

COGNOME E NOME

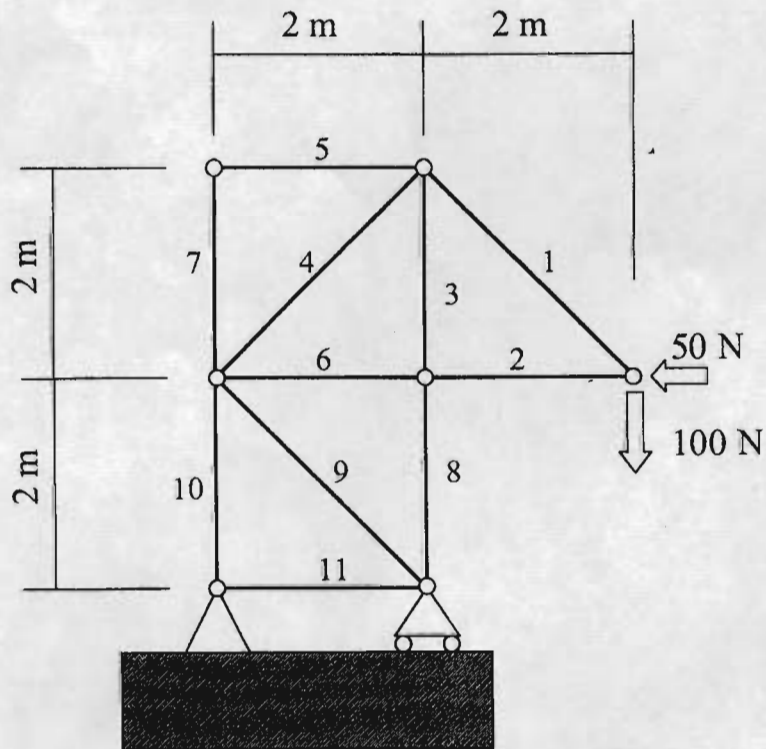
MATRICOLA

ESERCIZIO 1

Data la travatura reticolare riportata in Figura, calcolare:

- Reazioni vincolari
- Forza normale in ogni asta

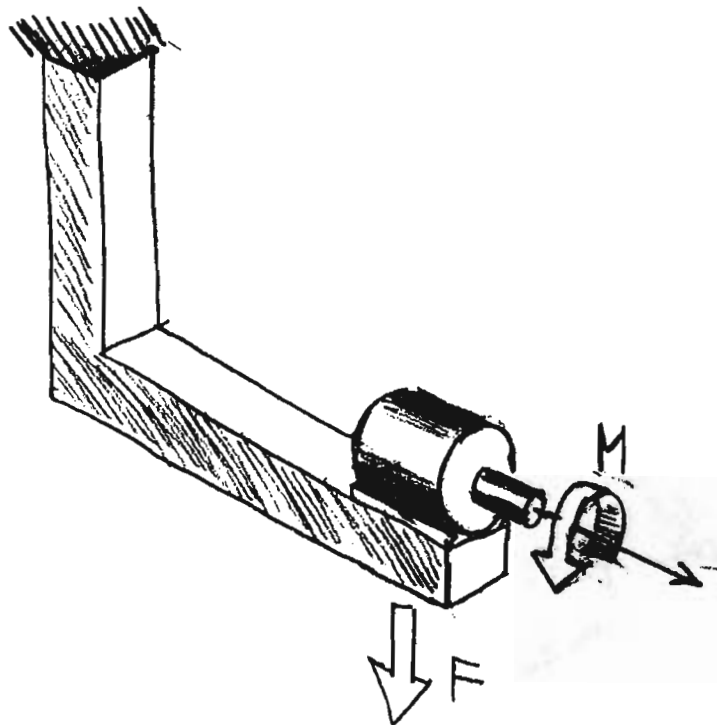
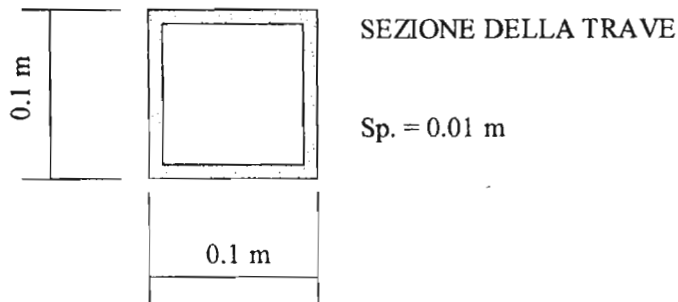
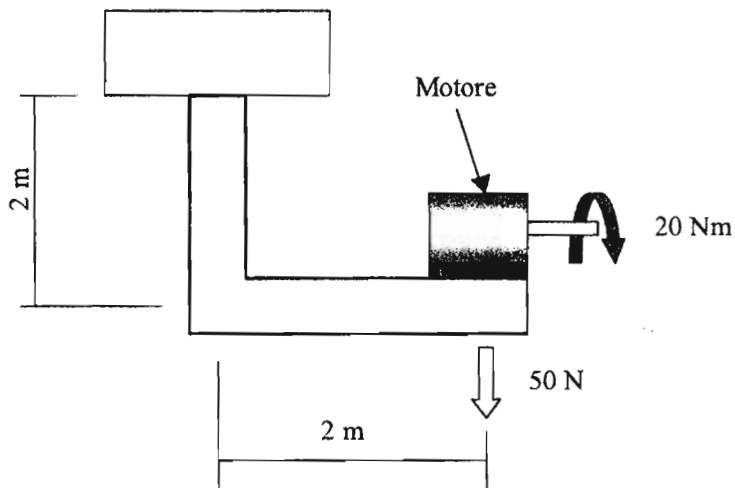
(Ciascuna asta è identificata con un numero riportato a fianco)

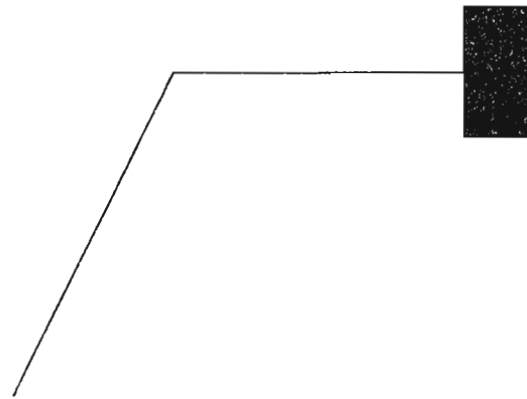
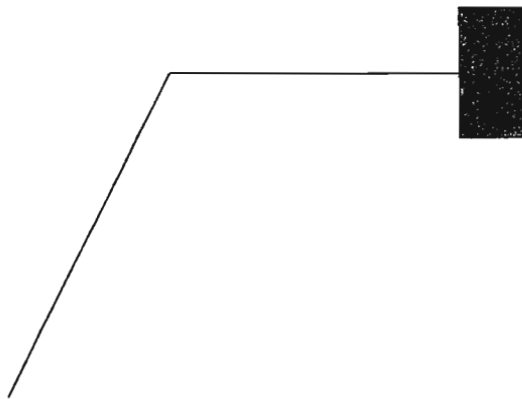
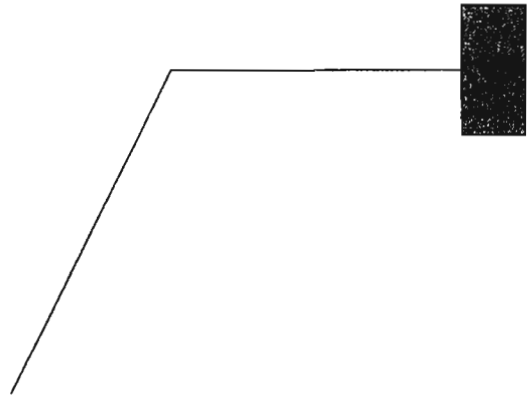
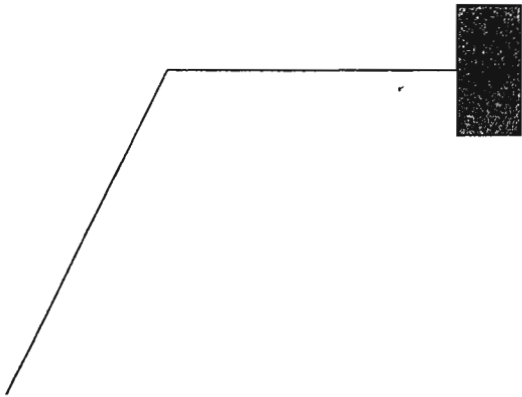
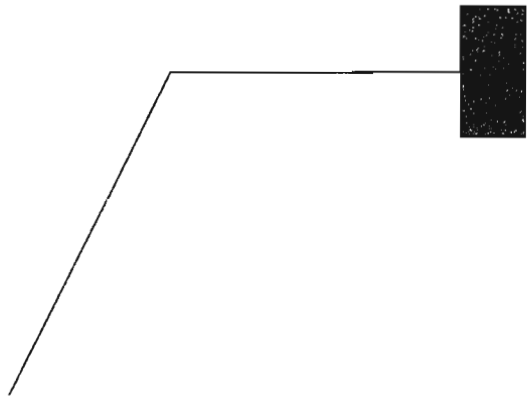
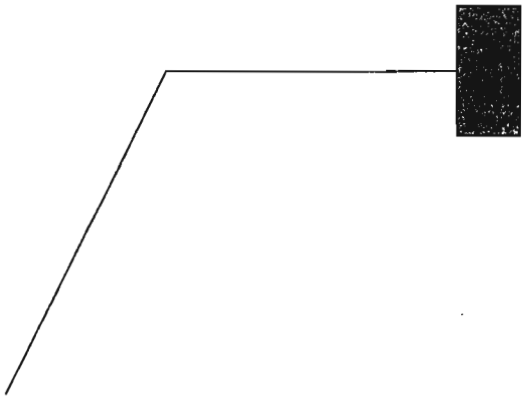
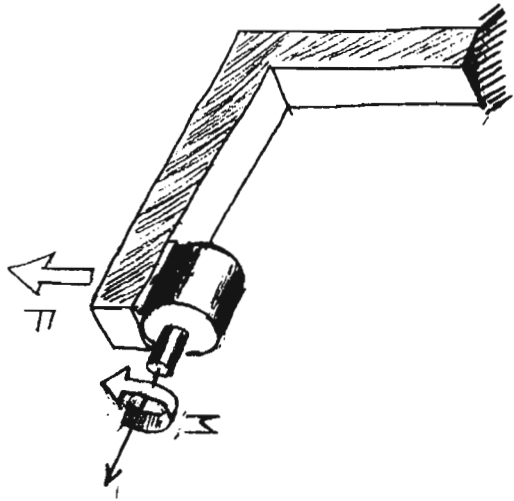


ESERCIZIO 2

Dato il telaio di sostegno di un motore elettrico rappresentato in Figura:

- Calcolare le reazioni vincolari
- Disegnare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, facendo uso degli schemi riportati nella pagina seguente.
- Calcolare i valori massimi di tensione prodotti da ciascuna caratteristica di sollecitazione nella sezione di incastro, indicando, con l'aiuto di un semplice disegno, il punto della sezione stessa in cui tali massimi si verificano.

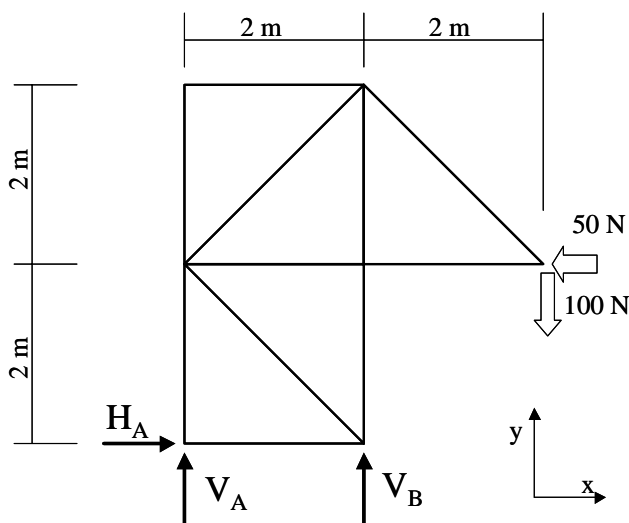




ESERCIZIO 1

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

La travatura reticolare data costituisce un problema piano intrinsecamente isostatico. Per il calcolo delle reazioni vincolari, stabilito un S.R. e sostituiti i vincoli con le appropriate reazioni incognite, è quindi necessario ricorrere alle tre equazioni cardinali della statica.



Equilibrio lungo "x": $R_x=0 \Rightarrow H_A - 50 = 0$

Equilibrio lungo "y": $R_y=0 \Rightarrow V_A + V_B - 100 = 0$

Equilibrio a momento attorno a "z", polo "A": $M_{Z,A}=0 \Rightarrow V_B \cdot 2 + 50 \cdot 2 - 100 \cdot 4 = 0$

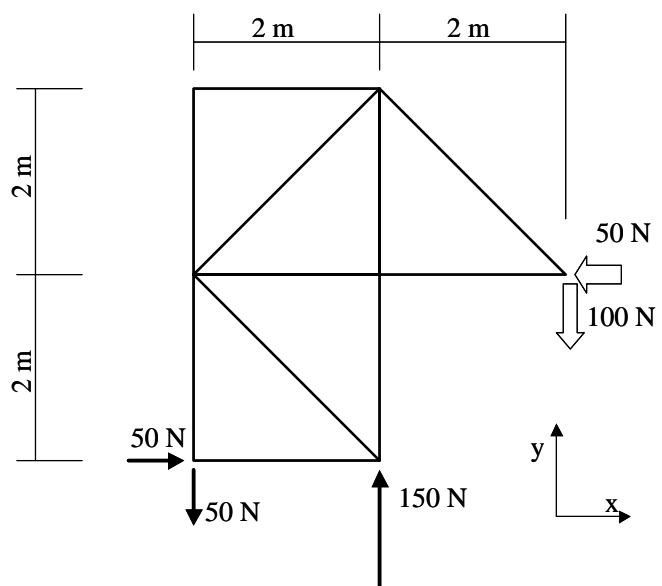
Risolvendo si ottiene:

$V_A = -50 \text{ N}$

$H_A = 50 \text{ N}$

$V_B = 150 \text{ N}$

Le reazioni vincolari effettive sono quindi dirette come rappresentato in Figura.



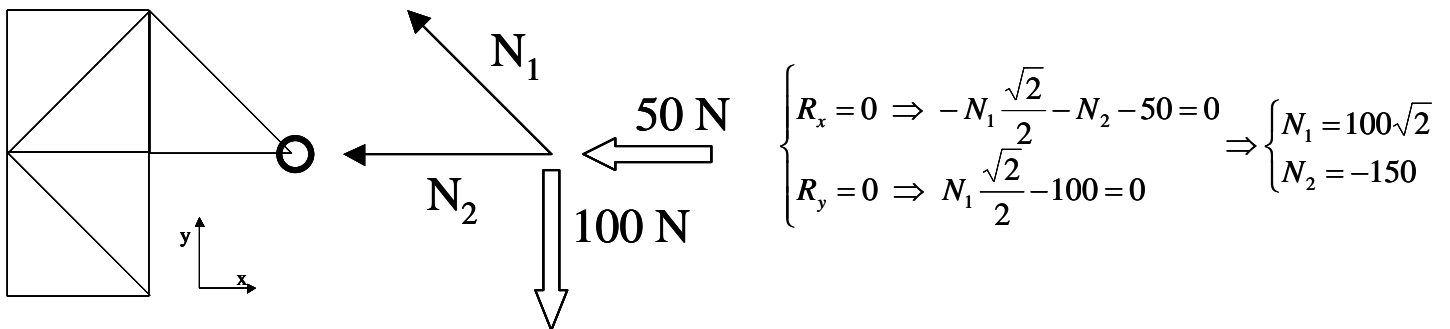
CALCOLO DEGLI SFORZI NORMALI NELLE ASTE

Si ritiene opportuno far osservare che la procedura di calcolo che sarà illustrata nel seguito, basata sull'equilibrio dei nodi, costituisce solo una tra quelle possibili.

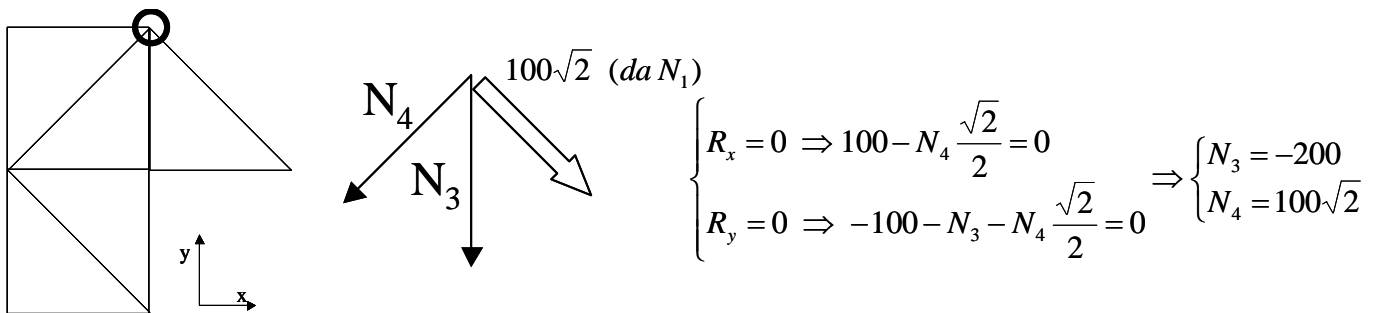
In primo luogo si noti come le aste 5 e 7 risultino sicuramente scariche, essendo convergenti in un nodo cui non sono applicate forze esterne. Pertanto è possibile asserire che:

$$N_5 = N_7 = 0$$

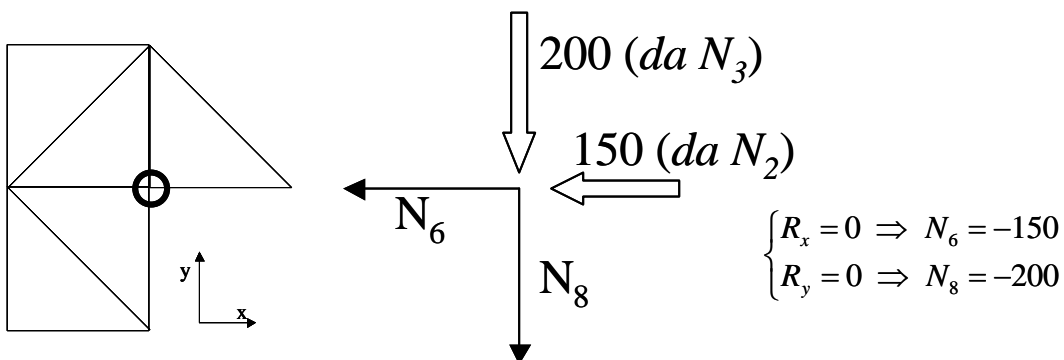
Sforzi nelle aste 1 e 2.



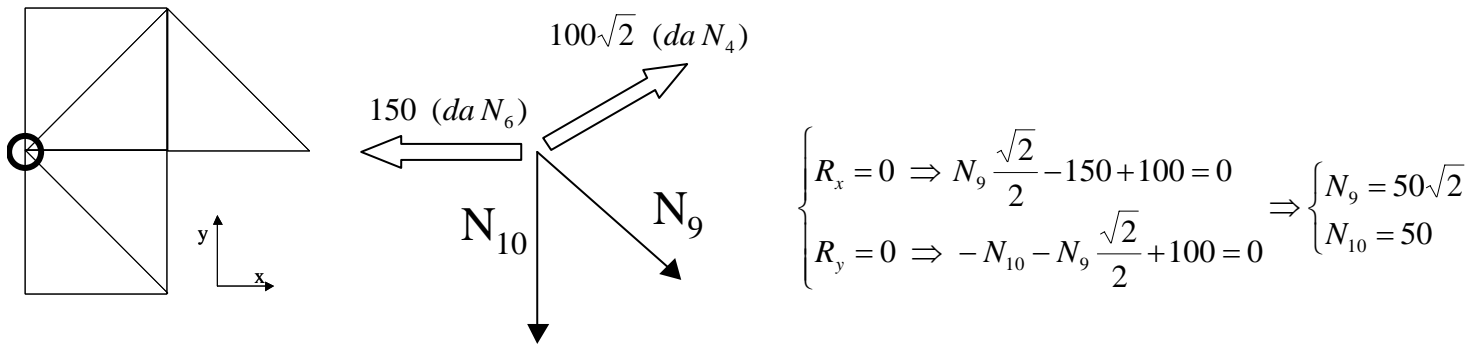
Sforzi nelle aste 3 e 4.



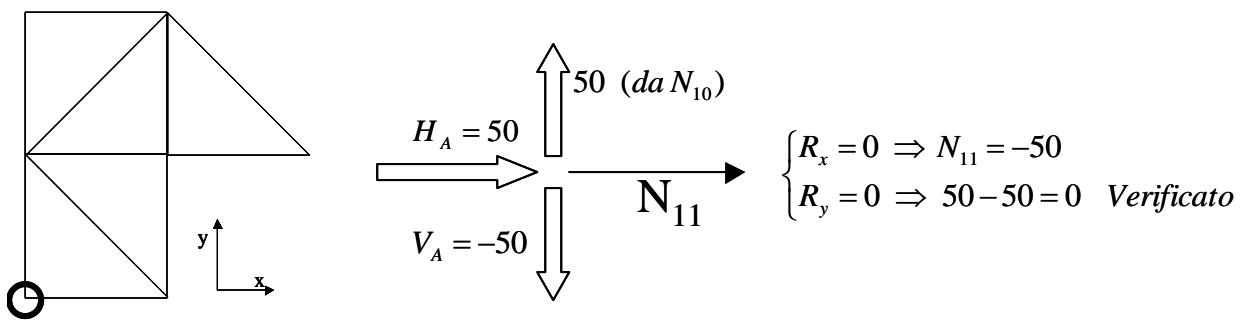
Sforzi nelle aste 6 e 8.



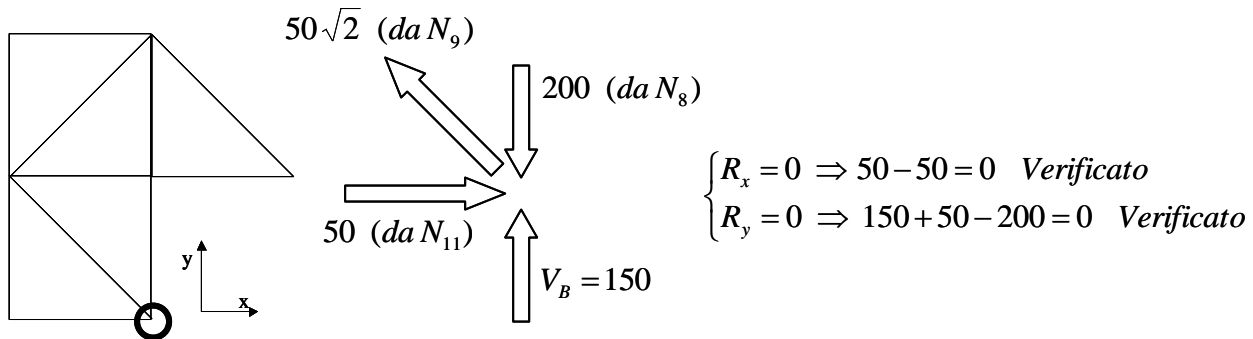
Sforzi nelle aste 9 e 10.



Sforzo nell'asta 11 e verifica equilibrio nodo vincolato A in direzione "y".



Verifica equilibrio nodo vincolato B.



NB: le verifiche del soddisfacimento dell'equilibrio dei nodi vincolati in base agli sforzi nelle aste ed alle reazioni vincolari non sono indispensabili, ma consigliabili in quanto consentono di evidenziare eventuali errori.

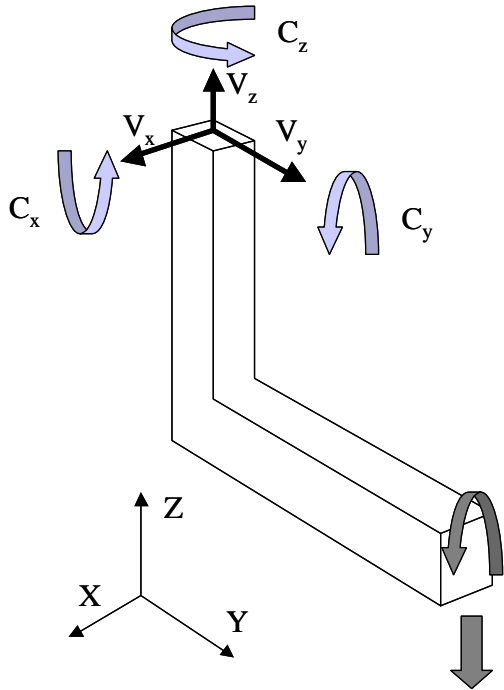
ESERCIZIO 2

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

La struttura spaziale data è esternamente ed internamente isostatica e risulta caricata da una forza verticale ed un momento.

Anche in questo caso, per il calcolo delle reazioni vincolari si comincia con lo stabilire un S.R..

Si sostituisce quindi l'incastro con le 6 reazioni incognite, comprendenti 3 forze (V_x , V_y , e V_z) e 3 momenti (C_x , C_y , e C_z), il cui valore viene determinato facendo uso delle 6 equazioni cardinali della statica.



$$R_x = 0 \Rightarrow V_x = 0$$

$$R_y = 0 \Rightarrow V_y = 0$$

$$R_z = 0 \Rightarrow V_z - 50 = 0$$

$$M_x = 0 \Rightarrow C_x - 50 \cdot 2 = 0$$

$$M_y = 0 \Rightarrow C_y + 20 = 0$$

$$M_z = 0 \Rightarrow C_z = 0$$

Risolvendo si ottiene:

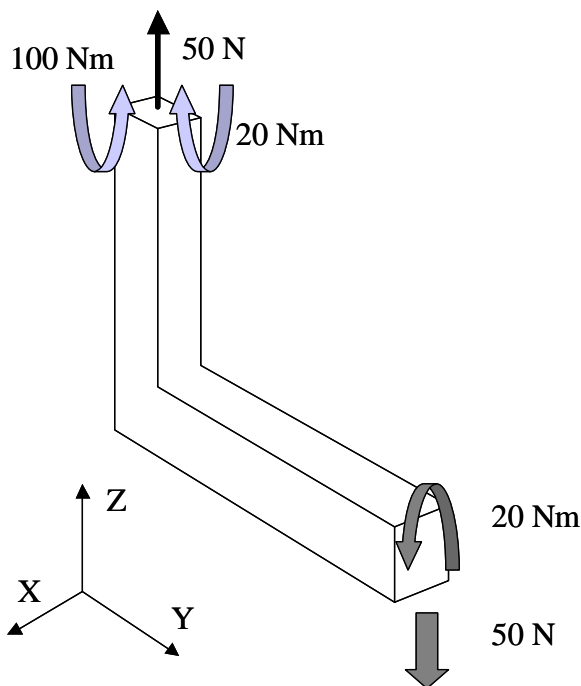
$$V_x = V_y = C_z = 0$$

$$V_z = 50 \text{ N}$$

$$C_x = 100 \text{ Nm}$$

$$C_y = -20 \text{ Nm}$$

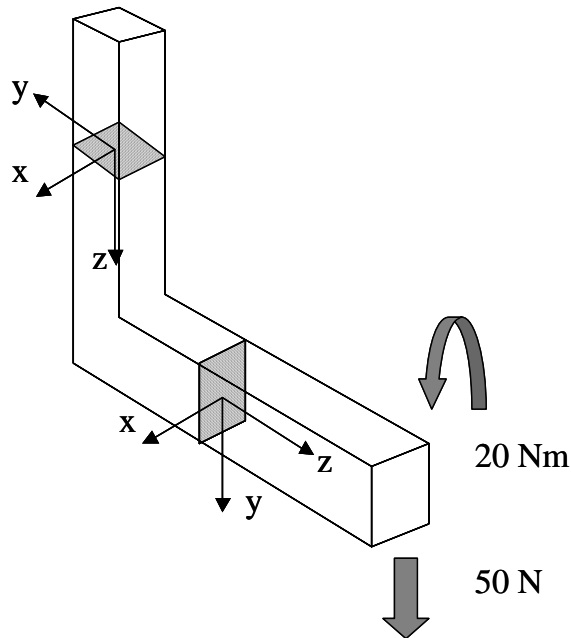
Le forze ed i momenti di reazione ottenuti sono indicati in figura con il relativo verso.



DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

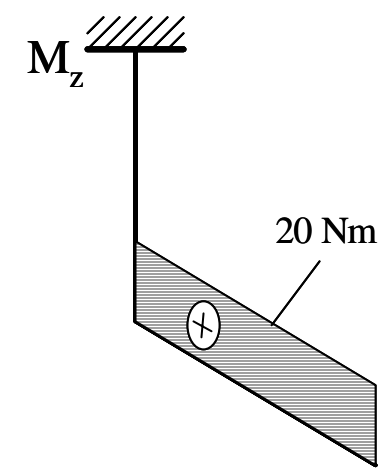
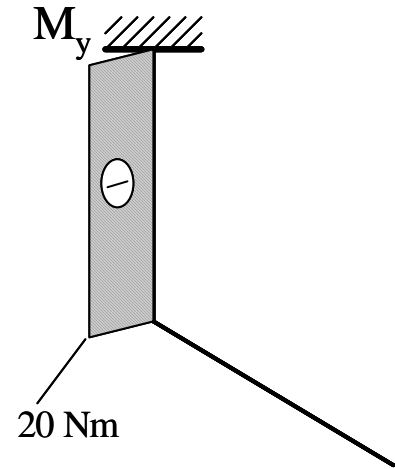
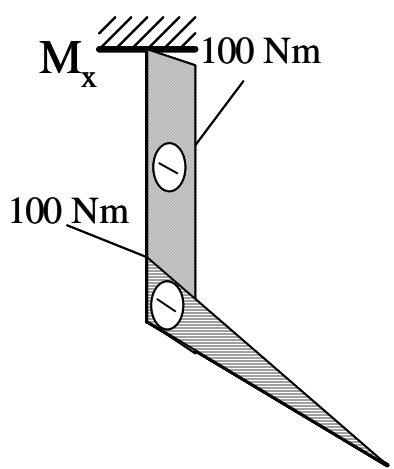
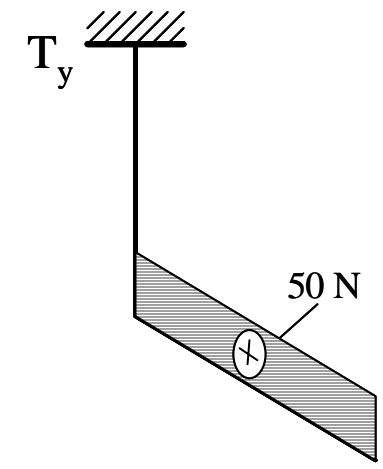
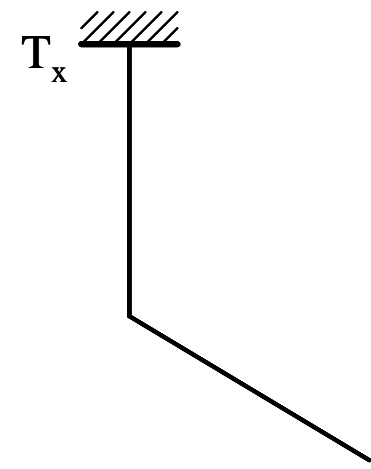
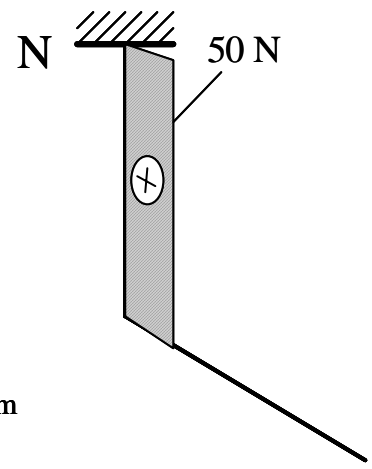
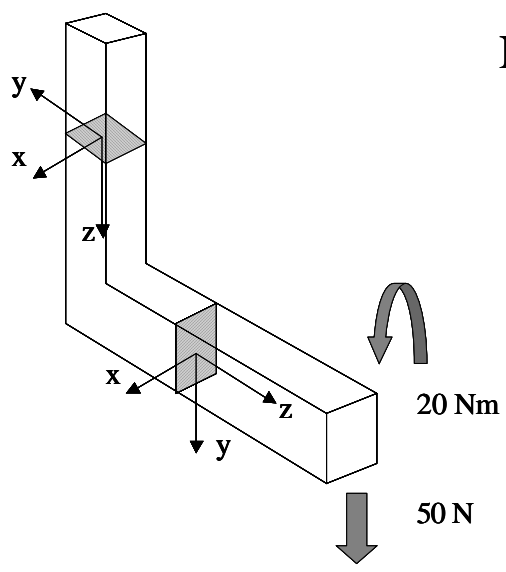
Una volta note tutte le forze esterne (carichi e reazioni vincolari) applicate alla trave, è possibile tracciare i diagrammi delle 6 caratteristiche di sollecitazione

A tale scopo, considerata una generica sezione della trave, si stabilisce un sistema di riferimento avente l'asse "z" coincidente con la fibra baricentrica e gli assi "x" ed "y" diretti secondo gli assi di simmetria mediani della sezione stessa ed orientati in modo da formare una terna destrorsa.



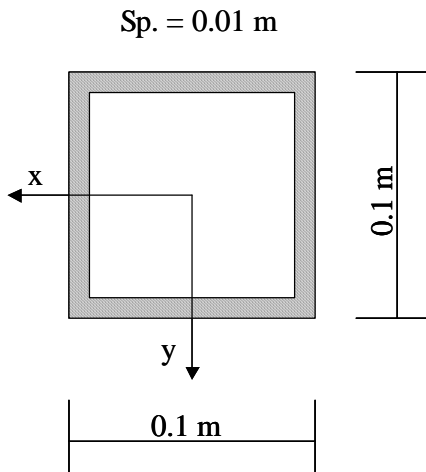
Le caratteristiche di sollecitazione agenti nella sezione generica possono poi essere ottenute considerando le risultanti ed i momenti risultanti secondo gli assi coordinati delle forze esterne applicate alla trave a valle della sezione considerata (oppure quelli delle forze applicate a monte, con segno cambiato).

I diagrammi in tal modo ottenibili sono riportati nel seguito.



CALCOLO TENSIONI NELLA SEZIONE DI INCASTRO

Data la sezione resistente riportata in figura, è necessario calcolare in primo luogo le sue principali caratteristiche geometriche.



$$A = 0.1^2 - 0.08^2 = 0.0036 \text{ m}^2 = 3600 \text{ mm}^2$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} (0.1^4 - 0.08^4) = 4.92 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 = 4.92 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Le caratteristiche di sollecitazione presenti nella sezione di incastro sono lo sforzo normale ed i due momenti flettenti:

$$N = 50 \text{ N}$$

$$M_x = -100 \text{ Nm} = -10^5 \text{ Nmm}$$

$$M_y = -20 \text{ Nm} = -2 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

Lo stato di tensione che deriva dallo sforzo normale comprende la sola tensione normale ed è uniforme sulla sezione:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{50}{3600} \text{ MPa} = 1.39 \cdot 10^{-2} \text{ MPa} = 1.39 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

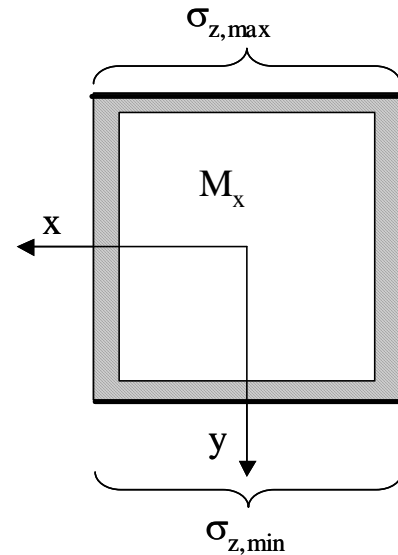
Lo stato di tensione che deriva dal momento flettente M_x è dato da:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

I valori massimo e minimo (uguali in valore assoluto) si verificano in corrispondenza dei punti indicati in Figura e valgono:

$$\sigma_{z,\max} = \frac{-10^5}{4.92 \cdot 10^6} (-50) = 1.016 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,\min} = \frac{-10^5}{4.92 \cdot 10^6} (50) = -1.016 \text{ MPa}$$



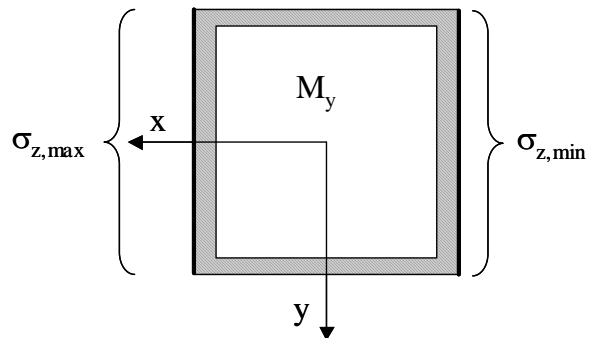
Analogamente, per il momento M_y , lo stato di tensione è dato da:

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{J_y} x$$

I valori massimo e minimo (uguali in valore assoluto) si verificano in corrispondenza dei punti indicati in Figura e valgono:

$$\sigma_{z,\max} = -\frac{2 \cdot 10^4}{4.92 \cdot 10^6} (50) = 0.203 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,\min} = -\frac{2 \cdot 10^4}{4.92 \cdot 10^6} (-50) = -0.203 \text{ MPa}$$



N.B.: È importante fare molta attenzione alle unità di misura; la procedura migliore è usare unità omogenee e coerenti con quelle in cui si vuole espresso il risultato (Es. Momenti in Nmm, forze in

N, aree in mm^2 , momenti di inerzia in mm^4 e lunghezze in mm forniscono un risultato espresso in MPa (N/mm^2).

VALUTAZIONI AGGIUNTIVE (NON RICHIESTE NELLA VERIFICA)

I valori di tensione massimo e minimo complessivi (dovuti ai due momenti flettenti ed allo sforzo normale) si verificano nei punti indicati in figura e sono dati da:

$$\sigma_{z,\max} = 1.016 + 0.203 + 0.0139 = 1.2329 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,\min} = -1.016 - 0.203 + 0.0139 = -1.2051 \text{ MPa}$$

In alternativa alla procedura di calcolo presentata, è possibile studiare l'effetto di M_x ed M_y come un caso di flessione deviata. In tal caso, lo stato di tensione risulta dato da:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = -\frac{10^5}{4.92 \cdot 10^6} y + \frac{2 \cdot 10^4}{4.92 \cdot 10^6} x$$

L'asse neutro è la retta di equazione:

$$y = 0.2 x$$

e, data la regolarità della sezione, risulta parallelo al momento flettente complessivo, dato da:

$$M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 1.02 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

I valori massimo e minimo di tensione (dovuti al momento flettente complessivo) si verificano (vedi figura) nei punti più lontani dall'asse neutro. La distanza di tali punti da quest'ultimo è pari a $d=58.835$ mm.

Inoltre, data la forma della sezione, il momento di inerzia attorno all'asse neutro è pari a J_x .

Il valore massimo di tensione risulta quindi dato da:

$$\sigma_{z,\max} = \frac{M_{tot}}{J} d = 1.219 \text{ MPa}$$

