

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA

CORSO DI MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE

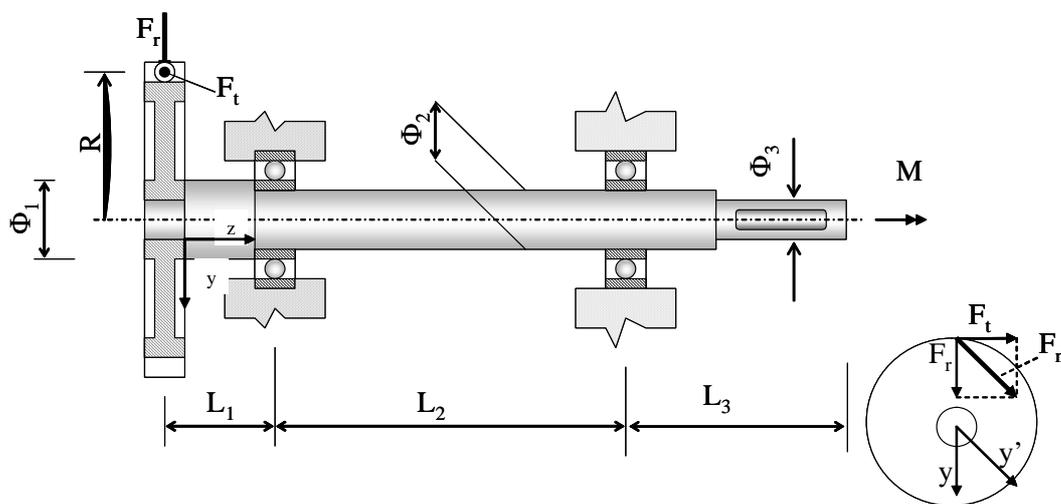
ANNO ACCADEMICO 2005-6

VERIFICA DI RIGIDEZZA DI ALBERO

E' dato l'albero riportato in Figura, recante all'estremità una ruota dentata a denti dritti che trasmette una potenza W ad una velocità di rotazione di n giri/min

Per un corretto funzionamento, si richiede che:

- il punto di applicazione della forza alla ruota dentata non subisca uno spostamento verticale superiore a 0.1 mm
- le sezioni dell'albero in corrispondenza della mezzeria dei cuscinetti non subiscano rotazioni maggiori di $10'$.

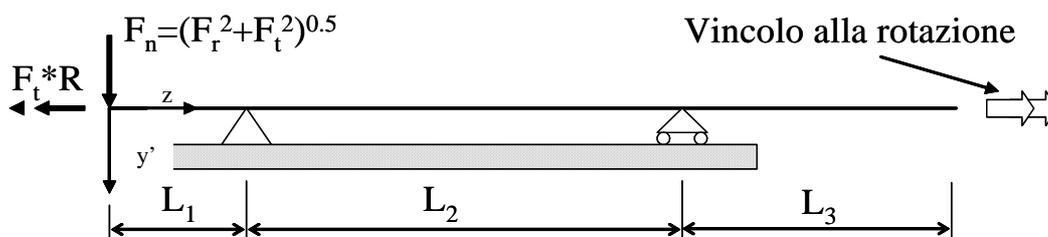


SCHEMA DI CALCOLO

Nel mettere a punto il modello di calcolo, conviene considerare un nuovo sistema di riferimento $x'-y'-z'$, ruotato rispetto a quello $x-y-z$ in modo da rendere l'asse y' parallelo alla forza complessiva applicata F_n .

L'uso di questo SR è particolarmente conveniente in quanto in esso è presente un solo taglio ($T_{y'}$) ed un solo momento flettente ($M_{x'}$).

Fissato il nuovo SR, l'albero viene schematizzato come una trave semplicemente appoggiata, con l'estremità vincolata a torsione.



DATI DEL PROBLEMA

$$L_1 := 50 \cdot \text{mm}$$

$$L_2 := 250 \cdot \text{mm}$$

$$L_3 := 100 \cdot \text{mm}$$

$$\phi_1 := 30 \cdot \text{mm}$$

$$\phi_2 := 20 \cdot \text{mm}$$

$$\phi_3 := 15 \cdot \text{mm}$$

$$R := 20 \cdot \text{mm}$$

$$\alpha := 20 \cdot \text{deg}$$

$$E := 210000 \cdot \text{MPa}$$

Modulo elastico materiale (acciaio)

$$\nu := 0.3$$

Coefficiente di Poisson materiale

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$G = 8.077 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$W := 1 \cdot \text{kW}$$

Potenza trasmessa

$$\text{rpm} := \frac{1}{\text{min}}$$

$$n := 1200 \cdot \text{rpm}$$

Velocità di rotazione

CALCOLO FORZE E MOMENTI

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$\omega = 125.664 \frac{1}{\text{s}}$$

Velocità angolare

$$M := \frac{W}{\omega}$$

$$M = 7.958 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Coppia trasmessa

$$F_t := \frac{M}{R}$$

$$F_t = 397.887 \text{ N}$$

Forza tangenziale

$$F_r := F_t \cdot \tan(\alpha)$$

$$F_r = 144.819 \text{ N}$$

Forza radiale

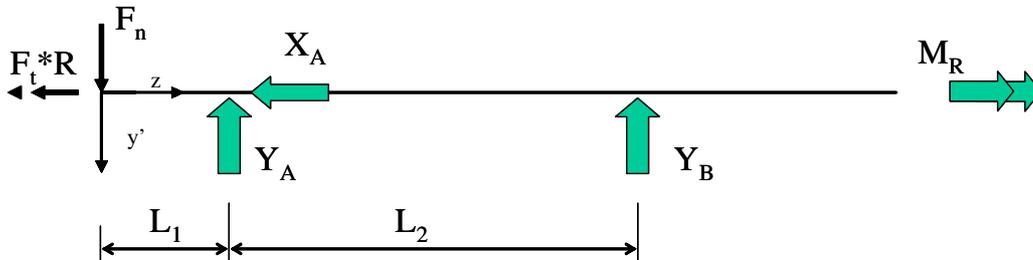
$$F_n := \sqrt{F_r^2 + F_t^2}$$

$$F_n = 423.423 \text{ N}$$

Forza totale

CALCOLO REAZIONI VINCOLARI

Lo schema della struttura con i carichi applicati (la forza F_n è stata riportata all'asse aggiungendo il momento di trasporto, coincidente con il momento trasmesso dall'albero) e con le reazioni vincolari incognite è mostrato in Figura. Le reazioni possono essere calcolate con le equazioni cardinali della statica, dato che la struttura è isostatica.



$$Y_A := 0 \quad X_A := 0 \quad Y_B := 0 \quad M_R := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow X_A = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_A + Y_B - F_n = 0$$

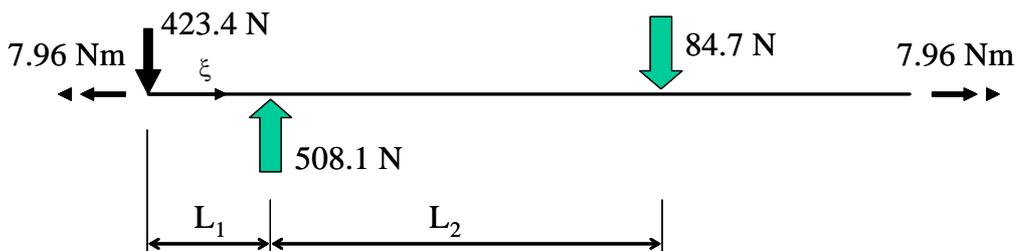
$$M_{X_A} = 0 \rightarrow Y_B \cdot L_2 + F_n \cdot L_1 = 0$$

$$M_Z = 0 \rightarrow M_R - F_t \cdot R = 0$$

$$\begin{pmatrix} Y_A \\ X_A \\ Y_B \\ M_R \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_A, X_A, Y_B, M_R)$$

$$Y_A = 508.107 \text{ N} \quad X_A = 0 \text{ N} \quad Y_B = -84.685 \text{ N} \quad M_R = 7.958 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero con forze applicate e con indicazione della coordinata curvilinea ξ .



METODOLOGIA DI CALCOLO DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO

Lo spostamento del punto di applicazione della forza F_n può essere ottenuto tramite considerazioni di bilancio energetico, essendo la forza stessa l'unica applicata. La rotazione della sezione di mezzeria del cuscinetto A (quella del cuscinetto B può essere ottenuta con una procedura del tutto analoga) può essere calcolato con il metodo degli integrali di Mohr, trascurando il contributo del taglio. Nel seguito si determinano pertanto i diagrammi delle altre caratteristiche di sollecitazione presenti (flessione attorno all'asse x' e torsione) dovute ai carichi esterni ed ad un carico esploratore (momento) unitario.

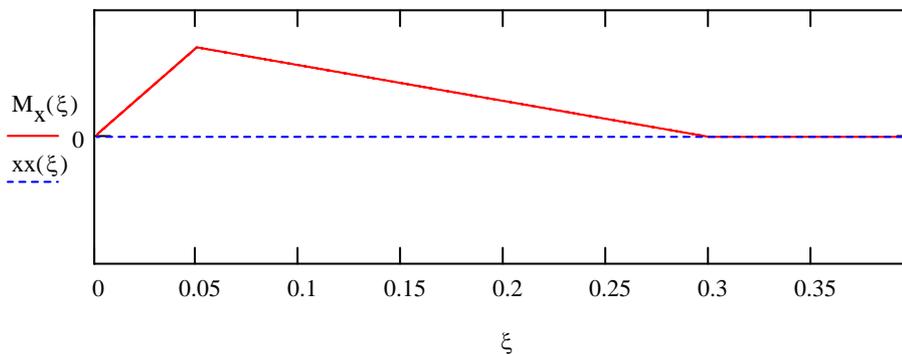
Nel calcolo si farà uso dell'ipotesi semplificativa che il tratto di albero da 0 ad L_1 abbia diametro costante e pari a ϕ_1 , il tratto L_2 diametro costante e pari a ϕ_2 ed il tratto L_3 diametro costante e pari a ϕ_3 .

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

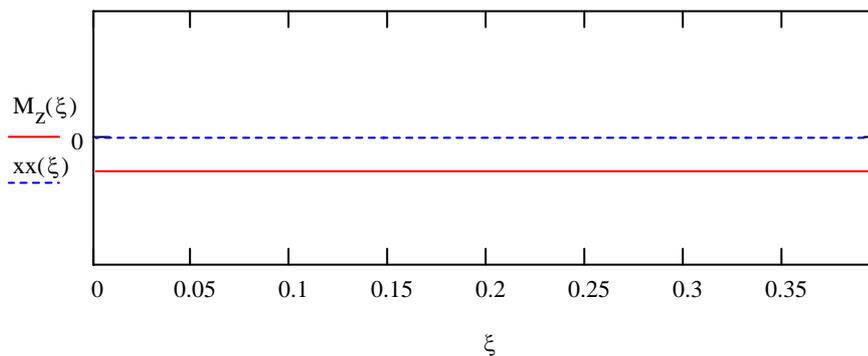
Carichi esterni

Si ottiene il seguente andamento per il momento flettente e torcente.

$$M_x(\xi) := \begin{cases} -423.4 \cdot N \cdot \xi & \text{if } (0 \leq \xi) \leq L_1 \\ -84.685 \cdot N \cdot (L_2 + L_1 - \xi) & \text{if } L_1 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ 0 \cdot N \cdot m & \text{if } \xi \geq L_1 + L_2 \end{cases} \quad xx(\xi) := 0$$



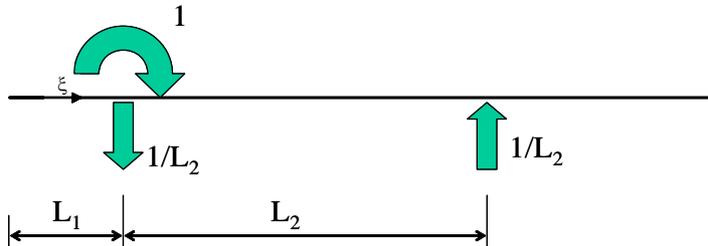
$$M_z(\xi) := 7.96 \cdot N \cdot m$$



Momento esploratore nel punto corrispondente al cuscinetto A

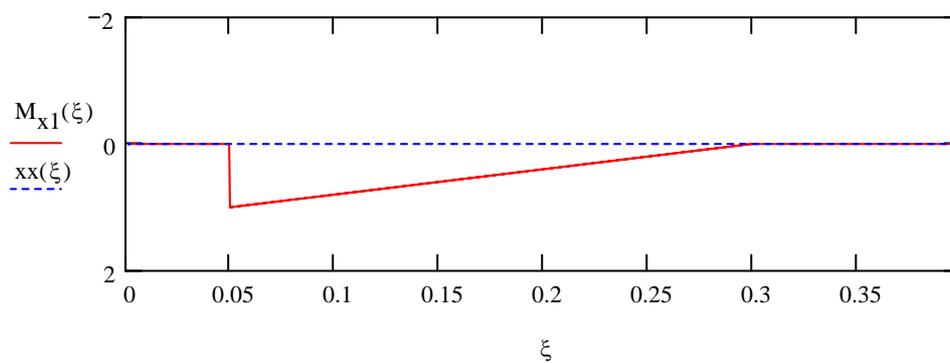
Al fine di determinare la rotazione del punto di mezzeria del cuscinetto A attorno all'asse x' , si applica nel punto stesso un momento unitario.

Si ottiene il seguente diagramma di corpo libero con i relativi carichi applicati.

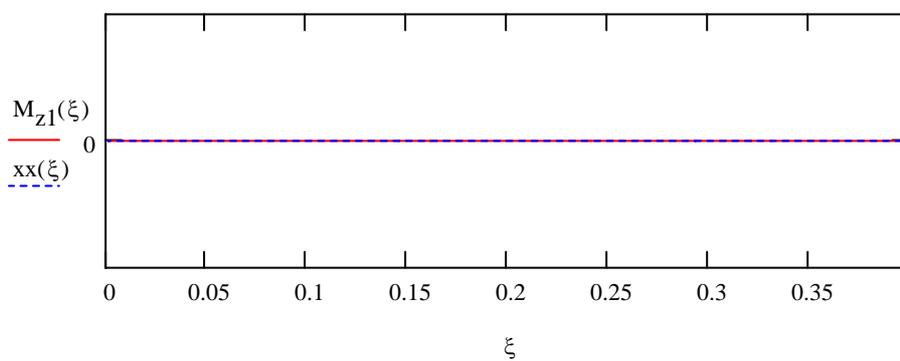


Si ottiene il seguente andamento per il momento flettente e torcente.

$$M_{x1}(\xi) := \begin{cases} 0 \cdot N \cdot m & \text{if } 0 \leq \xi \leq L_1 \\ 1 \cdot N \cdot m - \frac{1 \cdot N \cdot m}{L_2} \cdot (\xi - L_1) & \text{if } L_1 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ 0 \cdot N \cdot m & \text{if } \xi \geq L_1 + L_2 \end{cases}$$



$$M_{z1}(\xi) := 0 \cdot N \cdot m$$



PROPRIETA' DELLE SEZIONI

$$J_{x1} := \frac{\pi \cdot \phi_1^4}{64} \quad J_{x1} = 3.976 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{p1} := \frac{\pi \cdot \phi_1^4}{32} \quad J_{p1} = 7.952 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{x2} := \frac{\pi \cdot \phi_2^4}{64} \quad J_{x2} = 7.854 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{p2} := \frac{\pi \cdot \phi_2^4}{32} \quad J_{p2} = 1.571 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{x3} := \frac{\pi \cdot \phi_3^4}{64} \quad J_{x3} = 2.485 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{p3} := \frac{\pi \cdot \phi_3^4}{32} \quad J_{p3} = 4.97 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DI F_n

Lo spostamento del punto di applicazione di F_n viene calcolato uguagliando il lavoro compiuto dalla forza stessa all'energia elastica immagazzinata nella struttura.

Si noti che quest'ultima comprende anche un contributo dalla torsione.

$$\delta := \frac{1}{F_n} \cdot \left(\int_0^{L_1} \frac{M_x(\xi)^2}{E \cdot J_{x1}} + \frac{M_z(\xi)^2}{G \cdot J_{p1}} d\xi + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_x(\xi)^2}{E \cdot J_{x2}} + \frac{M_z(\xi)^2}{G \cdot J_{p2}} d\xi + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{M_z(\xi)^2}{G \cdot J_{p3}} d\xi \right)$$

$$\delta = 0.124 \text{ mm}$$

CALCOLO DELLA ROTAZIONE DEL PUNTO DI MEZZERIA DEL CUSCINETTO "A"

La rotazione del punto di mezzeria del cuscinetto "A" viene calcolata attraverso gli integrali di Mohr. Si noti che, essendo M_{z1} identicamente nullo, si rende necessario considerare solo il contributo della flessione.

$$\theta := \frac{1}{1 \cdot N \cdot m} \left(\int_0^{L_1} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{E \cdot J_{x1}} d\xi + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{E \cdot J_{x2}} d\xi \right)$$

$$\theta = -1.07 \times 10^{-3} \quad \text{radianti}$$

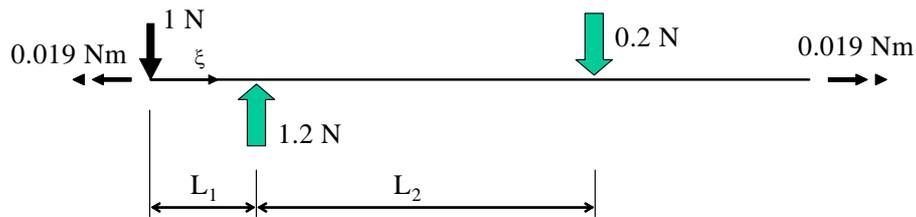
Osservazione: il valore ottenuto è negativo, per cui la rotazione avviene in senso contrario al momento esploratore introdotto.

CALCOLO ALTERNATIVO DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DI F_n

Lo spostamento del punto di applicazione di F_n può essere anch'esso calcolato con il metodo degli integrali di Mohr.

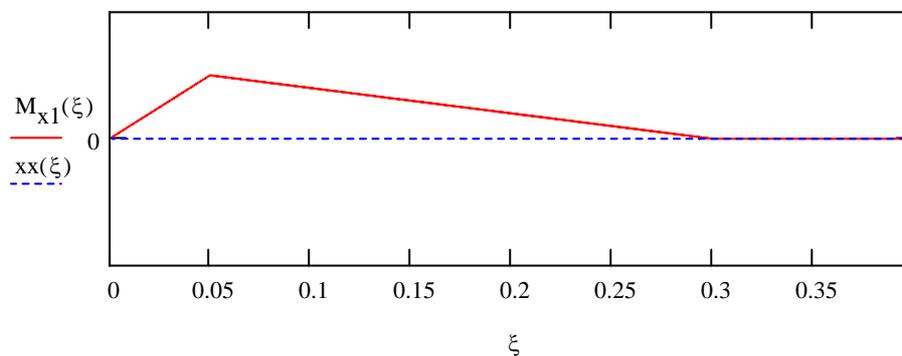
Nel fare questo è necessario ricordare che il carico unitario fittizio deve essere inserito nell'effttivo punto di applicazione di F_n (alla sommità della ruota, per cui viene prodotto anche un momento torcente).

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero con i relativi carichi applicati

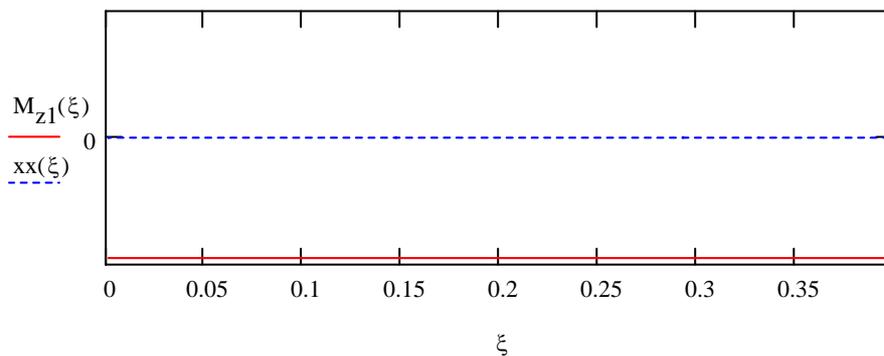


Si ottiene il seguente andamento per il momento flettente e torcente.

$$M_{x1}(\xi) := \begin{cases} -1 \cdot N \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq L_1 \\ -0.2 \cdot N \cdot (L_1 + L_2 - \xi) & \text{if } L_1 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ 0 \cdot N \cdot m & \text{if } \xi \geq L_1 + L_2 \end{cases} \quad \underline{\underline{xx}}(\xi) := 0$$



$$\underline{\underline{M}}_{z1}(\xi) := 0.019 \cdot N \cdot m$$



$$I_1 := \int_0^{L_1} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{E \cdot J_{x1}} + \frac{M_z(\xi) \cdot M_{z1}(\xi)}{G \cdot J_{p1}} d\xi$$

$$I_2 := \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{E \cdot J_{x2}} + \frac{M_z(\xi) \cdot M_{z1}(\xi)}{G \cdot J_{p2}} d\xi$$

$$I_3 := \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{E \cdot J_{x2}} + \frac{M_z(\xi) \cdot M_{z1}(\xi)}{G \cdot J_{p3}} d\xi$$

$$\delta_{\text{MN}} := \frac{1}{1 \cdot N} (I_1 + I_2 + I_3)$$

$$\delta = 0.124 \text{ mm}$$