

CORSO DI
MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE

VERIFICA INTERMEDIA DEL 06-06-2008

COGNOME E NOME

MATRICOLA

QUESITO 1 (punti 8)

Data la ciminiera a sezione circolare mostrata in Fig. 1.1, soggetta a carichi dovuti al vento, calcolare:

- lo spostamento orizzontale del punto A

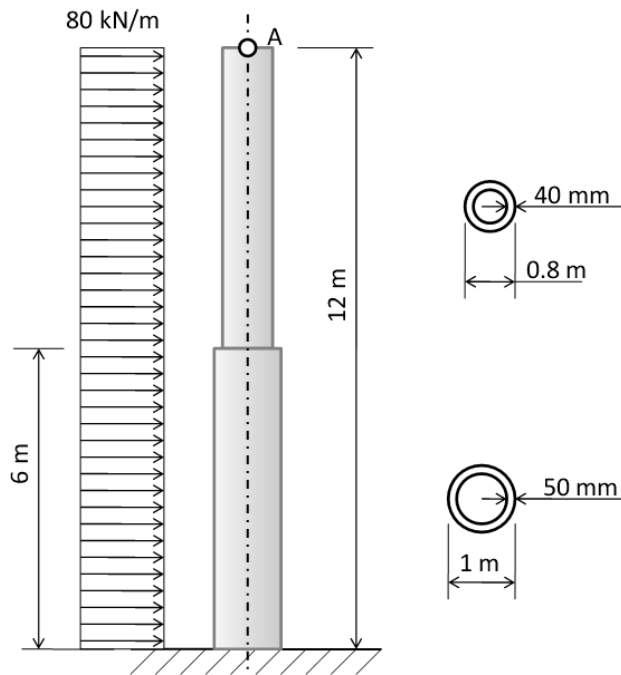


Fig. 1.1

Dati

Materiale della colonna: acciaio

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= 1\text{-m} & \phi_2 &:= 0.8\text{-m} & L_1 &:= 6\text{-m} & p &:= 80 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \\ s_{p1} &:= 50\text{-mm} & s_{p2} &:= 40\text{-mm} & L_2 &:= 12\text{-m} & & \end{aligned}$$

Svolgimento

La colonna viene assimilata ad una trave a mensola incastrata alla base, secondo lo schema di Fig. 1.2, fissando una coordinata ξ .

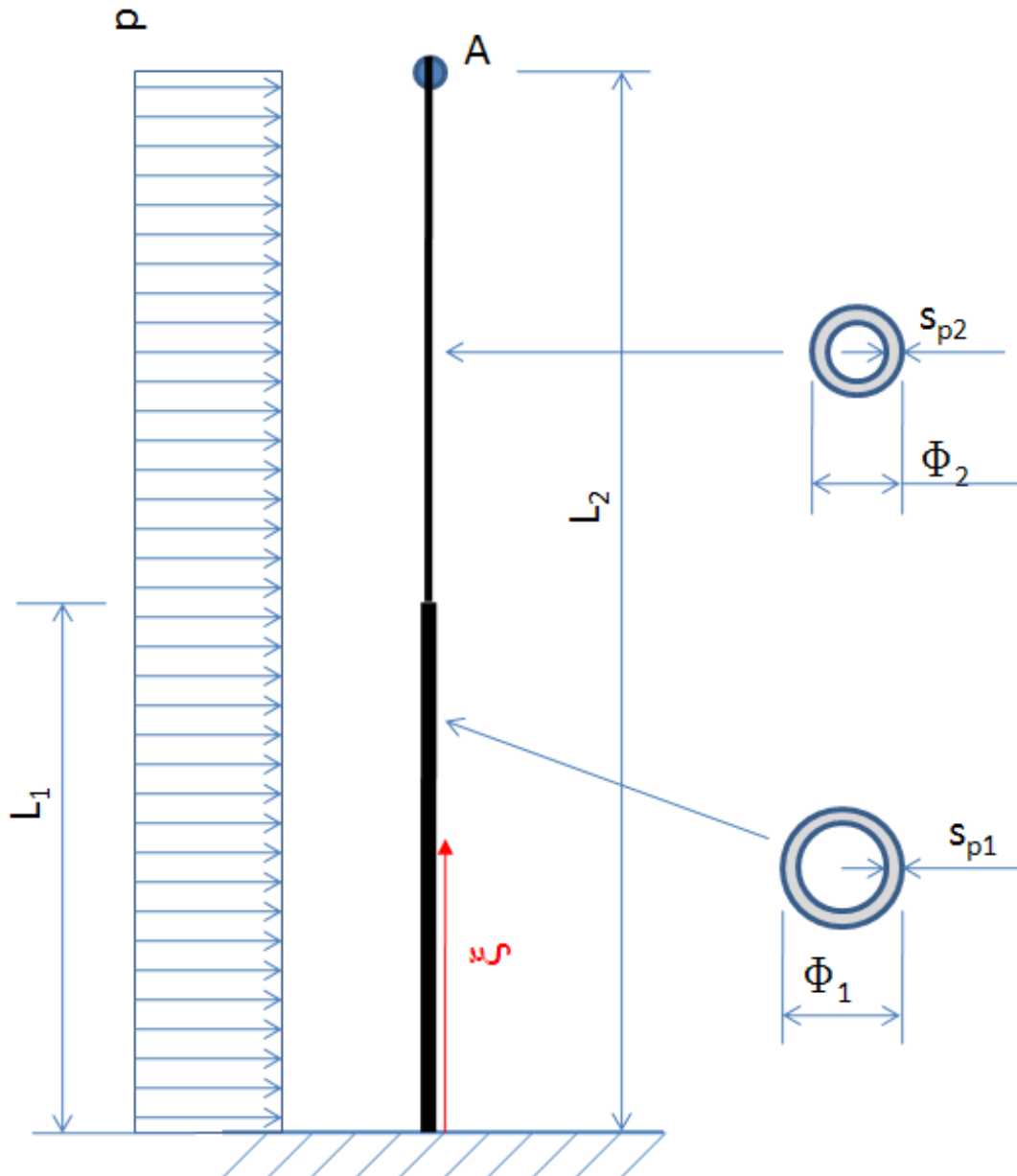


Fig. 1.2

Di seguito si riportano i valori delle principali grandezze, come risultanti dalla Fig. 1.1.

$$\begin{array}{llll} \Phi_1 := 1 \cdot \text{m} & \Phi_2 := 0.8 \cdot \text{m} & L_1 := 6 \cdot \text{m} & p := 80 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \\ s_{p1} := 50 \cdot \text{mm} & s_{p2} := 40 \cdot \text{mm} & L_2 := 12 \cdot \text{m} & \end{array}$$

Caratteristiche sezione e materiale

Il momento di inerzia delle due sezioni (tubo circolare) della colonna è dato da:

$$J_1 := \pi \frac{[\phi_1^4 - (\phi_1 - 2 \cdot s_{p1})^4]}{64} \quad J_1 = 1.688 \times 10^{10} \cdot \text{mm}^4$$

$$J_2 := \pi \frac{[\phi_2^4 - (\phi_2 - 2 \cdot s_{p2})^4]}{64} \quad J_2 = 6.915 \times 10^9 \cdot \text{mm}^4$$

Il modulo di Young del materiale (acciaio) è pari a:

$$E := 210000 \cdot \text{MPa}$$

Spostamento di A sotto l'azione di p

Per il calcolo dello spostamento del punto A si ricorre al metodo degli integrali di Mohr. Si procede pertanto al calcolo delle reazioni vincolari ottenendo il seguente diagramma di corpo libero.

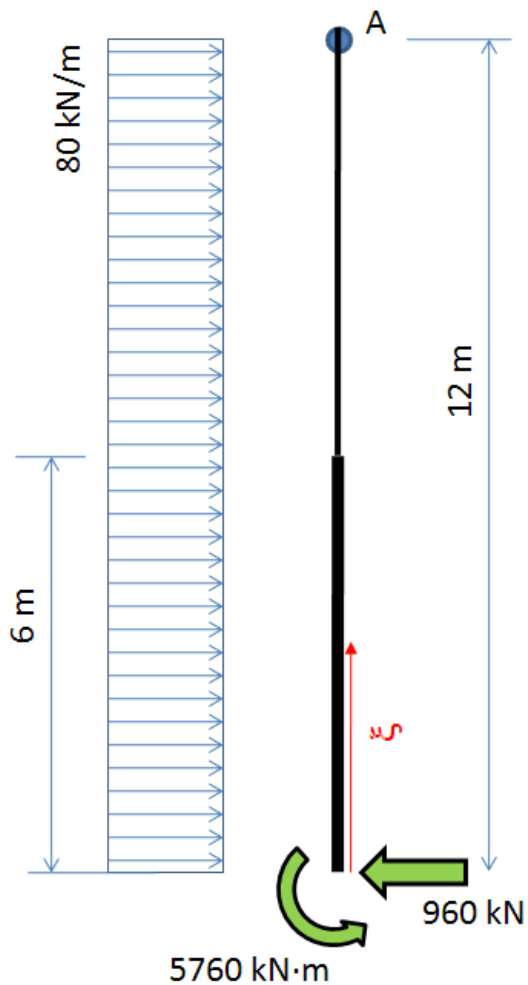


Fig. 1.3

Si procede quindi a determinare l'espressione analitica ed a tracciare il diagramma per l'unica caratteristica di sollecitazione rilevante, vale a dire il momento flettente.

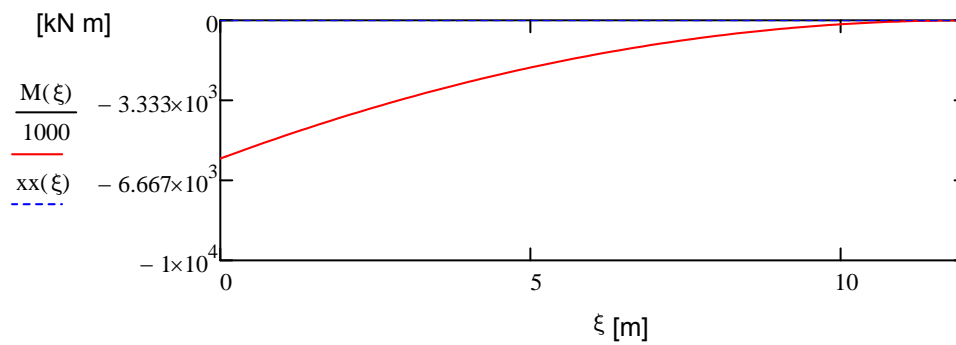
$$\xi := 0, 0.1 .. 12$$

$$xx(\xi) := 0$$

Momento flettente

Il momento flettente risulta dato da:

$$M(\xi) := \begin{cases} 960 \cdot \text{kN} \cdot \xi \cdot \text{m} - p \cdot \frac{\xi^2}{2} \cdot \text{m}^2 - 5769 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento flettente prodotto da una forza unitaria applicata in A

Il metodo degli integrali di Mohr prevede l'applicazione, nel punto di cui si vuole calcolare lo spostamento, di un carico unitario diretto concordemente con lo spostamento stesso.

Si applica dunque tale carico unitario, in direzione orizzontale nel punto A, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero (Fig. 1.4).

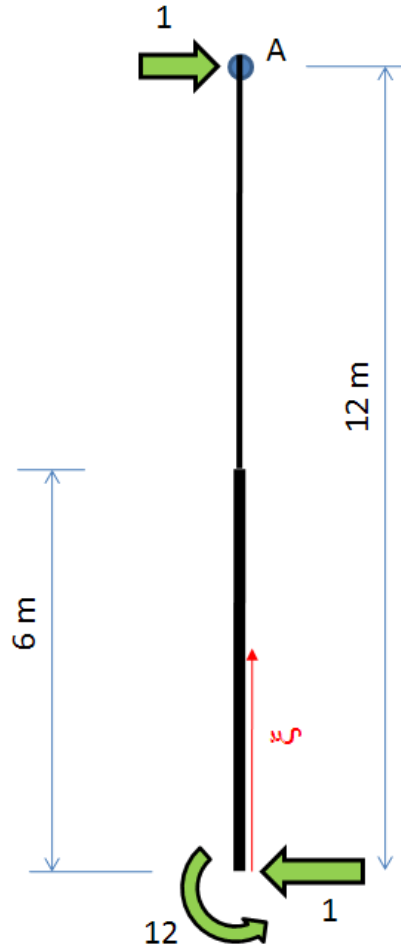
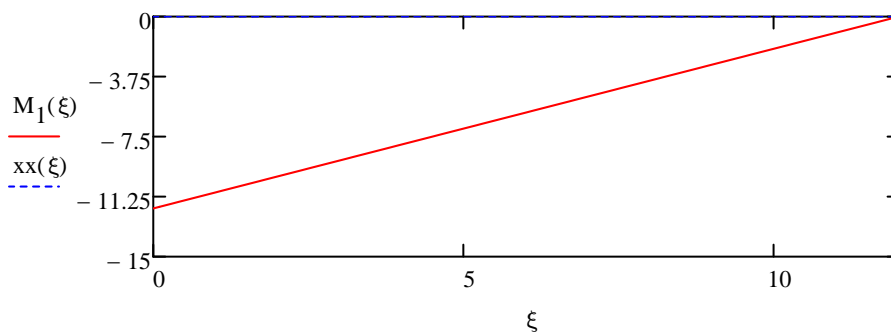


Fig. 1.4

Si valuta quindi l'espressione analitica e si traccia il grafico del momento flettente.

$$M_1(\xi) := \begin{cases} 1 \cdot \xi \cdot m - 12 \cdot m & \text{if } 0 \leq \xi \leq 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Spostamento di A dovuto a p

Lo spostamento δ_A del punto A per effetto del carico p può essere calcolato attraverso il metodo degli integrali di Mohr:

$$\delta_A := \int_0^{L2} \frac{M(\xi) \cdot M_1(\xi)}{E \cdot J} d\xi \quad \blacksquare$$

Tuttavia, dato che il momento di inerzia risulta evidentemente diverso nei tratti 0-L1 ed L1-L2, l'integrale può essere riscritto come:

$$\delta_A := \left(\int_0^6 \frac{M(\xi) \cdot M_1(\xi)}{E \cdot J_1} d\xi \right) + \left(\int_6^{12} \frac{M(\xi) \cdot M_1(\xi)}{E \cdot J_2} d\xi \right) \quad \blacksquare$$

per cui:

$$\delta_A := \left[\int_0^6 \frac{\left(960 \cdot \text{kN} \cdot \xi \cdot \text{m} - p \cdot \frac{\xi^2}{2} \cdot \text{m}^2 - 5769 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \right) (1 \cdot \xi \cdot \text{m} - 12 \cdot \text{m})}{E \cdot J_1} d\xi \cdot \text{m} \right]$$

$$\delta_A := \delta_A + \left[\int_6^{12} \frac{\left(960 \cdot \text{kN} \cdot \xi \cdot \text{m} - p \cdot \frac{\xi^2}{2} \cdot \text{m}^2 - 5769 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} \right) (1 \cdot \xi \cdot \text{m} - 12 \cdot \text{m})}{E \cdot J_2} d\xi \cdot \text{m} \right]$$

$$\delta_A = 64.011 \cdot \text{mm}$$

QUESITO 2 (punti 8)

Data la ciminiera a sezione circolare mostrata nella Fig. 2.1, soggetta a carichi dovuti al vento, condurre la verifica di una giunzione saldata longitudinale a piena penetrazione posta nelle posizioni "B" e "C" della sezione.

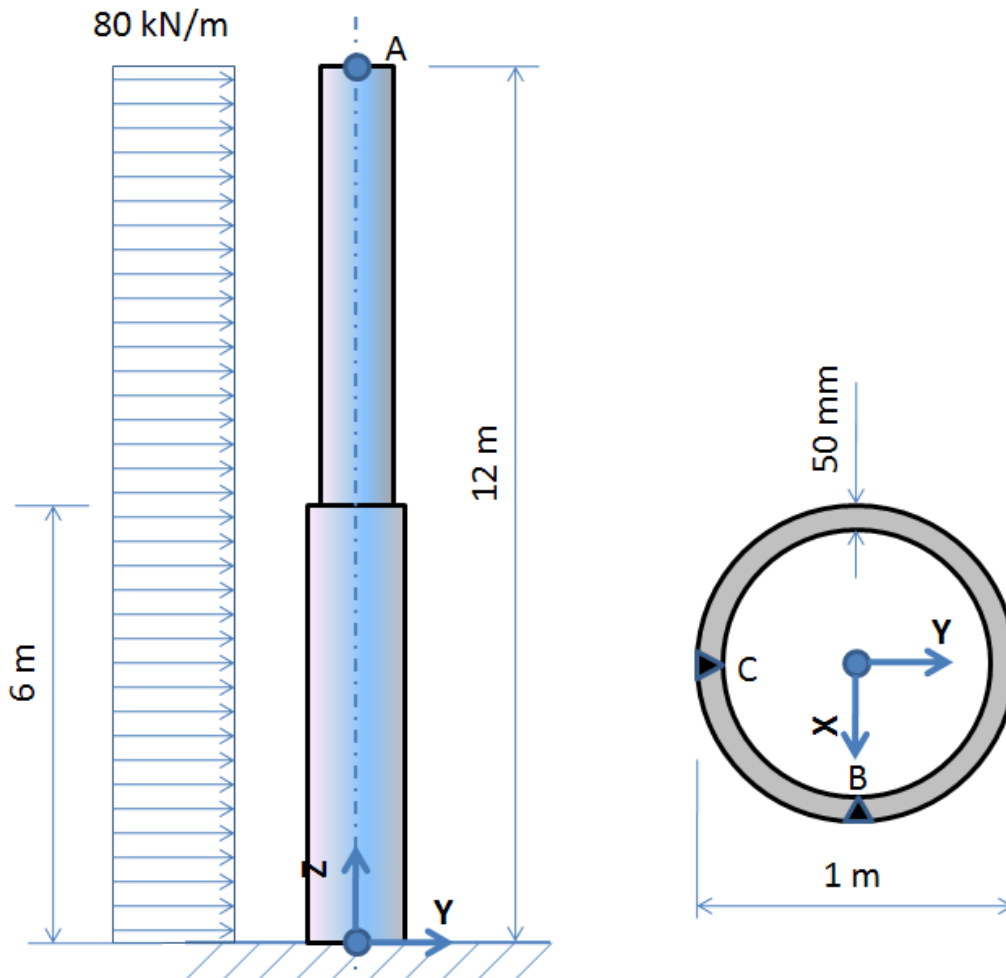


Fig. 2.1

Dati

$\sigma_{ammb} := 240 \cdot \text{MPa}$ Tensione ammissibile materiale base

$f_W := 0.85$ Efficienza saldatura

Svolgimento

La colonna viene assimilata ad una trave a mensola incastrata alla base, secondo lo schema di Fig. 2.2, fissando una coordinata ξ .

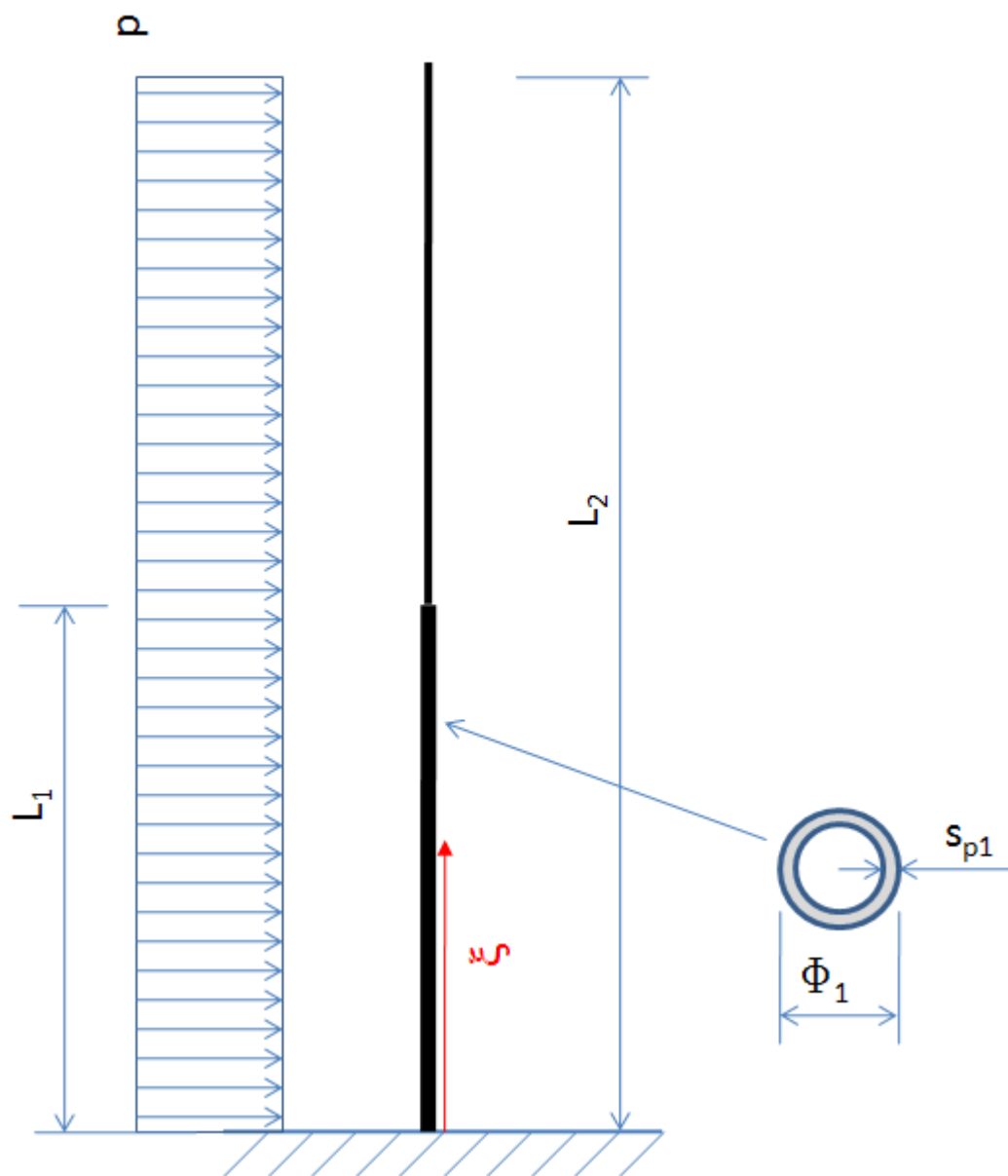


Fig. 2.2

Di seguito si riportano i valori delle principali grandezze, come risultanti dalla Fig. 2.1.

$$\Phi_1 := 1 \cdot \text{m}$$

$$s_{p1} := 50 \cdot \text{mm}$$

$$L_1 := 6 \cdot \text{m}$$

$$L_2 := 12 \cdot \text{m}$$

$$p := 80 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Caratteristiche sezione e materiale

Il momento di inerzia delle due sezioni (tubo circolare) della colonna è dato da:

$$J_x := \pi \frac{[\phi_1^4 - (\phi_1 - 2 \cdot s_{p1})^4]}{64} \qquad J_x = 1.688 \times 10^{10} \cdot \text{mm}^4$$

Si procede al calcolo delle reazioni vincolari ottenendo il seguente diagramma di corpo libero.

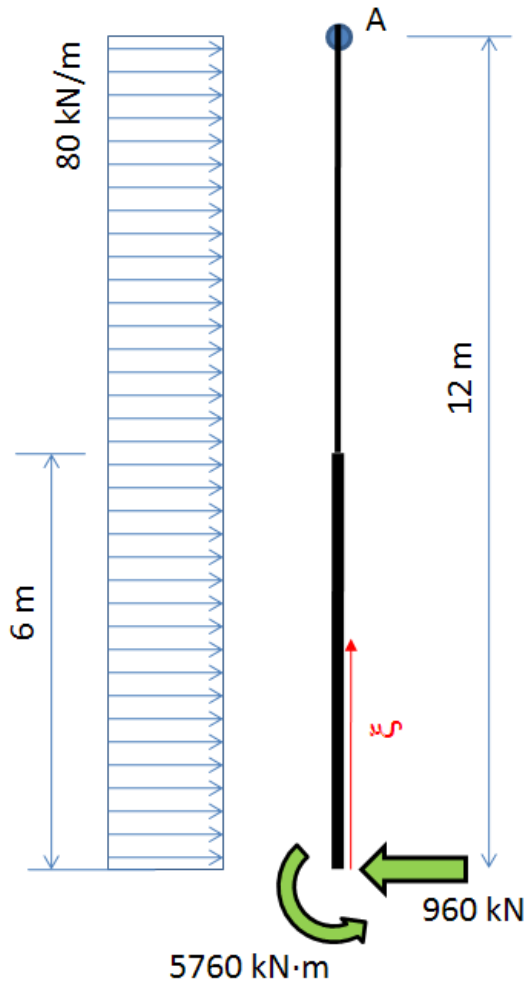


Fig. 2.3

Si procede quindi a determinare l'espressione analitica ed a tracciare il diagramma per le caratteristiche di sollecitazione.

$$\xi := 0, 0.1 \dots 12$$

$$M_{xx}(\xi) := 0$$

Forza normale

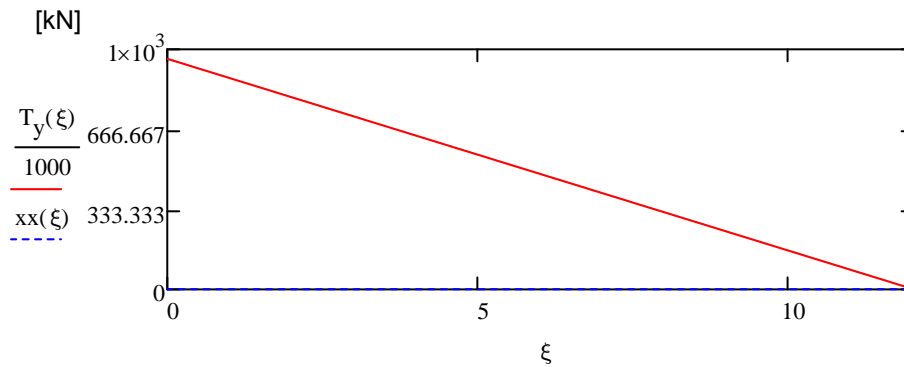
La forza normale risulta dato da:

$$N_0(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Taglio

Il taglio risulta dato da:

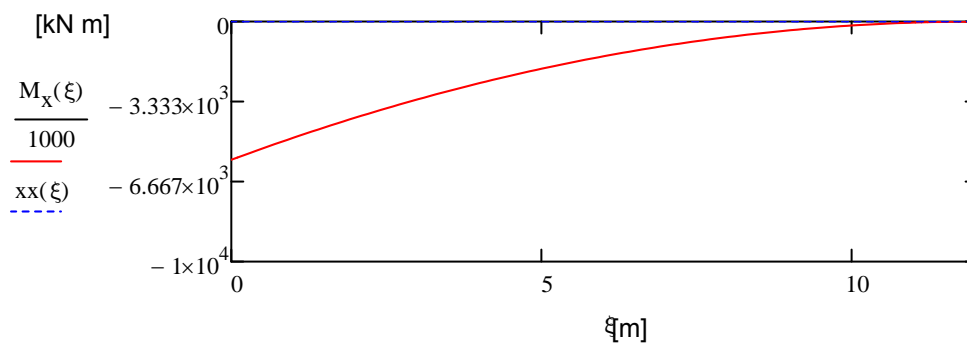
$$T_y(\xi) := \begin{cases} 960 \cdot \text{kN} - p \cdot \xi \cdot \text{m} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento flettente

Il momento flettente risulta dato da:

$$M_x(\xi) := \begin{cases} 960 \cdot \text{kN} \cdot \xi \cdot \text{m} - p \cdot \frac{\xi^2}{2} \cdot \text{m}^2 - 5769 \cdot \text{kN} \cdot \text{m} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



VERIFICA SALDATURE

Considerazioni generali

Il momento flettente produce sulla sezione delle tensioni σ_{ZZ} che, per le saldature, possono essere classificate come $\sigma_{//}$.

Il taglio produce delle tensioni τ_{zy} che, per le saldature, possono essere classificate come $\tau_{//}$.

Non sono presenti tensioni $\sigma_{\text{ortogonale}}$

Giunto B

Il giunto B si trova in corrispondenza dell'asse neutro per la flessione M_x , per cui risulta:

$$\sigma_{\text{parB}} := 0$$

La tensione τ_{par} può essere determinata con la formula di Jourawsky.

La metà della sezione tubolare, ai fini del calcolo del relativo momento statico, può essere considerata come la differenza di due semicerchi.

Per un semicerchio, la distanza del baricentro dal diametro di base è data da:

$$Y_G := \frac{4 \cdot R^3}{3 \cdot \pi}$$

Per il cerchio esterno:

$$Y_{GE} := \frac{4 \cdot \phi_1}{3 \cdot \pi \cdot 2}$$

Per il cerchio interno:

$$Y_{GI} := \frac{4 \cdot \left(\frac{\phi_1}{2} - s_{p1} \right)}{3 \cdot \pi}$$

Per cui:

$$S_{x\text{max}} := \frac{\pi \cdot \phi_1^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot Y_{GE} - \frac{\pi \cdot (\phi_1 - 2 \cdot s_{p1})^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot Y_{GI}$$

Applicando la formula di Jourawsky:

$$\tau_{\text{parB}} := \frac{T_y(0) \cdot S_{x\text{max}}}{J_x \cdot (2 \cdot s_{p1})}$$

Verifica

$$\sigma_{\text{eqB}} := \sqrt{3 \cdot \tau_{\text{parB}}^2} \quad \sigma_{\text{eqB}} = 22.244 \cdot \text{MPa} < \sigma_{\text{ammb}} \cdot f_W = 204 \cdot \text{MPa}$$

Il giunto B risulta verificato

Giunto C

Il giunto C si trova in corrispondenza di un punto in cui le tensioni di taglio sono nulle, per cui risulta:

$$\tau_{\text{parC}} := 0$$

La tensione σ_{par} può essere determinata con la formula di Navier

$$\sigma_{\text{parC}} := \frac{M_x(0) \cdot \phi_1}{J_x} \cdot \frac{1}{2}$$

Verifica

$$\sigma_{\text{eqC}} := \sqrt{\sigma_{\text{parC}}^2} \quad \sigma_{\text{eqC}} = 170.871 \cdot \text{MPa} < \sigma_{\text{ambb}} \cdot f_W = 204 \cdot \text{MPa}$$

Il giunto C risulta verificato

QUESITO 3 (punti 8)

Dato l'albero rotante in acciaio mostrato nella Fig. 3.1, soggetto a due forze di direzione fissa nello spazio:

- condurre la verifica a fatica a vita infinita, tenendo conto delle sole tensioni normali.

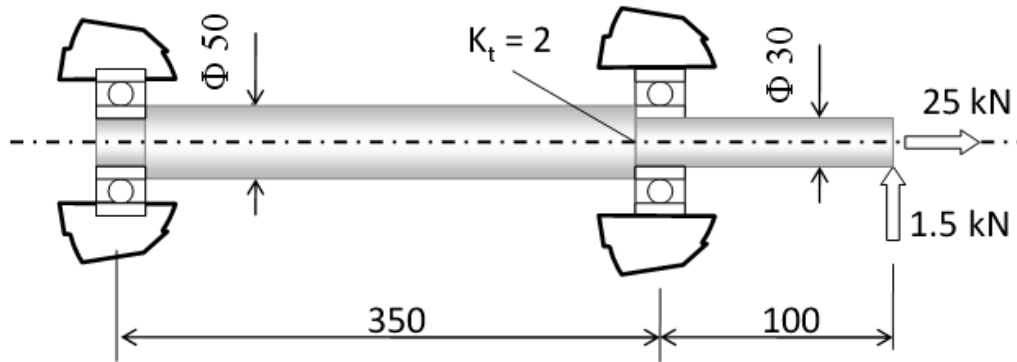


Fig. 3.1

Dati

Materiale acciaio

$\Delta\sigma_L := 400 \cdot \text{MPa}$

Limite di fatica

$\sigma_s := 350 \cdot \text{MPa}$

Tensione di snervamento

$K_t := 2$

Fattore di forma intaglio

Svolgimento

L'alberino viene assimilato ad una trave semplicemente appoggiata, secondo lo schema di Fig. 3.2, fissando una coordinata ξ .



Fig. 3.2

Di seguito si riportano i valori delle principali grandezze, come risultanti dalla Fig. 3.1.

$\phi_1 := 50 \cdot \text{mm}$

$\phi_2 := 30 \cdot \text{mm}$

$L_1 := 350 \cdot \text{mm}$

$F_1 := 25 \text{ kN}$

$F_2 := 1.5 \text{ kN}$

$L_2 := 100 \cdot \text{mm}$

Caratteristiche sezione e materiale

Il momento di inerzia e l'area delle sezioni (circolari) dell'albero è dato da:

$$A_1 := \frac{\pi \cdot \phi_1^2}{4} \quad A_1 = 1.963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$J_{x1} := \frac{\pi \cdot \phi_1^4}{64} \quad J_{x1} = 3.068 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$$

$$A_2 := \frac{\pi \cdot \phi_2^2}{4} \quad A_2 = 7.069 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$J_{x2} := \frac{\pi \cdot \phi_2^4}{64} \quad J_{x2} = 3.976 \times 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

Il modulo di Young del materiale (acciaio) è pari a:

$$E := 210000 \cdot \text{MPa}$$

Caratteristiche di sollecitazione

Reazioni vincolari

Le reazioni vincolari nei punti C e D (fig. 3.3) sono date da:

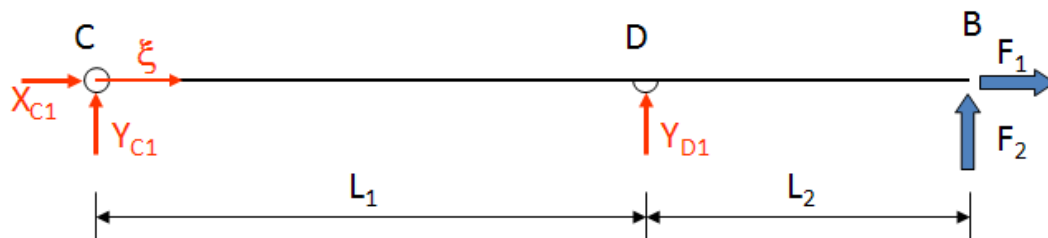


Fig. 3.3

$$X_{C1} := 0 \quad Y_{C1} := 0 \quad Y_{D1} := 0$$

Given

$$R_x = 0 \text{ ---> } X_{C1} + F_1 = 0$$

$$R_y = 0 \text{ ---> } Y_{C1} + Y_{D1} + F_2 = 0$$

$$MR_{xB} = 0 \text{ ---> } Y_{D1} \cdot L_1 + F_2 \cdot (L_1 + L_2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_{C1} \\ Y_{C1} \\ Y_{D1} \end{pmatrix} := \text{Find}(X_{C1}, Y_{C1}, Y_{D1})$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari :

$$X_{C1} = -2.5 \times 10^4 \text{ N} \quad Y_{C1} = 428.571 \text{ N} \quad Y_{D1} = -1.929 \times 10^3 \text{ N}$$

ed il seguente diagramma di corpo libero:

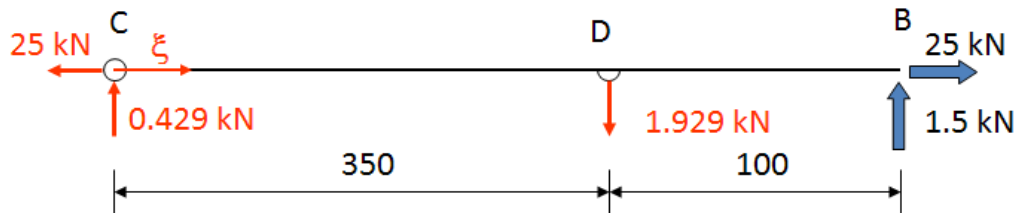


Fig. 3.4

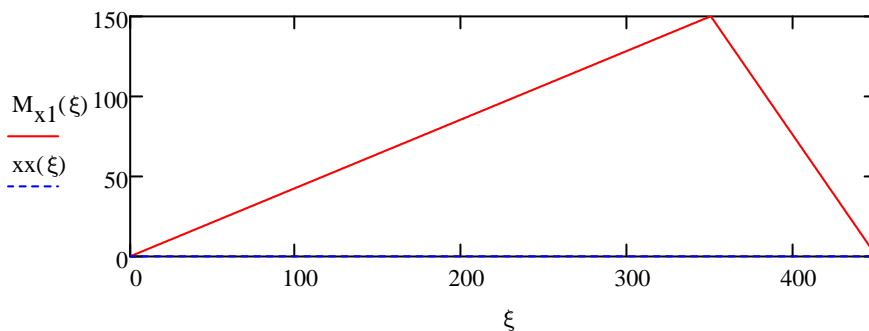
$$\xi := 0, 1 \dots 450$$

Momento flettente

Il momento flettente risulta dato da:

$$M_{x1}(\xi) := \begin{cases} Y_{C1} \cdot \xi \cdot \text{mm} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 350 \\ F_2 \cdot (450 - \xi) \cdot \text{mm} & \text{if } 350 \leq \xi \leq 450 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

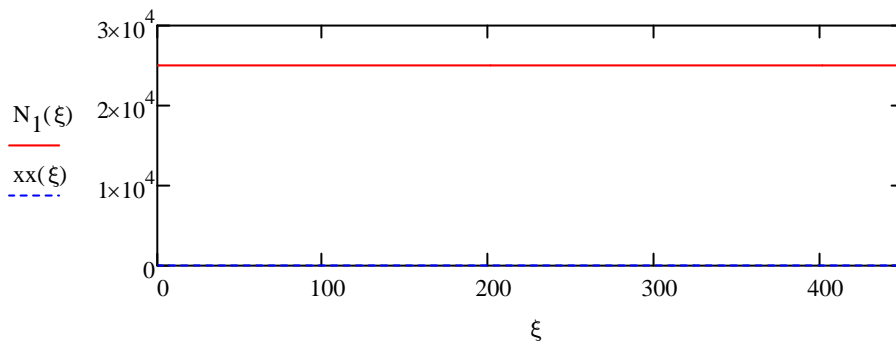
$$\underline{\underline{xx}}(\xi) := 0 \cdot J$$



Forza normale

La forza normale risulta data da:

$$N_1(\xi) := \begin{cases} 25 \cdot \text{kN} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 450 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Verifica a fatica

Sezione di verifica

La sezione più sollecitata risulta la "D". In essa agiscono una forza normale ed un momento flettente, che danno le seguenti distribuzioni di tensione, espressi in termini del sistema di riferimento locale preso sulla sezione.

Forza normale

Stato di tensione costante sulla sezione e dato da:

$$\sigma_{zN} := \frac{N_1(350)}{A_2} \quad \sigma_{zN} = 35.368 \text{ MPa}$$

Momento flettente

stato di tensione ad andamento lineare sulla sezione (formula di Navier), dato da:

$$\sigma_{zMx} := \frac{M_x(350)}{J_{x2}} \cdot y$$

Si ottengono in tal modo i seguenti valori massimi e minimi:

$$\sigma_{zMxmax} := \frac{M_{x1}(350)}{J_{x2}} \cdot \frac{\phi_2}{2} \quad \sigma_{zMxmax} = 56.588 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zMxmin} := -\frac{M_{x1}(350)}{J_{x2}} \cdot \frac{\phi_2}{2} \quad \text{ovvero} \quad \sigma_{zMxmin} := -\sigma_{zMxmax}$$

$$\sigma_{zMxmin} = -56.588 \text{ MPa}$$

Ciclo di tensione nominale

In seguito alla rotazione dell'albero, un qualunque punto materiale posto sulla relativa superficie esterna di quest'ultimo risulta soggetto ad un ciclo di tensione nominale che presenta i seguenti valori massimi e minimi di tensione:

$$\sigma_{zmax} := \sigma_{zN} + \sigma_{zMxmax}$$

$$\sigma_{zmin} := \sigma_{zN} + \sigma_{zMxmin}$$

per cui si ottengono i seguenti parametri caratteristici del ciclo di tensione affaticante

$$\Delta\sigma := \sigma_{zmax} - \sigma_{zmin} \quad \text{ovvero} \quad \Delta\sigma := 2 \cdot \sigma_{zMxmax}$$

$$\sigma_m := \frac{\sigma_{zmax} + \sigma_{zmin}}{2} \quad \text{ovvero} \quad \sigma_m := \sigma_{zN}$$

da cui:

$$\Delta\sigma = 113.177 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = 35.368 \text{ MPa}$$

Verifica a fatica

Dato che la tensione media è diversa da zero, si rende necessario introdurre la correzione di Sodeberg, per ridursi ad un ciclo equivalente con tensione media nulla:

$$\Delta\sigma_{\text{eq}} := \Delta\sigma \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_s - \sigma_m} \qquad \Delta\sigma_{\text{eq}} = 125.899 \text{ MPa}$$

Il valore ottenuto deve essere moltiplicato per K_t per tener conto della locale amplificazione delle tensioni dovuta alla variazione di diametro, e confrontata con il limite di fatica:

$$\Delta\sigma_{\text{eq}} \cdot K_t = 2.518 \times 10^8 \text{ Pa} \quad < \quad \Delta\sigma_L = 400 \text{ MPa}$$

La sezione è pertanto verificata a fatica, con coefficiente di sicurezza:

$$\frac{\Delta\sigma_L}{\Delta\sigma_{\text{eq}} \cdot K_t} = 1.589$$

QUESITO 4 (punti 6)

Data la colonna verticale mostrata nella Fig. 4.1, realizzata in acciaio e recante una massa alla sommità, determinare, trascurando la massa propria della trave:

- il massimo valore ammissibile della massa, per una tensione di snervamento del materiale della colonna pari a 250 MPa ed a 500 MPa
- il valore stimato della prima frequenza propria del sistema massa-trave, in presenza della massima massa ammissibile nei due suddetti casi

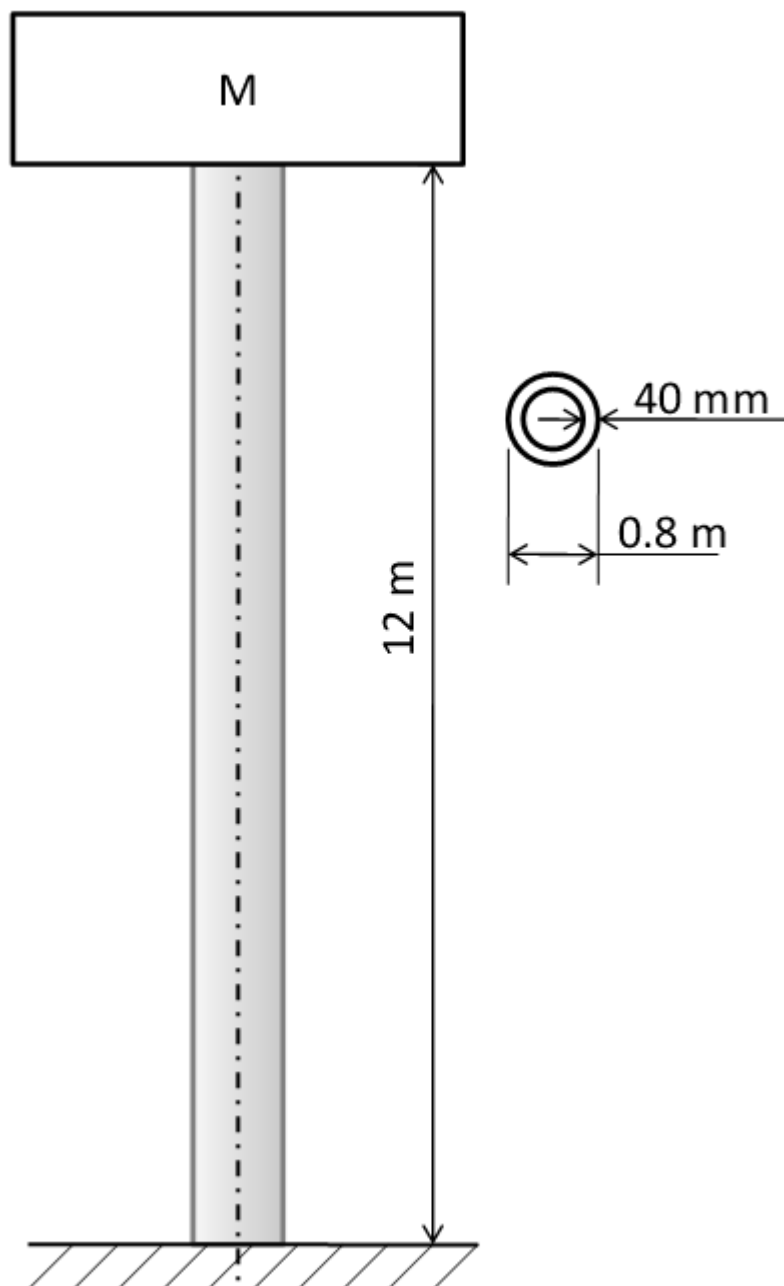


Fig. 4.1

Svolgimento

La colonna viene assimilata ad una trave a mensola incastrata alla base, secondo lo schema di Fig. 4.2 .

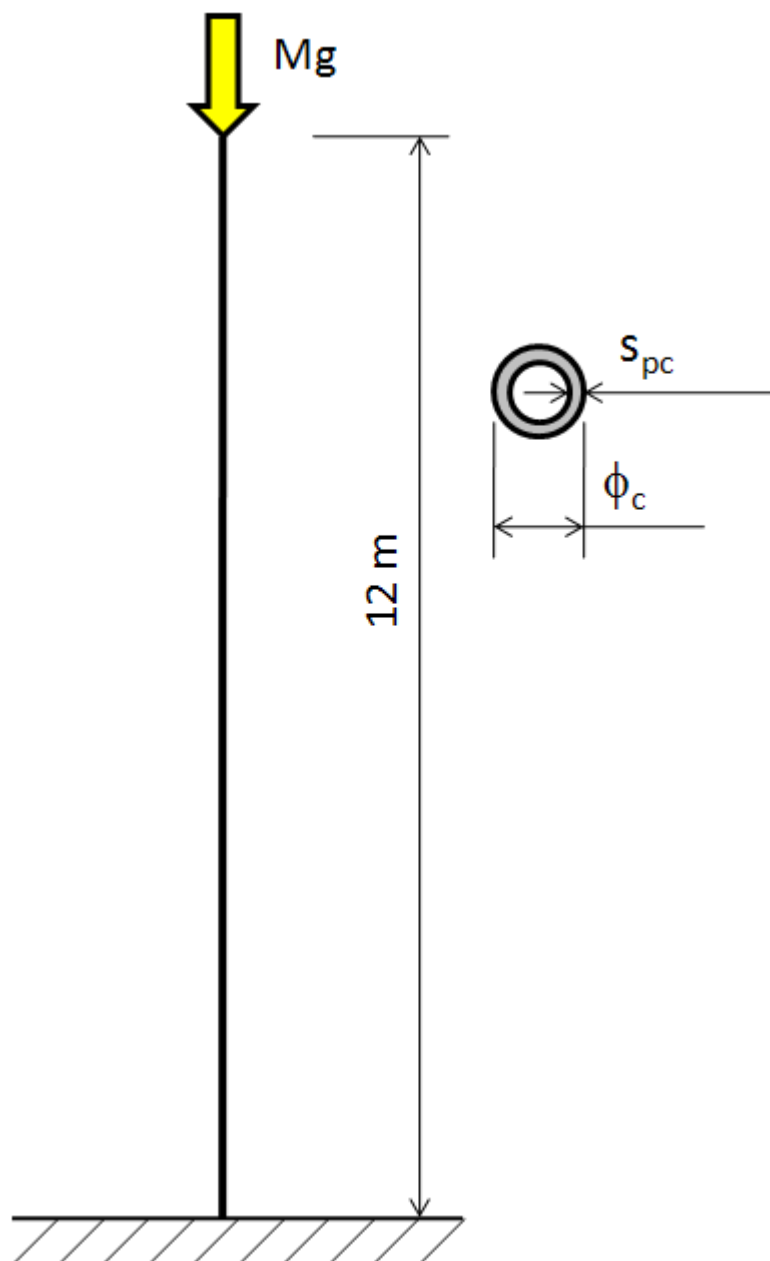


Fig. 4.2

Di seguito si riportano i valori delle principali grandezze, come risultanti dalla Fig. 1.1.

$$\phi_c := 0.8\text{-m} \quad s_{pc} := 40\text{-mm} \quad \sigma_{s1} := 250\text{-MPa} \quad \sigma_{s2} := 500\text{-MPa}$$

$$L_0 := 12\text{-m}$$

Proprietà della sezione

Le principali proprietà della sezione sono:

$$A := \frac{\pi \cdot [\phi_c^2 - (\phi_c - 2 \cdot s_{pc})^2]}{4} \quad A = 0.096 \text{ m}^2$$

$$J_{xx} := \frac{\pi \cdot [\phi_c^4 - (\phi_c - 2 \cdot s_{pc})^4]}{64} \quad J_x = 6.915 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Calcolo massimo valore ammissibile per la massa

Il cedimento della struttura data può avvenire per due meccanismi:

- collasso plastico
- instabilità

Nel seguito vengono calcolati i valori limite che la massa posta alla sommità può assumere al fine di causare il cedimento secondo i due meccanismi ipotizzati.

Collasso plastico

La colonna è soggetta ad una forza normale di valore uniforme e pari ad Mg . Lo stato di tensione che ne consegue è dato da:

$$\sigma_z := \frac{M \cdot g}{A}$$

La condizione limite si ha per:

$$\sigma_z := \sigma_s$$

Per cui si ottiene, per il massimo valore possibile per la massa:

$$M := \frac{\sigma_s \cdot A}{g}$$

da cui:

$$M_{\max 1} := \frac{\sigma_{s1} \cdot A}{g} \quad \text{per} \quad \sigma_s := 250 \cdot \text{MPa} \quad M_{\max 1} = 2.435 \times 10^6 \text{ kg}$$

$$M_{\max 2} := \frac{\sigma_{s2} \cdot A}{g} \quad \text{per} \quad \sigma_s := 500 \cdot \text{MPa} \quad M_{\max 2} = 4.869 \times 10^6 \text{ kg}$$

Instabilità dell'equilibrio

La trave, incastrata alla base, presenta una lunghezza libera effettiva di flessione pari a $2 \cdot L_0$:

$$L_{\text{lib}} := 2 \cdot L_0$$

Il valore del carico critico è pari a:

$$P_{\text{cr}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{L_{\text{lib}}^2}$$

Per cui si ottiene un valore massimo ammissibile per la massa dato da:

$$M_{\text{cr}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{L_{\text{lib}}^2 \cdot g} \qquad M_{\text{cr}} = 2.537 \times 10^6 \text{ kg}$$

Valore massimo ammissibile per la massa

Snervamento = 250 MPa

In questo caso, il collasso plastico si verifica per un valore della massa minore di quello che determina l'instabilità dell'equilibrio, per cui:

$$M_{\text{mx}250} := \min(M_{\text{cr}}, M_{\text{max}1}) \qquad M_{\text{mx}250} = 2.435 \times 10^6 \text{ kg}$$

Snervamento = 500 MPa

In questo caso, il collasso plastico si verifica per un valore della massa maggiore di quello che determina l'instabilità dell'equilibrio, per cui:

$$M_{\text{mx}500} := \min(M_{\text{cr}}, M_{\text{max}2}) \qquad M_{\text{mx}500} = 2.537 \times 10^6 \text{ kg}$$

Calcolo prima frequenza propria

Il valore della prima frequenza propria può essere stimato assimilando la trave ad una molla che reagisca elasticamente ad uno spostamento orizzontale della sua estemità.

Il relativo valore di rigidità può essere ottenuto come rapporto tra un carico qualsiasi applicato all'etremo superiore in direzione orizzontale (ad esempio, di valore unitario) ed il relativo spostamento.

E' noto che, per una trave a mensola sollecitata nel modo descritto (Fig. 4.3) risulta:

$$\delta := \frac{P \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot J_x}$$

da cui:

$$\frac{P}{\delta} := \frac{3 \cdot E \cdot J_x}{L_0^3}$$

$$k := \frac{3 \cdot E \cdot J_x}{L_0^3}$$

$$k = 2.521 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

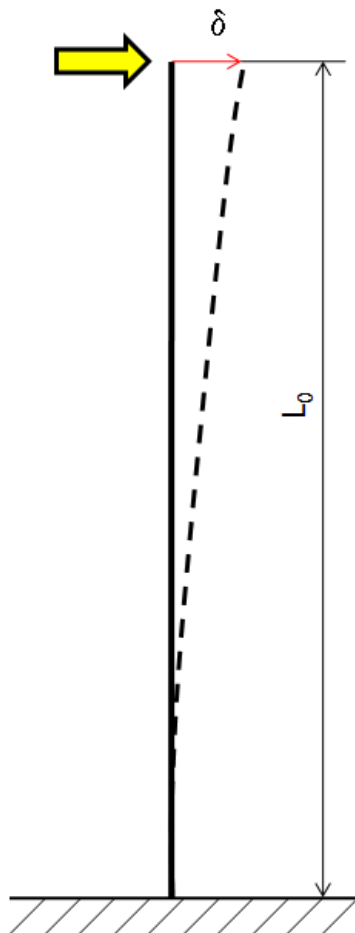


Fig. 4.3

La frequenza propria risulta pertanto data da:

Snervamento = 250 MPa

$$f_{250} := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M_{mx250}}} \qquad f_{250} = 0.162 \frac{1}{s}$$

Snervamento = 500 MPa

$$f_{500} := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M_{mx500}}} \qquad f_{500} = 0.159 \frac{1}{s}$$

E' da notare che la eventuali vibrazioni in altre direzioni, ad esempio in direzione assiale (Fig. 4.4), avvengono a frequenze superiori in quanto la trave risulta, per questo tipo di spostamenti, molto più rigida, il relativo valore di rigidità essendo dato da:

$$\frac{N}{\delta_A} := \frac{E \cdot A}{L_0}$$

$$k_A := \frac{E \cdot A}{L_0}$$

$$k_A = 1.671 \times 10^9 \frac{N}{m}$$

e la frequenza propria per vibrazioni assiali:

$$f_{A500} := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k_A}{M_{mx500}}}$$

$$f_{A500} = 4.085 \frac{1}{s}$$

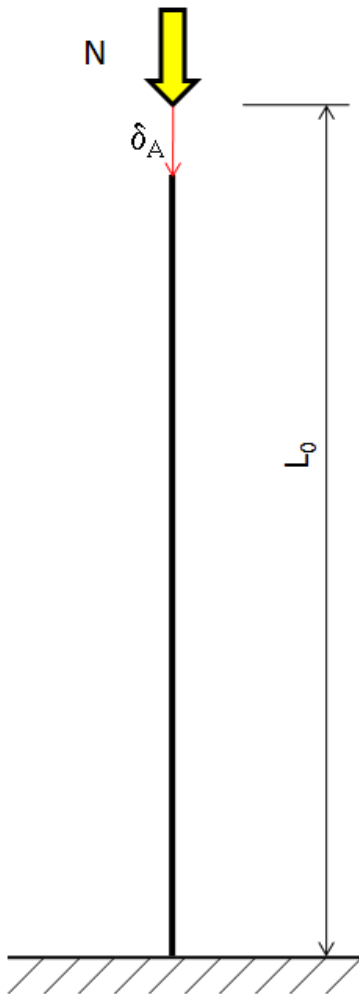


Fig. 4.4