

VERIFICA INTERMEDIA DEL 28/01/04

AVVERTENZE

La prova è organizzata in 4 Quesiti, ciascuno dei quali, se svolto senza errori, consente il conseguimento del punteggio riportato vicino al titolo (in 30esimi).

Per il Quesito 2 vengono proposte 2 alternative (2a e 2b), di diverso punteggio e difficoltà.

Svolgere, a propria scelta, una sola delle due alternative.

Quesito 1 (Punti 10)

Data la travatura reticolare mostrata nella Figura 1, determinare le forze agenti in tutte le aste e le reazioni vincolari.

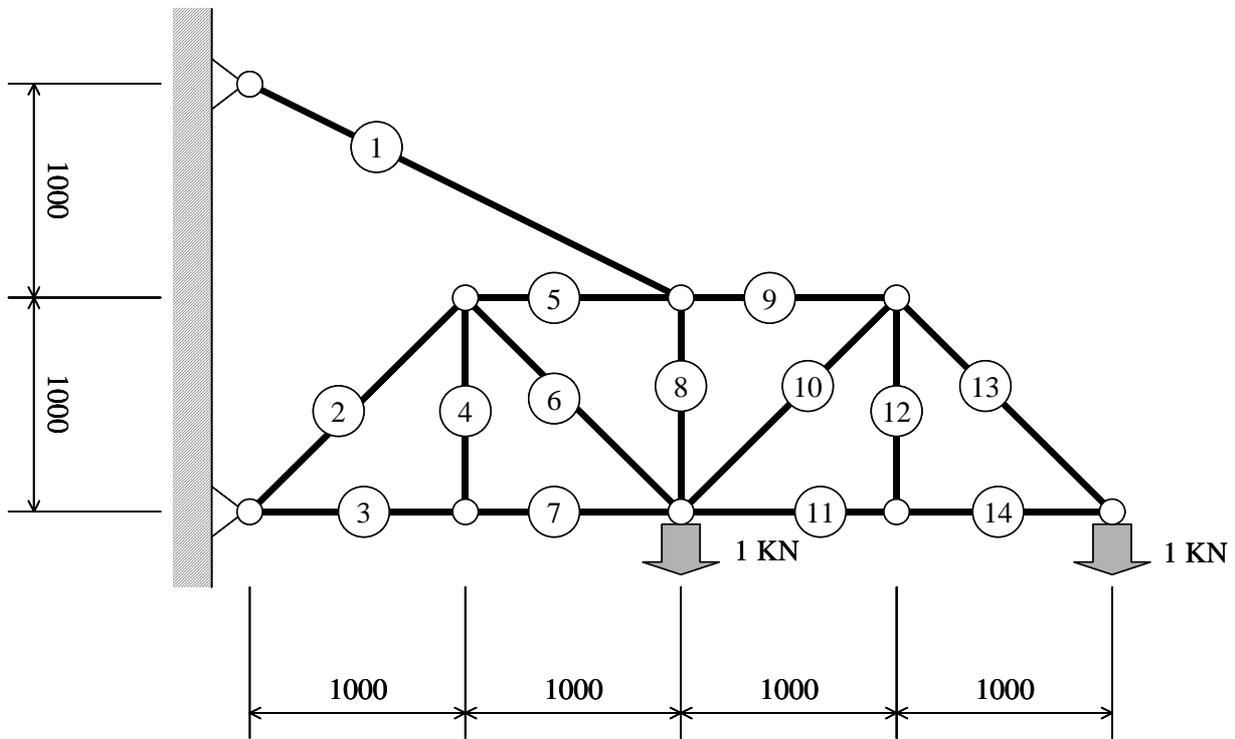


Figura 1

Quesito 2a (Punti 14)

Dato il dispositivo mostrato in Figura 2 (barra di torsione), determinare le reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione. Per il tracciamento di queste ultime è possibile servirsi del modulo riportato in Fig. 3.

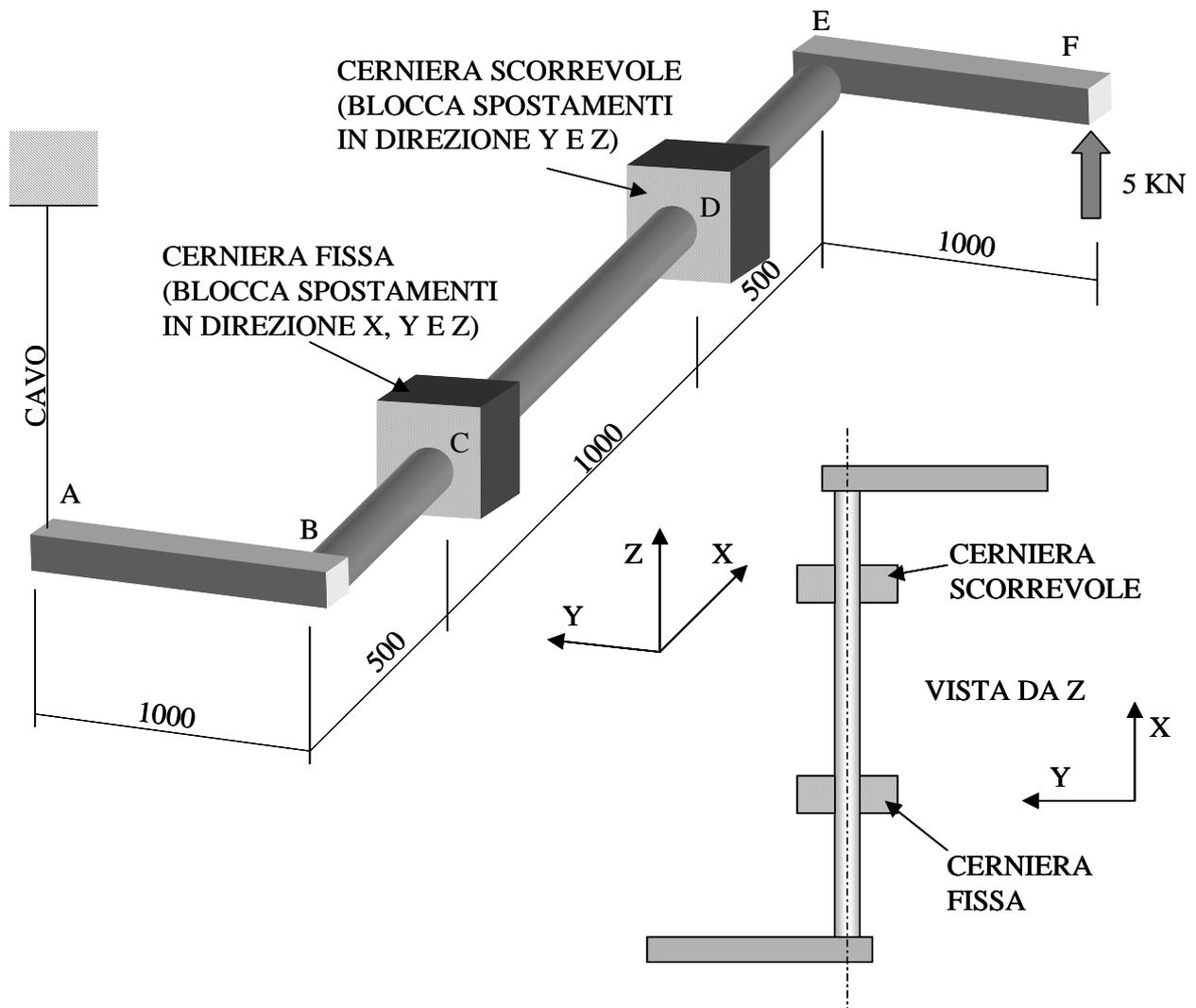


Figura 2

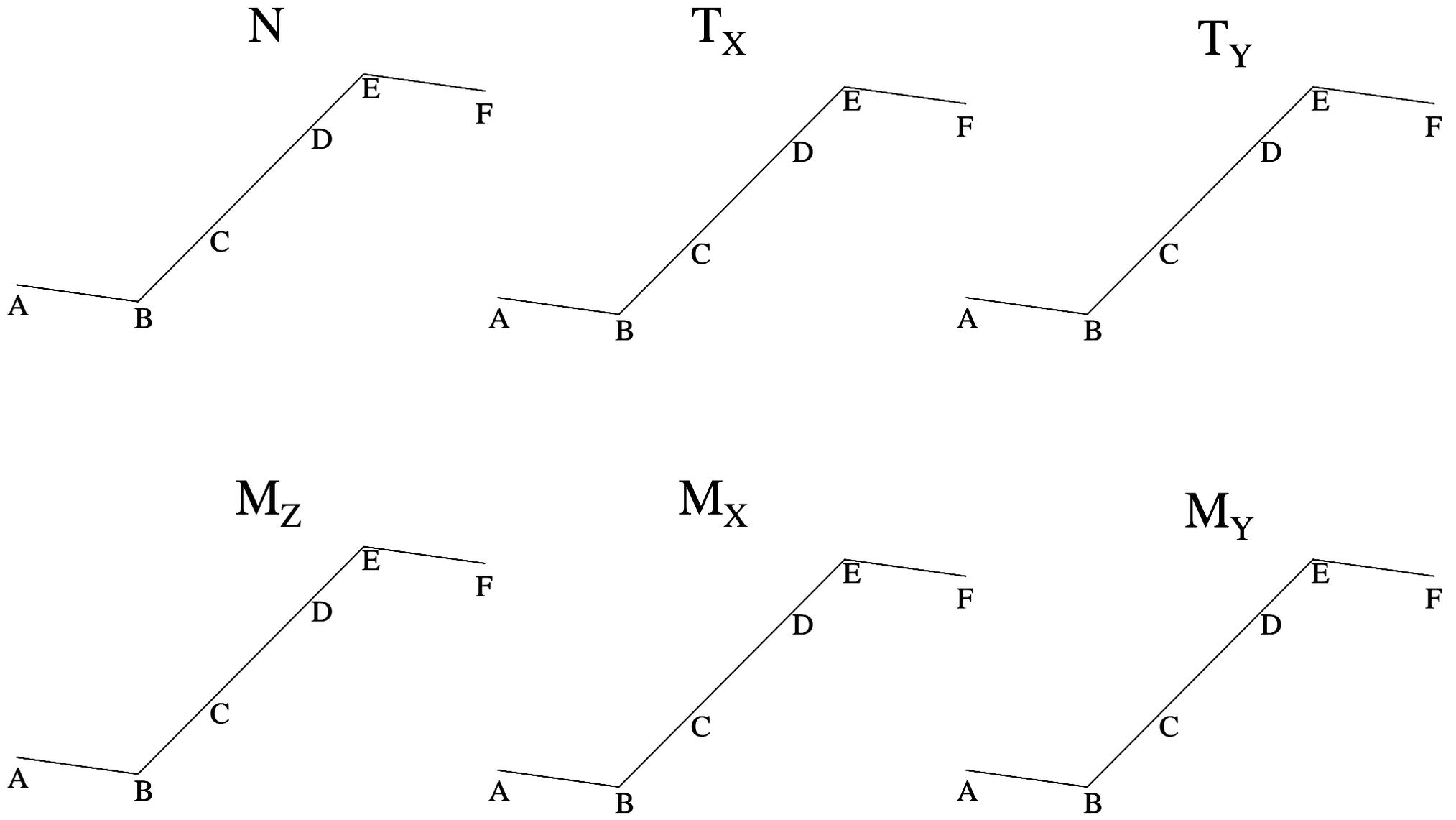


Figura 3

Quesito 2b (alternativo al quesito 2a) (Punti 10)

Data la struttura mostrata in Figura 4, determinare le reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione. Per il tracciamento di queste ultime è possibile servirsi del modulo riportato in Fig. 5.

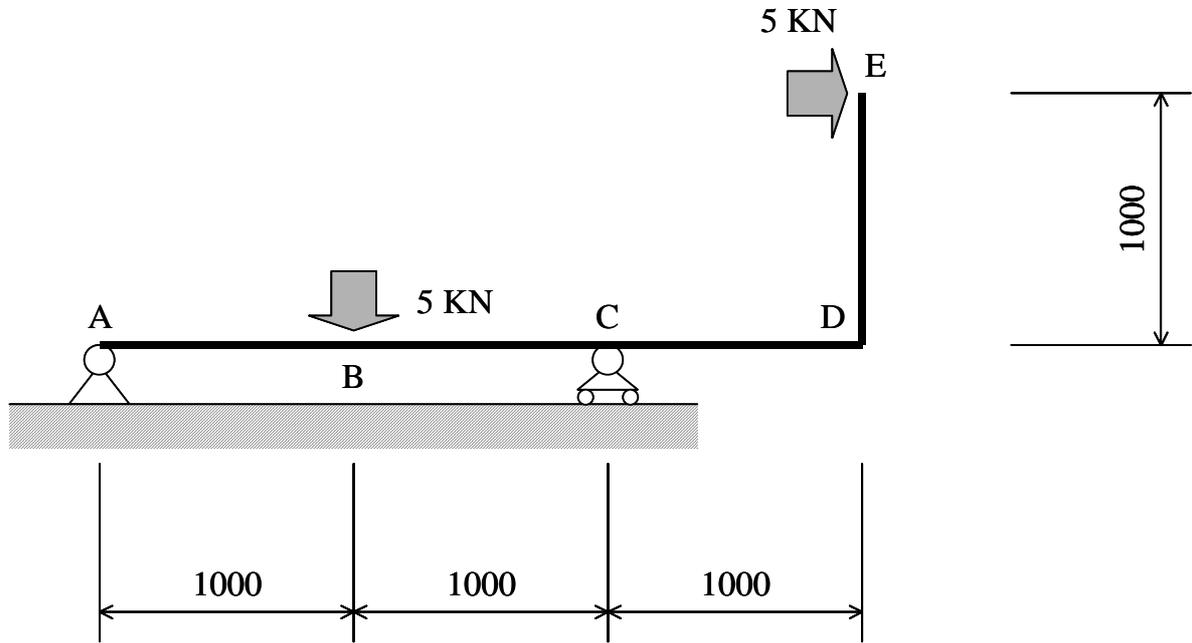


Figura 2

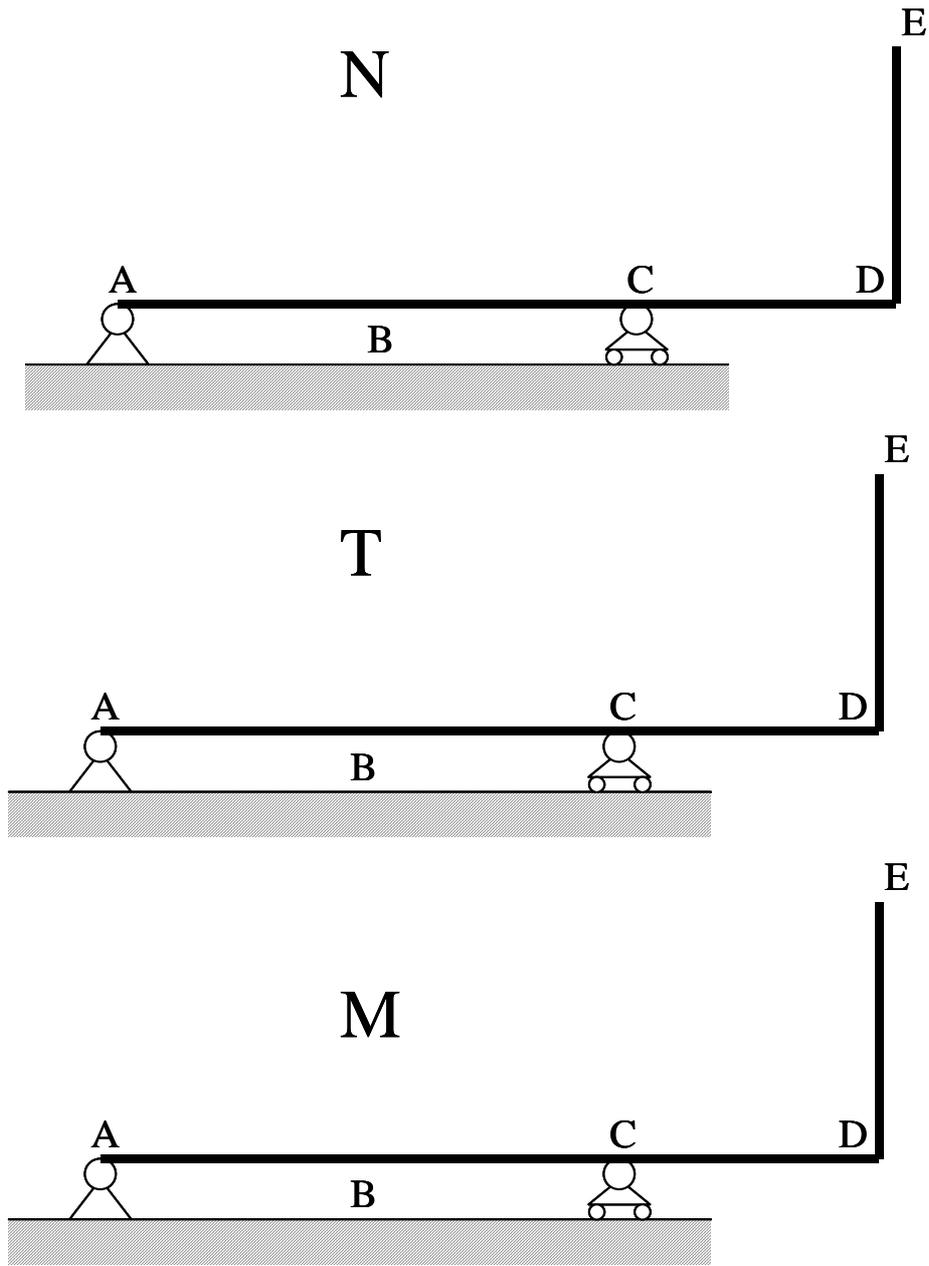


Figura 5

Quesito 3 (Punti 3)

Calcolare il valore dei momenti di inerzia rispetto agli assi principali centrali della sezione mostrata in Figura 6.

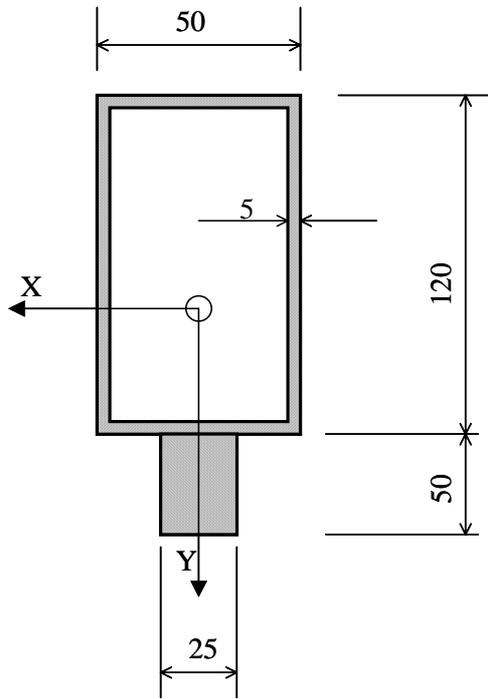


Figura 6

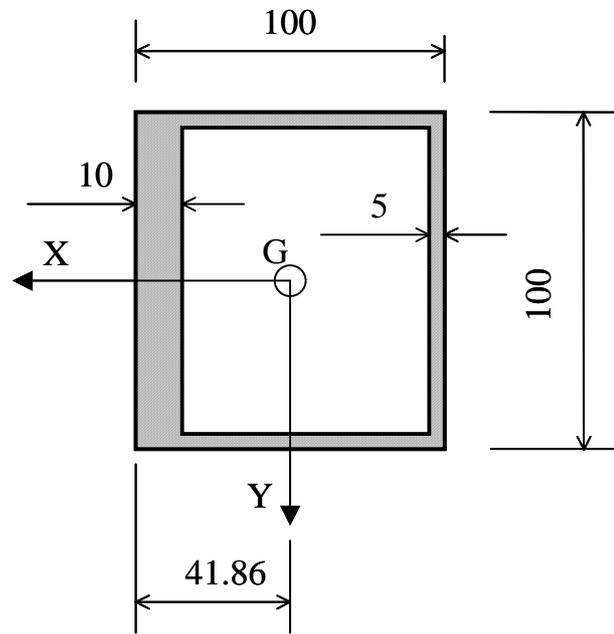


Figura 7

Quesito 4 (Punti 3)

Calcolare le tensioni normali e tangenziali massime (espresse in MPa) e mostrarne l'ubicazione per la sezione mostrata nella Figura 7, soggetta alle seguenti caratteristiche di sollecitazione:

$$M_X = 150 \text{ KNm}; M_Y = 10 \text{ KNm}; M_Z = 10 \text{ KNm}; N = 500 \text{ KN}; T_X = 100 \text{ KN}$$

Sono date le seguenti proprietà della sezione, mentre la posizione del baricentro è indicata nella Figura (valutare le ulteriori proprietà ritenute necessarie):

$$J_X = 3.170 \cdot 10^6 \text{ mm}^4; J_Y = 3.524 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

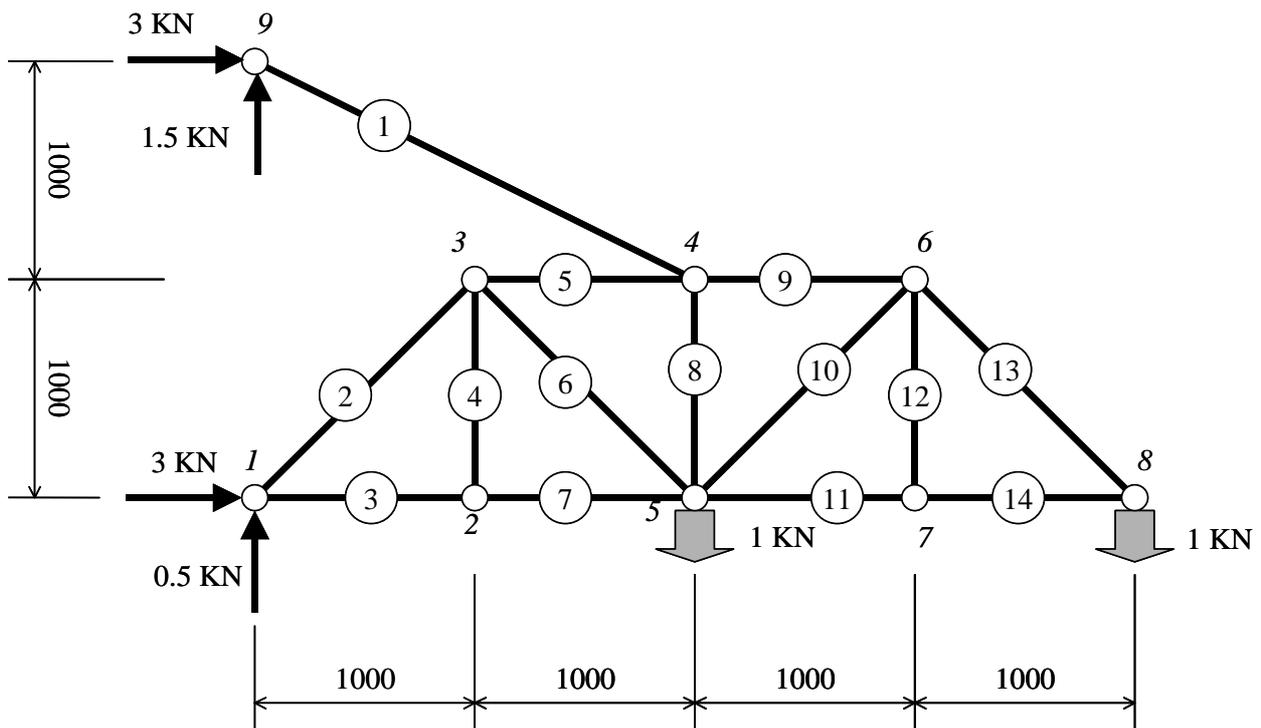


Figura 1.2

che risolto fornisce i seguenti valori delle reazioni vincolari:

$$W_B = 3.354 \text{ KN}$$

$$X_A = 3.00 \text{ KN}$$

$$Y_A = 0.500 \text{ KN}$$

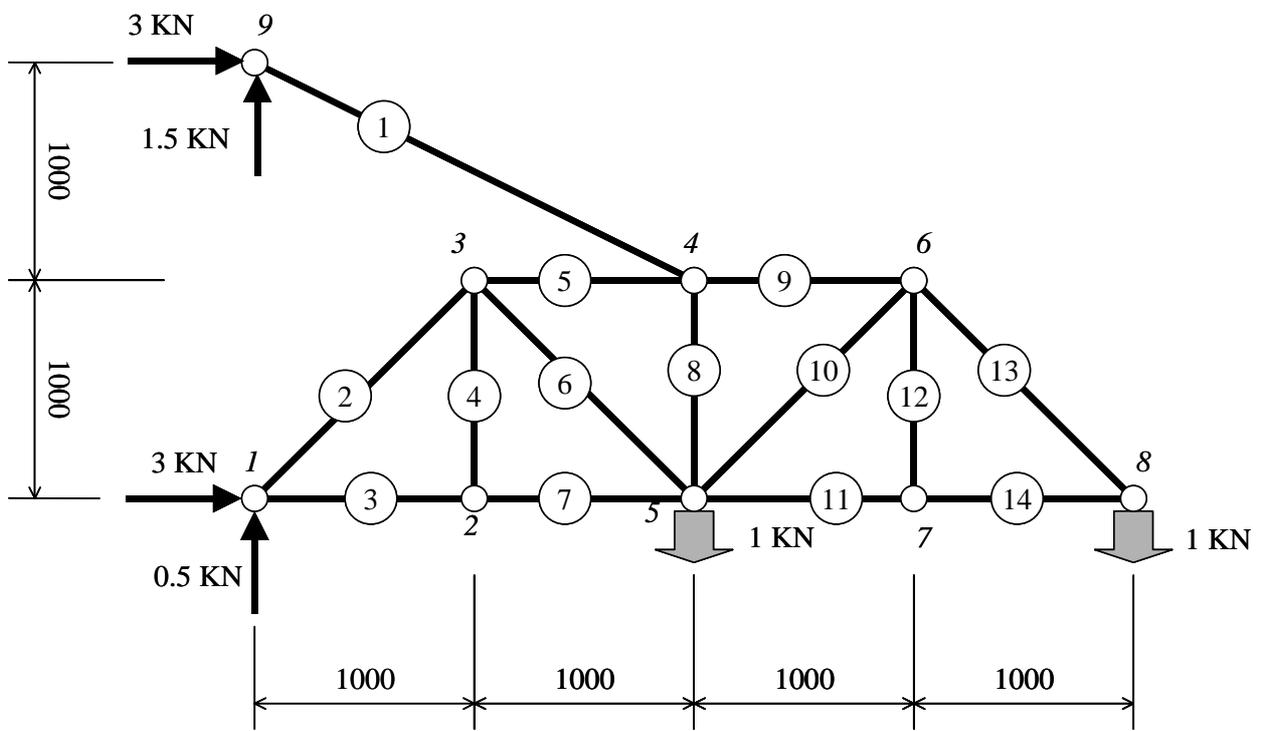


Fig. 1.3

Metodo 2

Si mantengono le due reazioni vincolari incognite nella cerniera superiore (Fig. 1.2), osservando però che la conoscenza della direzione della reazione complessiva consente di aggiungere al sistema la seguente equazione:

$$X_B = -2 \cdot Y_B$$

Le tre equazioni di equilibrio della statica divengono in questo caso:

$$R_X = 0 \rightarrow X_A + X_B = 0$$

$$R_Y = 0 \rightarrow Y_A + Y_B - 2 \text{ KN} = 0$$

$$MR_Z = 0 \rightarrow -X_B \cdot 2000 - 1 \text{ KN} \cdot 2000 \text{ mm} - 1 \text{ KN} \cdot 4000 \text{ mm} = X_B \cdot 2000 + 6000 \text{ KNmm} = 0$$

che risolto fornisce i seguenti valori delle reazioni vincolari:

$$X_B = -3.00 \text{ KN}$$

$$Y_B = 1.50 \text{ KN}$$

$$X_A = 3.00 \text{ KN}$$

$$Y_A = 0.500 \text{ KN}$$

Calcolo delle forze assiali nelle singole aste

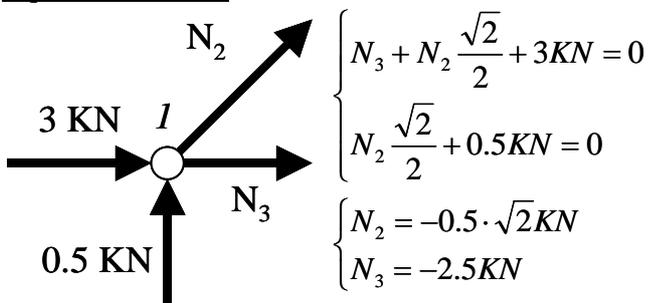
Il calcolo viene svolto con il metodo dei nodi, facendo riferimento al diagramma di corpo libero della struttura riportato in Fig. 1.3.

Si può osservare preliminarmente che le aste 4 e 12 sono necessariamente scariche, in quanto connesse con un nodo non caricato in cui convergono solo altre due aste tra loro consecutive.

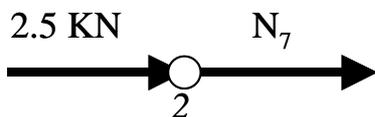
$$N_4 = N_{12} = 0$$

Dall'equilibrio del nodo 9 si ottiene inoltre immediatamente: $N_1 = 3.354 \text{ KN}$

Equilibrio nodo 1



Equilibrio nodo 2

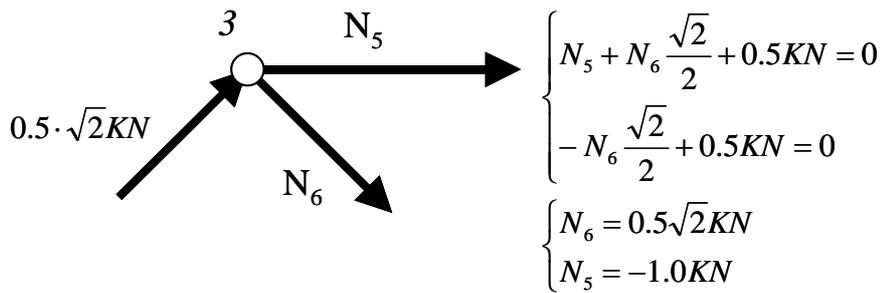


$$N_7 + 2.5 \text{ KN} = 0$$

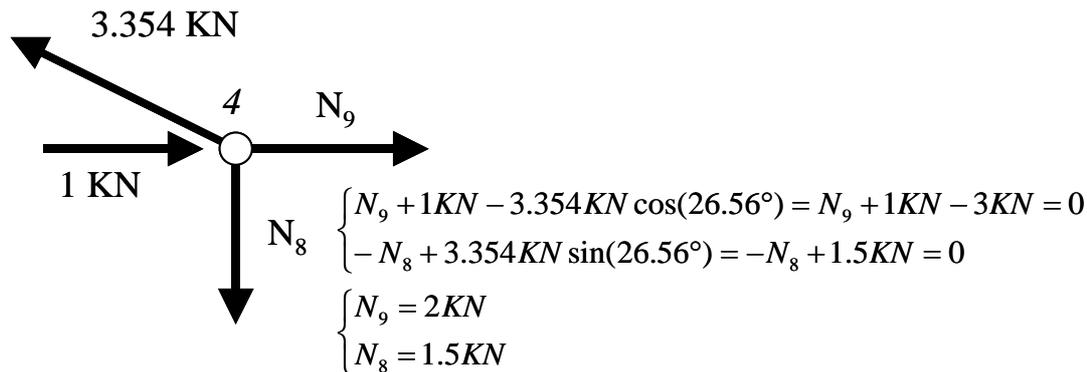
$$N_7 = -2.5 \text{ KN}$$

NB: l'equilibrio del nodo in direzione "Y" è automaticamente garantito per $N_4 = 0$

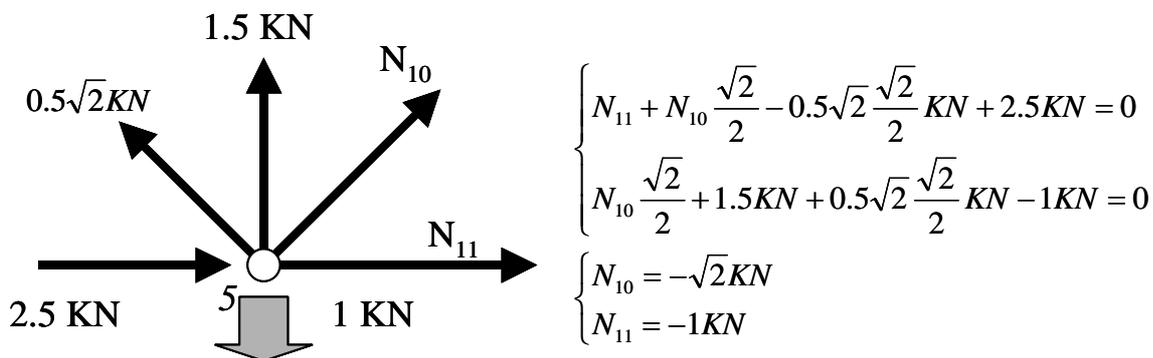
Equilibrio nodo 3



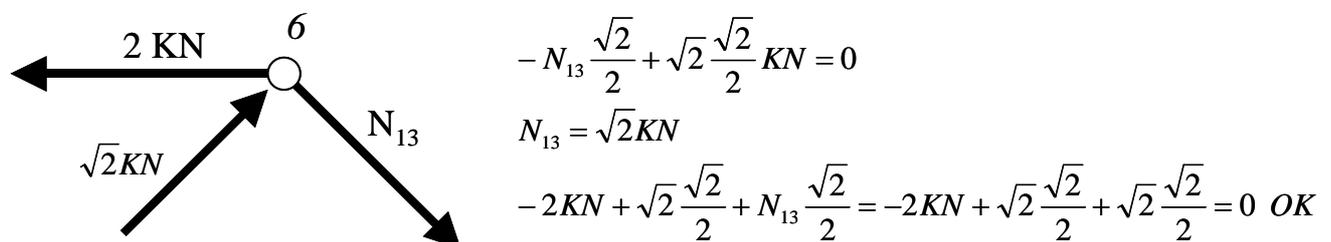
Equilibrio nodo 4



Equilibrio nodo 5

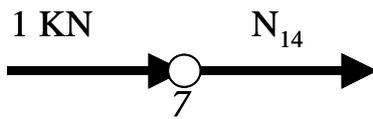


Equilibrio nodo 6



NB: Essendo presente una sola forza incognita, le due equazioni di equilibrio devono risultare entrambe soddisfatte con un unico valore della forza stessa. Si procede quindi a determinare il valore di N_{13} in base all'equilibrio in direzione "Y" e si verifica poi che il valore ottenuto soddisfi anche l'equazione di equilibrio in direzione "X".

Equilibrio nodo 7



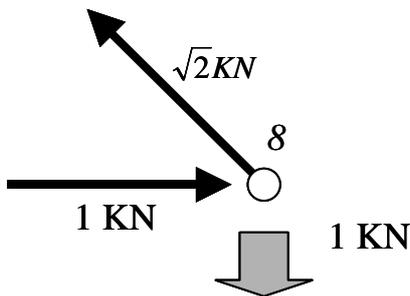
$$N_{14} + 1KN = 0$$

$$N_{14} = -1KN$$

NB: l'equilibrio del nodo in direzione "Y" è automaticamente garantito per $N_{12}=0$

Equilibrio nodo 8

L'equilibrio di questo nodo, essendo note tutte le forze in esso agenti, viene condotto a titolo di verifica dei risultati ottenuti.



$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = 0 \rightarrow 1KN - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} KN = 0 \quad OK \\ R_y = 0 \rightarrow -1KN + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} KN = 0 \quad OK \end{array} \right.$$

Quesito 2a (Punti 14)

Calcolo delle reazioni vincolari

La semplice struttura spaziale proposta è esternamente ed internamente isostatica.

Le 6 reazioni vincolari incognite (Fig. 2a.1) possono essere determinate utilizzando le equazioni di equilibrio della statica.

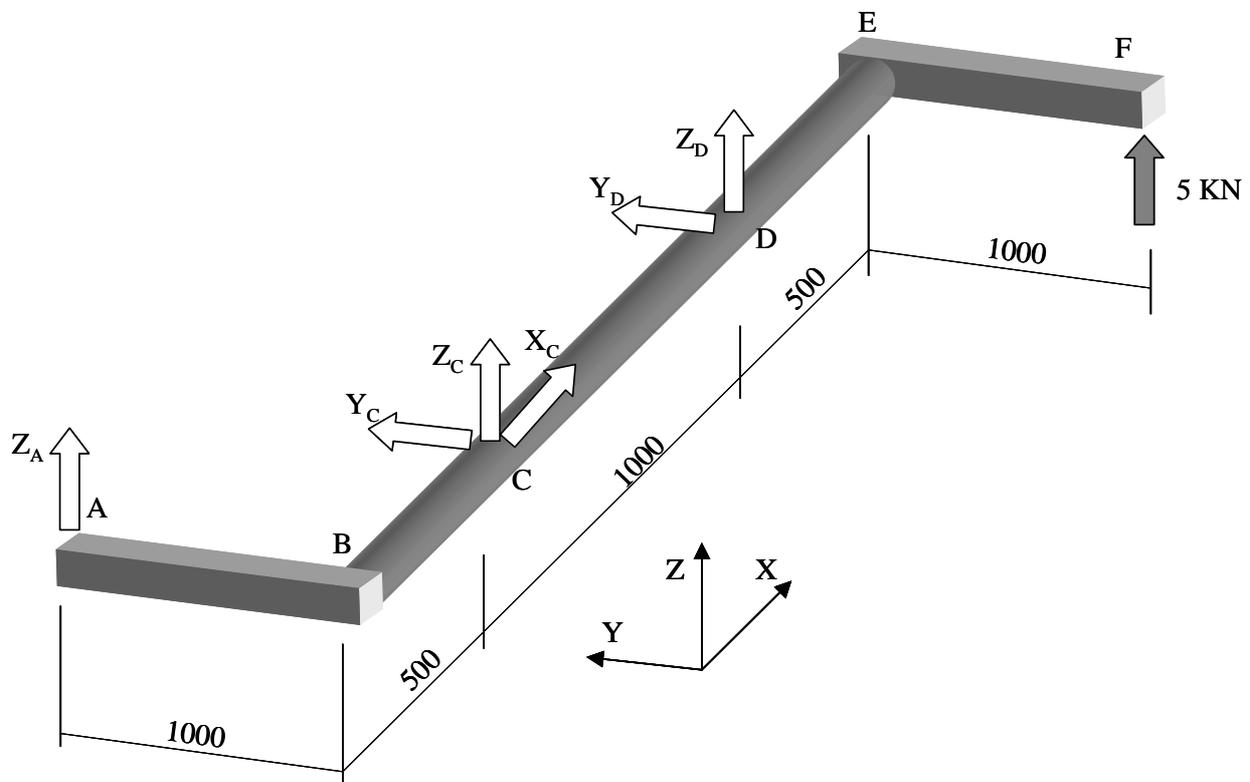


Figura 2a.1

Si ottiene in tal modo:

$$R_x = 0 \rightarrow X_c = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_c + Y_d = 0$$

$$R_z = 0 \rightarrow Z_A + Z_c + Z_d = 0$$

$$M_{xc} = 0 \rightarrow Z_A \cdot 1000 - 5KN \cdot 1000 = 0$$

$$M_{yc} = 0 \rightarrow Z_A \cdot 500 - Z_d \cdot 1000 - 5KN \cdot 1500 = 0$$

$$M_{zc} = 0 \rightarrow Y_d \cdot 1000 = 0$$

da cui si ricava:

$$Z_A = 5\text{KN}$$

$$X_C = 0$$

$$Y_C = 0$$

$$Z_C = -5\text{KN}$$

$$Y_D = 0$$

$$Z_D = -5\text{KN}$$

Il diagramma di corpo libero della struttura, con indicazione delle coordinate curvilinee utilizzate per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione e dei relativi sistemi di riferimento locale, è riportato in Fig. 2a.2.

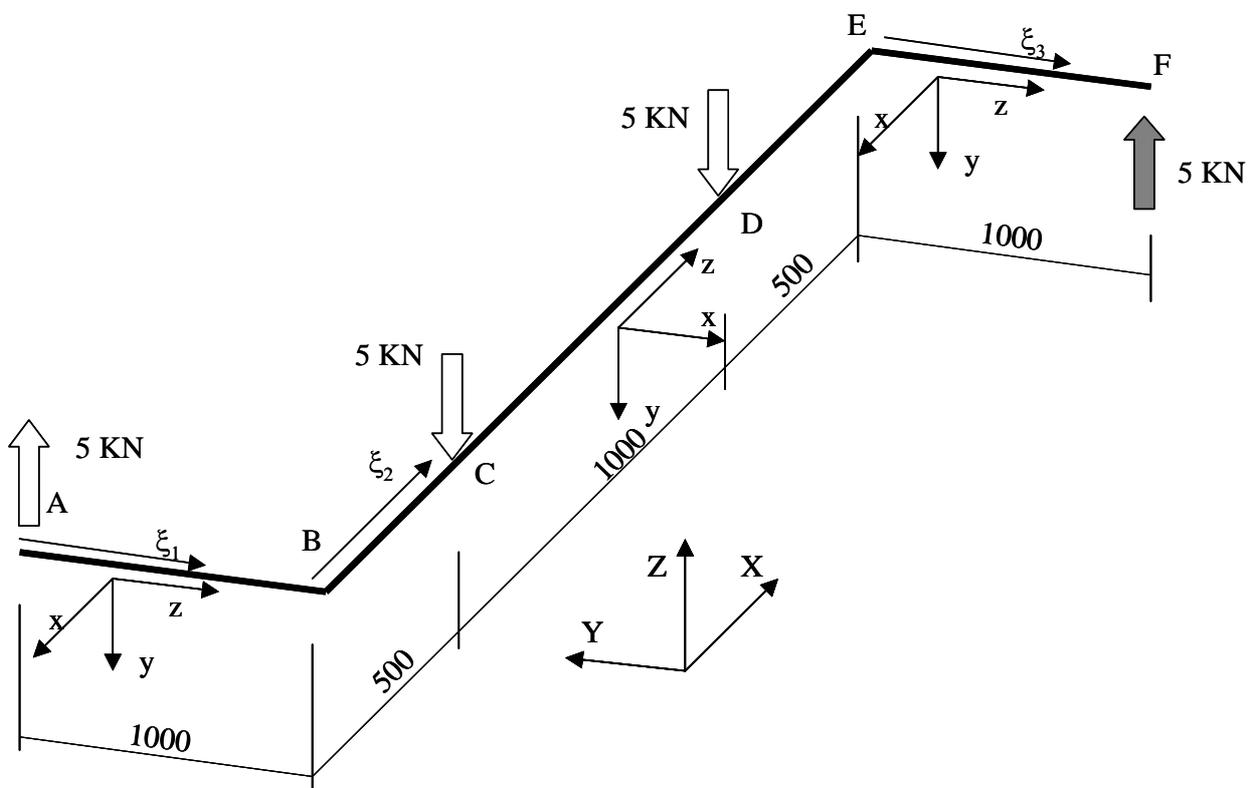
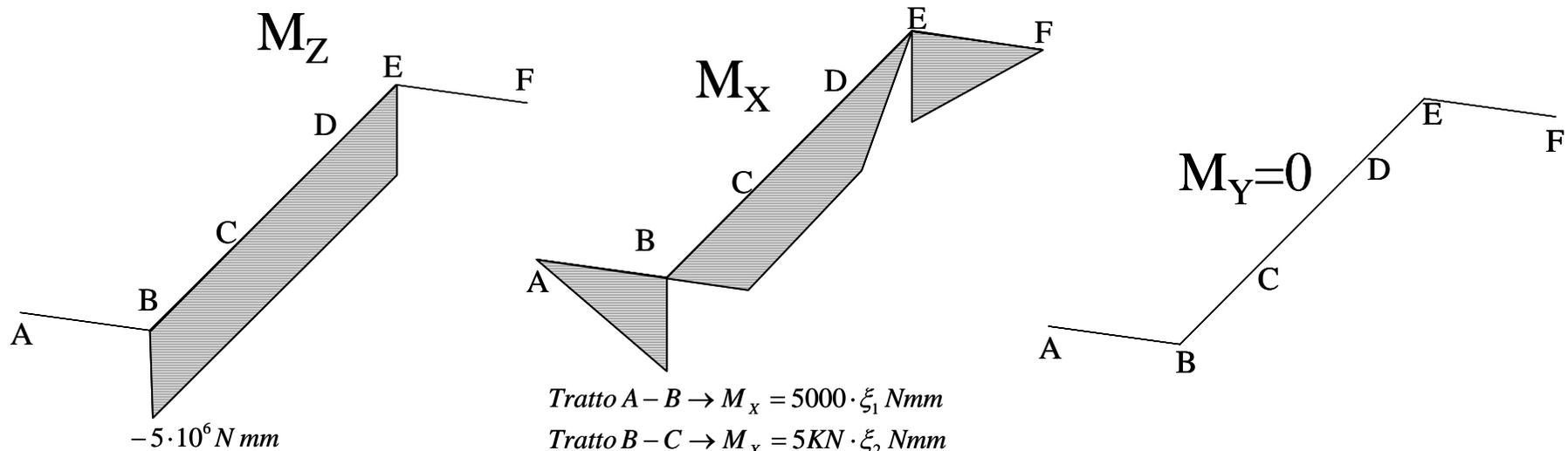
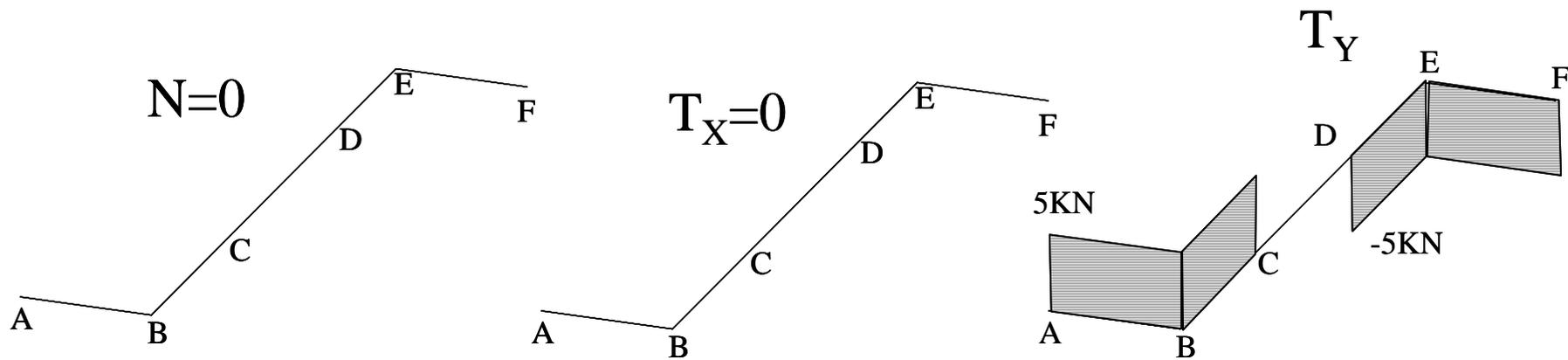


Fig. 2a.2

I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono riportati nella Fig. 2a.3.



- Tratto A - B $\rightarrow M_x = 5000 \cdot \xi_1 \text{ Nmm}$
- Tratto B - C $\rightarrow M_x = 5 \text{ KN} \cdot \xi_2 \text{ Nmm}$
- Tratto C - D $\rightarrow M_x = 2.5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$
- Tratto D - E $\rightarrow M_x = 5 \text{ KN} \cdot (2000 - \xi_2) \text{ Nmm}$
- Tratto E - F $\rightarrow M_x = 5 \text{ KN} \cdot (1000 - \xi_3) \text{ Nmm}$

Figura 2a.3

Quesito 2b (alternativo al quesito 2a) (Punti 10)

Calcolo delle reazioni vincolari

La semplice struttura piana proposta è esternamente ed internamente isostatica.

Le 3 reazioni vincolari incognite (Fig. 2b.1) possono essere determinate utilizzando le equazioni di equilibrio della statica.

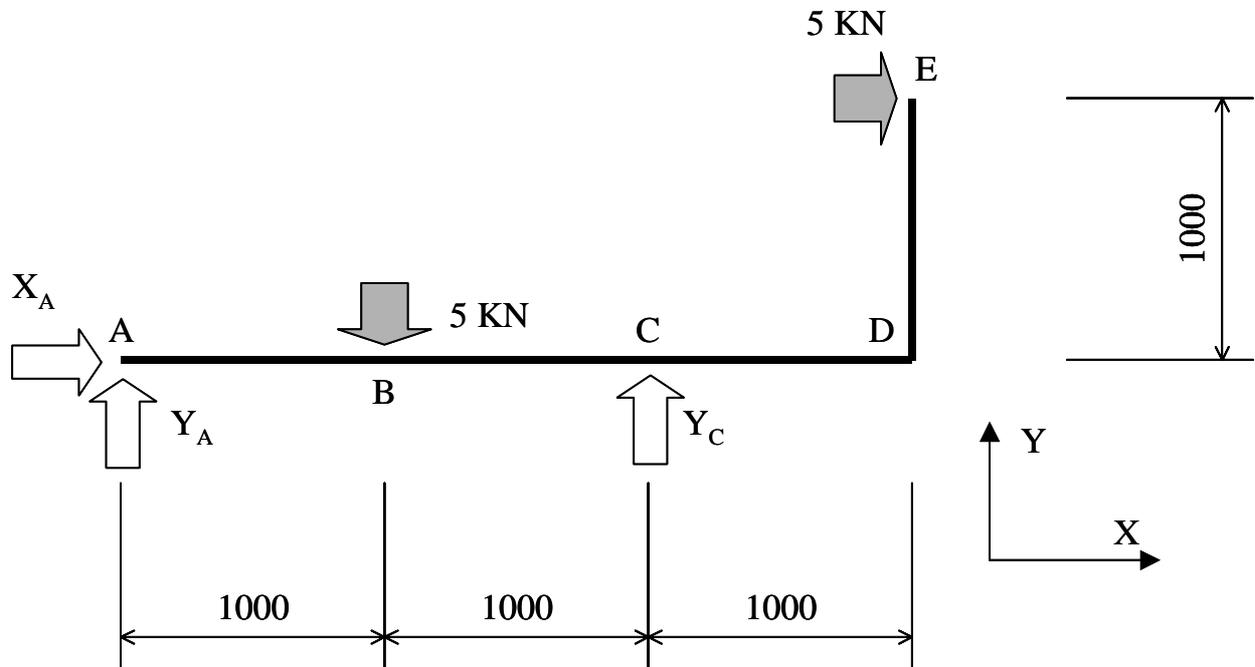


Figura 2b.1

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} R_x = 0 \rightarrow X_A + 5KN = 0 \\ R_y = 0 \rightarrow Y_A + Y_C - 5KN = 0 \\ M_{ZA} = 0 \rightarrow Y_C \cdot 2000 - 5KN \cdot 1000 - 5KN \cdot 1000 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_A = -5KN \\ Y_A = 0 \\ Y_C = 5KN \end{cases}$$

Il diagramma di corpo libero della struttura, con indicazione delle coordinate curvilinee utilizzate per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, è riportato in Fig. 2b.2.

I diagrammi delle caratteristiche sono infine riportati nella figura 2b.3

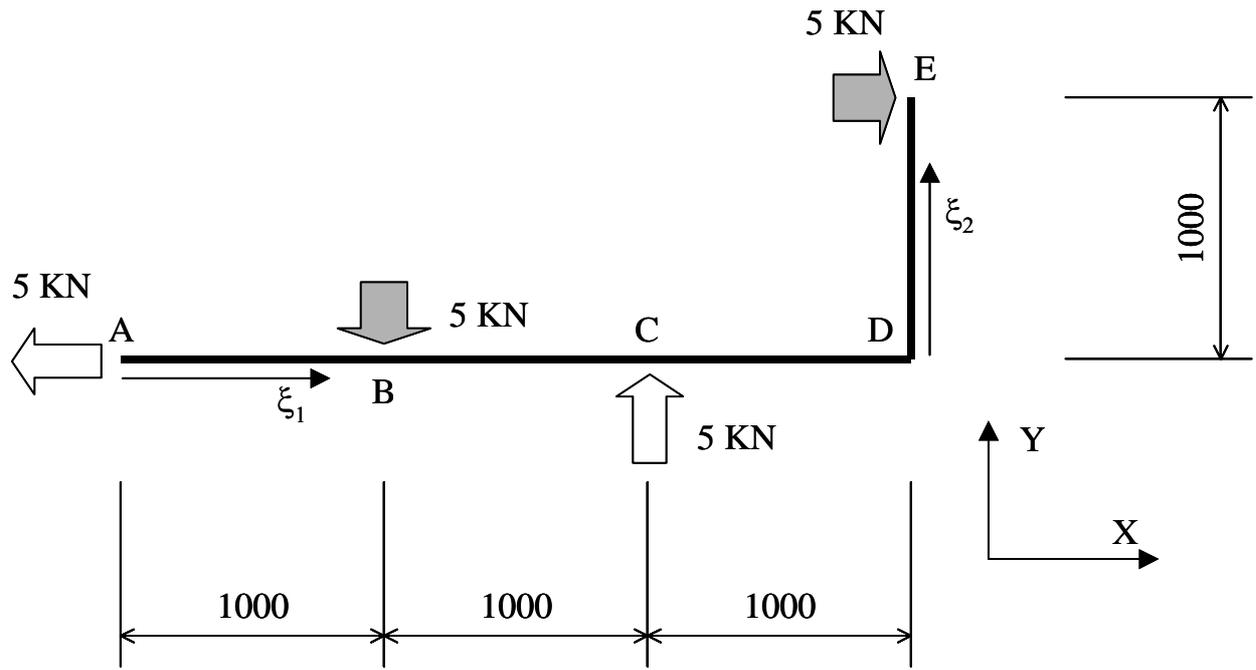


Fig. 2b.2

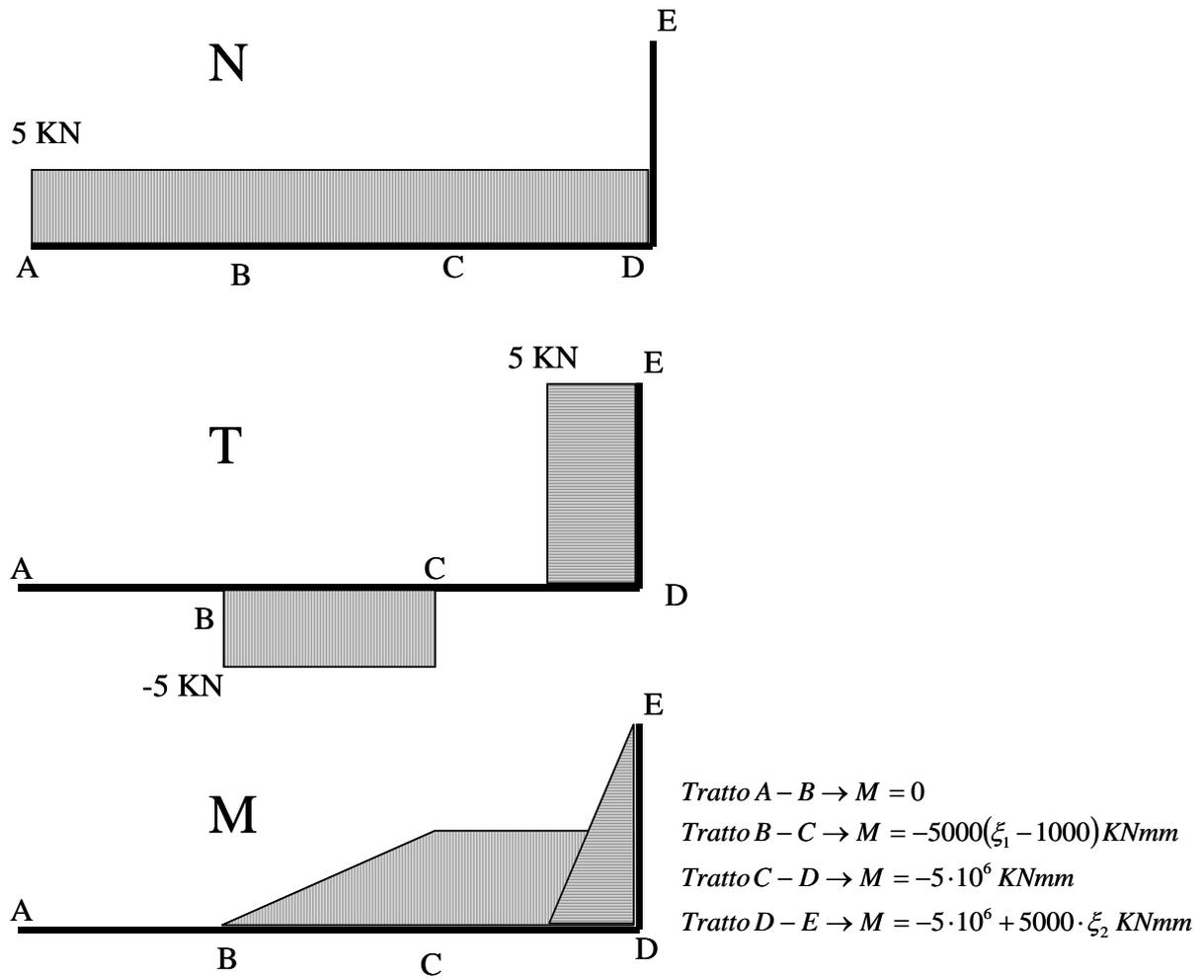
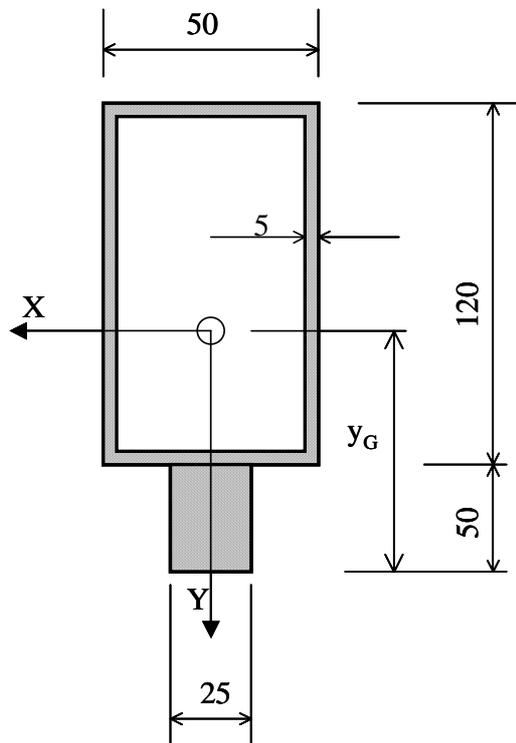


Figura 2b.3

Quesito 3 (Punti 3)



$$y_G = \frac{(50 \cdot 120 - 40 \cdot 110)(50 + 60) + 50 \cdot 25 \cdot 25}{(50 \cdot 120 - 40 \cdot 110) + 50 \cdot 25} = 72.72 \text{ mm}$$

$$J_x = \left(\frac{50 \cdot 120^3}{12} - \frac{40 \cdot 110^3}{12} \right) + (50 \cdot 120 - 40 \cdot 110)(110 - 72.72)^2 + \frac{25 \cdot 50^3}{12} + 50 \cdot 25(72.72 - 25)^2 = 8.094 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \left(\frac{120 \cdot 50^3}{12} - \frac{110 \cdot 40^3}{12} \right) + \frac{50 \cdot 25^3}{12} = 7.284 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

Figura 3.1

Quesito 4 (Punti 3)

Tensioni dovute ad M_x

$$\sigma_{z,\max} = -\sigma_{z,\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{1.5 \cdot 10^8 \text{ Nmm}}{3.17 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} 50 \text{ mm} = 2366 \text{ MPa}$$

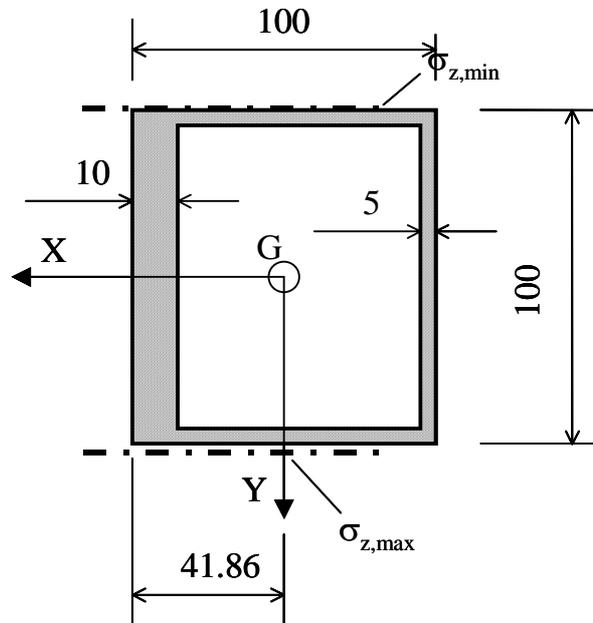


Figura 4.1

Tensioni dovute ad M_y

$$\sigma_{z,\max} = -\frac{M_y}{J_y} x_{\max} = \frac{1.0 \cdot 10^7 \text{ Nmm}}{3.524 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} (100 - 41.86) \text{ mm} = 165.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z,\min} = -\frac{M_y}{J_y} x_{\min} = \frac{1.0 \cdot 10^7 \text{ Nmm}}{3.524 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} (-41.86) \text{ mm} = -118.0 \text{ MPa}$$

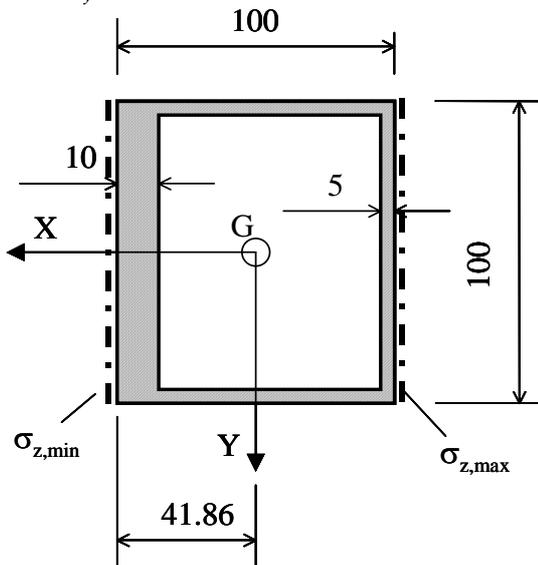


Figura 4.2

Tensioni dovute ad N

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{5.0 \cdot 10^5 N}{2.535 \cdot 10^3 mm^2} = 212.8 MPa$$

Tensioni dovute ad M_z

$$\Omega = 92.5 \cdot 95 = 8787 mm^2$$

$$\tau_{zy,1} = \frac{M_z}{2\Omega s_1} = \frac{1 \cdot 10^7 Nmm}{2 \cdot 8787 mm^2 \cdot 10 mm} = 56.89 MPa$$

$$\tau_{zy,3} = -\frac{M_z}{2\Omega s_1} = -\frac{1 \cdot 10^7 Nmm}{2 \cdot 8787 mm^2 \cdot 10 mm} = -113.8 MPa$$

$$\tau_{zx,4} = -\tau_{zx,2} = \frac{M_z}{2\Omega s_{2-4}} = \frac{1 \cdot 10^7 Nmm}{2 \cdot 8787 mm^2 \cdot 5 mm} = 113.8 MPa$$

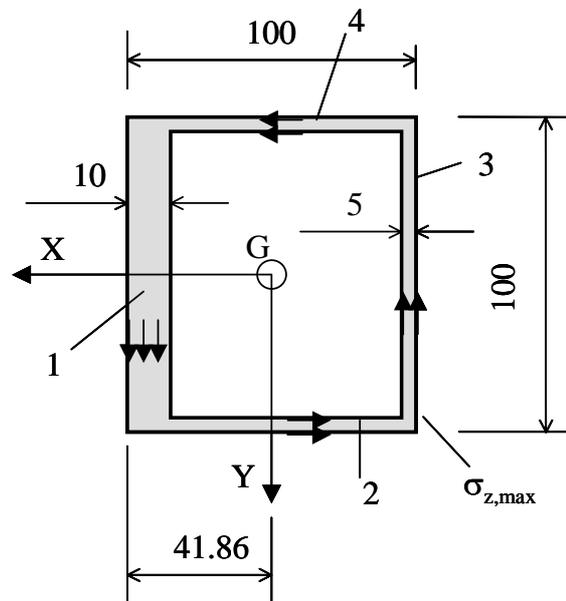


Fig. 4.3

Tensioni dovute a T_x

$$S_y(0) = 2(100 - 41.86)5 \left(\frac{100 - 41.86}{2} \right) +$$

$$+ (100 - 2 \cdot 5)5(100 - 2.5 - 41.86) = 41937 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{zx, \max} = \frac{T_x S_y(0)}{J_y b} = \frac{1 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot 41937 \text{ mm}^3}{3.524 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot 2.5 \text{ mm}} = 119.0 \text{ MPa}$$

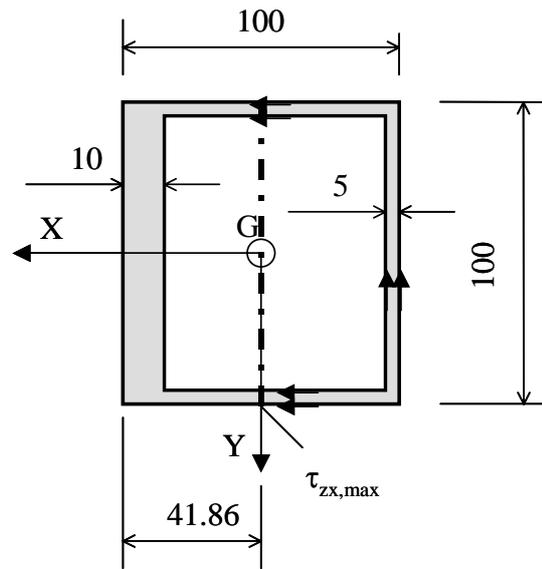


Fig. 4.4

Tensioni tangenziali e normali massime

Le tensioni normali e tangenziali massime sulla sezione sono indicate nella Fig. 4.5

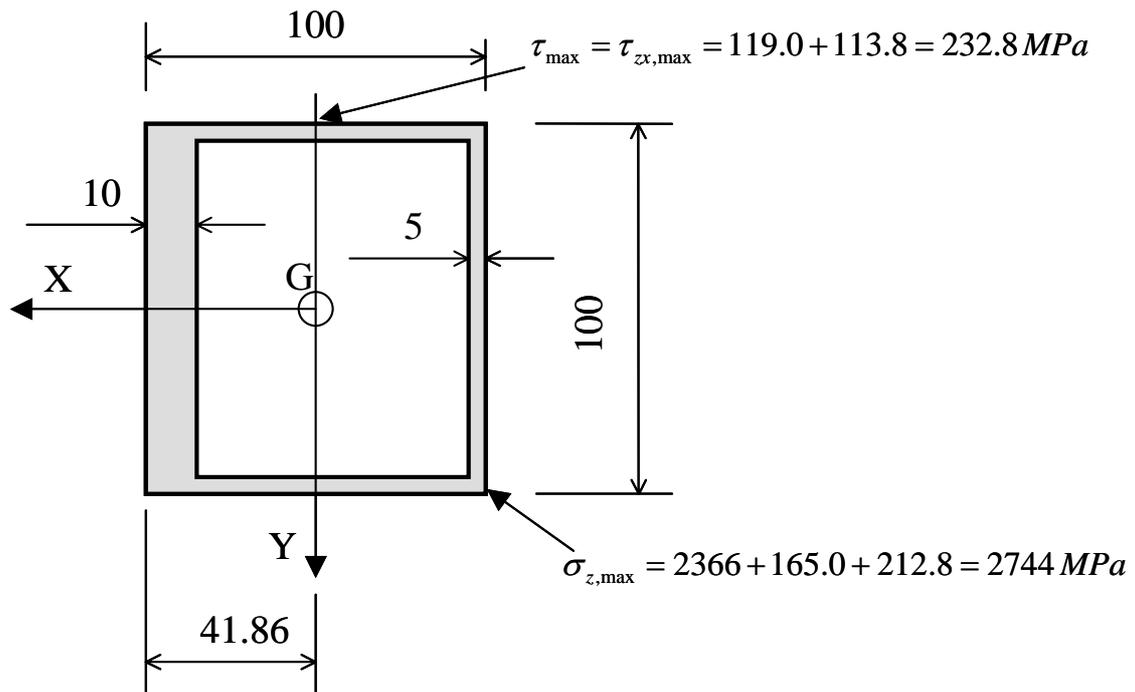


Fig. 4.5