CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA

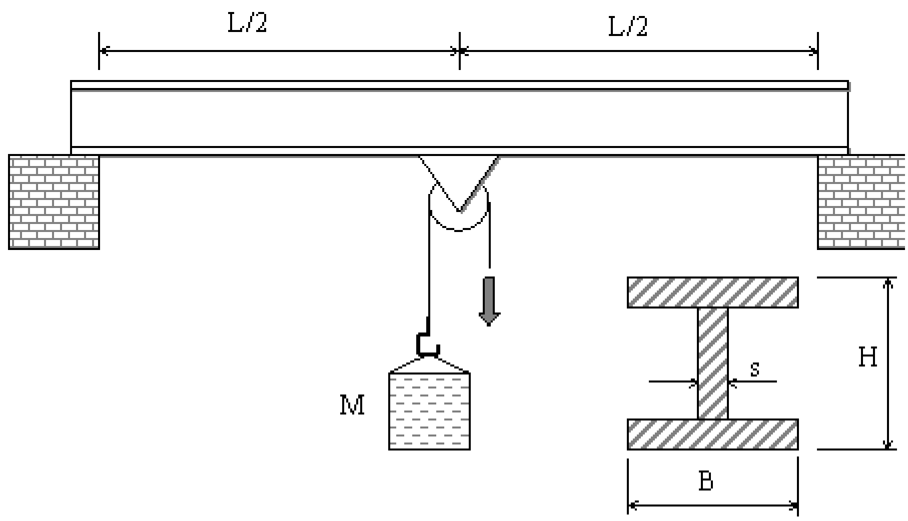
CORSO DI MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE

ANNO ACCADEMICO 2005-6

VERIFICA DI RIGIDEZZA DI GRU A PONTE

E' data la gru a ponte schematicamente rappresentata in Figura.
La carrucola viene utilizzata per sollevare periodicamente la massa M e depositarla successivamente a terra.
Calcolare, trascurando gli effetti del taglio, l'abbassamento del punto centrale della gru nei due seguenti casi:

- solo carico dovuto al sollevamento della massa
- solo peso proprio
- carico dovuto al sollevamento della massa + peso proprio



DATI DEL PROBLEMA

$L := 5000 \cdot mm$

$M := 200 \cdot kg$

$B := 100 \cdot mm$

$H := 150 \cdot mm$

$s := 5 \cdot mm$

$dm := 100 \cdot mm$

$Young := 210000 \cdot MPa$ Modulo Young acciaio

$\rho := 7.81 \cdot \frac{kg}{dm^3}$ Densità acciaio

$\delta_{amm} := \frac{L}{500}$ Abbassamento ammissibile $\delta_{amm} = 10\,mm$

CARATTERISTICHE GEOMETRICHE SEZIONE

$A := B \cdot H - (B - s) \cdot (H - 2 \cdot s)$ Area $A = 1.7 \times 10^3 \, mm^2$

$J_x := \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{(B - s) \cdot (H - 2 \cdot s)^3}{12}$ Momento di inerzia $J_x = 6.402 \times 10^6 \, mm^4$

CARICHI AGENTI

Carico *P* dovuto al sollevamento della massa *M*:

$P := 2 \cdot M \cdot g$ $P = 3.923 \times 10^3 \, N$

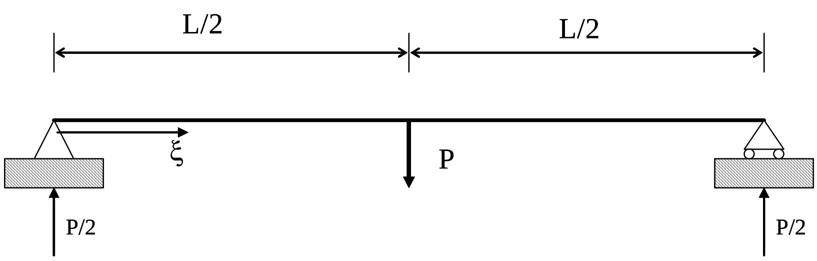
Carico *p* dovuto al peso proprio

$p := A \cdot \rho \cdot g$ $p = 130.203 \, \frac{N}{m}$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Carico P

In presenza del solo carico P si ottengono le seguenti reazioni vincolari ed il conseguente diagramma di corpo libero:

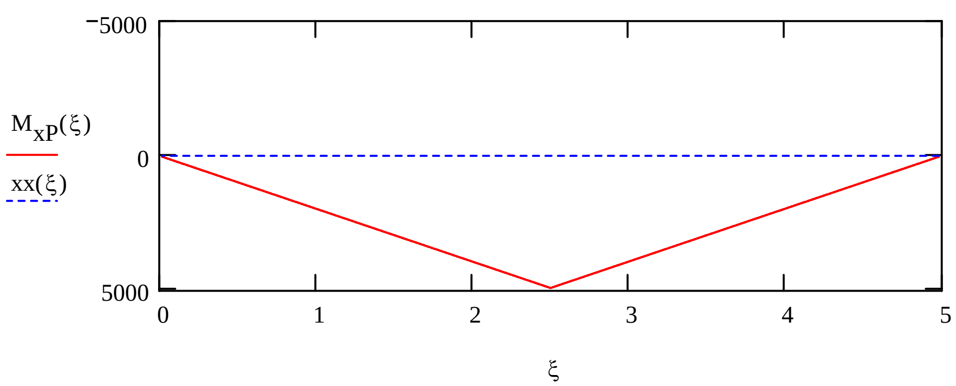


Fissata una coordinata curvilinea ξ, si ottiene quindi la seguente espressione per il momento flettente M_{xP}:

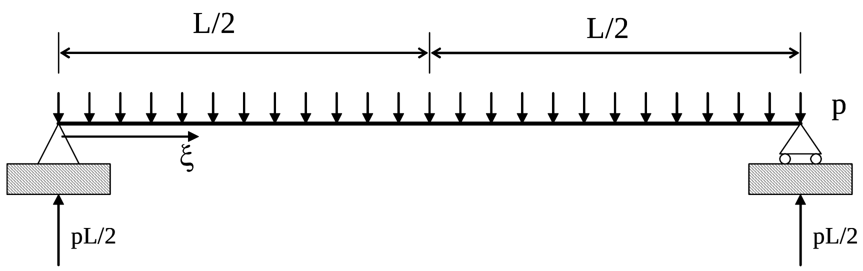
$$M_{xP}(\xi) := \begin{cases} \frac{P}{2} \cdot \xi & \text{if } 0 \le \xi \le \frac{L}{2} \\ \frac{P}{2} \cdot (L - \xi) & \text{if } \frac{L}{2} \le \xi \le L \end{cases}$$

$xx(\xi) := 0$

$M_{xP}(2500 \cdot mm) = 4.903 \times 10^3 \, N \cdot m$

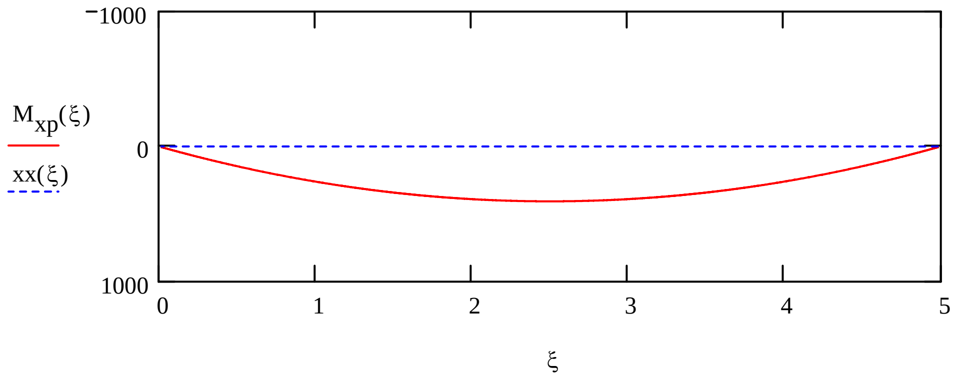


Carico p
In presenza del solo carico *p,* dovuto al peso proprio, si ottengono le seguenti reazioni vincolari ed il conseguente diagramma di corpo libero:



Fissata una coordinata curvilinea ξ, si ottiene quindi la seguente espressione per il momento flettente M_{xp}:

$$M_{xp}(\xi) := \frac{p \cdot L}{2} \cdot \xi - p \cdot \frac{\xi^2}{2} \qquad M_{xp}(2500 \cdot mm) = 406.884\ N \cdot m$$



SPOSTAMENTO DOVUTO AL CARICO P

Lo spostamento prodotto dal solo carico *P* può essere valutato uguagliando il lavoro compiuto dal carico *P* stesso all'energia elastica immagazzinata nella struttura.

$$\delta_P := \frac{1}{P} \cdot \int_0^L \frac{M_{xP}(\xi)^2}{Young \cdot J_x} d\xi \qquad \delta_P = 7.599\ mm$$

Si può anche osservare che, essendo la funzione integranda simmetrica rispetto alla mezzeria della trave si ha:

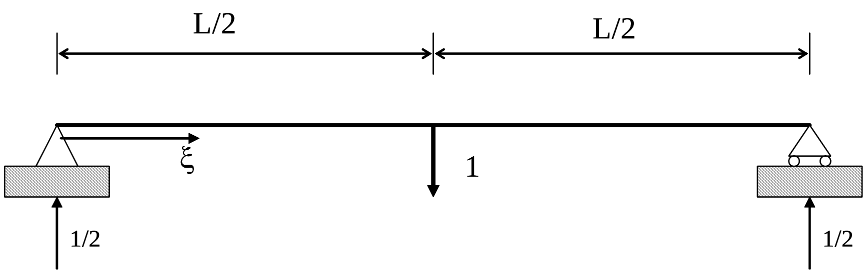
$$\delta_P := \frac{1}{P}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M_{xP}(\xi)^2}{Young\cdot J_x}\,d\xi \qquad\qquad \delta_P = 7.599\,\mathrm{mm}$$

Nota: ai fini del calcolo dell'integrale si osservi che:

$$\int \left(\frac{P}{2}\cdot\xi\right)^2 d\xi \quad = \quad \frac{1}{12}\cdot P^2\cdot\xi^3$$

SPOSTAMENTO DOVUTO AL CARICO "p"

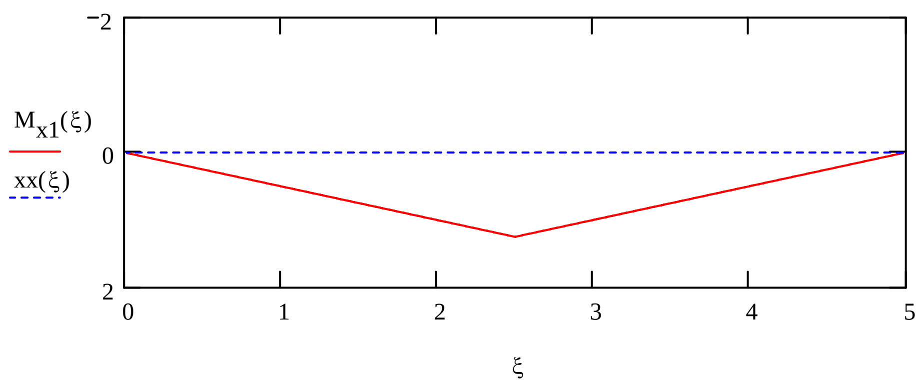
Lo spostamento prodotto dal solo carico *p* può essere valutato utilizzando il metodo degli integrali di Mohr. A tal fine si introduce la seguente condizione di carico fittizia:



Per la quale si ottiene il seguente andamento del momento flettente M_{x1}:

$$\phi := 1\cdot N$$

$$M_{x1}(\xi) := \begin{cases} \frac{\phi}{2}\cdot\xi & \text{if } 0 \le \xi \le \frac{L}{2} \\ \frac{\phi}{2}\cdot(L-\xi) & \text{if } \frac{L}{2} \le \xi \le L \end{cases} \qquad\qquad M_{x1}(2500\cdot mm) = 1.25\,N\cdot m$$



Il valore dello spostamento cercato si ottiene quindi come:

$$\delta_p := \frac{1}{\phi} \cdot \int_0^L \frac{M_{xp}(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{Young \cdot J_x} \, d\xi \qquad \delta_p = 0.788\,\text{mm}$$

Nota: ai fini del calcolo dell'integrale si osservi che:

$$\int \frac{P}{4} \cdot \xi^2 \, d\xi \quad = \quad \frac{1}{12} \cdot P \cdot \xi^3$$

SPOSTAMENTO TOTALE

Lo spostamento totale risulta dato da:

$$\delta_{tot} := \delta_P + \delta_p \qquad \delta_{tot} = 8.387\,\text{mm}$$

ed è quindi minore del valore ammissibile $\delta_{amm} = 10\,\text{mm}$

METODO ALTERNATIVO PER IL CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO TOTALE

Lo spostamento totale può essere ottenuto anche calcolando l'energia complessiva contenuta nella struttura sotto l'azione dei due carichi agenti contemporaneamente e facendo la derivata parziale rispetto al carico concentrato che, in base al Teorema di Castigliano, corrisponde al relativo spostamento.

Fissata una coordinata curvilinea ξ, e introducendo una variabile P_1 in luogo del carico effettivo P in modo da poter effettuare le derivate, si ottiene quindi la seguente espressione per il momento flettente M_{xP1}:

$$M_{xP1}(\xi, P_1) := \begin{cases} \dfrac{P_1}{2}\cdot\xi & \text{if } 0 \le \xi \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{P_1}{2}\cdot(L-\xi) & \text{if } \dfrac{L}{2} \le \xi \le L \end{cases}$$

L'energia elastica U risulta data da:

$$U(P_1) := \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\dfrac{P_1}{2}\cdot\xi + \dfrac{p\cdot L\cdot\xi}{2} - p\cdot\dfrac{\xi^2}{2}\right)^2}{Young\cdot J_x}\,d\xi + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{\left[\dfrac{P_1}{2}\cdot(L-\xi) + \left(\dfrac{p\cdot L\cdot\xi}{2} - p\cdot\dfrac{\xi^2}{2}\right)\right]^2}{Young\cdot J_x}\,d\xi$$

e, secondo il Teorema di Castigliano:

$$\delta_{tot} = \frac{d}{dP_1}\left[\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\dfrac{P_1}{2}\cdot\xi + \dfrac{p\cdot L\cdot\xi}{2} - p\cdot\dfrac{\xi^2}{2}\right)^2}{Young\cdot J_x}\,d\xi + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{\left[\dfrac{P_1}{2}\cdot(L-\xi) + \left(\dfrac{p\cdot L\cdot\xi}{2} - p\cdot\dfrac{\xi^2}{2}\right)\right]^2}{Young\cdot J_x}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{3840}\cdot L^3\cdot\frac{25\cdot p\cdot L + 40\cdot P_1}{Young\cdot J_x} + \frac{1}{240}\cdot L^3\cdot\frac{5\cdot p\cdot L + 20\cdot P_1}{Young\cdot J_x} - \frac{1}{3840}\cdot L^3\cdot\frac{55\cdot p\cdot L + 280\cdot P_1}{Young\cdot J_x}$$

sostituendo a P_1 il valore effettivo P, si ottiene infine:

$$\delta_{tot} := \frac{1}{3840}\cdot L^3\cdot\frac{25\cdot p\cdot L + 40\cdot P}{Young\cdot J_x} + \frac{1}{240}\cdot L^3\cdot\frac{5\cdot p\cdot L + 20\cdot P}{Young\cdot J_x} - \frac{1}{3840}\cdot L^3\cdot\frac{55\cdot p\cdot L + 280\cdot P}{Young\cdot J_x}$$

$$\delta_{tot} = 8.387\ \text{mm}$$