

COGNOME E NOME

MATRICOLA

**ESERCIZIO 1 (Punti 9)**

Data la struttura piana mostrata in Figura 1, calcolare in modulo e verso lo spostamento verticale del punto  $D$  conseguente all'applicazione delle due forze  $F$ , in direzione orizzontale, in corrispondenza del punto  $A$ .

Dati:

- $L = 100 \text{ mm}$
- $b = 40 \text{ mm}$
- $b_s = 10 \text{ mm}$
- $F = 100 \text{ N}$
- $h = 5 \text{ mm}$
- materiale : acciaio

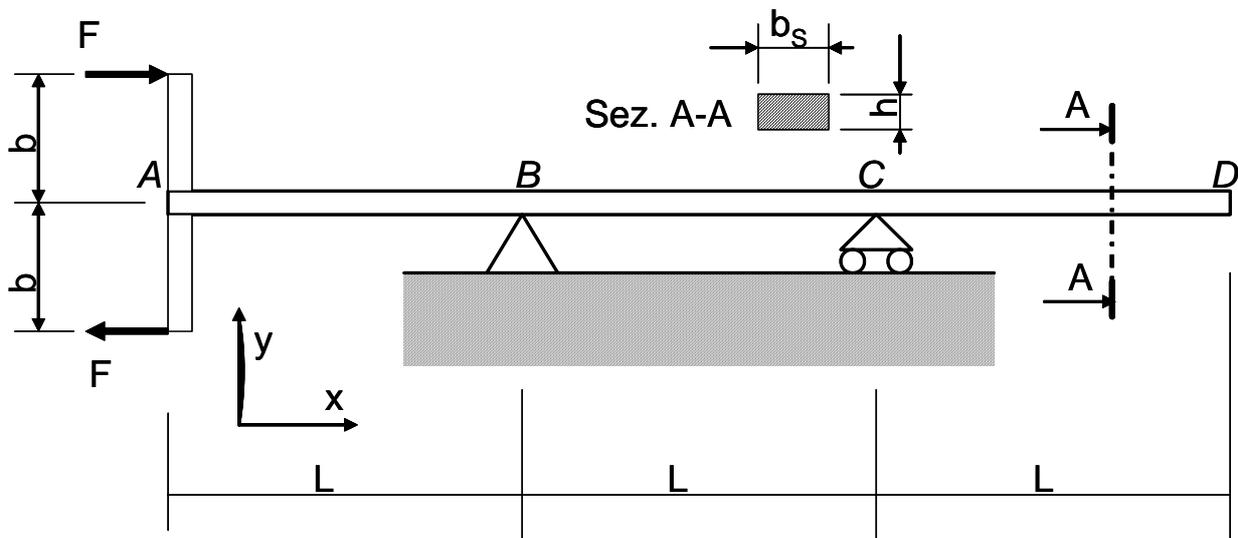


Fig. 1

### ESERCIZIO 2 (Punti 9)

Verificare la resistenza della struttura mostrata in Fig. 2, utilizzata per sollevare ripetutamente dei corpi di massa  $M$ .  
Dati:

- $L = 1000$  mm
- $M = 1000$  Kg
- $b = 50$  mm
- $h_1 = 120$  mm
- $h_2 = 140$  mm
- $\sigma_S = 700$  MPa (tensione snervamento materiale)
- $\Delta\sigma_L = 500$  MPa (limite di fatica materiale)

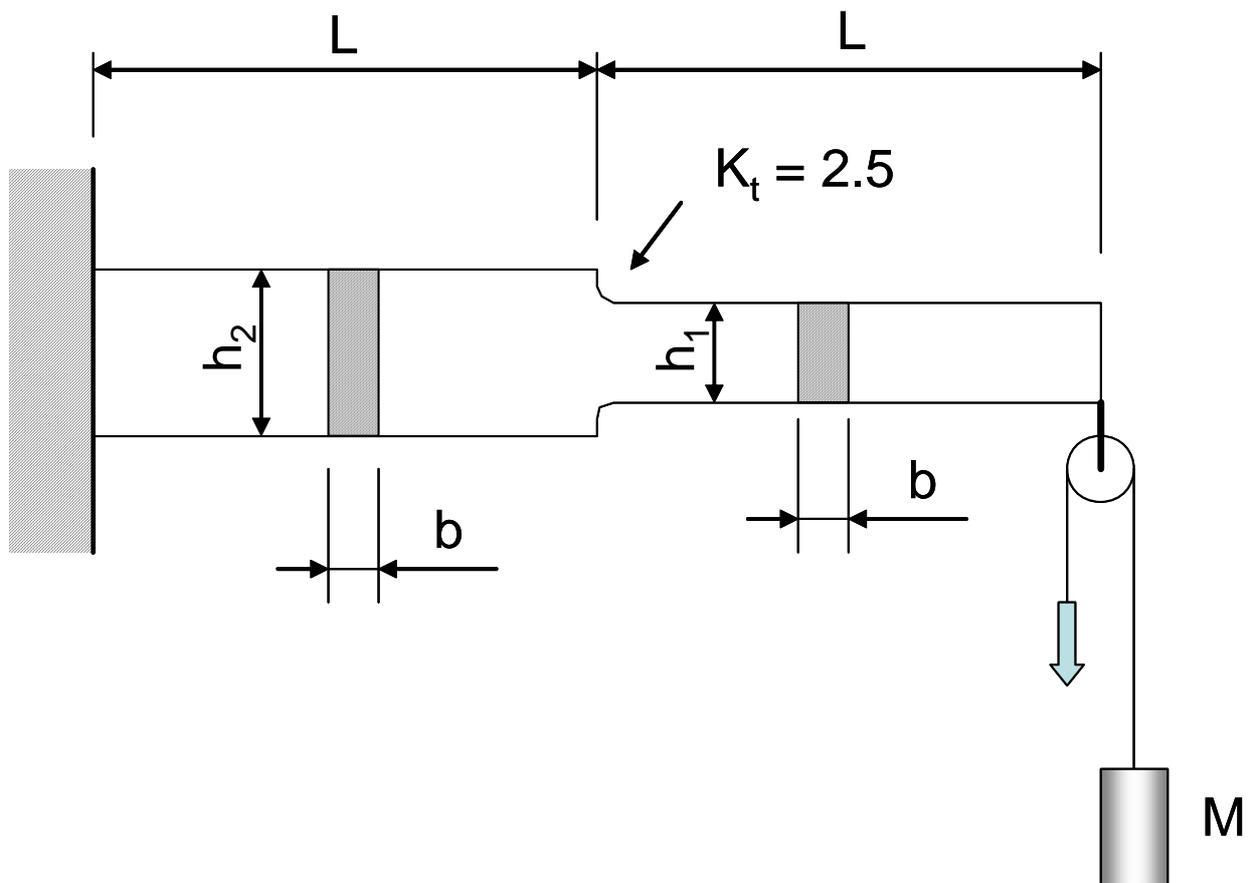


Fig. 2

### ESERCIZIO 3 (Punti 9)

Verificare la resistenza del giunto bullonato a flangia posto all'estremità della trave mostrata in Fig. 3. La flangia è di forma quadrata ed i bulloni sono disposti su di essa in maniera simmetrica.

Condurre la verifica ad attrito.

Dati:

- $L = 1000 \text{ mm}$
- $a = 80 \text{ mm}$
- $b = 200 \text{ mm}$
- $d = 150 \text{ mm}$
- $F_1 = 5000 \text{ N}$
- $F_2 = 2000 \text{ N}$
- $\Phi = 8 \text{ mm}$
- $\sigma_b = 800 \text{ MPa}$  (tensione limite materiale bullone)
- $f=0.3$  (coefficiente di attrito flange)
- $\varphi_{\min} = 1.5$  (coefficiente di sicurezza minimo richiesto)

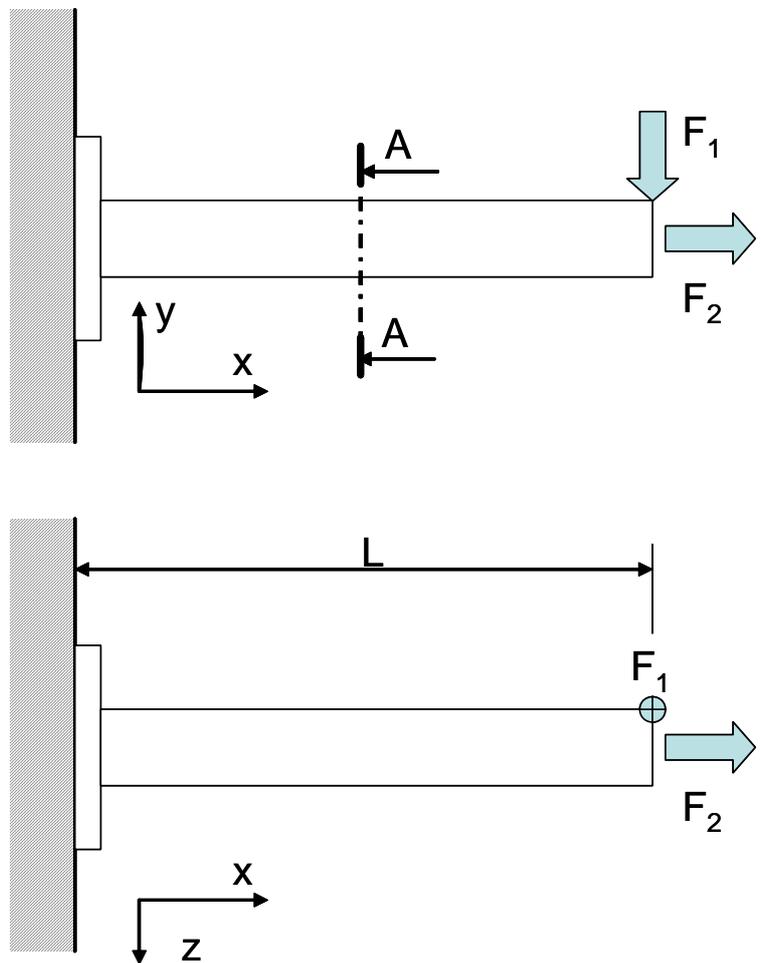
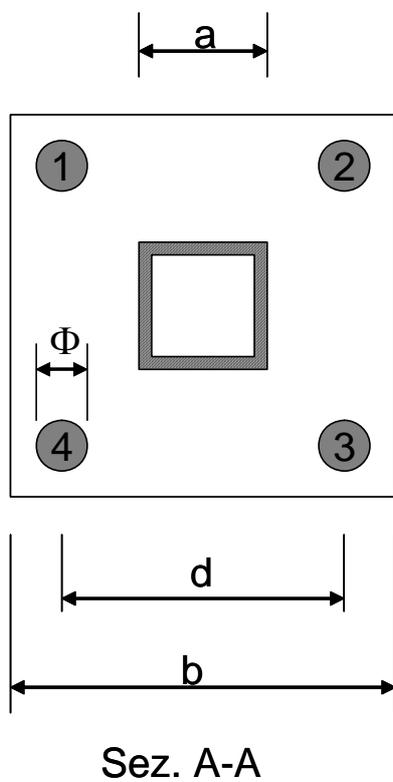


Fig. 3

**ESERCIZIO 4 (Punti 6)**

Dato il braccio robotico in moto piano mostrato in Figura 4, calcolare velocità ed accelerazione dei punti A e B. Sono date nella Figura velocità ed accelerazioni angolari dei due corpi che costituiscono il braccio e sono indicati i relativi versi positivi (rotazioni attorno all'asse Z, uscente dal foglio).

Dati:

- $L = 1000 \text{ mm}$

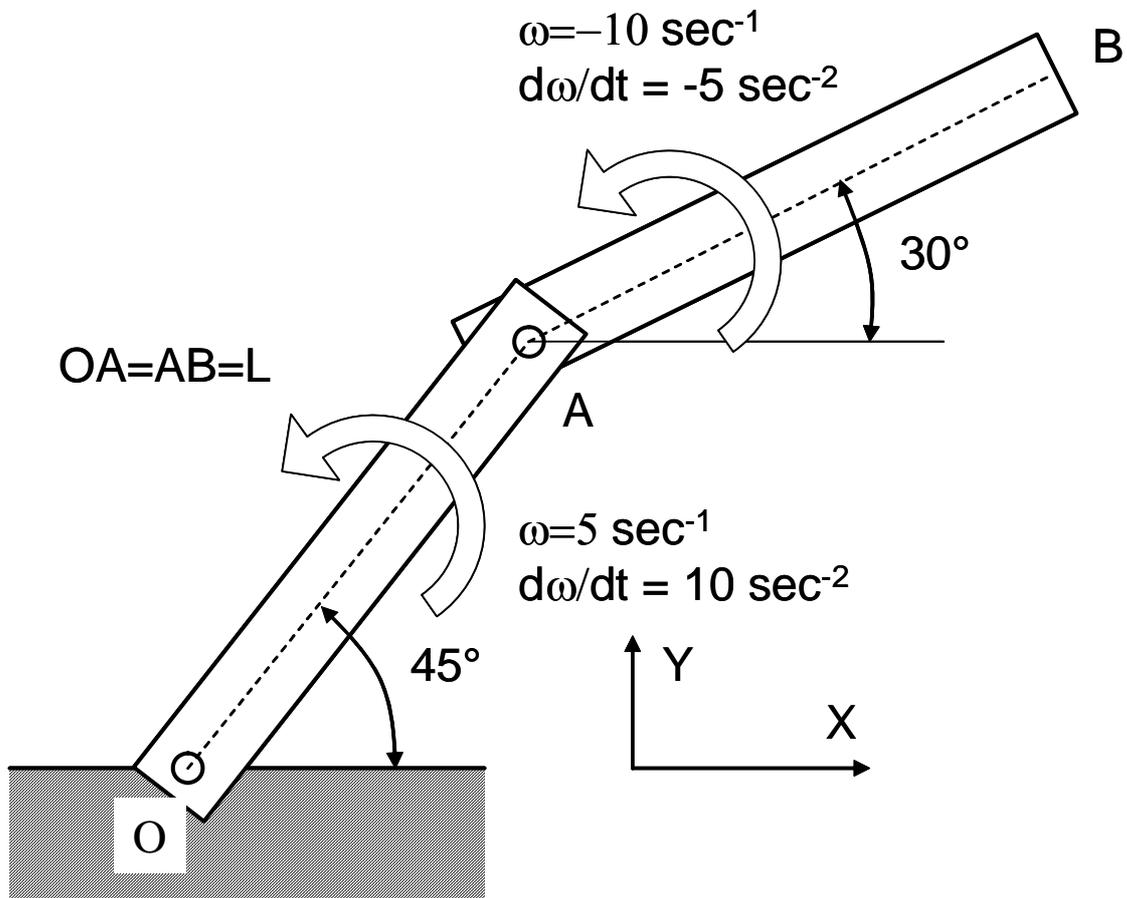


Fig. 4

**SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1**

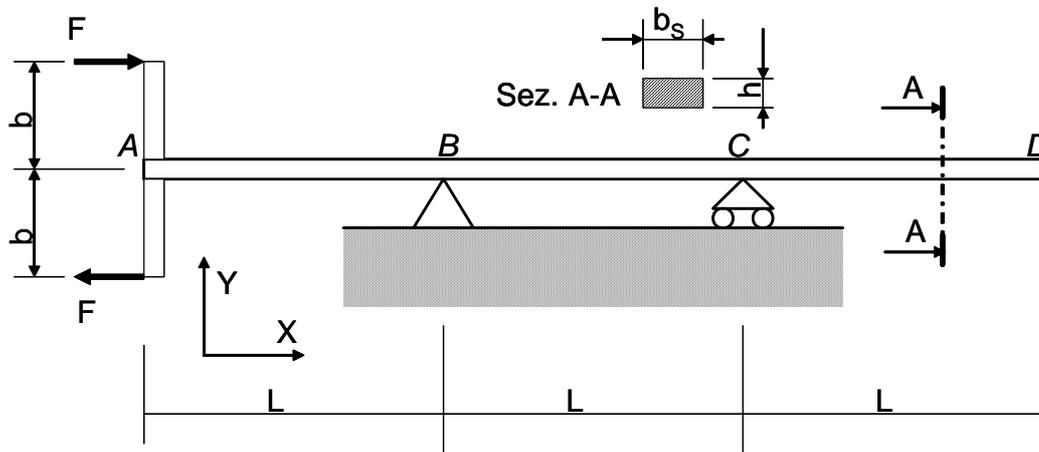


Fig. 1

**Dati**

$$L := 100 \text{ mm} \quad h := 5 \text{ mm}$$

$$b := 40 \text{ mm} \quad b_s := 10 \text{ mm}$$

$$F := 100 \text{ mm} \quad MY := 210000 \text{ MPa (Modulo di Young)}$$

**Calcolo reazioni vincolari**

Il diagramma di corpo libero della trave con reazioni vincolari incognite è mostrato in Fig. 2  
 Le Equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{aligned} Y_B + Y_C &= 0 & \text{Ris. } Y &= 0 \\ X_B + 100 - 100 &= 0 & \text{Ris. } X &= 0 \\ Y_C * L - 2 * F * b &= 0 & \text{Mom } Z(B) &= 0 \end{aligned}$$

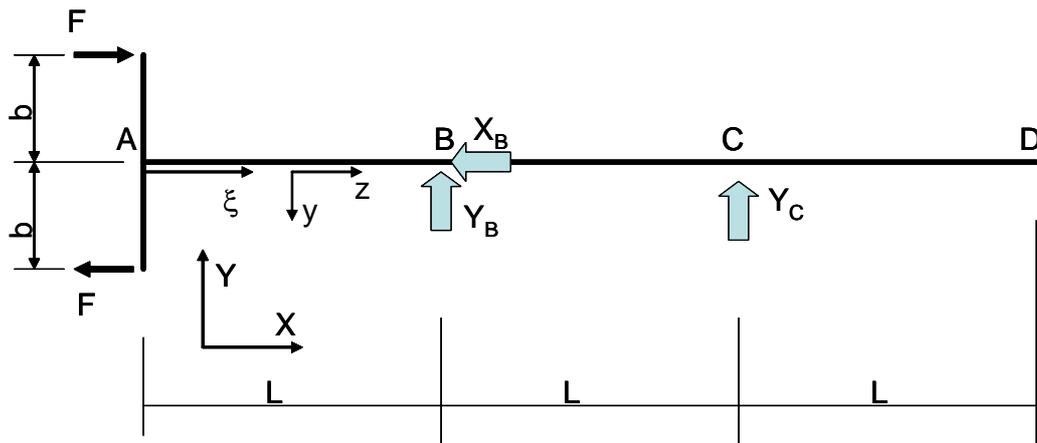


Fig. 2

Le equazioni di equilibrio vengono tradotte in un sistema di equazioni lineari del tipo  $A \cdot x = C$  con A matrice dei coefficienti e C vettore dei termini noti

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot F \cdot b \end{pmatrix}$$

`sol := Isolve(A, C)`

Soluzione

$$X_B := \text{sol}_0 \quad X_B = 0$$

$$Y_B := \text{sol}_1 \quad Y_B = -80$$

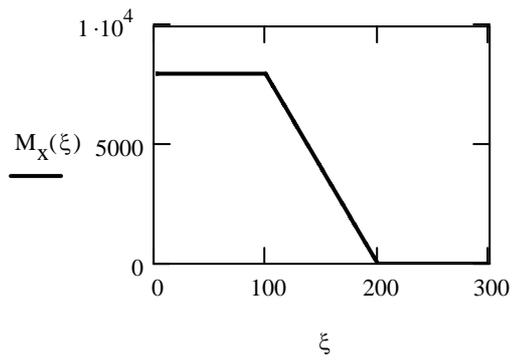
$$Y_C := \text{sol}_2 \quad Y_C = 80$$

### Momento flettente $M_x$

Il momento  $M_x$  è dato da:

$$\xi := 0, 1 \dots 3 \cdot L$$

$$M_x(\xi) := \begin{cases} 2 \cdot F \cdot b & \text{if } 0 \leq \xi \leq L \\ 2 \cdot F \cdot b + Y_B \cdot (\xi - L) & \text{if } L < \xi < 2 \cdot L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



### Calcolo reazioni vincolari per carico fittizio

Schema di calcolo in Fig. 3

$$\begin{aligned} \text{Ris. } X=0 & \quad X_{B1} = 0 \\ \text{Ris. } Y=0 & \quad Y_{B1} + Y_{C1} + 1 = 0 \\ \text{Mz(B)}=0 & \quad Y_{C1} \cdot L + 1 \cdot 2 \cdot L = 0 \end{aligned}$$

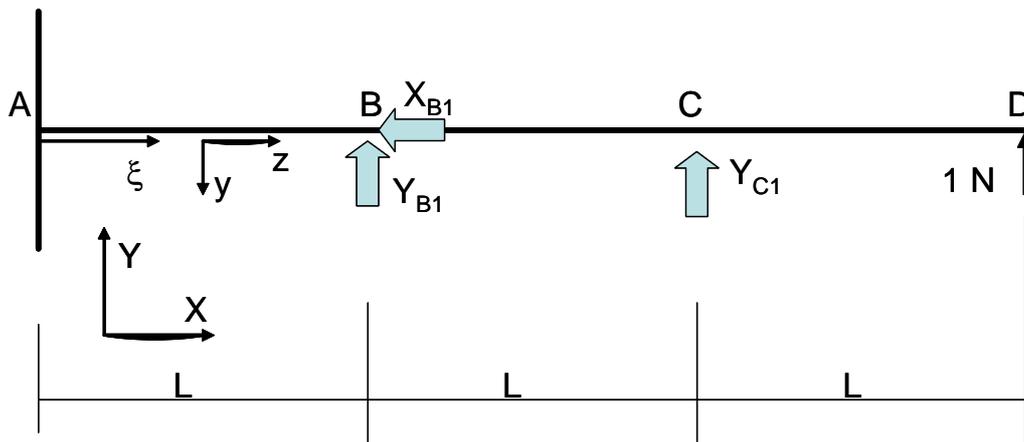


Fig. 3

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \cdot 2 \cdot L \end{pmatrix}$$

`soll := Isolve(D,E)`

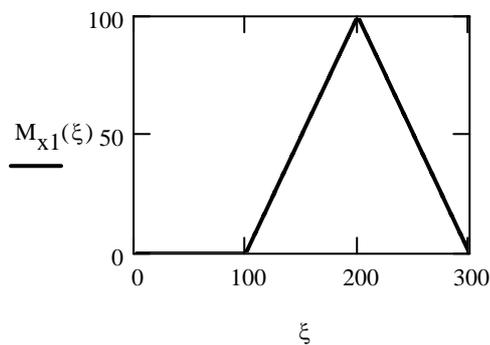
$$X_{B1} := \text{soll}_0 \quad X_{B1} = 0$$

$$Y_{B1} := \text{soll}_1 \quad Y_{B1} = 1$$

$$Y_{C1} := \text{soll}_2 \quad Y_{C1} = -2$$

### Momento $M_x$ dovuto al carico fittizio

$$M_{x1}(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \xi \leq L \\ Y_{B1} \cdot (\xi - L) & \text{if } L < \xi < 2 \cdot L \\ Y_{B1} \cdot (\xi - L) + Y_{C1} \cdot (\xi - 2 \cdot L) & \text{otherwise} \end{cases}$$



### Calcolo spostamento

Il calcolo dello spostamento viene condotto con il metodo degli integrali di Mohr. Si valuta il momento di inerzia della sezione:

$$J_x := \frac{b_s \cdot h^3}{12} \quad J_x = 104.167$$

Dato che  $M_x=0$  nel primo tratto di trave ed  $M_x=0$  nell'ultimo tratto è sufficiente valutare l'integrale di Mohr nella parte centrale, per  $L < \xi < 2L$ .

$$\delta := \int_L^{2 \cdot L} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{MY \cdot J_x} d\xi \quad \delta = 0.61$$

Il valore di  $\delta$  è positivo, per cui l'estremità della trave si sposta concordemente con il verso del carico fittizio (verso l'alto)

Svolgimento integrale

$$I(\xi) := \int [2 \cdot F \cdot b + Y_B \cdot (\xi - L)] \cdot [Y_{B1} \cdot (\xi - L)] d\xi$$

$$\overset{\text{ww}}{I}(\xi) := Y_{B1} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot Y_B \cdot \xi^3 + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot F \cdot b - 2 \cdot Y_B \cdot L) \cdot \xi^2 - (2 \cdot F \cdot b - Y_B \cdot L) \cdot L \cdot \xi \right]$$

$$\overset{\text{ww}}{\delta} := \frac{I(2 \cdot L) - I(L)}{MY \cdot J_x} \quad \delta = 0.61$$

**SVOLGIMENTO ESERCIZIO 2**

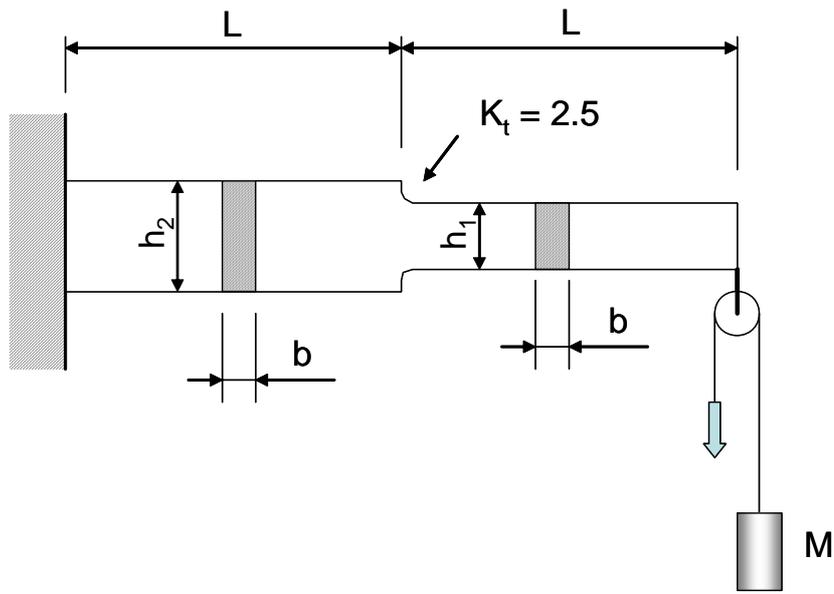


Fig. 1

**Dati**

$L := 1000$ mm	$h_1 := 120$ mm	$h_2 := 140$ mm
$M := 1000$ Kg	$b := 50$ mm	$MY := 21000$ MPa
$\sigma_s := 700$ MPa	$\Delta\sigma_L := 500$ MPa	$K_t := 2.0$

**Schema di calcolo**

Lo schema di calcolo è riportato nella Fig. 2

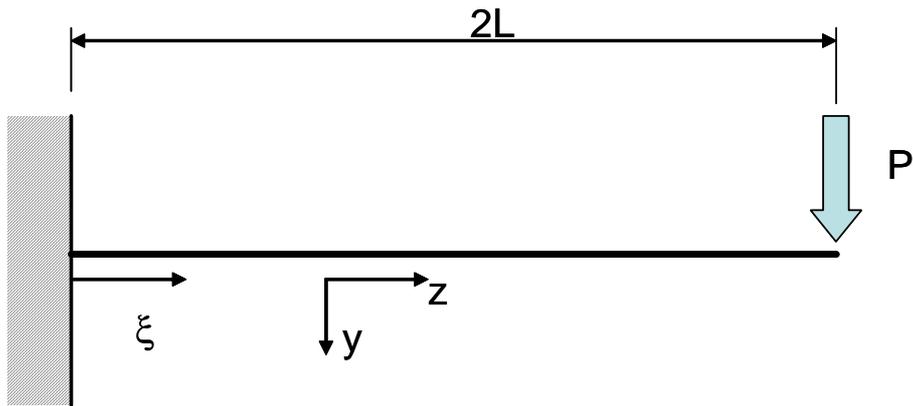


Fig. 2

### Calcolo forza applicata

$$g := 9.81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

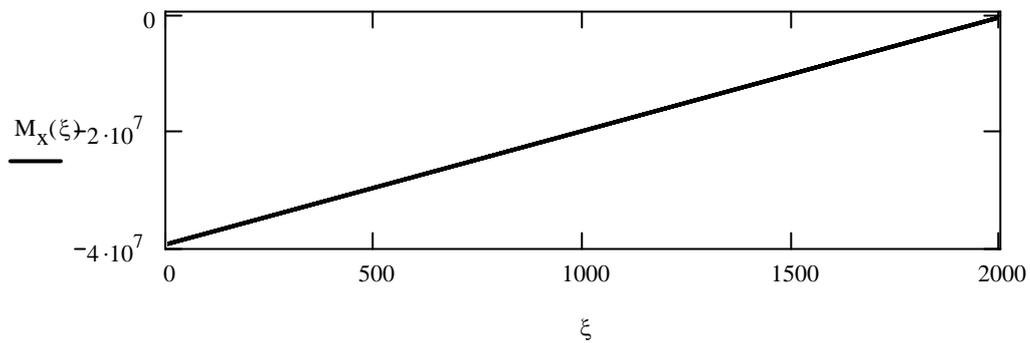
$$P := 2 \cdot M \cdot g \quad P = 1.962 \times 10^4$$

### Andamento momento flettente $M_x$

Il momento  $M_x$  è dato da:

$$\xi := 0, 1 \dots 2 \cdot L$$

$$M_x(\xi) := -P \cdot (2 \cdot L - \xi)$$

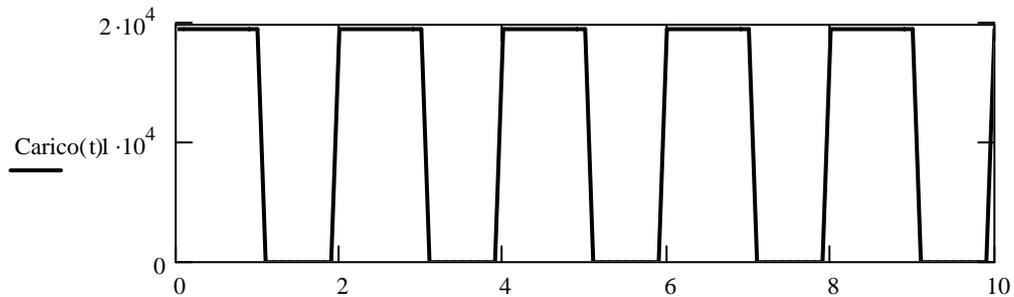


### Analisi

Dato che il carico applicato varia nel tempo in modo ciclico tra 0 ed il valore massimo  $P$ , secondo le modalità indicate schematicamente nel seguito, si rende necessario analizzare la resistenza a fatica della struttura.

$$\text{Carico}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } \text{mod}(t,2) > 1 \\ P & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$t := 0, 0.1 \dots 10$$



Dal diagramma del momento flettente si evince che i punti potenzialmente pericolosi sono 2: la sezione in cui varia la sezione, posta ad  $L/2$  (sezione 1), nella quale si ha una sezione ridotta ed un effetto di intaglio e la sezione di incastro (sezione 2), nella quale si ha il massimo momento flettente

### Verifica sezione 1

Si calcolano in primo luogo le tensioni agenti.

*Momento di Inerzia*

$$J_{x1} := \frac{b \cdot h_1^3}{12} \quad J_{x1} = 7.2 \times 10^6$$

*Tensione nominale massima*

$$\sigma_{\max 1} := \frac{M_x(L) \cdot (-h_1)}{J_{x1} \cdot 2} \quad \sigma_{\max 1} = 163.5$$

*Parametri del ciclo di fatica*

La tensione massima nel ciclo è data da  $\sigma_{\max 1}$ , mentre la tensione minima si verifica in assenza di carico ed è pari a;

$$\sigma_{\min 1} := 0$$

Si ottiene quindi:

$$\Delta\sigma_1 := (\sigma_{\max 1} - \sigma_{\min 1}) \quad \text{Range di tensione} = \text{tensione massima}$$

$$\sigma_{m1} := \frac{\sigma_{\max1} + \sigma_{\min1}}{2} \quad \text{Tensione media = tensione massima/2}$$

$$\Delta\sigma_1 = 163.5 \quad \sigma_{m1} = 81.75$$

### *Effetto della tensione media*

Si tiene conto della tensione media con il metodo di Sodeberg

$$\Delta\sigma_{eq1} := \frac{\Delta\sigma_1 \cdot \sigma_s}{\sigma_s - \sigma_{m1}} \quad \Delta\sigma_{eq1} = 185.119$$

### *Verifica a fatica*

Il range di tensione deve essere maggiorato per l'effetto di intaglio.  
Il coefficiente di sicurezza contro la rottura per fatica è dato da:

$$\phi := \frac{\Delta\sigma_L}{\Delta\sigma_{eq1} \cdot K_t} \quad \phi = 1.35$$

### **Verifica sezione 2**

Si calcolano in primo luogo le tensioni agenti.

### *Momento di Inerzia*

$$J_2 := \frac{b \cdot h_2^3}{12} \quad J_2 = 1.143 \times 10^7$$

### *Tensione nominale massima*

$$\sigma_{\max2} := \frac{M_x(0) \cdot (-h_2)}{J_2 \cdot 2} \quad \sigma_{\max2} = 240.245$$

### *Parametri del ciclo di fatica*

La tensione massima nel ciclo è data da  $\sigma_{\max1}$ , mentre la tensione minima si verifica in assenza di carico ed è pari a;

$$\sigma_{\min2} := 0$$

Si ottiene quindi:

$$\Delta\sigma_2 := (\sigma_{\max 2} - \sigma_{\min 2})$$

Range di tensione = tensione massima

$$\sigma_{m2} := \frac{\sigma_{\max 2} + \sigma_{\min 2}}{2}$$

Tensione media = tensione massima/2

### *Effetto della tensione media*

Si tiene conto della tensione media con il metodo di Sodeberg

$$\Delta\sigma_{eq2} := \frac{\Delta\sigma_2 \cdot \sigma_s}{\sigma_s - \sigma_{m2}}$$

$$\Delta\sigma_{eq2} = 290.012$$

### *Verifica a fatica*

In questo caso non è presente l'effetto di intaglio.

Il coefficiente di sicurezza contro la rottura per fatica è dato da:

$$\phi_2 := \frac{\Delta\sigma_L}{\Delta\sigma_{eq2}}$$

$$\phi_2 = 1.724$$

**SVOLGIMENTO ESERCIZIO 3**

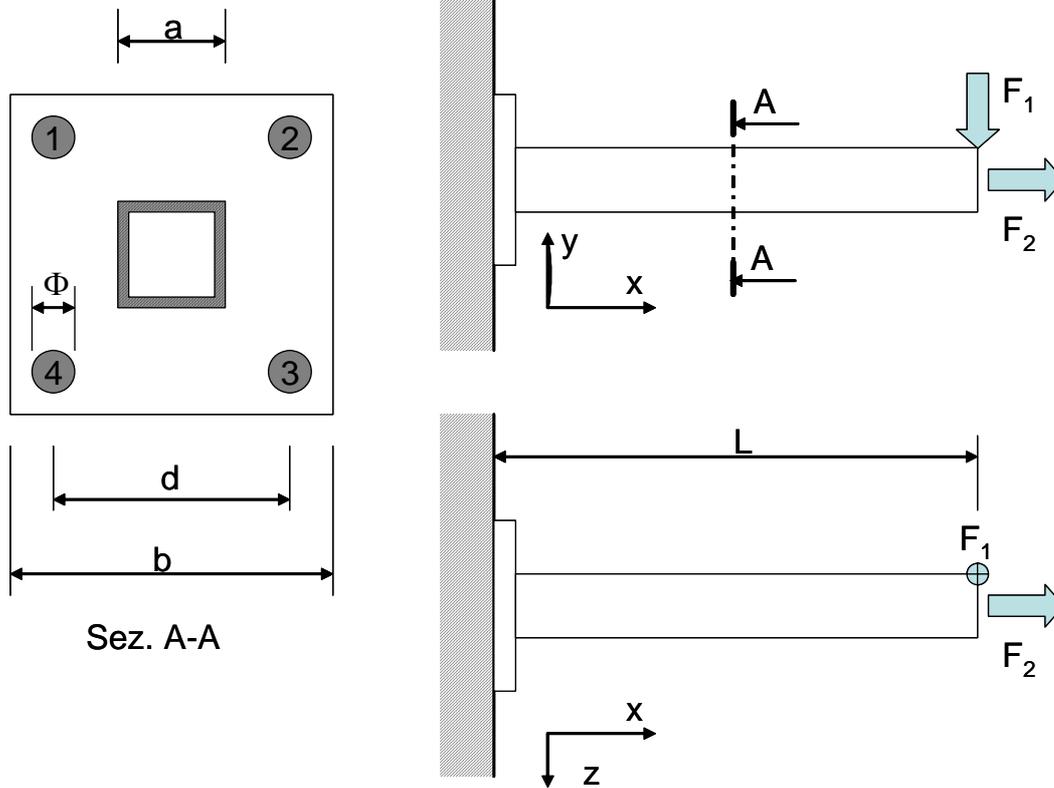


Fig. 1

**Dati**

$L := 1000$ mm	$a := 80$ mm	$f := 0.3$ Coefficiente di attrito piastre
$b := 200$ mm	$\phi := 8$ mm	$\nu := 1.5$ Coefficiente sicurezza
$d := 150$ mm	$\sigma_{amb} := 800$ MPa	
$F_1 := 5000$ N	$F_2 := 2000$ N	

**Calcolo Forze e Momenti agenti sul giunto**

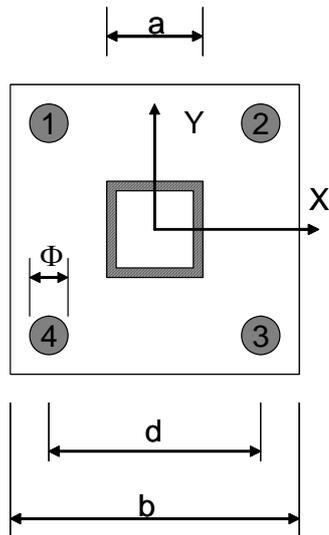
Le forze ed i momenti agenti sul giunto vengono calcolati utilizzando il SR mostrato in Fig. 2. Si ottiene:

$$F_Y := -F_1 \quad F_X := 0 \quad M_Z := -F_1 \cdot \frac{a}{2}$$

$$F_Z := F_2 \quad M_X := F_1 \cdot L \quad M_Y := 0$$

$$F_Y = -5 \times 10^3 \quad F_X = 0 \quad M_Z = -2 \times 10^5 \quad \text{Azioni di distacco}$$

$$F_Z = 2 \times 10^3 \quad M_X = 5 \times 10^6 \quad M_Y = 0 \quad \text{Azioni di scorrimento}$$



### Coordinate dei bulloni

$$X := \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \\ -\frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

Fig. 2

### Calcolo preserraggio $N_0$

$$A_b := \pi \cdot \frac{\phi^2}{4} \quad \text{Area bullone} \quad A_b = 50.265$$

$$N_0 := \sigma_{\text{amm}b} \cdot A_b \cdot 0.8 \quad \text{Preserraggio prescritto} \quad N_0 = 3.217 \times 10^4$$

### Forze agenti sui singoli bulloni

$$j := 1..4$$

$$r_j := \sqrt{(X_j)^2 + (Y_j)^2} \quad \text{Distanza del singolo bullone dal baricentro (Fig. 3)}$$

$$\theta := \begin{pmatrix} 135 \\ 45 \\ -45 \\ -135 \end{pmatrix} \quad \text{Angolo tra la congiungente col baricentro e l'asse X (Fig. 3)}$$

$$n_b := 4 \quad \text{Numero totale di bulloni}$$

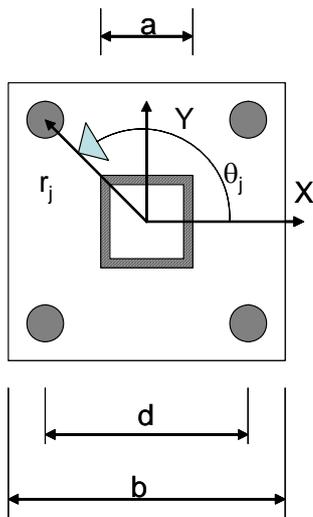


Fig. 3

### Azioni di taglio

*Azioni prodotte da  $F_y$*

La forza  $F_y$  viene equiripartita sui bulloni (ipotesi di flangia rigida):

$$T_{Yy_j} := \frac{F_Y}{n_b} \quad T_{Yy_1} = -1.25 \times 10^3$$

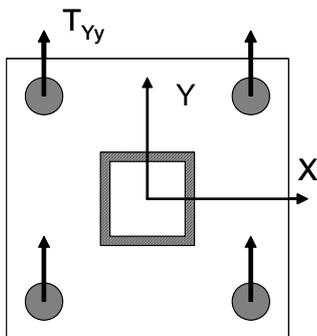


Fig. 4 (versi per  $F_Y$  positiva)

*Azioni prodotte da  $M_z$*

Il momento  $M_z$  produce azioni taglianti sui singoli bulloni proporzionali alla loro distanza dal baricentro e normali alla congiungente con quest'ultimo. Per facilitare l'analisi dei risultati vengono calcolate le componenti di tali azioni lungo X ed Y.

$$T_{Zx_j} := \frac{-M_Z \cdot r_j \cdot \sin\left(\theta_j \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\sum_{k=1}^4 (r_k)^2} \quad T_{Zy_j} := \frac{M_Z \cdot r_j \cdot \cos\left(\theta_j \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\sum_{k=1}^4 (r_k)^2}$$

$$T_{Zx} = \begin{pmatrix} 333.333 \\ 333.333 \\ -333.333 \\ -333.333 \end{pmatrix} \quad T_{Zy} = \begin{pmatrix} 333.333 \\ -333.333 \\ -333.333 \\ 333.333 \end{pmatrix}$$

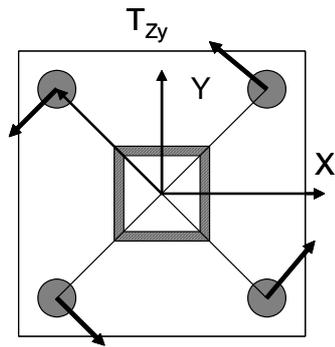


Fig. 5 (versi per MZ positivo)

**Azioni taglianti totali**

Le azioni taglianti totali si ottengono da una somma vettoriale delle componenti X ed Y

$$T_{\text{tot}} := \sqrt{(T_{Zx_j})^2 + (T_{Zy_j} + T_{Yy_j})^2}$$

$$T = \begin{pmatrix} 975.392 \\ 1.618 \times 10^3 \\ 1.618 \times 10^3 \\ 975.392 \end{pmatrix}$$

**Azioni Normali**

*Azioni prodotte da Fz*

La forza Fz viene equiripartita tra i bulloni ottenendo:

$$N_{Z_j} := \frac{F_Z}{n_b} \quad N_Z = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

*Azioni prodotte da Mx*

Le azioni prodotte da Mx risultano proporzionali alla distanza dall'asse X.

$$N_{X_j} := \frac{M_X \cdot Y_j}{\sum_{k=1}^4 (Y_k)^2} \quad N_X = \begin{pmatrix} 1.667 \times 10^4 \\ 1.667 \times 10^4 \\ -1.667 \times 10^4 \\ -1.667 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

*Azioni normali totali*

$$N_j := N_{X_j} + N_{Z_j} \quad N = \begin{pmatrix} 1.717 \times 10^4 \\ 1.717 \times 10^4 \\ -1.617 \times 10^4 \\ -1.617 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

### Verifica ad attrito

Si calcola il coefficiente di sicurezza per i carichi di taglio e si verifica che risulti maggiore di 1.5.

$$\gamma_j := \frac{f \cdot (N_0 - N_j)}{T_j} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 4.615 \\ 2.782 \\ 8.962 \\ 14.867 \end{pmatrix}$$

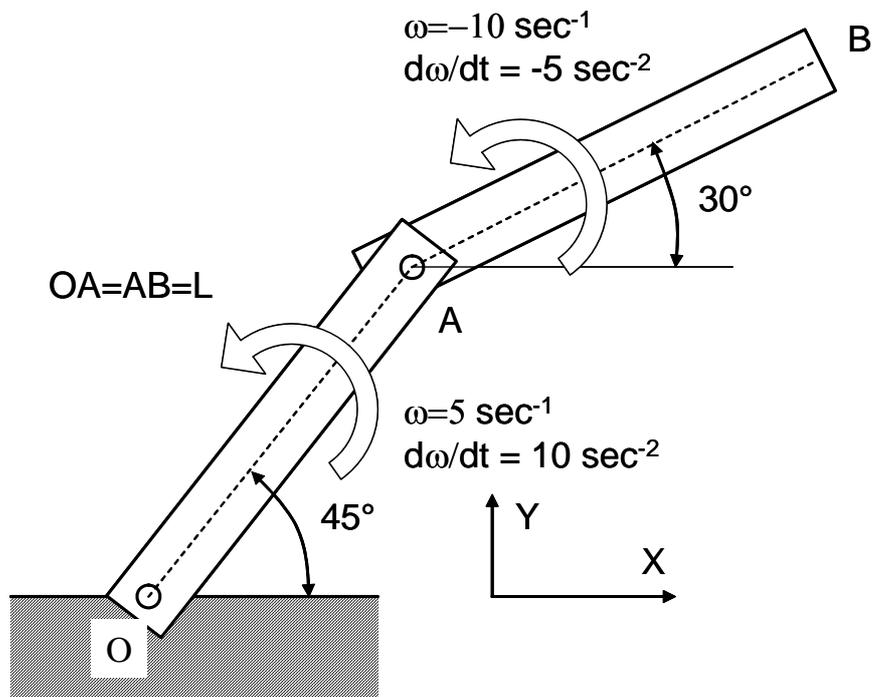
Si nota che i coefficienti di sicurezza sono tutti maggiori di 1.5 e che il bullone più critico è il numero 2.

Si verificano inoltre i limiti sulla forza normale agente sui singoli bulloni, calcolando il rapporto tra  $0.8 \cdot N_0$  e la forza normale stessa.

$$\alpha_j := \frac{0.8 \cdot N_0}{|N_j|} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1.499 \\ 1.499 \\ 1.592 \\ 1.592 \end{pmatrix}$$

Dato che il rapporto risulta sempre maggiore di 1 il limite è rispettato e tutti i bulloni risultano quindi verificati.

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 4



**Dati**

$L := 1000$

$\omega_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$      $\omega_{p1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$     Vettori velocità ed accelerazione angolare corpo 1

$\omega_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$      $\omega_{p2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$     Vettori velocità ed accelerazione angolare corpo 2

**Velocità ed Accelerazione di A**

Per il calcolo della velocità ed accelerazione di A si applicano le usuali formule relative ad un corpo rigido in rotazione attorno ad un punto fisso.

$$OA := \begin{pmatrix} \frac{L}{\sqrt{2}} \\ \frac{L}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vettore che congiunge il punto a terra O con A}$$

*Velocità di A*

$$V_A := \omega_1 \times OA \quad V_A = \begin{pmatrix} -3.536 \times 10^3 \\ 3.536 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Accelerazione di A*

$$a_A := \omega_{p1} \times OA - (\omega_{1_2})^2 \cdot OA \quad a_A = \begin{pmatrix} -2.475 \times 10^4 \\ -1.061 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### **Velocità ed Accelerazione di B**

Per il calcolo della velocità ed accelerazione del punto B si ricorre alle relazioni relative ad un corpo rigido in moto roto-traslatorio generale.

$$AB := \begin{pmatrix} \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2} \\ \frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 866.025 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vettore congiungente A e B}$$

*Velocità di B*

$$V_B := V_A + \omega_2 \times AB \quad V_B = \begin{pmatrix} 1.464 \times 10^3 \\ -5.125 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Accelerazione di B*

$$a_B := a_A + \omega_{p2} \times AB - (\omega_{2_2})^2 \cdot AB \quad a_B = \begin{pmatrix} -1.089 \times 10^5 \\ -6.494 \times 10^4 \\ 0 \end{pmatrix}$$