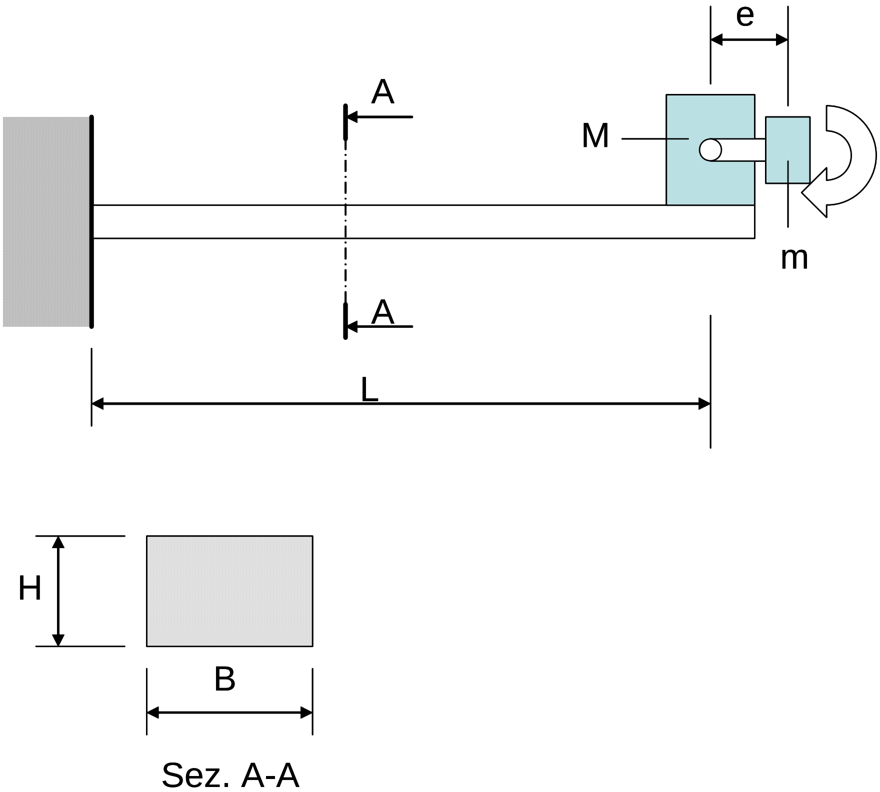
ANALISI DI VIBRAZIONI FORZATE

Data la trave a mensola con una massa M fissata all'estremità mostrata in Figura ed i valori delle principali grandezze indicati nel seguito, calcolare:
- la pulsazione propria del sistema trave+massa, trascurando la massa propria della trave stessa.

Ipotizzando quindi che la massa all'estremità sia un motore recante sull'asse una piccola massa eccentrica "m" posta ad una distanza "e" dall'asse di rotazione, calcolare:
- l'ampiezza di oscillazione verticale dell'estremità della trave.



DATI

Unità di misura SI MKS

$E := 2.1 \cdot 10^{11} \cdot Pa$ Modulo di Young acciaio

$H := 0.04 \cdot m$

$B := 0.04 \cdot m$

$L := 1 \cdot m$

$M := 5 \cdot kg$

$n := 1500 \cdot \frac{1}{min}$ Velocità di rotazione motore [giri/1']

$m_e := 0.1 \cdot kg$

$e := 0.05 \cdot m$

$\chi := 0.01$ Rapporto di smorzamento

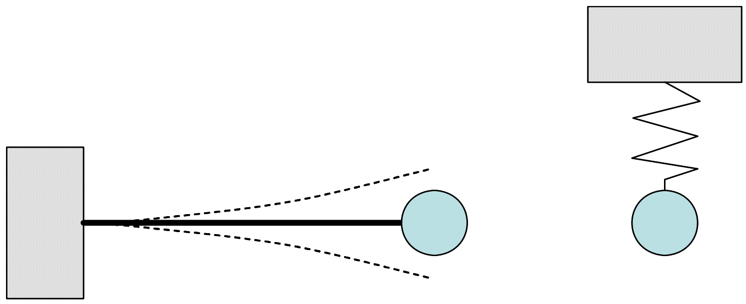
CALCOLO PULSAZIONE PROPRIA

CALCOLO MOMENTO DI INERZIA TRAVE

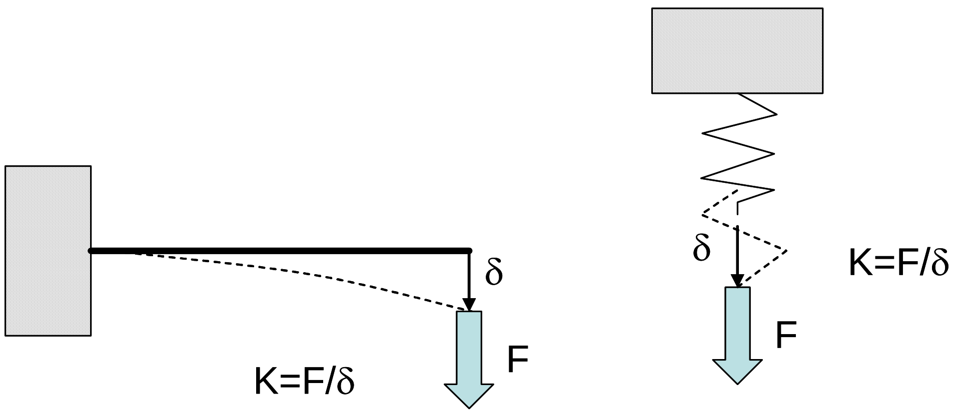
$J := \frac{1}{12} \cdot B \cdot H^3$ $\qquad J = 2.133 \times 10^{-7}\ m^4$

CALCOLO RIGIDEZZA TRAVE PER SPOSTAMENTI VERTICALI MASSA

Dal punto di vista fisico, il sistema oscillerà con la massa in moto verticale e la trave che si inflette alternativamente verso l'alto e verso il basso.
Il sistema è quindi assimilabile ad uno massa-molla ad 1 gdl.



La rigidezza della trave per tale spostamento della massa è valutabile come rapporto tra il valore di una forza applicata verticale all'estremità ed il relativo spostamento verticale del punto di applicazione, analogamente a come viene definita la rigidezza di una molla.



$K := \frac{3 \cdot E \cdot J}{L^3}$ $\qquad K = 1.344 \times 10^5\ \frac{N}{m}$

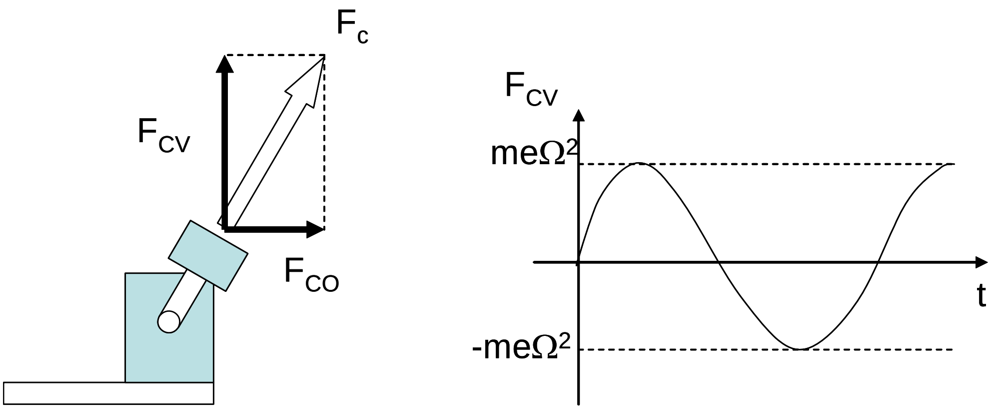
PULSAZIONE PROPRIA

$$\omega_n := \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \omega_n = 163.951\ \frac{1}{s}$$

$$f_n := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} \qquad f_n = 26.094\ \frac{1}{s}$$

CALCOLO OSCILLAZIONE FORZATA

La massa "m", portata in rotazione, esercita sul motore e quindi sulla trave una forza "centrifuga" (uguale e contrariaa quella centripeta che il motore esercita su di essa per mantenerla sulla traiettoria circolare) rotante alla velocità di rotazione del motore.
La componente orizzontale di tale forza esercita sulla trave una forza normale, che non produce effetti flessionali. Al contrario, la componente verticale, costituisce una forzante per vibrazioni della massa in senso verticale. Tale componente ha l'andamento sinusoidale mostrato in figura.



CALCOLO PULSAZIONE FORZANTE

$$\Omega := n \cdot 2 \cdot \pi \qquad \Omega = 157.08\ \frac{1}{s}$$

CALCOLO AMPIEZZA FORZANTE

$$F := \Omega^2 \cdot e \cdot m_e \qquad F = 123.37\ N$$

CALCOLO DEFLESSIONE STATICA PRODOTTA DALLA FORZANTE
Si calcola lo spostamento della massa prodotto da una forza statica verticale di modulo pari all'ampiezza della forzante

$$Y_s := \frac{F}{K} \qquad Y_s = 9.179 \times 10^{-4}\ m$$

CALCOLO AMPIEZZA OSCILLAZIONE MASSA

Si calcola l'ampiezza di oscillazione della massa prodotta dalla forzante

$$Y := \frac{F}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(2\cdot\chi\cdot\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$Y = 0.011\ \mathrm{m}$$

Si può notare che tale ampiezza di spostamento è sensibilmente maggiore della deflessione statica.

$$\frac{Y}{Y_s} = 11.866$$

CALCOLO SOLLECITAZIONI DINAMICHE TRAVE

Si calcola la massima accelerazione verticale della massa M

$$a_{max} := Y\cdot\Omega^2 \qquad a_{max} = 268.751\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Si calcola quindi la massima forza verticale di inerzia esercitata dalla massa

$$F_{din} := M\cdot a_{max} \qquad F_{din} = 1.344\times 10^3\ \mathrm{N}$$

A tale forza si somma quella dovuta alla rotazione della massa "m".

$$F_{max} := F_{din} + F$$

Si può verificare che tale forza produce effettivamente la deflessione massima calcolata

$$\frac{F_{max}}{K} = 0.011\ \mathrm{m}$$

Si può a questo punto calcolare il massimo momento flettente, in base ad un semplice modello di trave incastrata caricata in punta dalla forza F_{max}

$$M_{max} := F_{max}\cdot L \qquad M_{max} = 1.467\times 10^3\ \mathrm{N\cdot m}$$

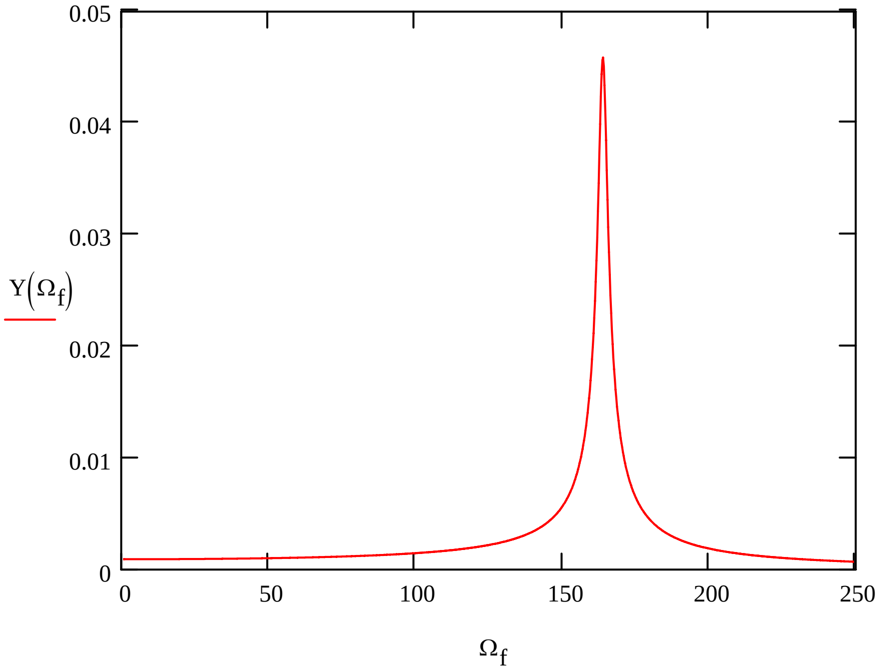
e le tensioni massime di flessione che tale momento produce all'incastro

$$\sigma := \frac{M_{max}}{J}\cdot\frac{H}{2} \qquad \sigma = 137.543\ \mathrm{MPa}$$

ANDAMENTO SPOSTAMENTO IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA DELLA FORZANTE

E' infine possibile valutare l'andamento dello spostamento della massa M in funzione della frequenza di rotazione del motore

$$Y(\Omega_f) := \frac{F}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{(\Omega_f)^2}{\omega_n^{\;2}}\right]^2 + \left(2 \cdot \chi \cdot \frac{\Omega_f}{\omega_n}\right)^2}}$$



Il valore massimo dell'ampiezza si ottiene per:

$$\Omega_{mx} := \omega_n \cdot \sqrt{1 - \chi^2} \qquad \Omega_{mx} = 163.943 \ \frac{1}{s}$$

La corrispondente ampiezza di vibrazione è data da:

$$A_{mx} := \frac{F}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{(\Omega_{mx})^2}{\omega_n^{\;2}}\right]^2 + \left(2 \cdot \chi \cdot \frac{\Omega_{mx}}{\omega_n}\right)^2}} \qquad A_{mx} = 0.046 \ m$$