

UNIVERSITÀ DI PISA – ANNO ACCADEMICO 2005-6

CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA (N.O.)

CORSO DI MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE

VERIFICA INTERMEDIA – 14/6/2006

COGNOME E NOME

MATRICOLA

**ESERCIZIO 1 (Punti 9)**

Data la struttura mostrata in Figura 1, calcolare lo spostamento verticale del punto “A” di applicazione della forza F.  
Dati:

- $L_1 = 1200$  mm
- $L_2 = 800$  mm
- $\phi = 50$  mm
- $s_r = 10$  mm
- $H_r = 50$  mm
- $P = 300$  N
- materiale : acciaio

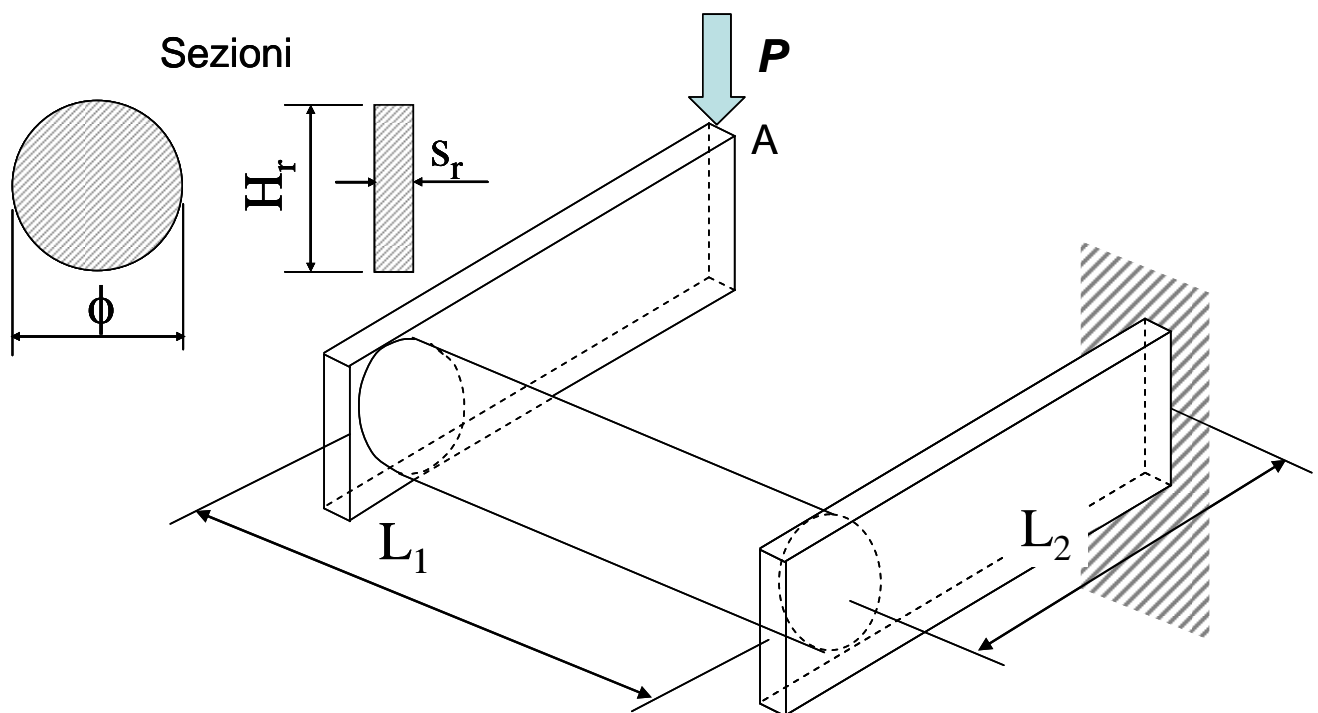


Fig. 1

## ESERCIZIO 2 (Punti 9)

Verificare la resistenza della struttura (gru per rimessaggio barche) mostrata in Fig. 2 contro i principali meccanismi di cedimento ipotizzabili in esercizio. Nella verifica:

- si trascurino i carichi dovuti al peso proprio della struttura
- si ipotizzi che la struttura debba sollevare il carico di massa  $W$  per un numero illimitato di volte

### Dati del problema

- $L = 3$  m
- $H_0 = 5$  m
- $W_b = 300$  Kg (Massa natante)
- $s_1 = 5$  mm
- $H_1 = 300$  mm
- $b_1 = 200$  mm
- $s_2 = 2$  mm
- $H_2 = 180$  mm
- $b_2 = 100$  mm
- $\sigma_S = 300$  MPa (Tensione di snervamento del materiale)
- $\Delta\sigma_L = 200$  MPa (Limite di fatica del materiale)
- $\Psi = 1.5$  (Coefficiente di sicurezza richiesto in tutte le verifiche)

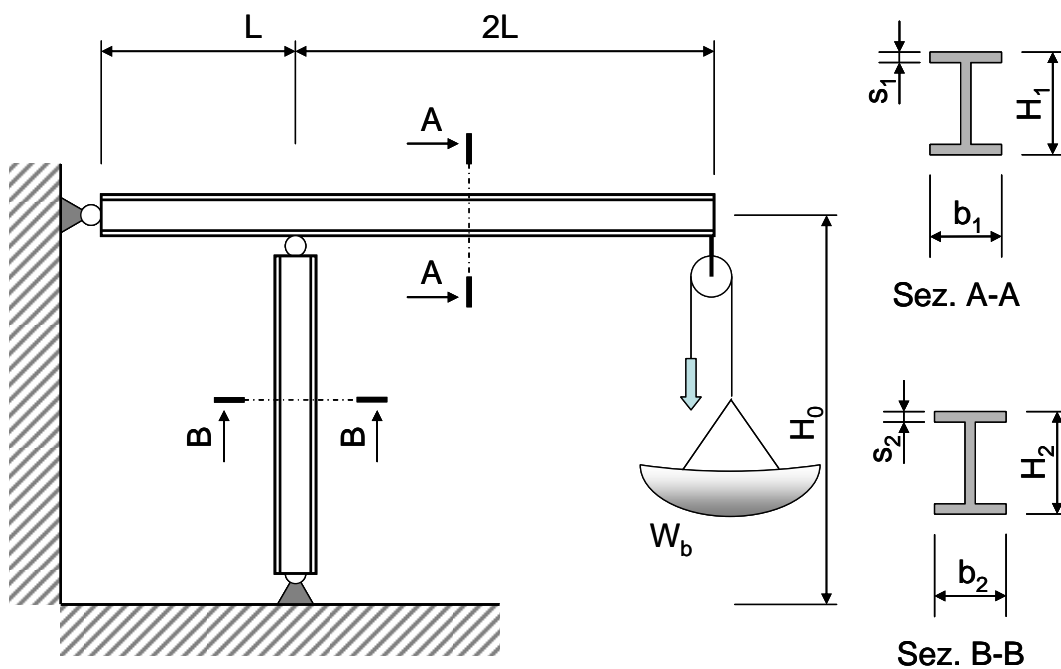


Fig. 2

### ESERCIZIO 3 (Punti 6)

Si ipotizzi che la trave orizzontale della struttura definita nell'esercizio 2 sia ottenuta per saldatura dell'anima verticale alle due piattabande orizzontali (vedi Figura 3). Si chiede di verificare, nella stessa condizione di carico dell'esercizio 2, la resistenza dei 2 giunti saldati, di cui uno a piena penetrazione ed uno a cordoni d'angolo

Dati:

- $b = 4 \text{ mm}$
- $\sigma_{amm} = 500 \text{ MPa}$  (tensione ammissibile materiale base)
- $f = 0.8$  (efficienza saldature a piena penetrazione)
- $f_1=0.8, f_2=0.7$  (efficienze saldature a cordoni d'angolo)

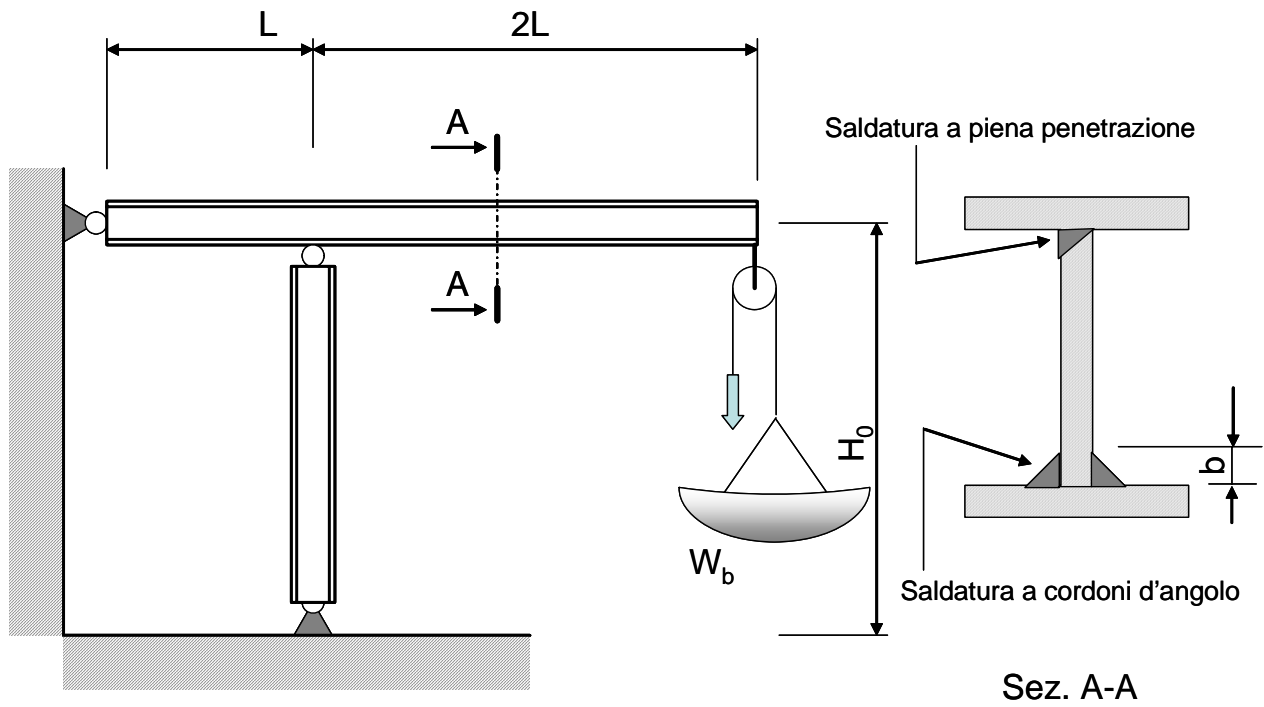


Fig. 3

#### ESERCIZIO 4 (Punti 9)

Un corpo è in moto traslatorio su di un piano orizzontale (Fig. 4), con velocità "V" ed accelerazione "a". Ad esso è incernierata nel punto "O" una barra lunga 800 mm, che ruota attorno ad "O" con velocità angolare  $\omega$  ed accelerazione angolare  $d\omega/dt$ .

Calcolare:

- velocità ed accelerazione del punto A
- posizione del centro delle velocità della barra che ruota attorno ad "O"

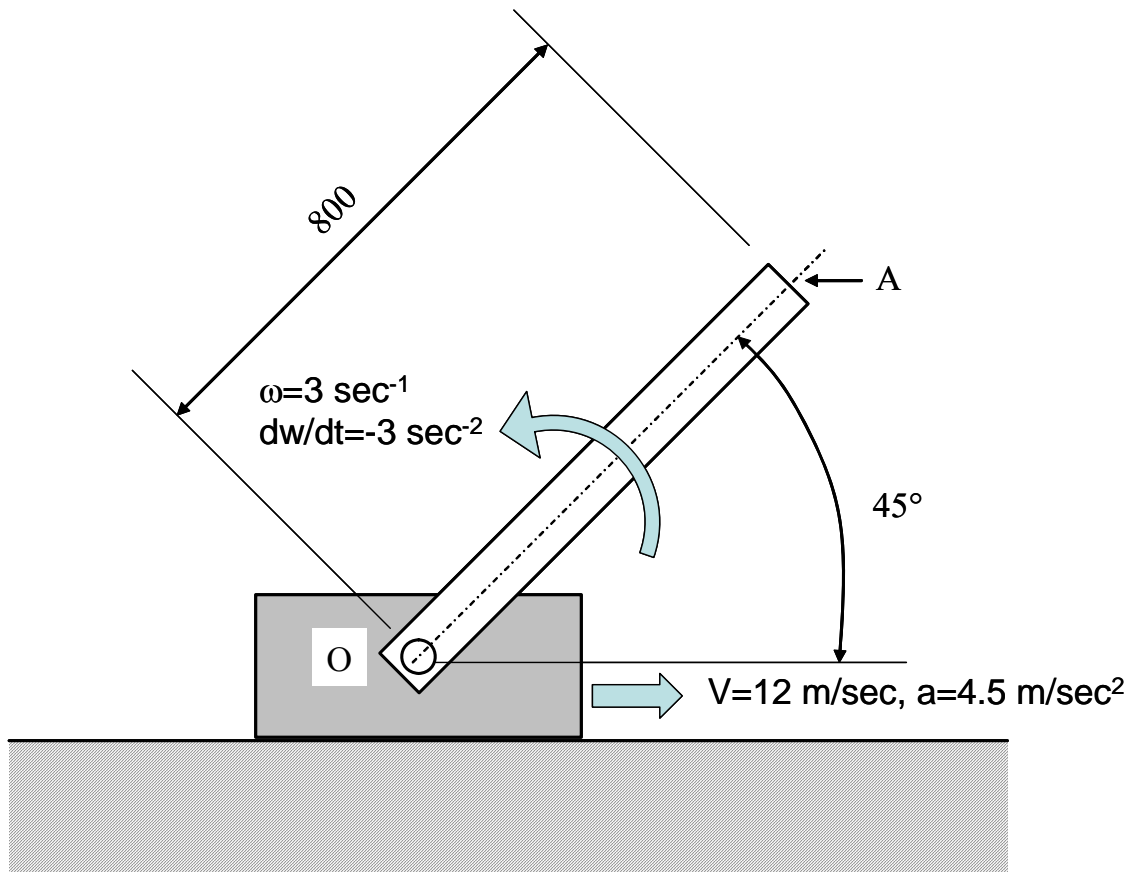


Fig. 4

**QUESITO 1**

Data la struttura mostrata in Figura 1, calcolare lo spostamento verticale del punto "A" di applicazione della forza P.

**Dati del problema:**

$$L_1 := 1200\text{-mm}$$

$$L_2 := 800\text{-mm}$$

$$\phi := 50\text{-mm}$$

$$H_T := 50\text{-mm}$$

$$s_T := 10\text{-mm}$$

$$P := 300\text{-N}$$

*Proprietà meccaniche acciaio*

$$E := 210000\text{-MPa} \quad \text{Modulo di Young}$$

$$\nu := 0.3 \quad \text{Coefficiente di Poisson}$$

$$G_{xy} := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \text{Modulo di taglio}$$

$$G_{xy} = 8.077 \times 10^4 \text{ MPa}$$

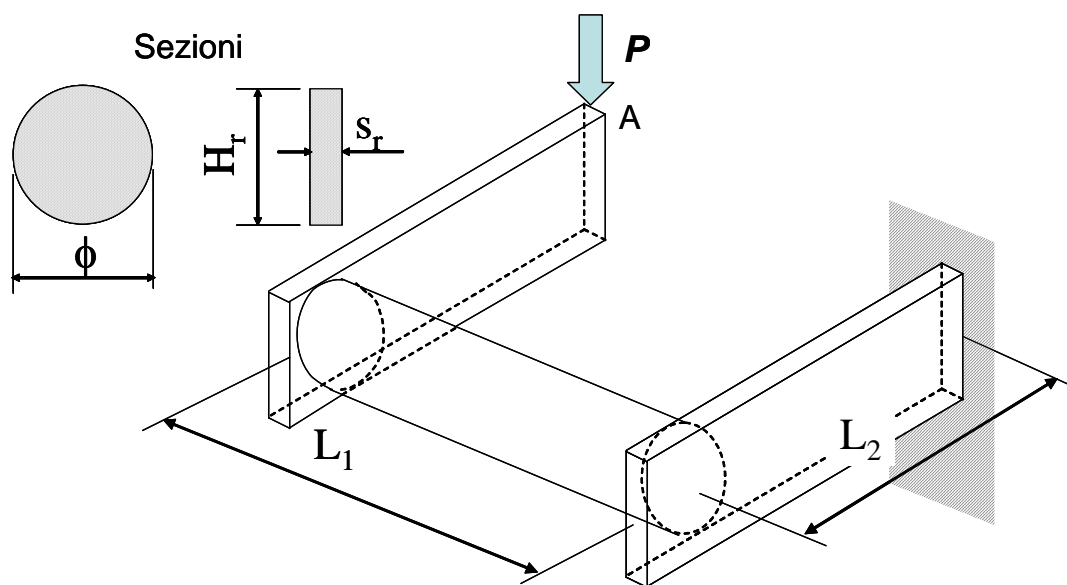
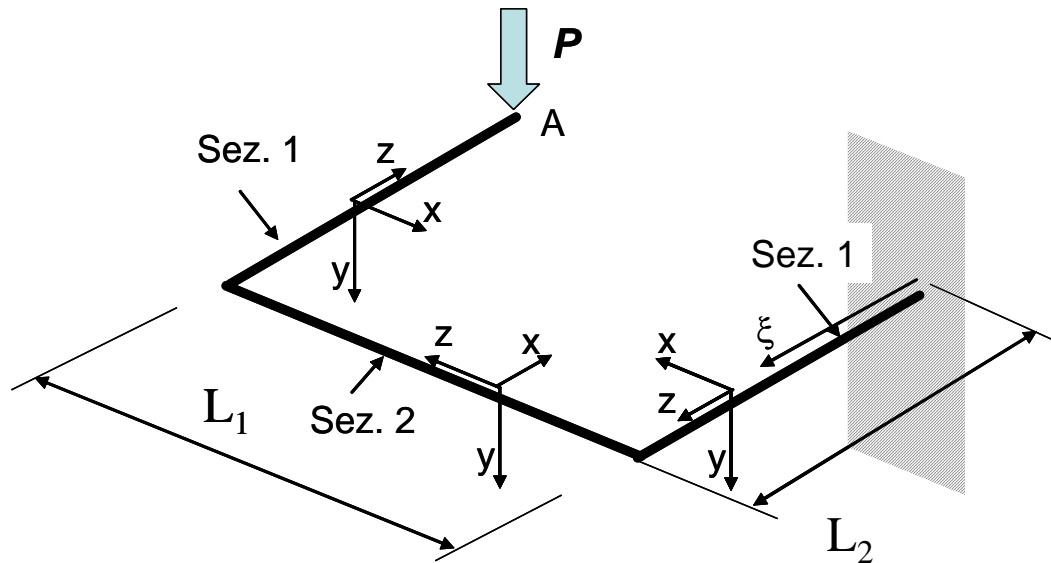


Fig. 1

In primo luogo, schematizzata la struttura come una trave incastrata e fissata un'ascissa curvilinea  $\xi$ , si calcolano le proprietà geometriche delle sezioni



### Proprietà geometriche sezioni

#### Barre rettangolari

$$J_{x1} := \frac{s_r \cdot H_r^3}{12} \quad J_{x1} = 1.042 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad \text{Momento di inerzia rispetto all' asse principale baricentrico "x"}$$

$$J_{y1} := \frac{H_r \cdot s_r^3}{12}$$

$$J_{p1} := J_{x1} + J_{y1}$$

#### Barra a sezione circolare

$$J_{x2} := \frac{\pi \cdot \phi^4}{64} \quad J_{x2} = 3.068 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad \text{Momento di inerzia rispetto all' asse principale baricentrico "x"}$$

$$J_{p2} := 2 \cdot J_{x2} \quad J_{p2} = 6.136 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad \text{Momento di inerzia polare}$$

### Caratteristiche di sollecitazione

Si valuta quindi l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'ascissa curvilinea  $\xi$ . (NB: per semplicità la trave è stata rappresentata in forma linearizzata)

$$x_x(\xi) := 0$$

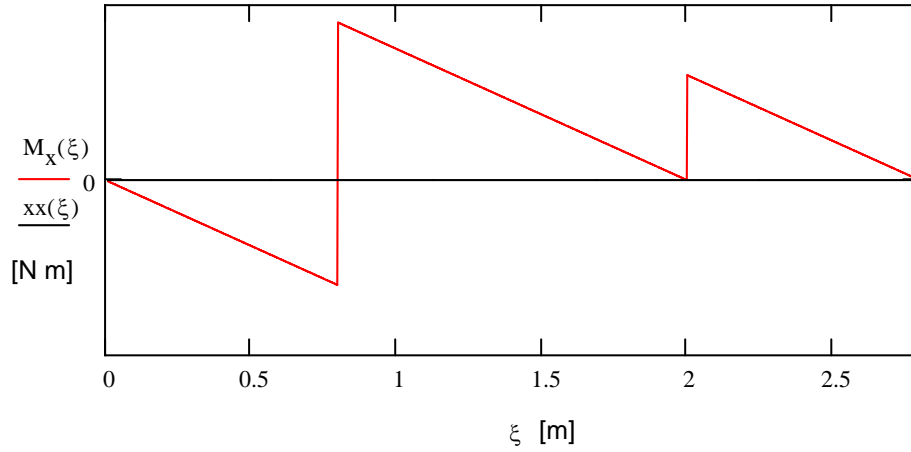
$$T_y(\xi) := F \quad \text{Taglio "Y"}$$

$$T_x(\xi) := 0 \quad \text{Taglio "X"}$$

$$N_z(\xi) := 0 \quad \text{Forza normale}$$

Momento flettente  $M_x$

$$M_x(\xi) := \begin{cases} P \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq L_2 \\ -P \cdot (L_1 + L_2 - \xi) & \text{if } L_2 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ -P \cdot (2 \cdot L_2 + L_1 - \xi) & \text{if } L_1 + L_2 < \xi \leq L_1 + 2 \cdot L_2 \end{cases}$$

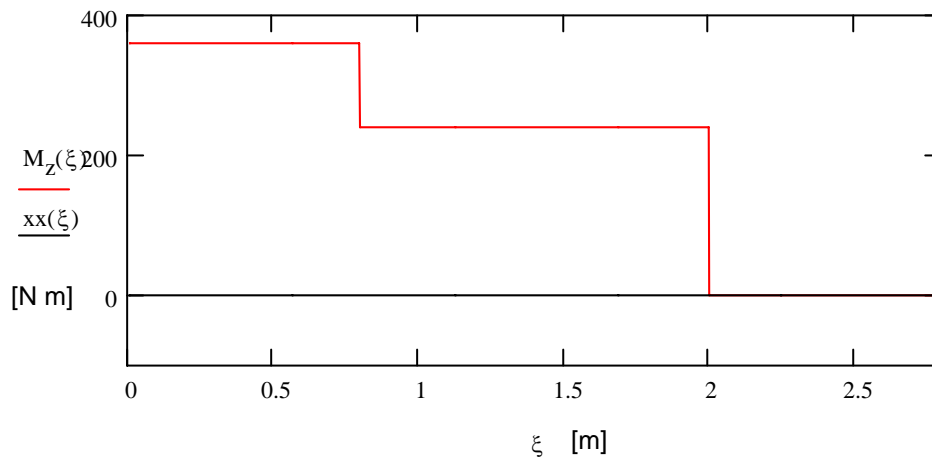


Momento flettente  $M_y$

$$M_y(\xi) := 0$$

$$M_z(\xi) := \begin{cases} P \cdot L_1 & \text{if } 0 \leq \xi < L_2 \\ P \cdot L_2 & \text{if } L_2 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Momento torcente  $M_z$   
 $M_z(L_2) = 240 \text{ N}\cdot\text{m}$



### Calcolo spostamento

Lo spostamento del punto di applicazione del carico può essere valutato tramite bilancio tra il lavoro compiuto dal carico stesso e l'energia elastica immagazzinata nella struttura.

Quest'ultima, infatti, può essere facilmente calcolata data la conoscenza delle caratteristiche di sollecitazione.

Nel calcolo dello spostamento, si trascurano gli effetti del taglio e non si considerano, ovviamente, quelle caratteristiche che risultino identicamente nulle.

$$U := \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2 \cdot L_2 + L_1} \left( \frac{M_x(\xi)^2}{E \cdot J_x} + \frac{M_z(\xi)^2}{G \cdot J_p} \right) d\xi \quad \blacksquare \quad \text{Energia elastica}$$

Tenuto conto dell'andamento delle caratteristiche di sollecitazione e delle diverse caratteristiche geometriche delle sezioni, l'integrale può essere suddiviso in 3 parti.

$$U_1 := \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L_2} \left( \frac{M_x(\xi)^2}{E \cdot J_{x1}} + \frac{M_z(\xi)^2}{G_{xy} \cdot J_{p1}} \right) d\xi$$

$$U_2 := \frac{1}{2} \cdot \int_{L_2}^{L_1 + L_2} \left( \frac{M_x(\xi)^2}{E \cdot J_{x2}} + \frac{M_z(\xi)^2}{G_{xy} \cdot J_{p2}} \right) d\xi$$

$$U_3 := \frac{1}{2} \cdot \int_{L_1 + L_2}^{2L_2 + L_1} \left( \frac{M_x(\xi)^2}{E \cdot J_{x1}} \right) d\xi$$

$$U := U_1 + U_2 + U_3$$

$$U = 7.726 \text{ J}$$

Calcolo spostamento

$$\delta_A := \frac{2 \cdot U}{P} \quad \delta_A = 51.509 \text{ mm}$$



**QUESITO 2**

Verificare la resistenza della struttura (gru per rimessaggio barche) mostrata in Fig. 2 contro i principali meccanismi di cedimento ipotizzabili in esercizio. Nella verifica:

- si trascurino i carichi dovuti al peso proprio della struttura
- si ipotizzi che la struttura debba sollevare il carico di massa  $W$  per un numero illimitato di volte

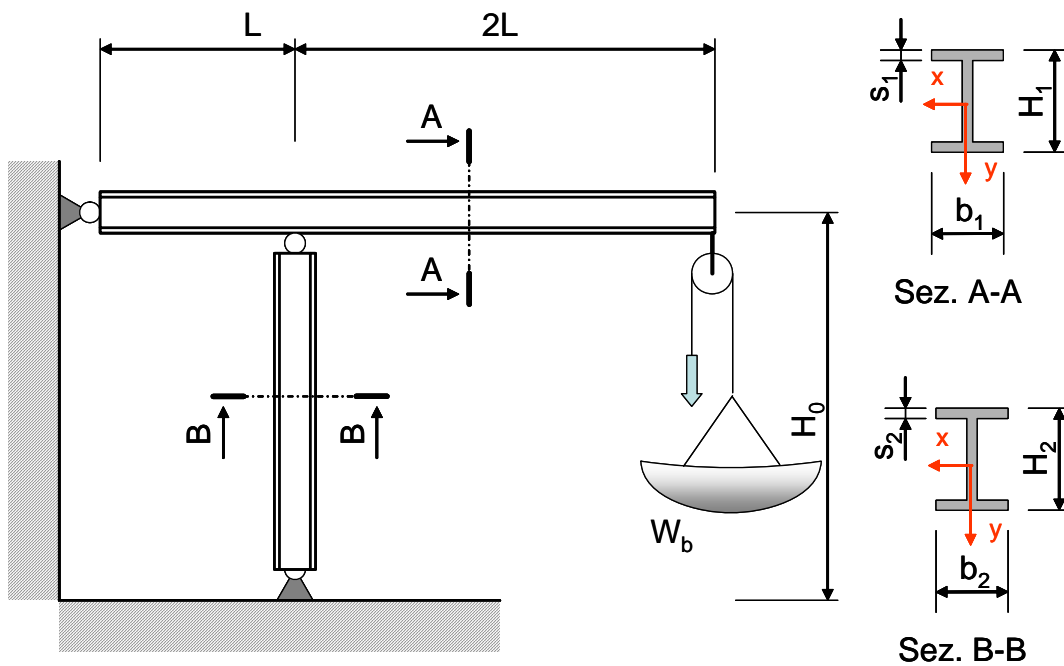


Fig. 2

## Dati del problema

$$L := 3 \cdot \text{m}$$

$$H_0 := 5 \cdot \text{m}$$

$$W_b := 300 \cdot \text{kg}$$

Peso natante

$$s_1 := 5 \cdot \text{mm}$$

$$H_1 := 300 \cdot \text{mm}$$

$$b_1 := 200 \cdot \text{mm}$$

$$s_2 := 2 \cdot \text{mm}$$

$$H_2 := 180 \cdot \text{mm}$$

$$b_2 := 100 \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_s := 300 \cdot \text{MPa}$$

Tensione snervamento materiale (acciaio)

$$\Delta\sigma_L := 200 \cdot \text{MPa}$$

Limite di fatica materiale (acciaio)

$$\psi := 1.5$$

Coefficiente di sicurezza per tutte le verifiche

$$P := W_b \cdot g$$

Carico dovuto al sollevamento del natante

$$P = 5.884 \times 10^3 \text{ N}$$

$$E := 210000 \cdot \text{MPa}$$

Modulo di Young acciaio

## Caratteristiche geometriche sezione

Di seguito vengono calcolate le principali caratteristiche geometriche della sezione

### Sez. A-A

$$A_1 := H_1 \cdot b_1 - (b_1 - s_1) \cdot (H_1 - 2 \cdot s_1)$$

$$A_1 = 3.45 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

Area

$$J_{x1} := \frac{b_1 \cdot H_1^3}{12} - \frac{(b_1 - s_1) \cdot (H_1 - 2 \cdot s_1)^3}{12}$$

$$J_{x1} = 5.368 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

Momento di inerzia  
rispetto all'asse  
principale "x"

$$J_{y1} := 2 \frac{s_1 \cdot b_1^3}{12} + \frac{(H_1 - 2 \cdot s_1) \cdot s_1^3}{12}$$

$$J_{y1} = 6.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento di inerzia  
rispetto all'asse  
principale "y"

### Sez. B-B

$$A_2 := H_2 \cdot b_2 - (b_2 - s_2) \cdot (H_2 - 2 \cdot s_2)$$

$$A_2 = 752 \text{ mm}^2$$

Area

$$J_{x2} := \frac{b_2 \cdot H_2^3}{12} - \frac{(b_2 - s_2) \cdot (H_2 - 2 \cdot s_2)^3}{12}$$

$$J_{x2} = 4.077 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento di inerzia  
rispetto all'asse  
principale "x"

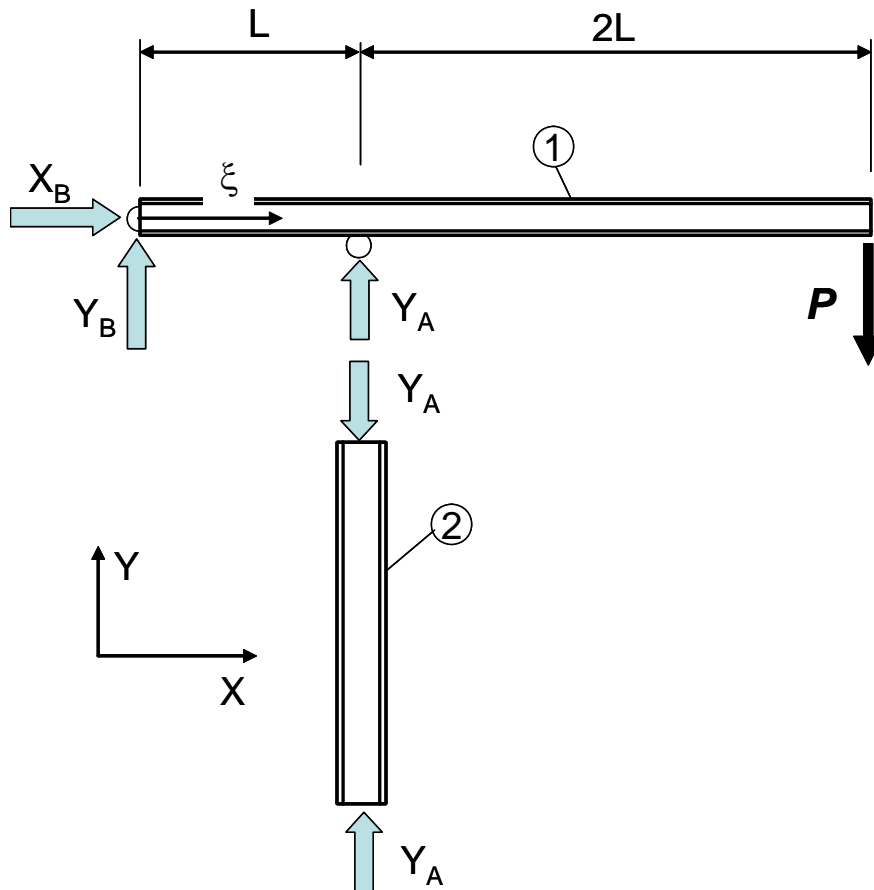
$$J_{y2} := 2 \frac{s_2 \cdot b_2^3}{12} + \frac{(H_2 - 2 \cdot s_2) \cdot s_2^3}{12}$$

$$J_{y2} = 3.335 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Momento di inerzia  
rispetto all'asse  
principale "y"

### Reazioni vincolari

Si sostituiscono i vincoli esterni ed interni con le rispettive reazioni vincolari incognite, come nello schema mostrato in Figura.



Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo B):

$$Y_A := 0 \quad X_B := 0 \quad Y_B := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow -X_B = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_A + Y_B - P = 0$$

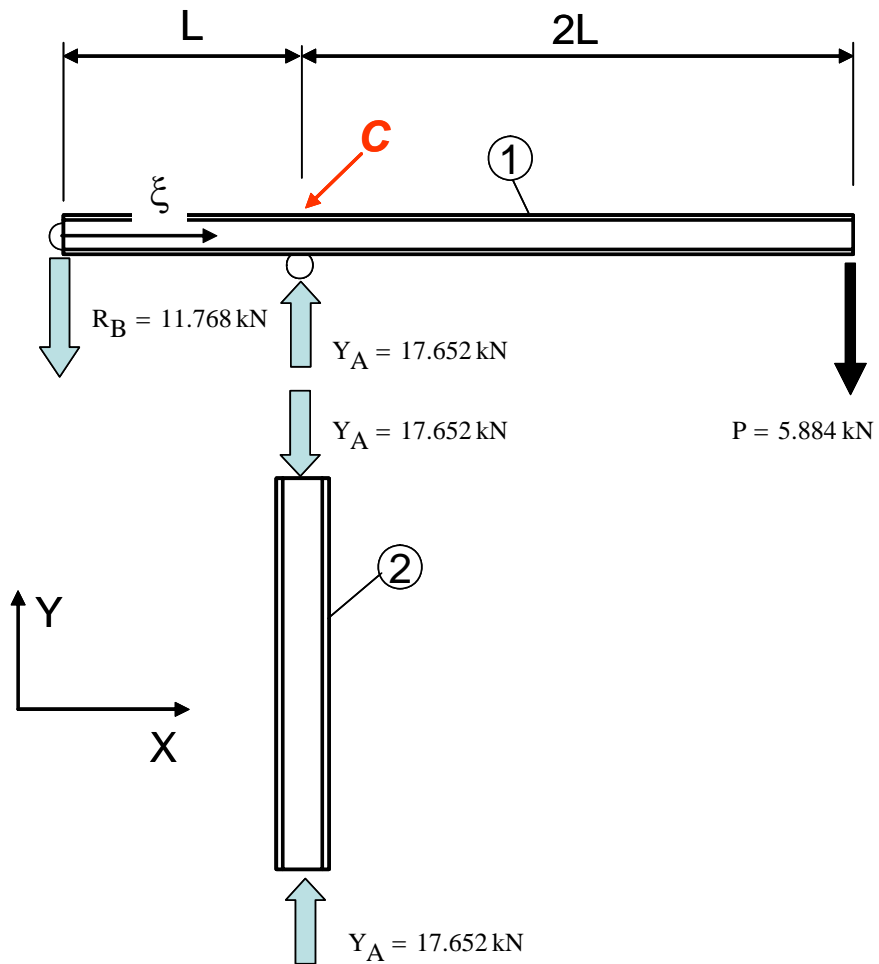
$$MR_{xB} = 0 \rightarrow Y_A \cdot L - P \cdot 3 \cdot L = 0$$

$$\begin{pmatrix} Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_A, X_B, Y_B)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in kN e kNm):

$$Y_A = 1.765 \times 10^4 \text{ N} \quad X_B = 0 \text{ N} \quad Y_B = -1.177 \times 10^4 \text{ N} \quad R_B := -Y_B$$

Si ottiene infine il seguente diagramma di corpo libero, con gli effettivi carichi applicati alla struttura.



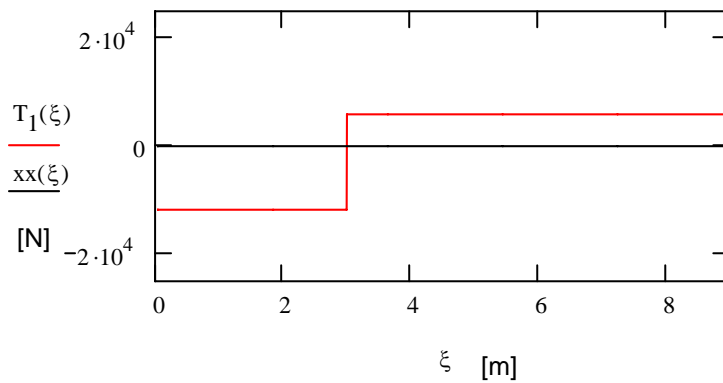
## Caratteristiche di sollecitazione

### Corpo 1

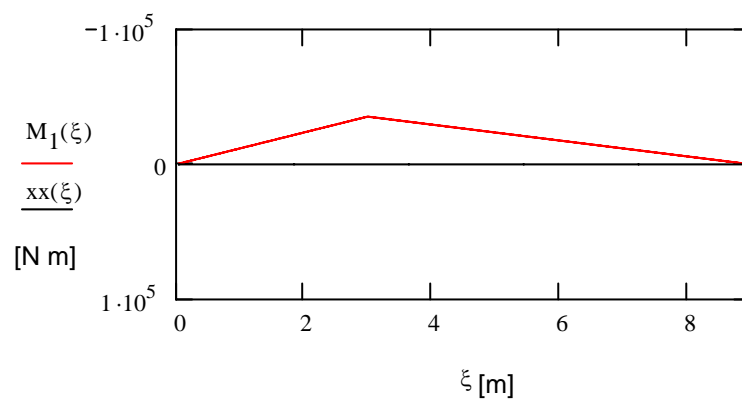
Le caratteristiche di sollecitazione agenti nel corpo 1, fissata la coordinata curvilinea  $\xi$ , sono date da:

$$N_{z1}(\xi) := 0 \qquad \qquad \qquad xx(\xi) := 0$$

$$T_1(\xi) := \begin{cases} -R_B & \text{if } 0 \leq \xi \leq L \\ P & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$M_1(\xi) := \begin{cases} -R_B \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi < L \\ -P \cdot (3 \cdot L - \xi) & \text{otherwise} \end{cases} \qquad M_1(3 \cdot m) = -3.53 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}$$



### Corpo 2

Le caratteristiche di sollecitazione agenti nel corpo 2 sono date da:

$$N_2 := -Y_A \qquad \qquad \qquad N_2 = -1.765 \times 10^4$$

(tutte le altre caratteristiche sono nulle)

## Analisi di resistenza

### Corpo 1

Il corpo 1 è soggetto a sollecitazioni ripetute nel tempo, per cui sono da condurre le seguenti verifiche:

- verifica contro lo snervamento
- verifica a fatica

Entrambe le verifiche devono essere condotte nel punto "C", nel quale sono massime le tensioni di flessione.

### Verifica statica

Per la verifica statica, si calcolano le tensioni massime di flessione, con la formula di Navier:

$$\sigma_{z\max} := - \left( \frac{M_1(3 \cdot m)}{J_{x1}} \cdot \frac{H_1}{2} \right) \quad \sigma_{z\max} = 98.653 \text{ MPa}$$

ed una tensione media di taglio:

$$\tau_{zy} := \frac{T_1(2.99 \cdot m)}{A_1} \quad \tau_{zy} = -3.411 \text{ MPa}$$

Si calcola la tensione ideale secondo Von Mises:

$$\sigma_{\text{eq}} := \sqrt{\sigma_{z\max}^2 + 3 \cdot \tau_{zy}^2} \quad \sigma_{\text{eq}} = 98.83 \text{ MPa}$$

La tensione ammissibile risulta data da:

$$\sigma_{\text{amm}} := \frac{\sigma_s}{\psi} \quad \sigma_{\text{amm}} = 200 \text{ MPa}$$

Per la verifica deve risultare:

$$\sigma_{\text{eq}} \leq \sigma_{\text{amm}} \quad \blacksquare$$



---

Verifica = "OK"

### Verifica a fatica

Per la verifica a fatica si calcolano i parametri del ciclo di tensione:

$$\Delta\sigma := \sigma_{zmax} \quad \Delta\sigma = 98.653 \text{ MPa} \quad \text{Ciclo di tensione con tensione minima =0}$$

$$\sigma_m := \frac{\sigma_{zmax}}{2} \quad \sigma_m = 49.327 \text{ MPa}$$

L'ampiezza del ciclo di tensione deve essere corretta per l'effetto della tensione media, ad esempio tramite la relazione di Soderberg:

$$\Delta\sigma_{eff} := \Delta\sigma \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_s - \sigma_m} \quad \Delta\sigma_{eff} = 118.066 \text{ MPa}$$

L'ampiezza ammissibile del ciclo di tensione risulta data da:

$$\Delta\sigma_{Lamm} := \frac{\Delta\sigma_L}{\psi} \quad \Delta\sigma_{Lamm} = 133.333 \text{ MPa}$$

Per la verifica deve risultare:

$$\Delta\sigma_{eff} \leq \Delta\sigma_{Lamm} \quad \blacksquare$$



---

Verifica = "OK"

### Corpo 2

Il corpo 2 è soggetto a sollecitazioni di compressione ripetute nel tempo, per cui sono da condurre le seguenti verifiche:

- verifica statica contro lo snervamento
- verifica a fatica
- verifica all'instabilità

#### *Verifica statica*

Per la verifica statica, si calcolano le tensioni dovute alla forza normale:

$$\sigma_{zN} := \frac{N_2}{A_2} \qquad \sigma_{zN} = -23.473 \text{ MPa}$$

Per la verifica deve risultare:

$$\sigma_{zN} \leq \sigma_{amm}$$



---

Verifica = "OK"

#### *Verifica a fatica*

Per la verifica a fatica si calcolano i parametri del ciclo di tensione:

$$\Delta\sigma_2 := \sigma_{zN} \qquad \text{Ciclo di tensione con tensione minima = 0}$$

$$\sigma_{m2} := \frac{\sigma_{zN}}{2}$$

L'ampiezza del ciclo di tensione deve essere corretta per l'effetto della tensione media, ad esempio tramite la relazione di Sodeberg:

$$\Delta\sigma_{eff2} := \Delta\sigma_2 \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_s - \sigma_{m2}} \qquad \Delta\sigma_{eff2} = -22.59 \text{ MPa}$$

Per la verifica deve risultare:

$$\Delta\sigma_{eff2} \leq \Delta\sigma_{Lamm}$$



---

Verifica = "OK"



Verifica contro l'instabilità

La verifica contro l'instabilità viene condotta calcolando il carico assiale critico della trave.

Il minimo momento di inerzia è dato da:

$$J_{\min} := \min(J_{x2}, J_{y2}) \quad J_{\min} = 3.335 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

ed il carico critico è dato da:

$$P_{\text{cr}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{H_0^2} \quad P_{\text{cr}} = 2.764 \times 10^4 \text{ N} \quad N_2 = -1.765 \times 10^4$$

Per la verifica deve risultare:

$$N_2 \leq \frac{P_{\text{cr}}}{\psi} \quad \frac{P_{\text{cr}}}{\psi} = 1.843 \times 10^4 \text{ N}$$



---

Verifica = "OK"

### QUESITO 3

Si ipotizzi che la trave orizzontale della struttura definita nell'esercizio 2 sia ottenuta per saldatura dell'anima verticale alle due piattabande orizzontali (vedi Figura 3). Si chiede di verificare, nella stessa condizione di carico dell'esercizio 2, la resistenza dei 2 giunti saldati, di cui uno a piena penetrazione ed uno a cordoni d'angolo

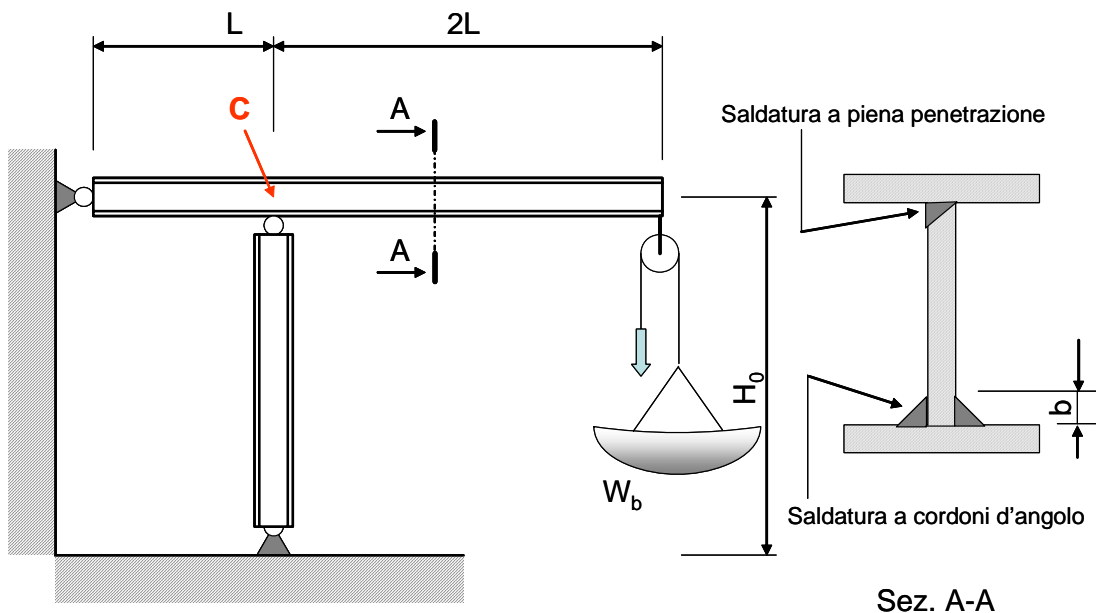
#### Dati del problema

$$b := 4 \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_{\text{amm}} := 500 \cdot \text{MPa} \quad \text{Tensione ammissibile materiale base}$$

$$f := 0.8 \quad \text{Efficienza saldatura a piena penetrazione}$$

$$f_1 := 0.8 \quad f_2 := 0.7 \quad \text{Efficienze saldatura a cordoni d'angolo}$$



#### Verifica saldatura a piena penetrazione

La sezione più sollecitata è ancora la C, nella quale, come notato durante la soluzione dell'esercizio precedente, il momento flettente assume valore massimo. In essa si calcolano le tensioni prodotte dalle diverse caratteristiche di sollecitazione.

Preliminarmente è necessario calcolare le caratteristiche geometriche della sezione.

Caratteristiche sezione.

$$A_1 = 3.45 \times 10^3 \text{ mm}^2 \quad \text{Area sezione}$$

$$A_{v1} := s_1 \cdot (H_1 - 2 \cdot s_1) \quad A_{v1} = 1.45 \times 10^3 \text{ mm}^2 \quad \text{Area anima verticale}$$

$$J_{x1} = 5.368 \times 10^7 \text{ mm}^4 \quad \text{Momento di inerzia}$$

### Tensioni da Momento flettente.

Il momento flettente produce delle tensioni classificabili come  $\sigma//$ , denominate nel seguito  $\sigma_{\text{par}}$

$$\sigma_{\text{parM}} := -\frac{M_1(L)}{J_{x1}} \cdot \frac{H_1 - 2 \cdot s_1}{2} \quad \sigma_{\text{parM}} = 95.365 \text{ MPa}$$

### Tensioni da Taglio

Il taglio produce delle tensioni classificabili come  $\tau//$ , denominate nel seguito  $\tau_{\text{par}}$ . Data la scarsa rilevanza in corrispondenza del cordone, esse vengono stimate semplicemente come valore medio sull'anima verticale

$$\tau_{\text{parT}} := \frac{T_1(L)}{A_{v1}} \quad \tau_{\text{parT}} = -8.116 \text{ MPa}$$

Nota: la formula di Jourawsky avrebbe fornito

$$S_{x1} := b_1 \cdot s_1 \cdot \frac{H_1 - s_1}{2} \quad S_{x1} = 1.475 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \quad \text{Momento statico piattabanda}$$
$$\tau_{\text{parJour}} := \frac{T_1(L) \cdot S_{x1}}{J_{x1} \cdot s_1} \quad \tau_{\text{parJour}} = -6.467 \text{ MPa}$$

### Verifica

La verifica viene condotta calcolando la tensione equivalente secondo Von Mises e confrontandola con la tensione ammissibile della saldatura.

$$\sigma_{\text{eq}} := \sqrt{\sigma_{\text{parM}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{parT}}^2} \quad \text{Tensione equivalente}$$

$$\sigma_{\text{ammW}} := \sigma_{\text{amm}} \cdot f \quad \text{Tensione ammissibile saldatura}$$

$$\sigma_{\text{eq}} = 96.395 \text{ MPa} < \sigma_{\text{ammW}} = 400 \text{ MPa} \quad \text{Verifica}$$



Verifica = "OK"

### Verifica saldatura a cordoni d'angolo

Per la saldatura a cordoni d'angolo, tenendo conto della sua geometria e di quella della struttura, risultano rilevanti solo le tensioni prodotte dal taglio. La sezione più sollecitata risulta pertanto ancora la C (assieme a tutto il tratto alla sua sinistra)

#### Caratteristiche sezione resistente.

$$a := \frac{b}{\sqrt{2}} \quad a = 2.828 \text{ mm} \quad \text{Sezione di gola cordone}$$

#### Momento flettente.

Il momento flettente produce delle tensioni classificabili come  $\sigma$  parallele, ininfluenti ai fini della verifica.

#### Taglio

Il taglio produce in corrispondenza della saldatura a cordoni d'angolo, delle tensioni  $\tau_{zy}$ , le quali, per la regola di uguaglianza delle tensioni tangenziali agenti su giaciture tra loro ortogonali, producono delle tensioni, di uguale valore classificabili come  $\tau_{//}$ , denominate nel seguito  $\tau_{par}$ .

Dato il piccolo valore, esse vengono stimate cautelativamente come valore medio sull'area dell'anima verticale.

$$\tau_{parT} = \frac{T_1(L)}{A_{v1}} \quad \tau_{parT} = -8.116 \text{ MPa}$$

#### Verifica

La verifica viene condotta con il metodo della sfera mozza, che richiede di verificare entrambe le seguenti relazioni

$$\sqrt{\sigma_{ort}^2 + \tau_{ort}^2 + \tau_{par}^2} \leq f_1 \cdot \sigma_{amm} \quad \blacksquare$$

$$\tau_{ort} + \sigma_{ort} \leq f_2 \cdot \sigma_{amm} \quad \blacksquare$$

Nel caso in esame, essendo presente solo la  $\tau_{par}$ , la verifica si riduce alla prima delle due relazioni:

$$\sqrt{\tau_{parT}^2} = 8.116 \text{ MPa} < f_1 \cdot \sigma_{amm} = 400 \text{ MPa}$$



Verifica1 = "OK"

La saldatura risulta quindi verificata

**QUESITO 4**

Un corpo è in moto traslatorio su di un piano orizzontale (Fig. 4), con velocità "V" ed accelerazione "a". Ad esso è incernierata nel punto "O" una barra lunga 800 mm, che ruota attorno ad "O" con velocità angolare  $\omega$  ed accelerazione angolare  $d\omega/dt$ .

Calcolare:

- velocità ed accelerazione del punto A
- posizione del centro delle velocità della barra che ruota attorno ad "O"

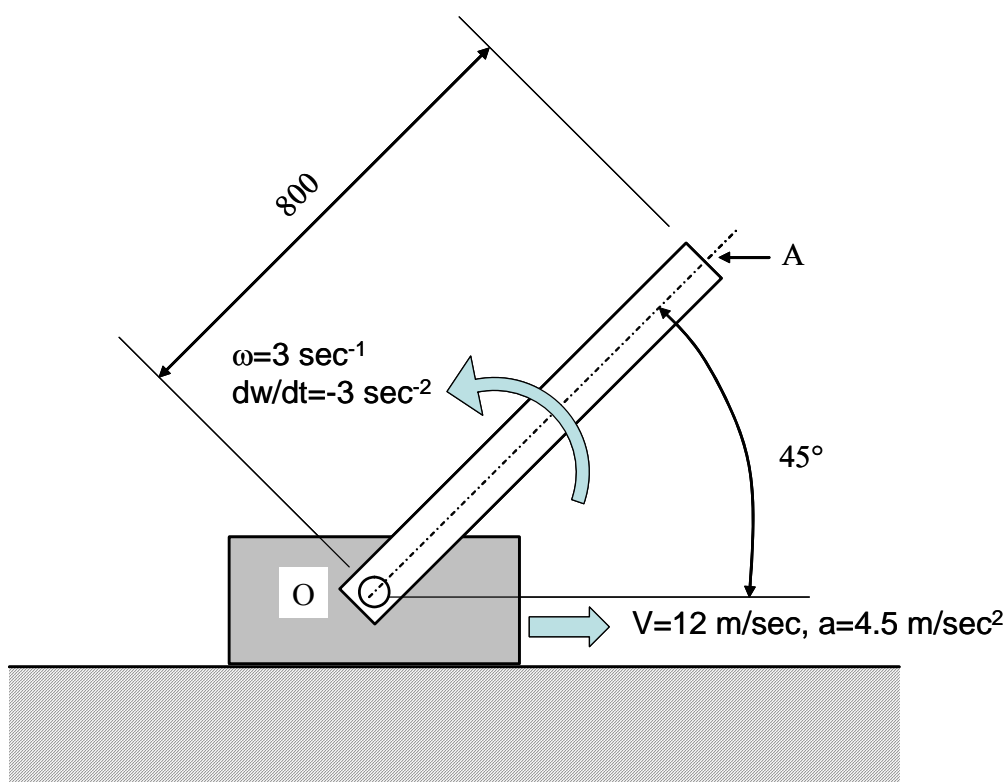


Fig. 4

### Vettori velocità ed accelerazione

Fissato il SR fisso mostrato nella Figura seguente, coincidente all'istante considerato con il punto "O", si ottengono le seguenti espressioni delle velocità ed accelerazioni dei due corpi.

$$L_1 := 800 \cdot \text{mm}$$

Lunghezza barra

$$\omega := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_p := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\text{s}^2}$$

Vettori velocità ed accelerazione angolare barra

$$V_O := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad a_O := \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Vettori velocità ed accelerazione corpo traslante e, pertanto, del punto "O".

### Velocità ed Accelerazione di A

Per il calcolo della velocità ed accelerazione del punto A si ricorre alle relazioni relative ad un corpo rigido in moto roto-traslatorio generale.

$$OA := \begin{pmatrix} L_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ L_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad OA = \begin{pmatrix} 0.566 \\ 0.566 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Vettore congiungente O e A

### Velocità di A

$$V_A := V_O + \omega \times OA \quad V_A = \begin{pmatrix} 10.303 \\ 1.697 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Accelerazione di A

$$a_A := a_O + \omega_p \times OA - (|\omega|)^2 \cdot OA \quad a_A = \begin{pmatrix} 1.106 \\ -6.788 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### Coordinate Centro delle Velocità della barra

Il centro delle velocità può essere ottenuto come punto di incontro di rette normali al vettore velocità di due punti della barra.

Il primo di tali punti può essere il centro di rotazione "O", che ha una velocità diretta orizzontalmente, per cui la retta ad essa ortogonale è semplicemente, nel SR scelto, l'asse "y". Il CV giace pertanto sull'asse "y".

Come secondo punto, si può scegliere il punto "A", del quale si conosce il vettore velocità. La retta passante per "A" ed ortogonale a quest'ultimo può essere ottenuta a partire dalla espressione generica del fascio di rette passanti per "A":

$$y - y_A := m \cdot (x - x_A)$$

Sostituendo le effettive coordinate di "A",  $x_A$  ed  $y_A$ , si ottiene:

$$y - L_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} := m_1 \cdot \left( x - L_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Il coefficiente angolare "m" può essere semplicemente scelto in maniera che la retta sia normale al vettore velocità. In base alle componenti di quest'ultimo si ha:

$$m_1 := -\frac{V_{A_1}}{V_{A_2}} \quad m_1 = -6.071$$

L'equazione della retta cercata è pertanto data da:

$$y(x) := m_1 \cdot x - L_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (m_1 - 1)$$

L'ordinata del punto di intersezione tra la retta per "A" e l'asse "y" è pertanto data da:

$$y(0) = 4 \text{ m}$$

