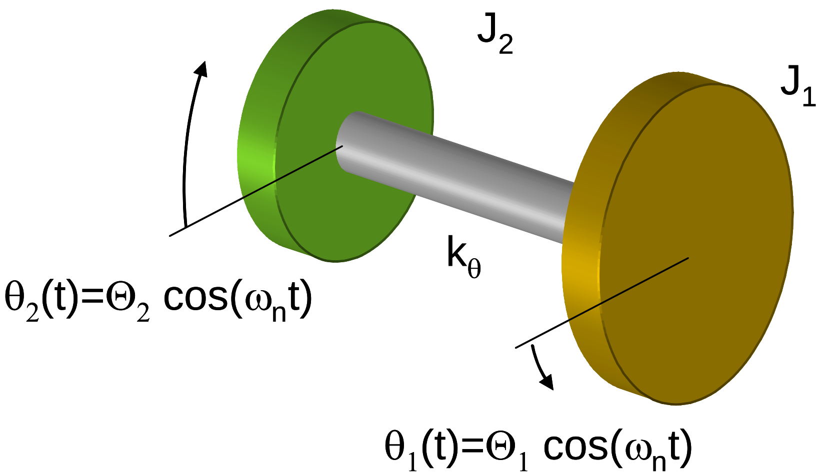
$$\left[k_\theta - J_1 \cdot \frac{k_\theta}{J_1 \cdot J_2} \cdot (J_1 + J_2)\right] \cdot \Theta_1 - k_\theta \cdot \Theta_2 := 0$$

$$k_\theta \cdot J_1 \cdot \Theta_1 := -k_\theta \cdot J_2 \cdot \Theta_2$$

da cui:

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1} := -\frac{J_1}{J_2}$$

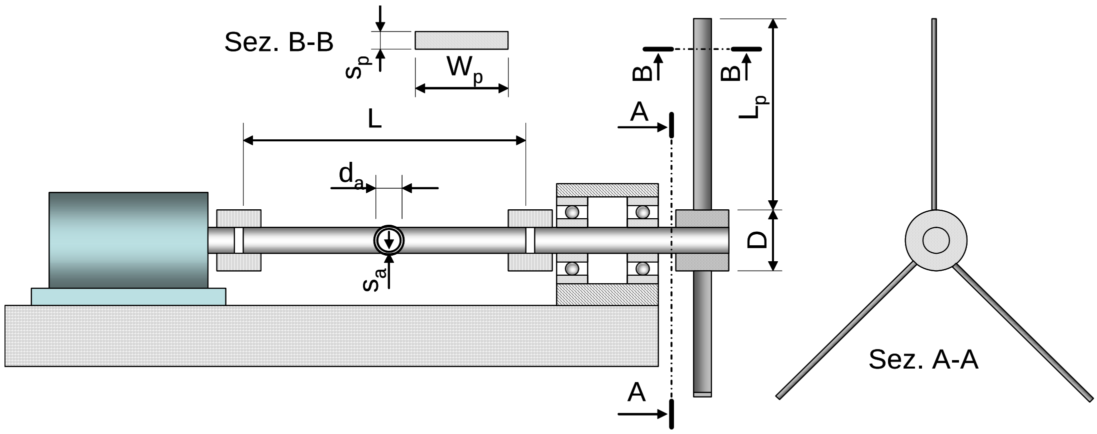
per cui i due volani oscillano **in direzione opposta** e con ampiezze inversamente proporzionali ai rispettivi momenti di inerzia



ESEMPIO APPLICATIVO

Un motore è collegato, tramite un albero elastico a sezione tubolare, ad un ventilatore.
Calcolare la prima frequenza propria torsionale del sistema e la corrispondente velocità critica di rotazione in giri/1'.
Si assumano le seguenti ipotesi

- asse motore, asse elica e giunti torsionalmente rigidi
- momento di inerzia del mozzo e dell'albero trascurabili



DATI

$d_a := 15\cdot mm$ $\quad$ $L := 3000\cdot mm$ $\quad$ $s_a := 1\cdot mm$

$D := 40\cdot mm$

$L_p := 800\cdot mm$ $\quad$ $W_p := 80\cdot mm$ $\quad$ $s_p := 5\cdot mm$

$J_m := 0.8\cdot kg\cdot m^2$

$\rho := 7850\cdot\frac{kg}{m^3}$ densità materiale pale (acciaio)

$E := 80000\cdot MPa$ modulo elastico materiale albero di trasmssione (alluminio)

$\nu := 0.3$ Coefficiente di Poisson

MOMENTO DI INERZIA DELL'ELICA

Si calcola il momento di inerzia dell'elica, ipotizzando trascurabili i contributi del mozzo e dell'albero e considerando quindi il solo contributo delle pale.
Il momento di inerzia della singola pala è dato da:

$$J_p := \left(\int_V \rho\cdot r^2\,dv\right)$$

dove r è la distanza dall'asse di rotazione del volumetto elementare dv, e l'integrale è esteso all'intero volume di una singola pala.
Nel caso specifico, si può ottenere il momento d'inerzia del ventilatore come il triplo del momento della singola pala:

$$J_v := 3\left(\int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}+L_p} \rho \cdot W_p \cdot s_p \cdot r^2 \, dr\right) \qquad J_v = 1.731\ kg \cdot m^2$$

RIGIDEZZA TRASMISSIONE

Nelle ipotesi fatte, l'unico elemento deformabile della trasmissione risulta essere l'albero cavo intermedio. Dalla teoria delle travi soggette a torsione si ha:

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \qquad G = 3.077 \times 10^4\ MPa$$

$$J_0 := \frac{\pi}{32} \cdot \left[d_a^{\,4} - \left(d_a - 2s_a\right)^4\right]$$

$$k_\theta := \frac{G \cdot J_0}{L} \qquad k_\theta = 22.217\ N \cdot m$$

CALCOLO PULSAZIONE PROPRIA

La pulsazione propria torsionale del sistema costituito dai due volani connessi dall'albero di trasmissione è data da:

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k_\theta \cdot \left(J_m + J_v\right)}{J_m \cdot J_v}} \qquad \omega_n = 6.372\ \frac{1}{s}$$

La corrispondente velocità di rotazione dell'albero in giri al minuto è data da:

$$n_m := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} \cdot 60 \qquad n_m = 3.651 \times 10^3\ \frac{1}{min}$$