

CORSO DI  
**MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE**

**VERIFICA INTERMEDIA DEL 30-05-2007**

COGNOME E NOME

MATRICOLA

**QUESITO 1 (punti 10)**

Dato l'alberino in acciaio mostrato nella Fig. 1.1, calcolare:

- lo spostamento del punto B sotto l'azione della sola forza  $F_1$
- lo spostamento del punto B sotto l'azione della sola forza  $F_2$  (assunta di modulo unitario)
- la forza  $F_2$  da applicare nel punto A (modulo e verso) per fare in modo che lo spostamento complessivo del punto B (dovuto all'azione contemporanea delle due forze) sia nullo.

Nei calcoli si trascurino le deformazioni dovute al taglio.

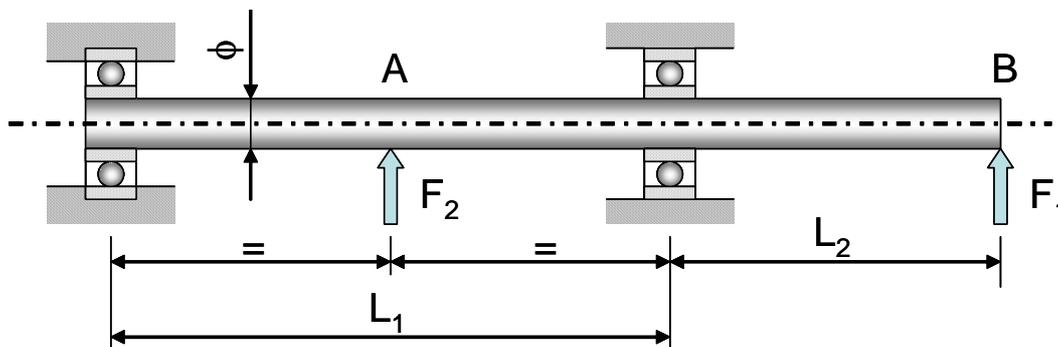


Fig. 1.1

**Dati**

$\phi := 10\text{-mm}$

$L_1 := 70\text{-mm}$

$F_1 := 200\text{-N}$

$L_2 := 50\text{-mm}$

## Svolgimento

L'alberino viene assimilato ad una trave semplicemente appoggiata, secondo lo schema di Fig. 1.2, fissando una coordinata  $\xi$ .

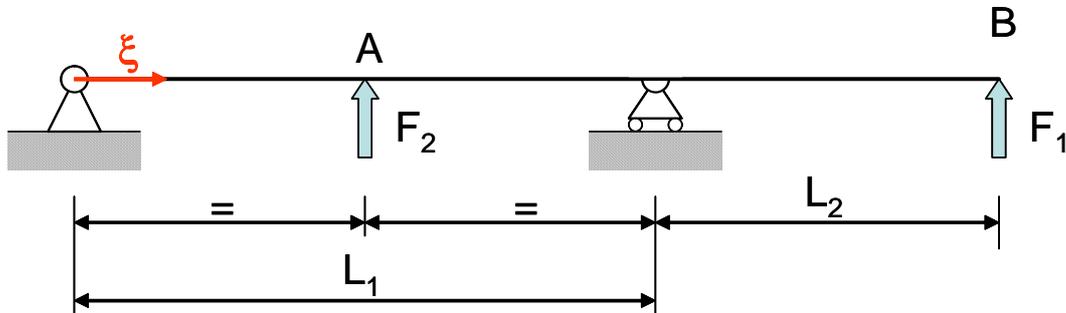


Fig. 1.2

### **Caratteristiche sezione e materiale**

Il momento di inerzia della sezione (circolare) dell'albero è dato da:

$$J := \frac{\pi \cdot \phi^4}{64} \qquad J = 490.874 \text{ mm}^4$$

Il modulo di Young del materiale (acciaio) è pari a:

$$E := 210000 \cdot \text{MPa}$$

### **Spostamento di B sotto l'azione di $F_1$**

Lo spostamento del punto B sotto l'azione della forza  $F_1$  può essere calcolato uguagliando il lavoro compiuto dalla forza stessa con l'energia elastica immagazzinata nella trave.

#### *Reazioni vincolari*

Le reazioni vincolari nei punti C e D (fig. 1.3) dovute alla forza  $F_1$  sono date da:

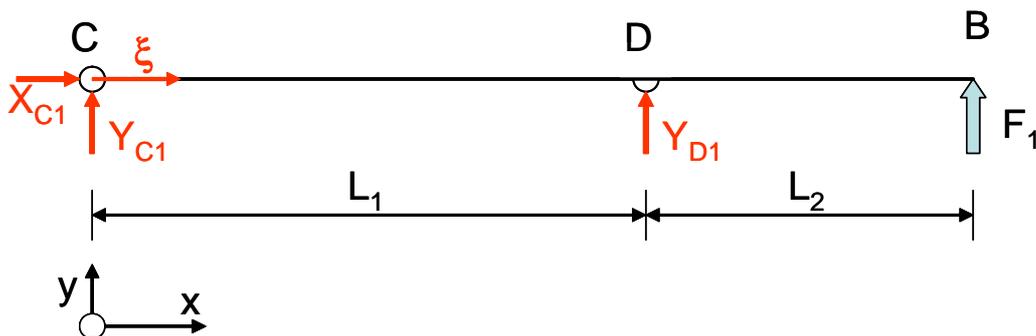


Fig. 1.3

$$X_{C1} := 0 \quad Y_{C1} := 0 \quad Y_{D1} := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow -X_{C1} = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_{C1} + Y_{D1} + F_1 = 0$$

$$MR_{xB} = 0 \rightarrow Y_{D1} \cdot L_1 + F_1 \cdot (L_1 + L_2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_{C1} \\ Y_{C1} \\ Y_{D1} \end{pmatrix} := \text{Find}(X_{C1}, Y_{C1}, Y_{D1})$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari :

$$X_{C1} = 0 \text{ N} \quad Y_{C1} = 142.857 \text{ N} \quad Y_{D1} = -342.857 \text{ N}$$

ed il seguente diagramma di corpo libero:

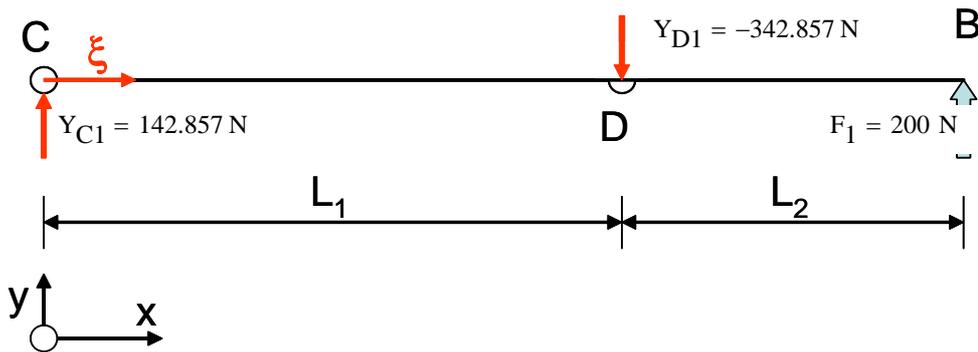


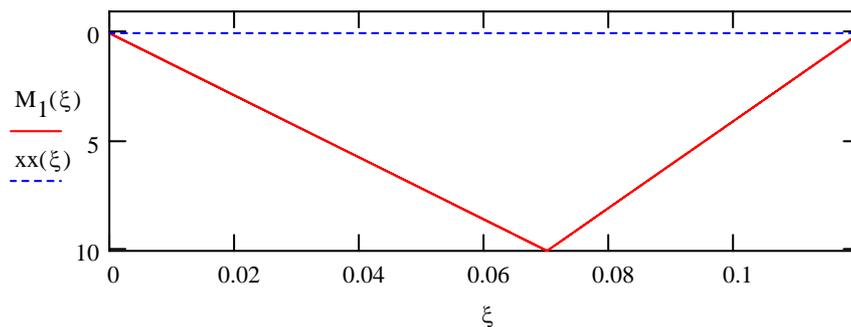
Fig. 1.4

### Momento flettente

Il momento flettente risulta dato da:

$$xx(\xi) := 0$$

$$M_1(\xi) := \begin{cases} Y_{C1} \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq L_1 \\ F_1 \cdot (L_1 + L_2 - \xi) & \text{if } L_1 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



### Spostamento di B

Lo spostamento  $\delta_{B1}$  del punto B per effetto di  $F_1$  può essere calcolato uguagliando il lavoro compiuto dalla forza stessa:

$$L := \frac{F_1 \cdot \delta_{B1}}{2}$$

con l'energia elastica immagazzinata nella trave, che, trascurando il contributo del taglio, è data da:

$$U := \frac{1}{2} \int_0^{L_1+L_2} \frac{M_1(\xi)^2}{E \cdot J} d\xi$$

$$U := \frac{1}{2 \cdot E \cdot J} \left[ \int_0^{L_1} (Y_{C1} \cdot \xi)^2 d\xi + \int_{L_1}^{L_1+L_2} [F_1 \cdot (L_1 + L_2 - \xi)]^2 d\xi \right]$$

$$U := \frac{1}{2 \cdot E \cdot J} \left( \frac{1}{3} \cdot L_1^3 \cdot Y_{C1}^2 + \frac{1}{3} \cdot L_2^3 \cdot F_1^2 \right)$$

da cui:

$$\delta_{B1} := \frac{2}{F_1} \cdot U$$

$$\delta_{B1} = 0.194 \text{ mm}$$

### **Spostamento di B sotto l'azione di $F_2$**

Per la forza  $F_2$  si assume per essa un valore unitario del modulo:

$$F_{21} := 1 \cdot N$$

Per la linearità del problema, lo spostamento effettivo sotto l'azione di un valore diverso della forza potrà essere ottenuto semplicemente moltiplicando lo spostamento trovato in presenza di un modulo unitario per il valore effettivo del modulo.

Per il calcolo si applica il metodo degli integrali di Mohr

#### *Reazioni vincolari*

Le reazioni vincolari nei punti C e D (fig. 1.5) dovute alla forza  $F_{21}$  sono, per semplici considerazioni di simmetria, immediatamente calcolabili e date da:

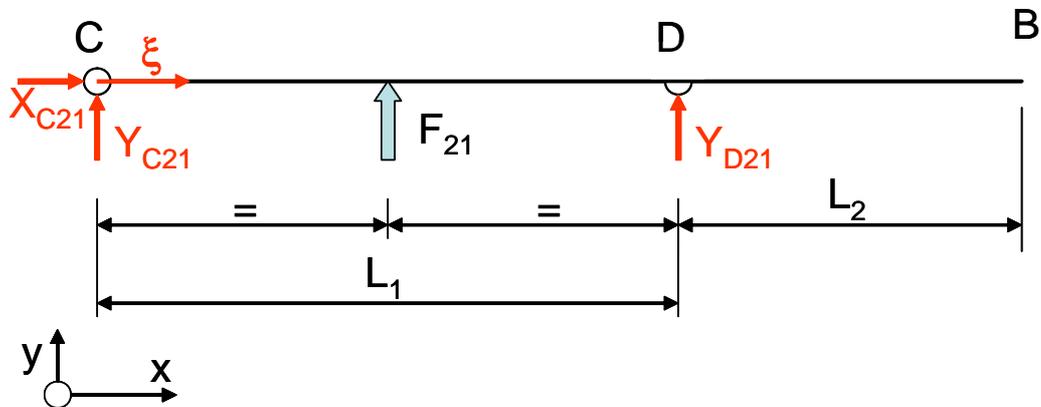


Fig. 1.5

$$X_{C21} := 0 \quad Y_{C21} := -\frac{F_{21}}{2} \quad Y_{D21} := -\frac{F_{21}}{2}$$

ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:

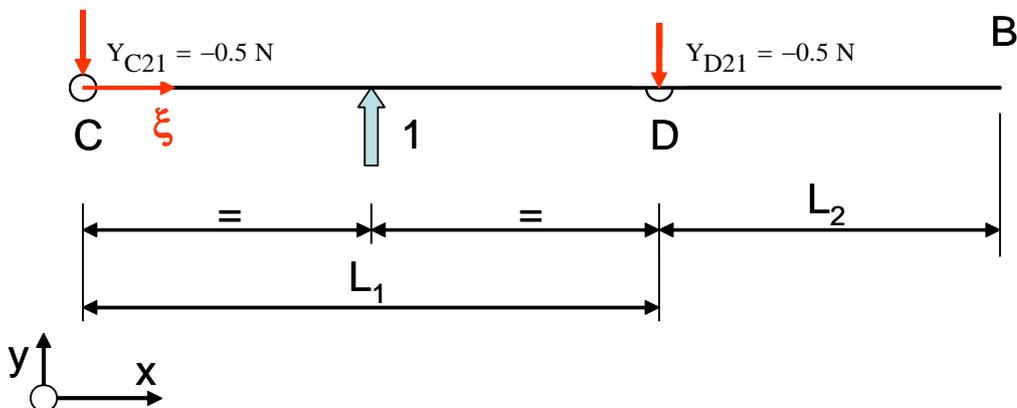
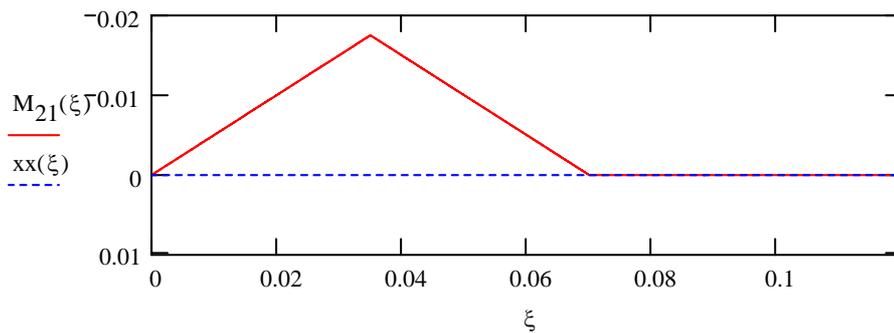


Fig. 1.6

*Momento flettente*

Il momento flettente risulta dato da:

$$M_{21}(\xi) := \begin{cases} Y_{C21} \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq \frac{L_1}{2} \\ Y_{D21} \cdot (L_1 - \xi) & \text{if } \frac{L_1}{2} \leq \xi \leq L_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



*Momento flettente prodotto da una forza unitaria applicata in B*

Il metodo degli integrali di Mohr prevede l'applicazione, nel punto di cui si vuole calcolare lo spostamento, di un carico unitario diretto in accordo con lo spostamento stesso.

Si applica dunque tale carico unitario, in direzione verticale nel punto B (Fig. 1.7).

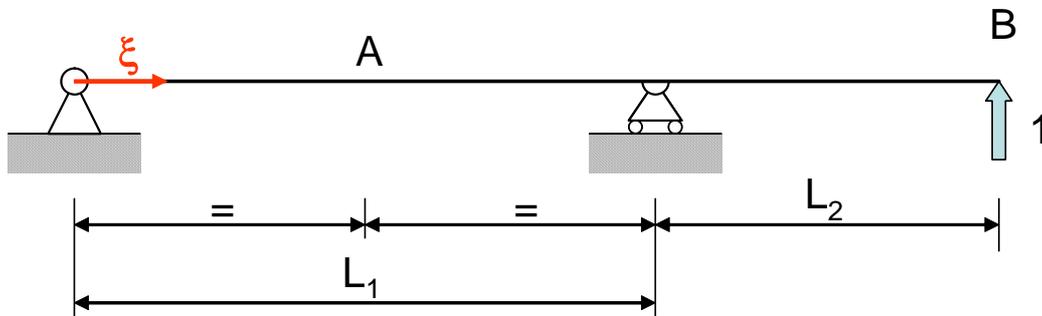
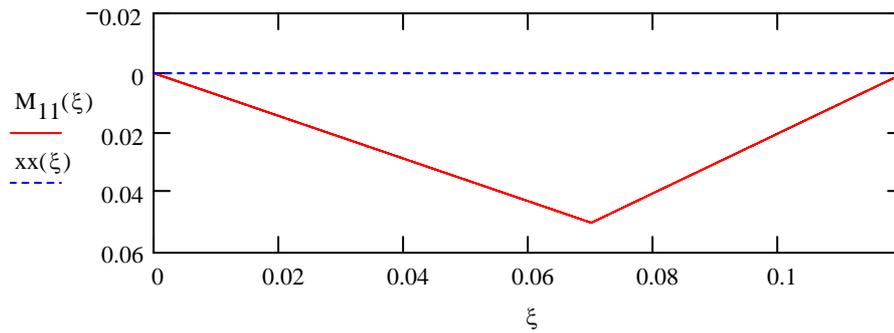


Fig. 1.7

Dato che il carico unitario è diretto come  $F_1$ , il momento da esso prodotto può essere immediatamente ottenuta da quello relativo alla forza  $F_1$  sostituendo il relativo modulo con il valore "1" (vale a dire dividendo per il modulo di  $F_1$ ).

$$M_{11}(\xi) := \begin{cases} \frac{Y_{C1} \cdot \xi}{F_1} & \text{if } 0 \leq \xi \leq L_1 \\ L_1 + L_2 - \xi & \text{if } L_1 \leq \xi \leq L_1 + L_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



*Spostamento di B dovuto ad  $F_2$*

Lo spostamento  $\delta_{B2}$  del punto B per effetto di una  $F_2$  di valore unitario può essere calcolato attraverso il metodo degli integrali di Mohr:

$$\delta_{B21} := \int_0^{L_1+L_2} \frac{M_{21}(\xi) \cdot M_{11}(\xi)}{E \cdot J} d\xi$$

Tuttavia, dato che la funzione integranda risulta evidentemente non nulla solo nel tratto 0-L1, l'integrale può essere riscritto come:

$$\delta_{B21} := \int_0^{L_1} \frac{M_{21}(\xi) \cdot M_{11}(\xi)}{E \cdot J} d\xi$$

$$\delta_{B21} := \frac{1}{E \cdot J} \left[ \int_0^{\frac{L_1}{2}} (Y_{C21} \cdot \xi) \cdot \left( \frac{Y_{C1} \cdot \xi}{F_1} \right) d\xi + \int_{\frac{L_1}{2}}^{L_1} [Y_{D21} \cdot (L_1 - \xi)] \cdot \left( \frac{Y_{C1} \cdot \xi}{F_1} \right) d\xi \right]$$

$$\delta_{B21} := \frac{1}{E \cdot J} \left( \frac{1}{24} \cdot L_1^3 \cdot Y_{C21} \cdot \frac{Y_{C1}}{F_1} + \frac{1}{12} \cdot L_1^3 \cdot Y_{D21} \cdot \frac{Y_{C1}}{F_1} \right)$$

per cui:

$$\delta_{B21} = -1.485 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

si osservi che il segno è negativo, il che indica che una forza  $F_2$  diretta verso l'alto provoca lo spostamento in basso del punto B.

### Calcolo del valore richiesto per $F_2$

Data la linearità del problema, lo spostamento prodotto dalla forza  $F_2$  sarà dato da:

$$\delta_{B2} := \delta_{B21} \cdot \frac{F_2}{F_{21}}$$

mentre lo spostamento complessivo di B risulta dato da:

$$\delta_B := \delta_{B1} + \delta_{B21} \cdot \frac{F_2}{F_{21}}$$

Uguagliando a zero tale spostamento complessivo, si ricava  $F_2$ :

$$F_2 := -\frac{\delta_{B1}}{\delta_{B21}} \cdot F_{21} \qquad F_2 = 1.306 \times 10^3$$

### Verifica

Si può verificare che il valore trovato sia corretto applicando il metodo degli integrali di Mohr per il calcolo dello spostamento del punto B prodotto dalla presenza contemporanea delle due forze.

$$\delta_B := \int_0^{L_1+L_2} \frac{\left( M_1(\xi) + \frac{F_2}{F_{21}} \cdot M_{21}(\xi) \right) \cdot M_{11}(\xi)}{E \cdot J} d\xi \qquad \delta_B = 0 \text{ mm}$$

## QUESITO 2 (punti 7)

Data il dispositivo avvolgicavo mostrato nella Fig. 2.1, soggetto alla forza  $F$  applicata al cavo, condurre la verifica della giunzione saldata.

NB: il perno è bloccato contro la rotazione rispetto alle alette e costituisce con esse un tutto unico.

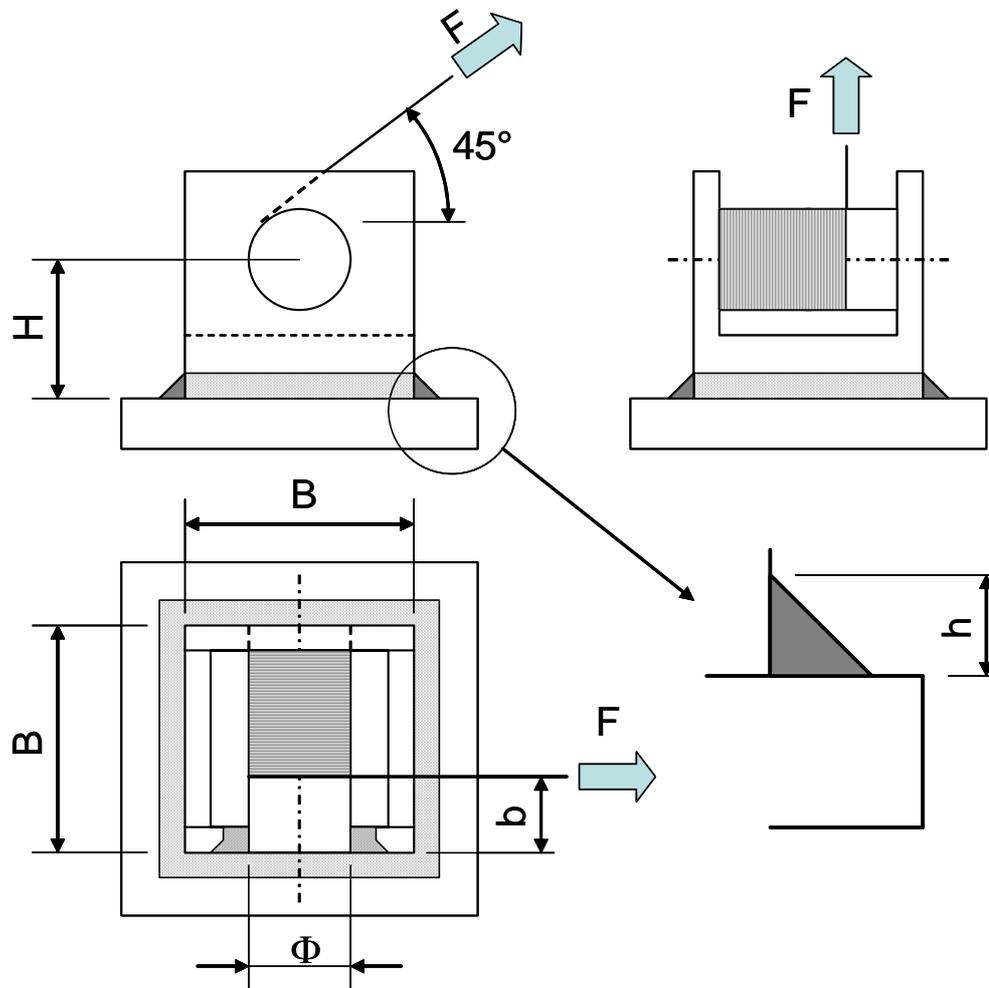


Fig. 2.1

### Dati

$$\Phi := 20\text{-mm}$$

$$H := 35\text{-mm}$$

$$B := 50\text{-mm}$$

$$h := 5\text{-mm}$$

$$F := 7500\text{-N}$$

$$b := 10\text{-mm}$$

$$\sigma_{\text{ammb}} := 160\text{-MPa}$$

Tensione ammissibile materiale base

$$f_1 := 0.7$$

$$f_2 := 0.8$$

Efficienze saldatura

## Svolgimento

Si calcolano in primo luogo le caratteristiche della sezione resistente della saldatura, ribaltando la sezione di gola sul piano orizzontale.

### **Caratteristiche sezione**

$$a := \frac{h}{\sqrt{2}} \quad a = 3.536 \text{ mm} \quad \text{Altezza di gola}$$

La sezione resistente ha la forma mostrata in Fig.2.2 e le seguenti proprietà geometriche, relative al SR mostrato nella stessa figura

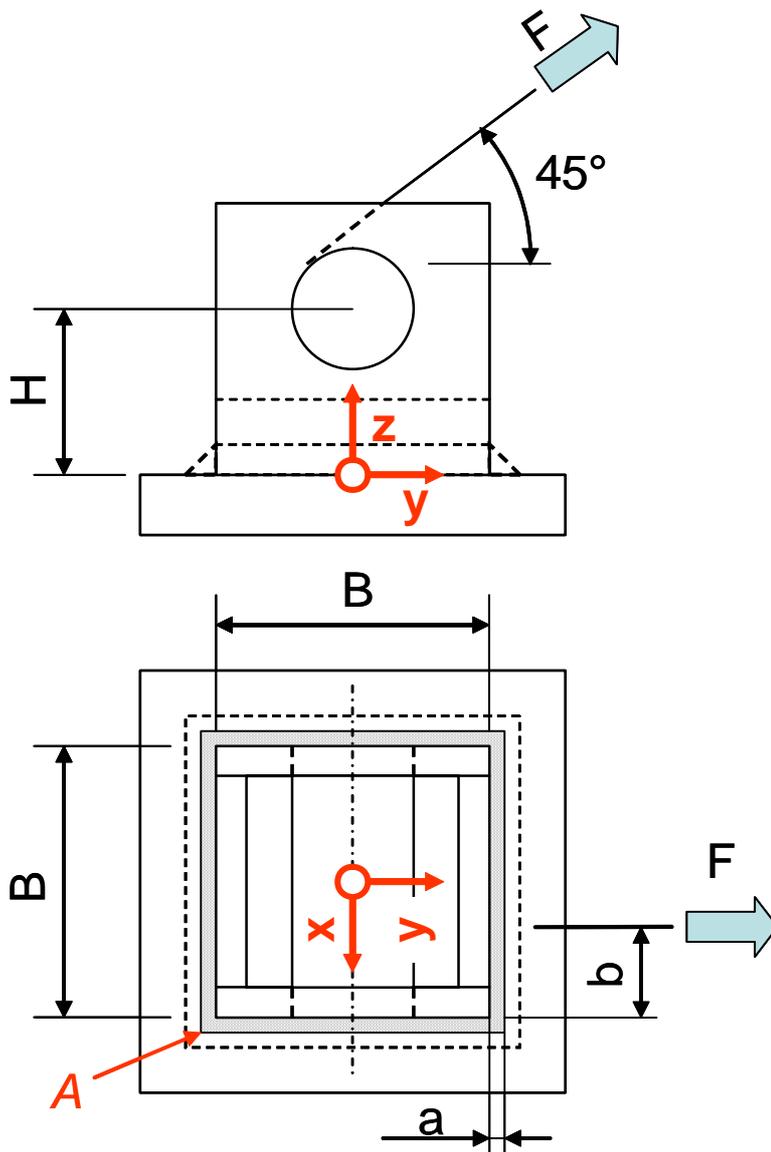


Fig. 2.2

$$\underline{A} := (B + 2a)^2 - B^2 \quad A = 757.107 \text{ mm}^2$$

$$J_x := \frac{(B + 2a)^4 - B^4}{12} \quad J_x = 3.632 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_y := J_x$$

$$\underline{\Omega} := (B + a)^2 \quad \Omega = 2.866 \times 10^3 \text{ mm}^2 \quad \text{Area racchiusa dalla linea media}$$

### Forze e momenti agenti

Il giunto deve trasmettere le seguenti forze e momenti, espresse nel SR di Fig. 2.2.

$$F_x := 0 \quad F_y := F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad F_z := F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_x := - \left[ F \cdot \left( \frac{H}{\sqrt{2}} + \frac{\Phi}{2} \right) \right] \quad M_x = -2.606 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M_y := - \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \left( \frac{B}{2} - b \right) \quad M_y = -7.955 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$M_z := \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \left( \frac{B}{2} - b \right) \quad M_z = 7.955 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

### Tensioni agenti

Le tensioni agenti, calcolate in base alle relazioni della teoria elementare delle travi e classificate secondo la nomenclatura tipica delle giunzioni saldate. Per motivi pratici, le  $\sigma$  ortogonali sono indicate come  $\sigma_{\text{ort}}$ , mentre le  $\tau$  ortogonali e parallele sono indicate rispettivamente come  $\tau_{\text{ort}}$  e  $\tau_{\text{par}}$ . La verifica viene condotta nel punto "A" di Fig. 2.2, nel quale sono massime le tensioni dovute ad  $M_x$  ed ad  $M_y$

#### Tensioni dovute ad $F_y$

Le tensioni dovute ad  $F_y$  (taglio) hanno il loro massimo in corrispondenza dell'asse neutro della flessione dovuta ad  $M_x$ . Per semplicità, esse vengono calcolate come valore medio sui tratti di cordone paralleli all'asse "Y" e combinate con le altre tensioni calcolate nel punto "A"

$$\tau_{\text{pary}} := \frac{F_y}{2 \cdot (B \cdot a)} \quad \tau_{\text{pary}} = 15 \text{ MPa}$$

Se si vuole calcolare il massimo vero secondo Jourawsky si ha:

$$S_x := \left( \frac{B}{2} + a \right) \cdot (B + 2 \cdot a) \cdot \left( \frac{B}{2} + a \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{B}{2} \cdot B \cdot \frac{B}{4} \quad S_x = 7.611 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{max}} := \frac{F_y \cdot S_x}{J_x \cdot 2 \cdot a} \quad \tau_{\text{max}} = 15.715 \text{ MPa}$$

Si può notare come tale massimo non sia molto diverso dal valore stimato in modo semplificato

Tensioni dovute ad  $F_z$

$$\sigma_{ortz} := \frac{F_z}{A} \quad \sigma_{ortz} = 7.005 \text{ MPa}$$

Tensioni dovute ad  $M_x$

$$\sigma_{ortx} := \frac{M_x}{J_x} \cdot \frac{-(B + 2a)}{2} \quad \sigma_{ortx} = 20.474 \text{ MPa}$$

Tensioni dovute ad  $M_y$

$$\sigma_{orty} := -\frac{M_y}{J_y} \cdot \frac{B + 2a}{2} \quad \sigma_{orty} = 6.249 \text{ MPa}$$

Tensioni dovute ad  $M_z$

$$\tau_{parz} := \frac{M_z}{2 \cdot \Omega \cdot a} \quad \tau_{parz} = 3.925 \text{ MPa}$$

### Verifica

La verifica viene condotta con il metodo della sfera mozza

1a verifica

$$\sqrt{(\sigma_{ortx} + \sigma_{orty} + \sigma_{ortz})^2 + (\tau_{parz} + \tau_{pary})^2} \leq f_1 \cdot \sigma_{ammb}$$
$$\sqrt{(\sigma_{ortx} + \sigma_{ortz})^2 + (\tau_{parz} + \tau_{pary})^2} = 33.365 \text{ MPa} < f_1 \cdot \sigma_{ammb} = 112 \text{ MPa}$$



Verifica = "OK"

2a verifica

$$\sigma_{ortx} + \sigma_{ortz} \leq f_2 \cdot \sigma_{ammb}$$
$$|\sigma_{ortx} + \sigma_{ortz}| = 27.479 \text{ MPa} < f_2 \cdot \sigma_{ammb} = 128 \text{ MPa}$$



Verifica = "OK"

### QUESITO 3 (punti 5)

La trave in acciaio mostrata nella Fig. 3.1, soggetta ad una forza assiale di compressione, è vincolata in maniera diversa sui piani "X-Z" ed "Y-Z".

Calcolare:

- il carico assiale critico
- come varia il carico critico se la trave è costruita in lega di alluminio.

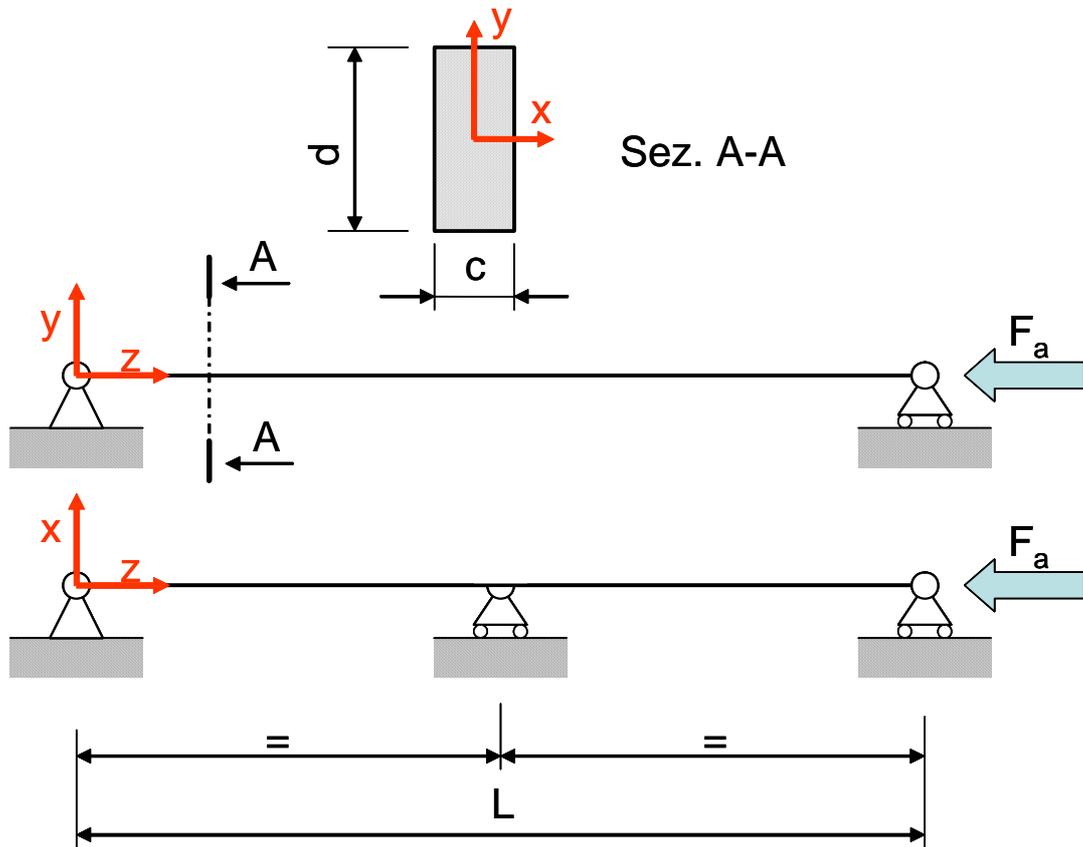


Fig. 3.1

#### Dati

$$L := 5 \cdot \text{m}$$

$$c := 40 \cdot \text{mm}$$

$$d := 70 \cdot \text{mm}$$

### Svolgimento

Il carico di instabilizzazione viene calcolato separatamente per i due piani. Il carico critico risulterà il minore dei due valori ottenuti.

### Caratteristiche geometriche della sezione

Si valuta il momento di inerzia della sezione attorno ai due assi principali.

$$J_{\overset{y}{\parallel} \overset{z}{\parallel} \overset{w}{\parallel}} := \frac{c \cdot d^3}{12} \quad J_x = 1.143 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{\overset{x}{\parallel} \overset{z}{\parallel} \overset{w}{\parallel}} := \frac{d \cdot c^3}{12} \quad J_y = 3.733 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

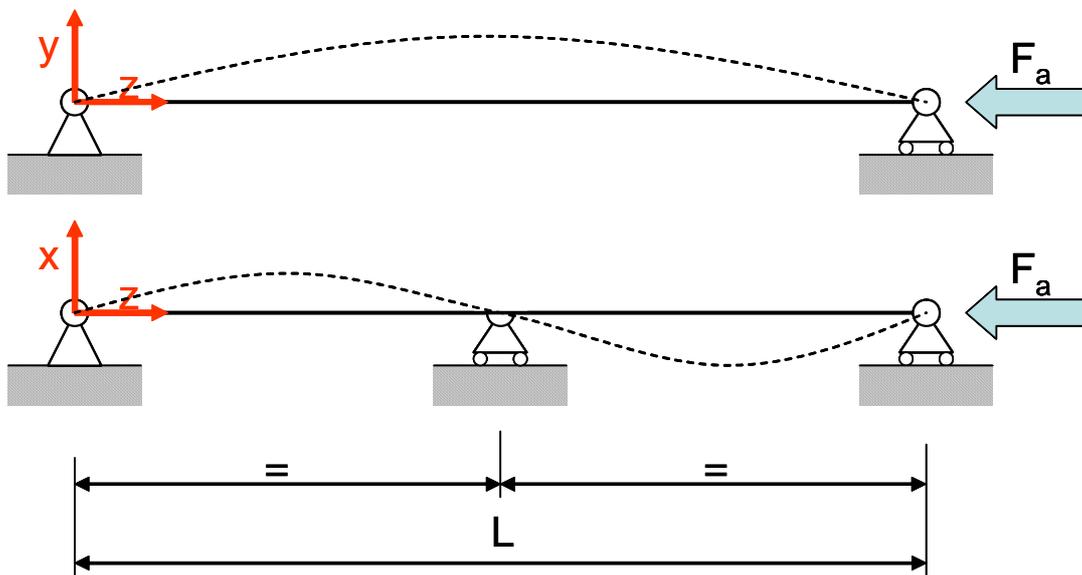


Fig. 3.2

### Piano "Y-Z"

Per l'instabilizzazione su questo piano (Fig. 3.2) la lunghezza libera di inflessione coincide con quella totale della trave ed il momento di inerzia da considerare è quello relativo all'asse "X-X".

$$F_{\text{crYZ}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{L^2} \quad F_{\text{crYZ}} = 9.479 \times 10^4 \text{ N}$$

**Piano "X-Z"**

Per l'instabilizzazione su questo piano (Fig. 3.2) la lunghezza libera di inflessione è pari alla metà di quella totale della trave (a causa del vincolo intermedio) ed il momento di inerzia da considerare è quello relativo all'asse "Y-Y".

$$F_{\text{crXZ}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \qquad F_{\text{crXZ}} = 1.238 \times 10^5 \text{ N}$$

**Carico critico**

Il carico critico effettivo risulta pari al minore dei due valori ottenuti.

$$P_{\text{cr}} := \min(F_{\text{crXZ}}, F_{\text{crYZ}}) \qquad P_{\text{cr}} = 9.479 \times 10^4 \text{ N}$$

#### QUESITO 4 (punti 8)

La barra CD mostrata in Fig. 4.1 ruota attorno a C con velocità angolare costante  $\omega_0$ . Alla barra, nel punto D, è fissata una ruota che, trascinata dalla barra stessa, rotola senza strisciare su di una pista esterna di raggio  $r+l$  ("B" punto di contatto ruota-pista).

Per la posizione dei due corpi mostrata in Fig. 4.1, determinare:

- la velocità e l'accelerazione del punto D
- la velocità angolare  $\omega_{0r}$  della ruota
- la velocità e l'accelerazione del punto A

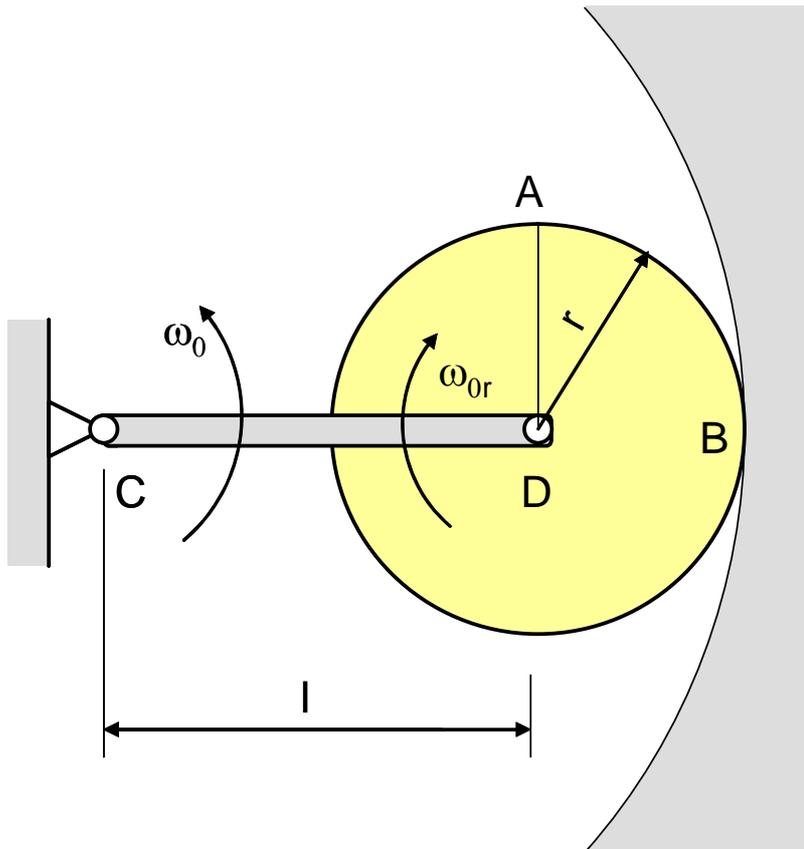


Fig. 4.1

#### **Dati**

$$r := 200 \cdot \text{mm}$$

$$l := 400 \cdot \text{mm}$$

$$\omega_0 := 4 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

## Svolgimento

### Velocità del punto D

Il centro delle velocità della barra si trova nel punto "C". La velocità del punto D risulta pertanto data da (notazione vettoriale):

$$\omega_{\text{barra}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{CD} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_D := \omega_{\text{barra}} \times \text{CD} \quad v_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Accelerazione del punto D

Dato che la velocità angolare della barra è costante l'accelerazione del punto D risulta data da (notazione vettoriale):

$$a_D := -\omega_0^2 \cdot \text{CD} \quad a_D = \begin{pmatrix} -6.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

### Velocità angolare della ruota

Il centro delle velocità della ruota si trova nel punto "B" di contatto con la pista esterna. La velocità del punto D, pensato come appartenente alla ruota, risulta pertanto data da (notazione vettoriale):

$$\omega_{\text{ruota}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{0r} \end{pmatrix} \quad \text{BD} := \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_D := \omega_{\text{ruota}} \times \text{BD}$$

Uguagliando le due espressioni di  $v_D$  si determina la velocità angolare della ruota  $\omega_{0r}$ :

$$\omega_{0r} := -\frac{|\text{CD}|}{|\text{BD}|} \cdot \omega_0 \quad \omega_{0r} = -8 \frac{1}{\text{s}}$$

Si noti che la ruota gira in senso orario se la barra gira in senso antiorario

### **Velocità del punto A**

La velocità del punto A può essere determinata come segue:

$$\omega_{\text{ruota}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{0r} \end{pmatrix} \quad \text{BA} := \begin{pmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_A := v_D + \omega_{\text{ruota}} \times \text{BA} \quad v_A = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 3.2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### **Accelerazione del punto A**

L'accelerazione del punto A può essere determinata a partire da quella (nota) del punto D, nel modo seguente:

$$\text{DA} := \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_A := a_D - \left( |\omega_{\text{ruota}}| \right)^2 \cdot \text{DA} \quad a_A = \begin{pmatrix} -6.4 \\ -12.8 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$