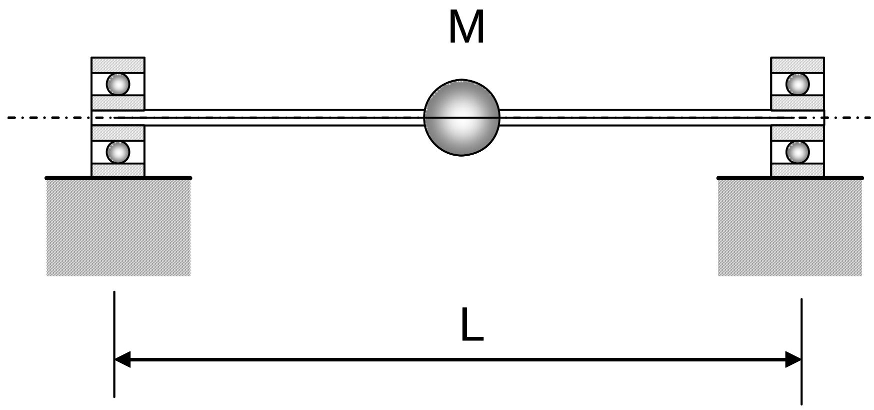
VELOCITA' CRITICHE FLESSIONALI

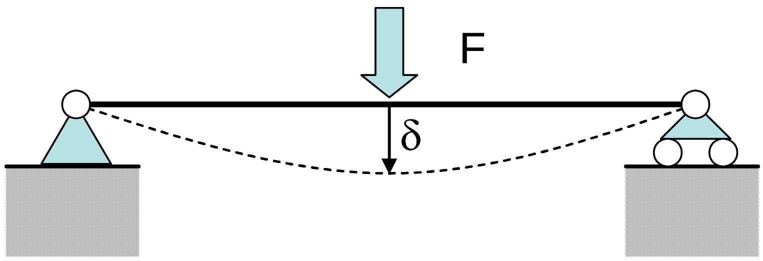
Si consideri un albero privo di massa recante in posizione intermedia un corpo puntiforme di massa "M". Se la massa viene spostata dalla sua posizione di equilibrio in direzione trasversale all'asse dell'albero, il sistema, una volta lascaiato libero di evolvere, inizierà ad oscillare con una pulsazione caratteristica ω_n (pulsazione propria del sistema) che può essere stimata assimilando l'albero ad un oscillatore armonico ad 1 g.d.l.:



$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{M}}$$

dove:

k = rigidezza trasversale dell'albero, corrispondente per definizione alla forza applicata in coprispondenza della massa in direzione trasversale, necessaria per produrre uno spostamento unitario del suo punto di applicazione; dalla teoria delle travi:



$$F := k \cdot \delta$$

$$k := \frac{48 \cdot E \cdot J}{L^3}$$

Se l'albero viene portato in rotazione con velocità angolare ω, in presenza di una eccentricità "e" della massa (inevitabile nella pratica costruttiva), si produrrà una forza centrifuga pari a:

$$F_c := M \cdot e \cdot \omega^2$$

Tale forza, può essere scomposta su due piani ortogonali (X-Z ed Y-Z), dando luogo a due forze periodiche sfasate tra loro di 90°:

$$F_x := M \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$F_y := M \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Ciascuna delle due forze può essere considerata come una forzante agente sul sistema in grado di produrre, in assenza di smorzamento, un moto periodico della massa sul suo piano di applicazione. Facendo riferimento, ad esempio, al piano X-Z, il moto della massa viene descritto dalla seguente classica equazione di equilibrio dinamico, tipica dell'oscillatore armonico ad 1 g.d.l. (si è ipotizzato, per semplicità, che lo smorzamento sia trascurabile):

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + k \cdot x := M \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

dove x(t) è lo spostamento in direzione X della massa in funzione del tempo.
Se si ipotizza che il moto della massa consista in una oscillazione armonica di pulsazione pari a quella della forzante si può porre:

$$x(t) := A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

da cui:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) := -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Sostituendo si ottiene:

$$-M \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) + k \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) := M \cdot \omega^2 \cdot e \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

da cui:

$$\left(k - M \cdot \omega^2\right) \cdot A := M \cdot \omega^2 \cdot e$$

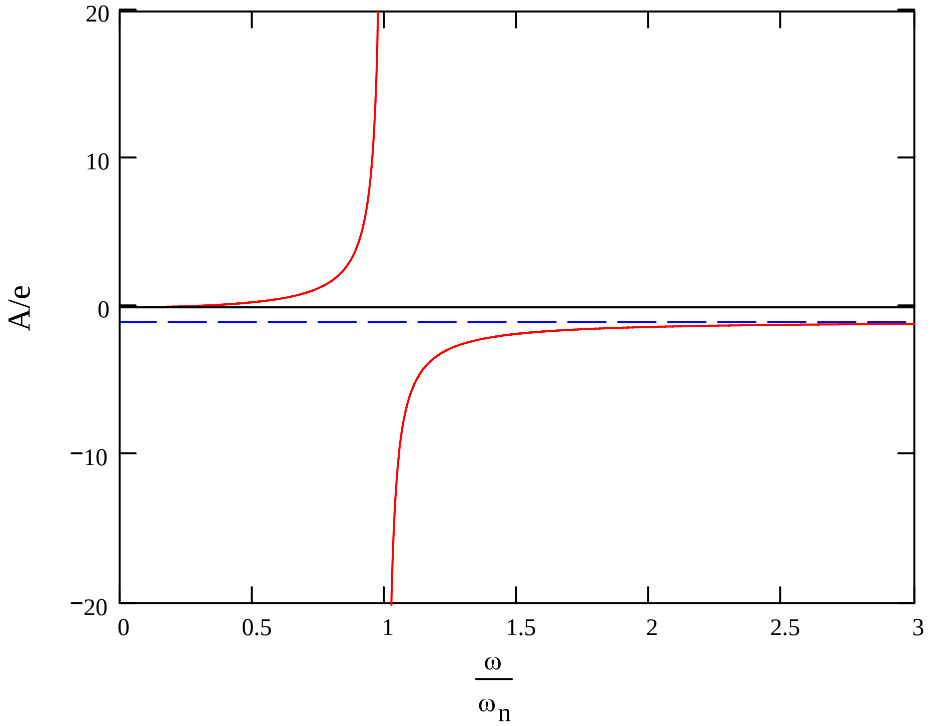
Da tale relazione è possibile ottenere l'espressione dell'ampiezza di oscillazione:

$$A := \frac{e \cdot M \cdot \omega^2}{k - M \cdot \omega^2}$$

dividendo numeratore e denominatore per M e ricordando che $\omega=(k/M)^{1/2}$, si ottiene infine:

$$A(\omega) := e \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

L'andamento dell'ampiezza di oscillazione in funzione della velocità di rotazione dell'albero è mostrato nella Figura in forma normalizzata.



Si nota come l'ampiezza tenda a divergere per $\omega \to \omega_n$. Questo non può sorprendere, dato che un oscillatore armonico non smorzato mostra un'ampiezza di oscillazione infinita in risonanza.
Si nota anche che per $\omega<\omega_n$ A è >0, il che indica uno spostamento dell'albero nello stessa direzione della eccentricità. Per $\omega>\omega_n$, A diviene invece negativo, indicando che l'albero si deflette in direzione opposta a quella dell'eccentricità.
Infine, per ω infinitamente grande, A tende ad assumere il valore -e, per cui la massa viene riportata sull'asse effettivo di rotazione (ricentramento)..

OSSERVAZIONE 1
La velocità di rotazione ω_n, è detta "**velocità critica flessionale**".
Quando l'albero gira, si producono inevitabilmente delle forze periodiche in seguito ad irregolarità di forma (es.: eccentricità) od ad altre cause (es.: irregolarità periodiche nel moto del fluido in una turbina o in un compressore).
Le più importanti di tali forze periodiche (quelle caratterizzate da una maggiore ampiezza) sono generalmente quelle che hanno periodo pari a quello di rotazione dell'albero (vale a dire le perturbazioni che si verificano una volta al giro).
Avendo tali forze pulsazione pari a quella ω dell'albero, per $\omega=\omega_n$ esse si trovano in risonanza con la pulsazione flessionale naturale dell'albero

OSSERVAZIONE 2
In prossimità della risonanza si producono nell'albero rilevanti spostamenti e, di conseguenza, rilevanti tensioni e deformazioni.
Un funzionamento prolungato a velocità di rotazione prossime ad ω_n risulta quindi generalmente non compatibile con i limiti di integrità e funzionalità dell'albero stesso.
Questo non significa, tuttavia, che ω_n costituisca un limite superiore alla velocità di rotazione dell'albero.
Infatti, non si deve dimenticare che la soluzione ottenuta rappresenta la condizione di **regime,**

che si verifica una volta esaurito il transitorio iniziale.
Se l'albero viene portato in rotazione a velocità ω_n le sue oscillazioni non divengono **istantaneamente** molto grandi, ma tendono semplicemente a crescere progressivamente, raggiungendo un livello inaccettabile solo dopo un certo tempo di permanenza al tale velocità.
E' pertanto possibile **"attraversare"** la risonanza per raggiungere velocità di funzionamento maggiori di ω_n, purchè tale attraversamento avvenga in maniera sufficientemente rapida.
In effetti molte macchine rotanti, ad esempio le turbine a gas ed a vapore operano stabilmente al di sopra della loro velocità critica (funzionamento "sopracritico").

OSSERVAZIONE 3
L'analisi condotta per il piano X-Z può essere ripetuta per il piano Y-Z ottenendo complessivamente le seguenti due leggi del moto:

$$x(t) := A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y(t) := A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Dalla loro combinazione, è immediato rendersi conto che la traiettoria effettiva della massa M consiste in un moto circolare di raggio A attorno all'asse effettivo di rotazione.
Tale moto è "sincrono" ed in fase con la rotazione dell'albero attorno al suo asse, per cui il moto effettivo di quest'ultimo può essere rappresentato come segue:

- si immagini in primo luogo di deformare l'albero imprimendo alla massa uno spostamento A nel piano E, in cui giace l'eccentricità.
- si immagini adesso di imprimere al piano E una rotazione con velocità angolare ω attorno all'asse effettivo di rotazione dell'albero (quello passante per i cuscinetti)

E' immediato rendersi conto che, in questo tipo di moto, la deformazione e la tensione agenti in un punto fissato dell'albero si mantengono costanti nel tempo mentre l'albero ruota ad ω=costante.