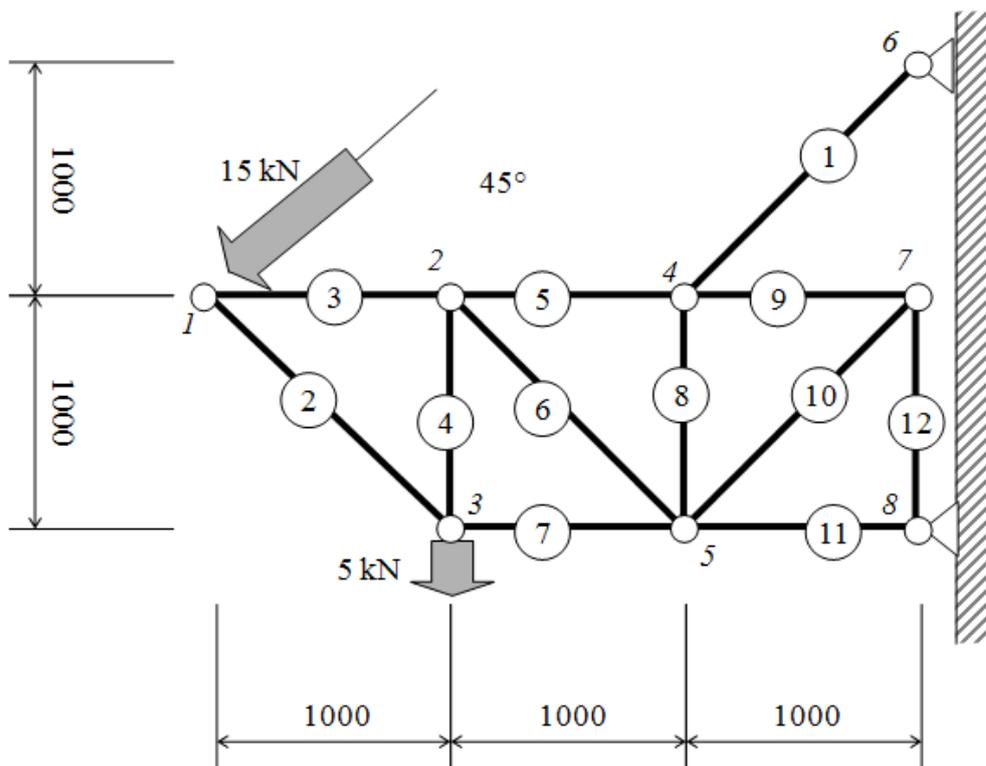


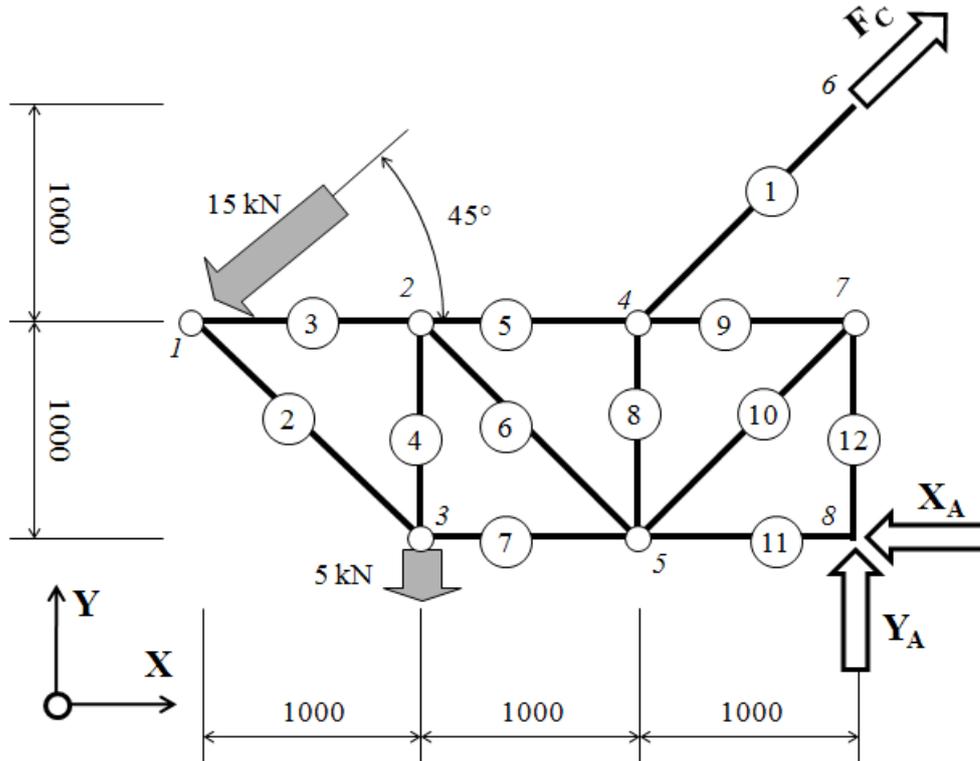
Quesito 1 (Punti 8)

Data la travatura reticolare mostrata nella Figura 1, determinare le forze agenti in tutte le aste e le reazioni vincolari.



Calcolo reazioni vincolari esterne

La struttura è esternamente isostatica. Per il calcolo delle reazioni vincolari esterne si impiegano le equazioni cardinali della statica. Si fissa preliminarmente un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e si traccia un diagramma di corpo libero sostituendo i vincoli con le relative reazioni vincolari incognite.



Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in KN, lunghezze in mm):

$$X_A := 0 \quad Y_A := 0 \quad F_C := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow -X_A - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_A + F_C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

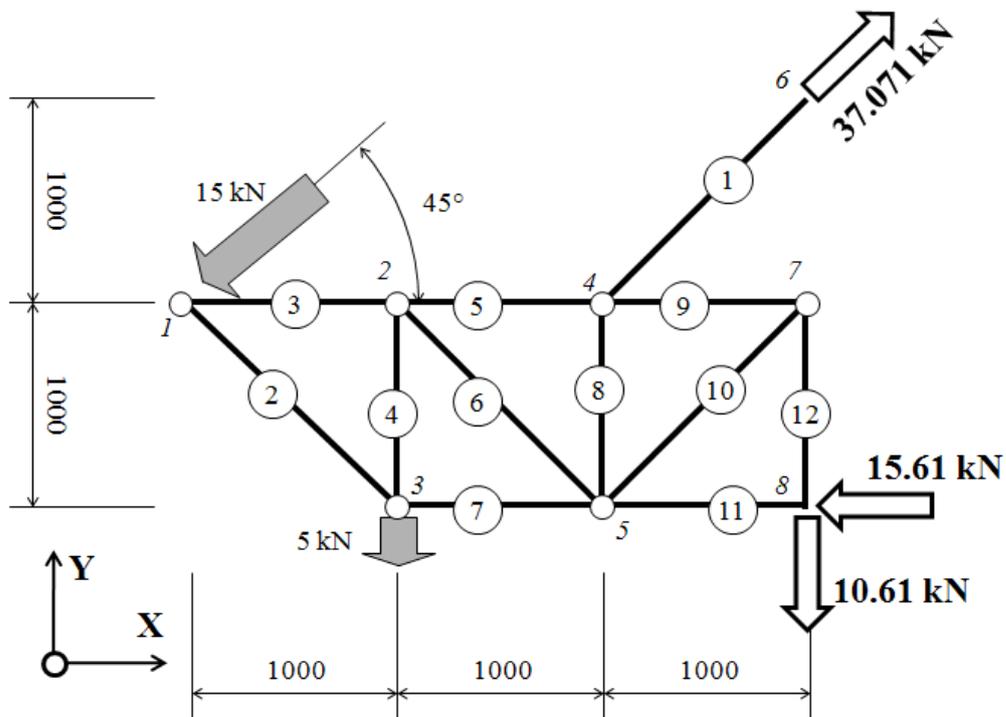
$$M_{zA} = 0 \rightarrow -F_C \cdot 1000 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 2000 + 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3000 + 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1000 = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ F_C \end{pmatrix} := \text{Find}(X_A, Y_A, F_C)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in KN):

$$X_A = 15.61 \quad Y_A = -10.61 \quad F_C = 37.07$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero dell'intera struttura, con tutte le forze esterne applicate



Calcolo delle forze normali nelle aste

Il calcolo delle forze normali agenti nelle aste viene condotto con il metodo dei nodi. Nella procedura è possibile partire da un qualsiasi nodo in cui convergano non più di 2 aste le cui forze normali siano incognite. Convenzionalmente, si assume per le forze normali incognite un verso corrispondente a quello di un'asta tesa.

Nodo 6

Dall'equilibrio del nodo & si ottiene immediatamente:

$$N_1 := 37.071$$

Nodo 1

Sistema di equazioni

$$N_2 := 0 \quad N_3 := 0$$

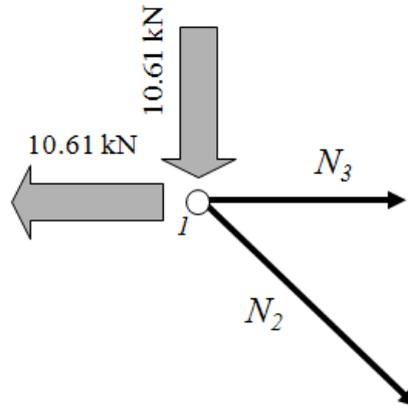
Given

$$N_3 + N_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 10.61 = 0$$

$$-N_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 10.61 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_2, N_3)$$

$$N_2 = -15 \quad N_3 = 21.22$$



Nodo 3

Sistema di equazioni

$$N_4 := 0 \quad N_7 := 0$$

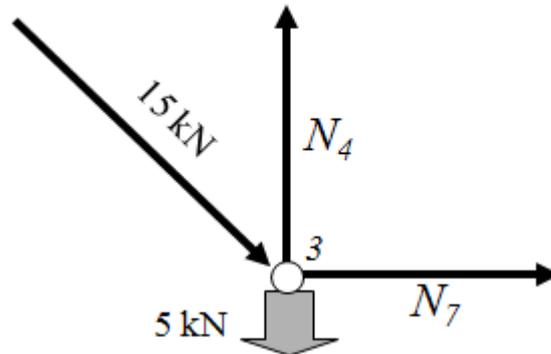
Given

$$N_4 - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 = 0$$

$$N_7 + 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_7 \\ N_4 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_7, N_4)$$

$$N_7 = -10.61 \quad N_4 = 15.61$$



Nodo 2

Sistema di equazioni

$$N_5 := 0 \quad N_6 := 0$$

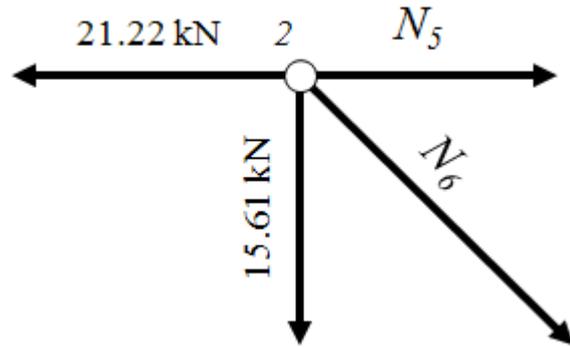
Given

$$N_5 + N_6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 21.22 = 0$$

$$N_6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 15.61 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_5 \\ N_6 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_5, N_6)$$

$$N_5 = 36.83 \quad N_6 = -22.08$$



Nodo 4

Sistema di equazioni

$$N_8 := 0 \quad N_9 := 0$$

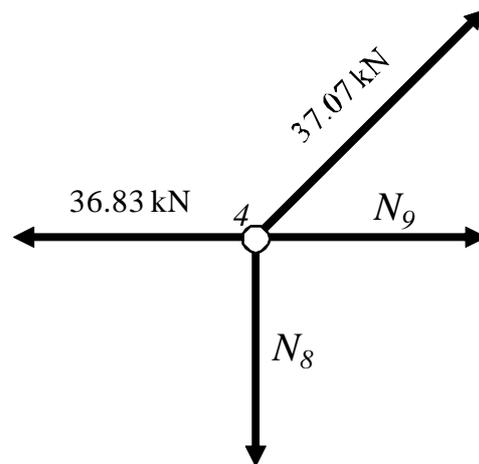
Given

$$N_9 + 37.07 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 36.83 = 0$$

$$-N_8 + 37.07 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_8 \\ N_9 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_8, N_9)$$

$$N_8 = 26.21 \quad N_9 = 10.62$$



Nodo 8

Sistema di equazioni

$$N_{11} := 0 \quad N_{12} := 0$$

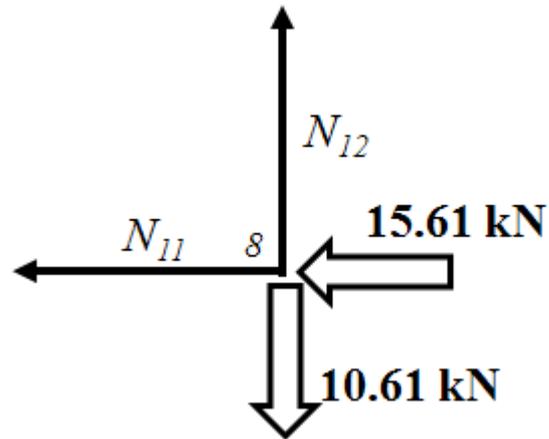
Given

$$-N_{11} - 15.61 = 0$$

$$N_{12} - 10.61 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{12} \end{pmatrix} := \text{Find}(N_{11}, N_{12})$$

$$N_{11} = -15.61 \quad N_{12} = 10.61$$



Nodo 5

Sistema di equazioni

$$N_{10} := 0$$

Given

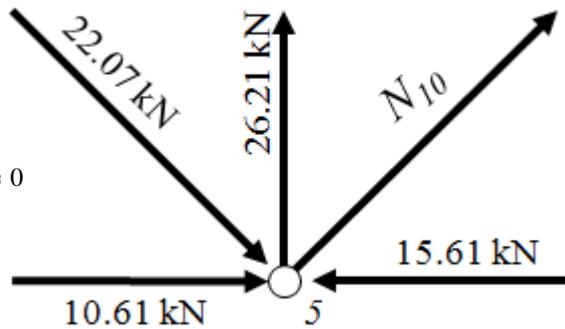
$$N_{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 15.61 + 22.07 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10.61 = 0$$

$$N_{10} := \text{Find}(N_{10})$$

$$N_{10} = -15$$

Verifica equilibrio in direzione Y

$$N_{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 26.21 - 22.07 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

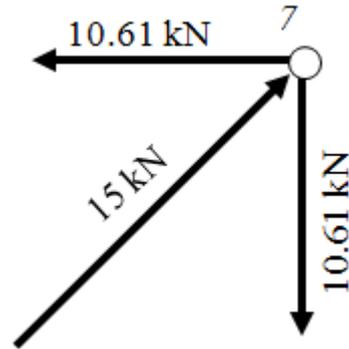


Verifica finale equilibrio nodo 7

Si verifica l'equilibrio del nodo 7, sotto l'azione di tutte le forze ad esso applicate, calcolando le risultanti in direzione "x" ed "y" e verificando la loro uguaglianza a 0.

$$15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 10.61 = 0$$

$$15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 10.61 = 0$$



Quesito 2a (Punti 16)

Dato il dispositivo mostrato in Figura 2, determinare le reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione..

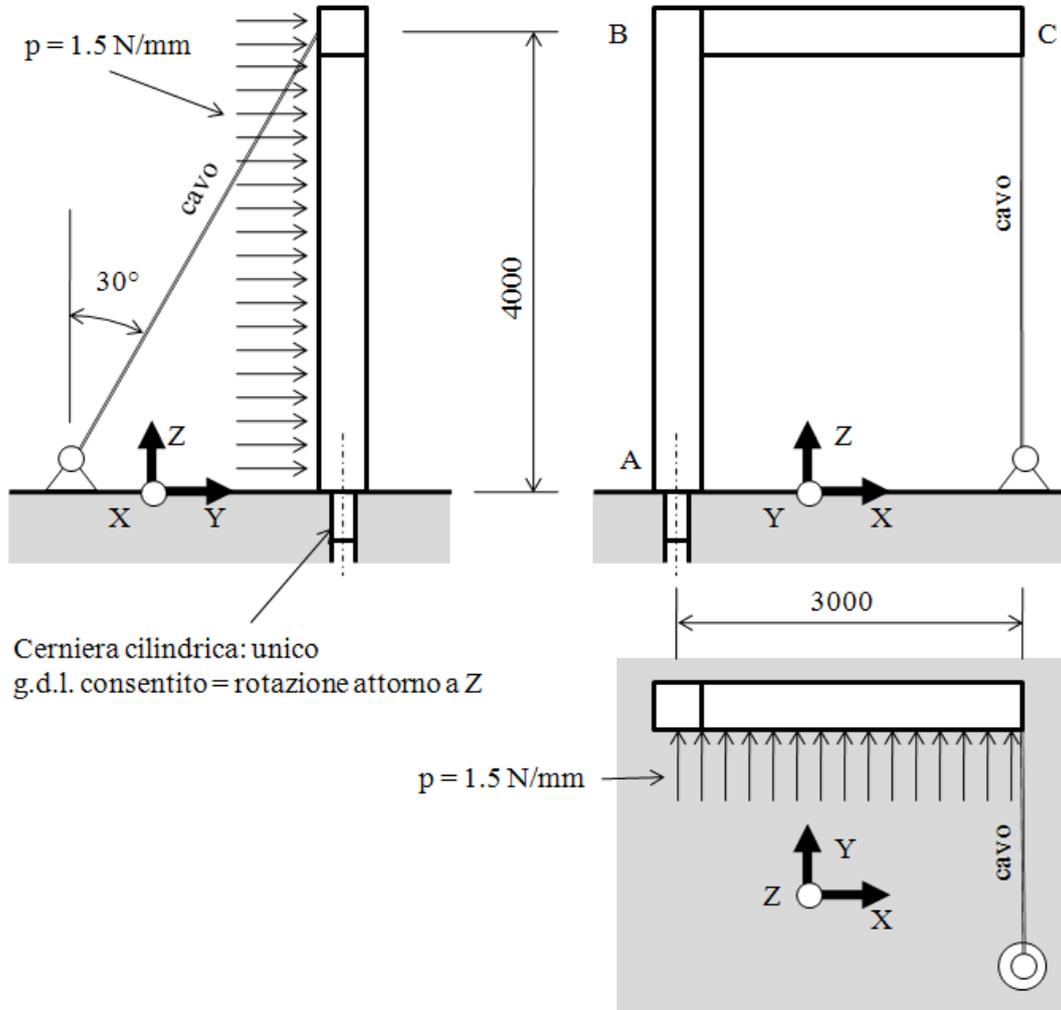
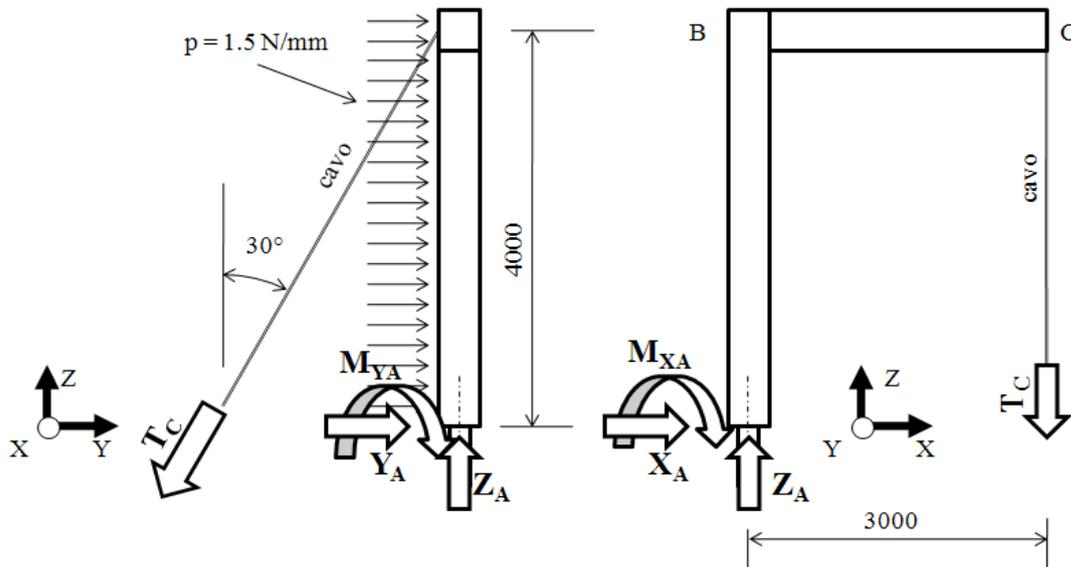


Figura 2

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente isostatica, per cui le reazioni vincolari possono essere valutate tramite le 6 equazioni cardinali della statica.

A tale scopo, fissato preliminarmente un sistema di riferimento cartesiano generale "X-Y-Z", si procede in primo luogo a classificare i vincoli, sostituendoli quindi con le relative reazioni vincolari incognite. Si ottiene così lo schema di calcolo riportato nella Figura.



$$p_0 := 1.5$$

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in KN, lunghezze in mm, momenti calcolati rispetto al polo A):

$$X_A := 0 \quad Y_A := 0 \quad Z_A := 0 \quad M_{XA} := 0 \quad M_{YA} := 0 \quad T_C := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow X_A = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_A + p_0 \cdot 7 - T_C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$R_z = 0 \rightarrow Z_A - T_C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$MR_{XA} = 0 \rightarrow M_{XA} - p_0 \cdot 4 \cdot 2 - p_0 \cdot 3 \cdot 4 + T_C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 4 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$MR_{YA} = 0 \rightarrow M_{YA} + T_C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3 = 0$$

$$MR_{ZA} = 0 \rightarrow -T_C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3 + p_0 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

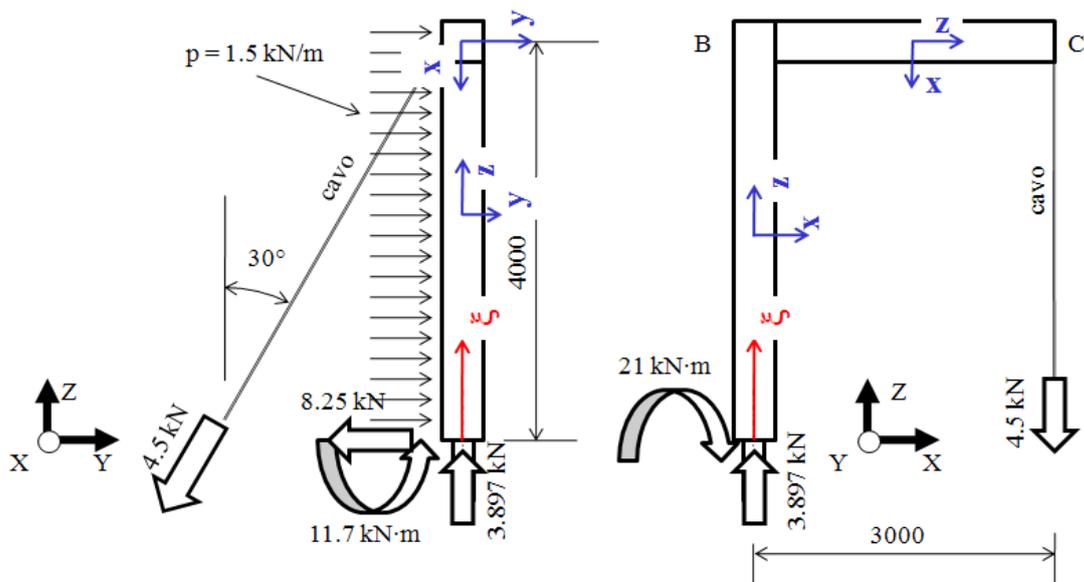
$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ M_{X_A} \\ M_{Y_A} \\ T_C \end{pmatrix} := \text{Find}(X_A, Y_A, Z_A, M_{X_A}, M_{Y_A}, T_C)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in KN):

$$X_A = 0 \qquad Y_A = -8.25 \qquad Z_A = 3.897$$

$$M_{X_A} = 21 \qquad M_{Y_A} = -11.691 \qquad T_C = 4.5$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero dell'intera struttura, con tutte le forze esterne applicate



Tracciamento diagrammi caratteristiche di sollecitazione

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce la coordinata curvilinea ξ (origine nel punto A) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento corrente x-y-z per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, con l'asse z orientato nella direzione delle ξ positive e l'asse y verso il basso, come mostrato in figura

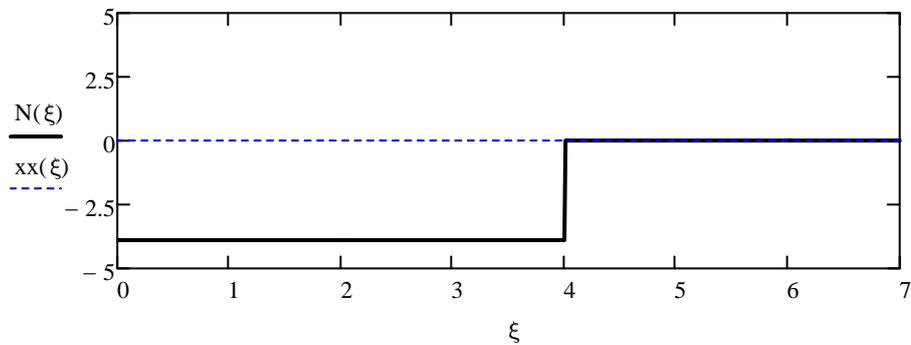
Forza Normale

La forza normale è data da:

$$\xi := 0, 0.01 \dots 7$$

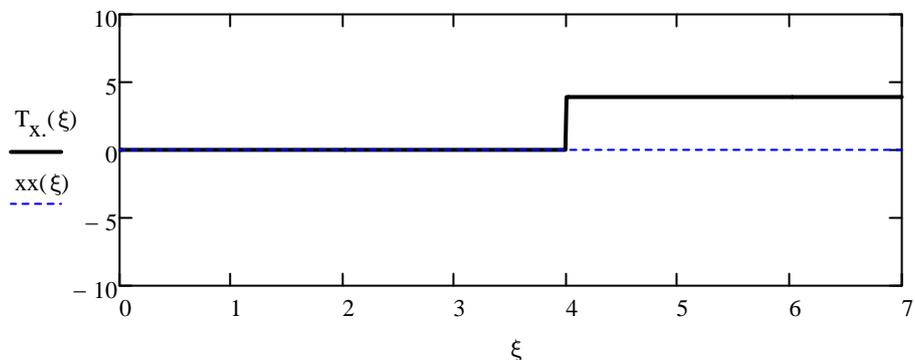
(questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0)

$$N(\xi) := \begin{cases} -3.897 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



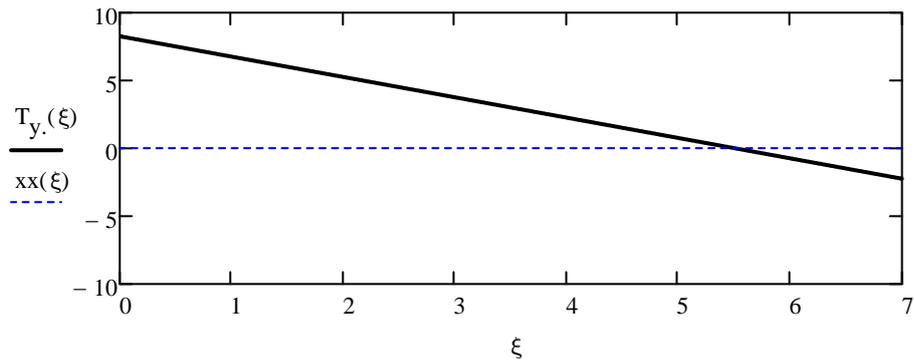
Taglio T_x

$$T_x(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 4 \\ 4.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & \text{if } 4 \leq \xi \leq 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



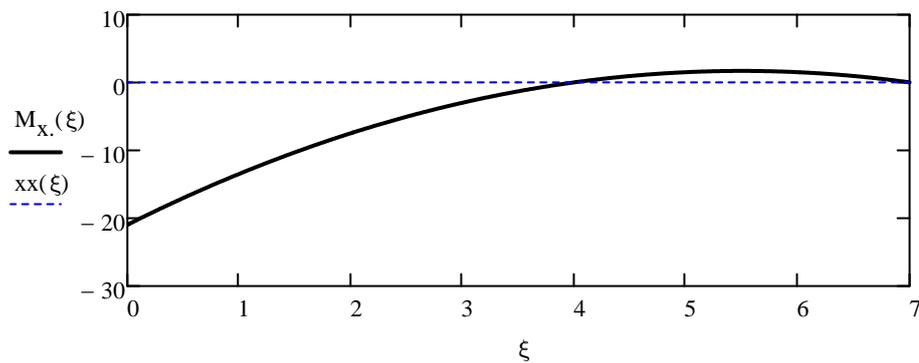
Taglio T_y

$$T_y(\xi) := \begin{cases} 8.25 - p_0 \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



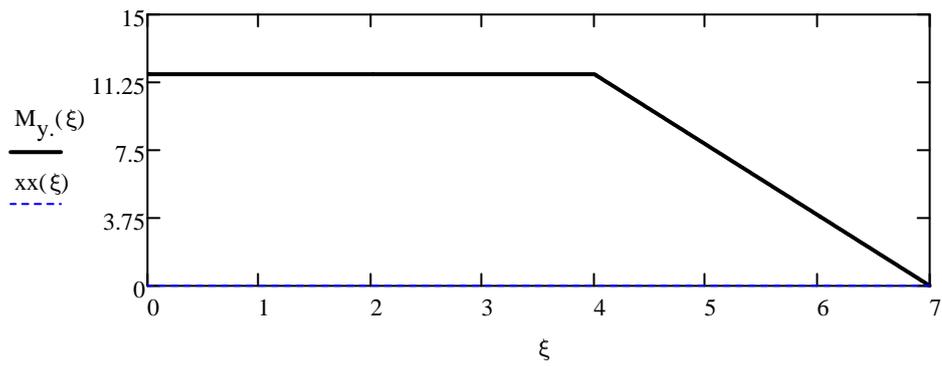
Momento M_x

$$M_x(\xi) := \begin{cases} -21 + 8.25 \cdot \xi - p_0 \cdot \frac{\xi^2}{2} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 4 \\ -p_0 \cdot \frac{(7 - \xi)^2}{2} + 4.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (7 - \xi) & \text{if } 4 \leq \xi \leq 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



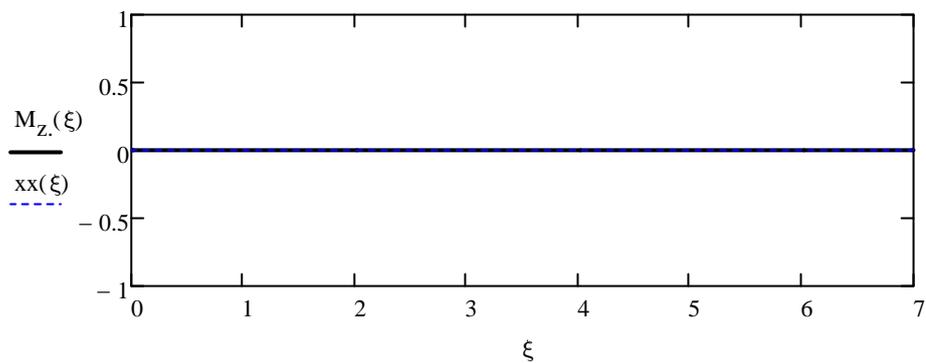
Momento M_y

$$M_y(\xi) := \begin{cases} 4.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 4 \\ 4.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (7 - \xi) & \text{if } 4 \leq \xi \leq 7 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M_z

$$M_z(\xi) := \begin{cases} 4.5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3 - p_0 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Quesito 2b (alternativo al quesito 2a) (Punti 13)

Data la struttura mostrata in Figura 3, determinare le reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione.

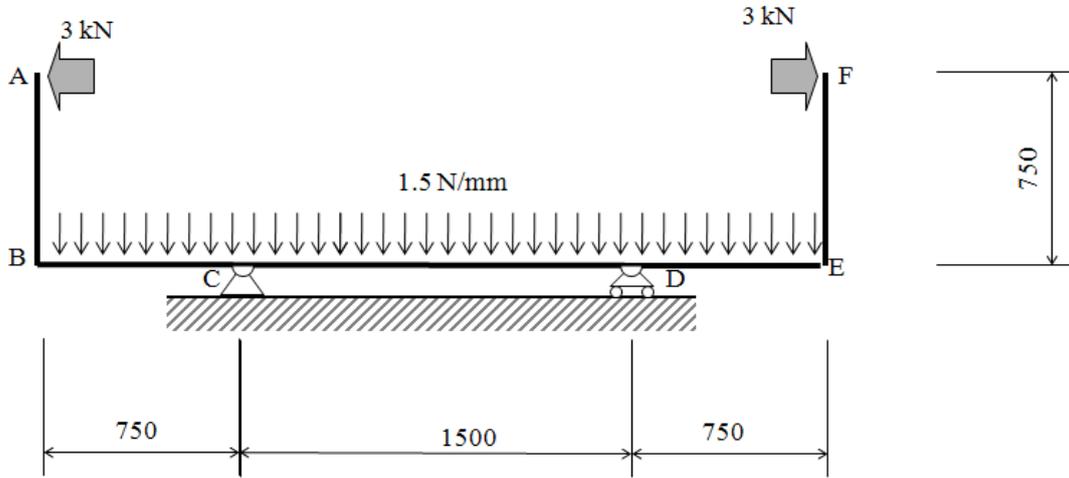
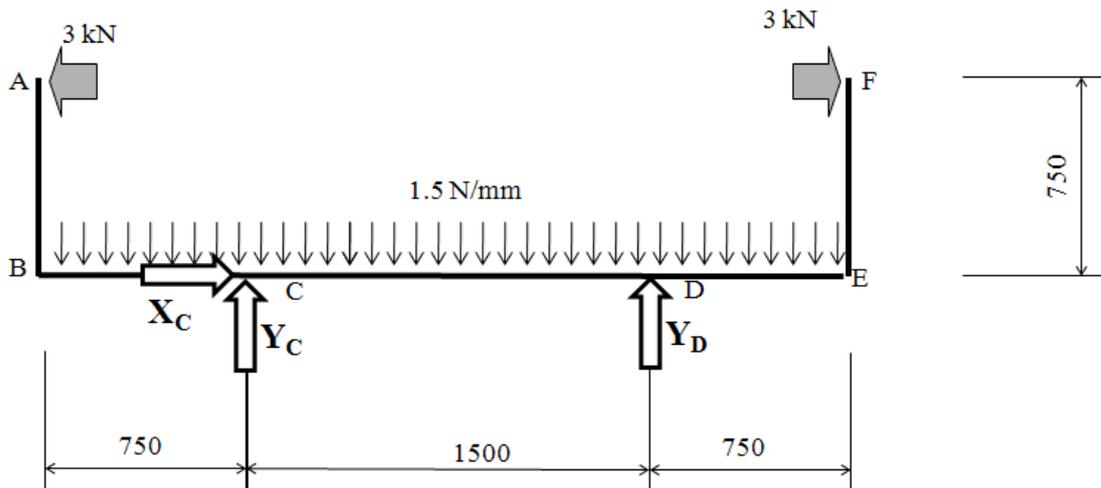


Fig. 3

Calcolo reazioni vincolari esterne

La struttura è esternamente isostatica. Per il calcolo delle reazioni vincolari esterne si impiegano le equazioni cardinali della statica. Si fissa preliminarmente un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e si traccia un diagramma di corpo libero sostituendo i vincoli con le relative reazioni vincolari incognite.



Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in N, lunghezze in mm, momenti calcolati rispetto al polo C):

$$X_C := 0 \quad Y_C := 0 \quad Y_D := 0$$

Given

$$R_x = 0 \text{ --->} \quad X_C = 0$$

$$R_y = 0 \text{ --->} \quad Y_C + Y_D - 1.5 \cdot 3000 = 0$$

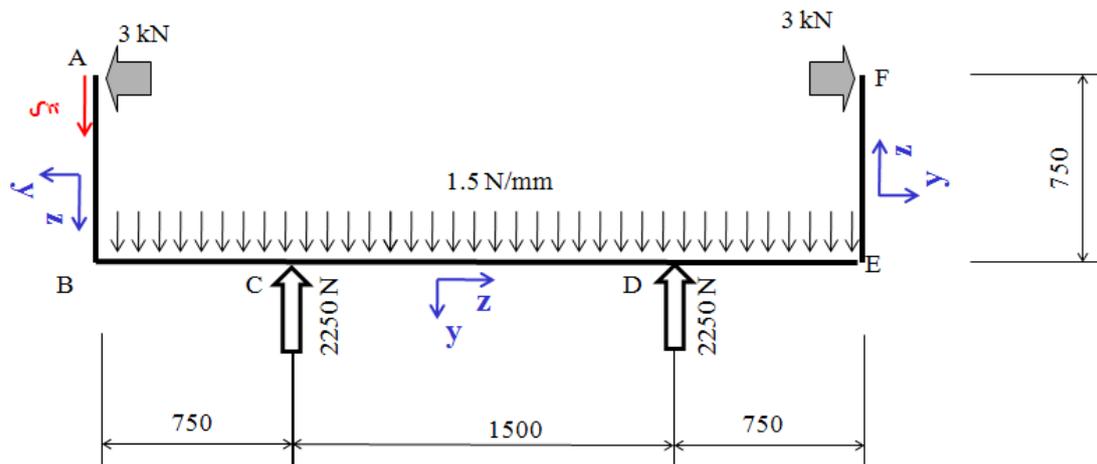
$$M_z = 0 \text{ --->} \quad Y_D \cdot 1500 - 3000 \cdot 750 + 3000 \cdot 750 - 1.5 \cdot 3000 \cdot 750 = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Y_D \end{pmatrix} := \text{Find}(X_C, Y_C, Y_D)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in KN):

$$X_C = 0 \quad Y_C = 2250 \quad Y_D = 2250$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero dell'intera struttura, con tutte le forze esterne applicate



Tracciamento diagrammi caratteristiche di sollecitazione

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce la coordinata curvilinea ξ (origine nel punto A) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento corrente x-y-z, con l'asse z orientato nella direzione delle ξ positive e l'asse y come mostrato nella figura precedente.

Nelle figure seguenti, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono rappresentati per semplicità nella forma di diagramma cartesiano. Per comprenderli è sufficiente tenere presente che il punto C, ad esempio, corrisponde alla quota $\xi=1500$.

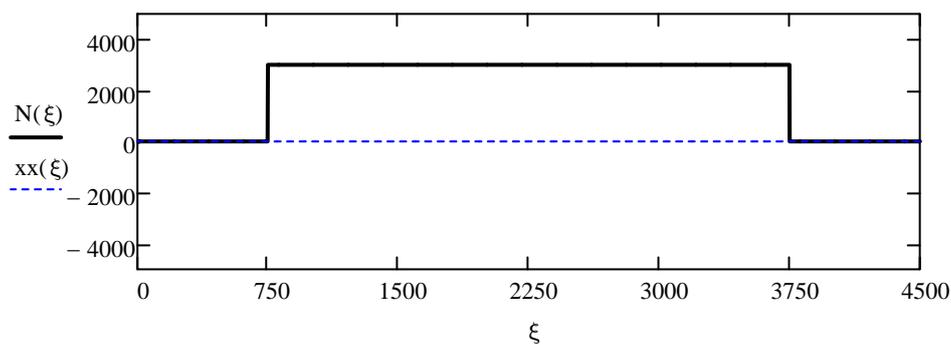
Forza Normale

La forza normale è data da:

$$\xi := 0, 1 \dots 4500$$

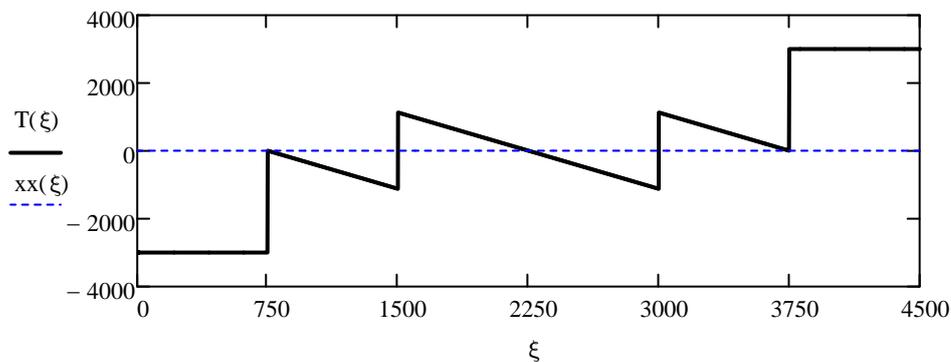
$$xx(\xi) := 0$$

$$N(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 750 \\ 3000 & \text{if } 750 \leq \xi \leq 3750 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



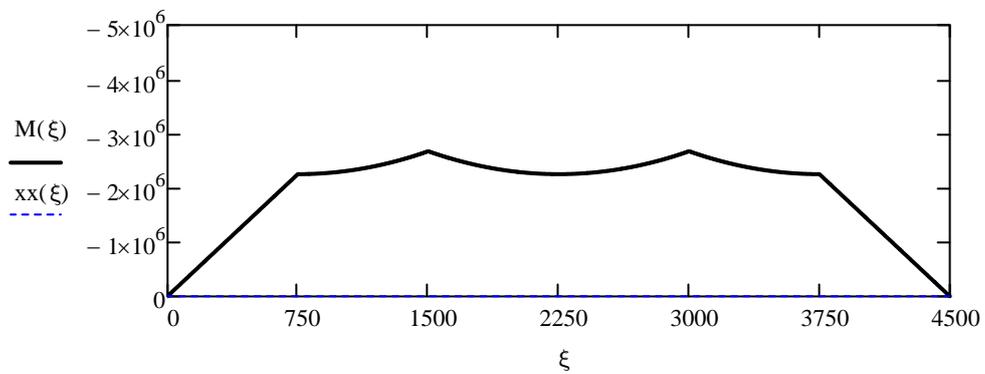
Taglio T

$$T(\xi) := \begin{cases} -3000 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 750 \\ -1.5 \cdot (\xi - 750) & \text{if } 750 \leq \xi \leq 1500 \\ [-1.5 \cdot (\xi - 750) + 2250] & \text{if } 1500 \leq \xi \leq 3000 \\ [1.5 \cdot (3750 - \xi)] & \text{if } 3000 \leq \xi \leq 3750 \\ 3000 & \text{if } 3750 \leq \xi \leq 4500 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M

$$M(\xi) := \begin{cases} -3000 \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq 750 \\ -3000 \cdot 750 - 1.5 \cdot \frac{(\xi - 750)^2}{2} & \text{if } 750 \leq \xi \leq 1500 \\ -3000 \cdot 750 - 1.5 \cdot \frac{(\xi - 750)^2}{2} + 2250 \cdot (\xi - 1500) & \text{if } 1500 \leq \xi \leq 3000 \\ -3000 \cdot 750 - 1.5 \cdot \frac{(3750 - \xi)^2}{2} & \text{if } 3000 \leq \xi \leq 3750 \\ -3000 \cdot (4500 - \xi) & \text{if } 3750 \leq \xi \leq 4500 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Quesito 3 (Punti 3)

Calcolare la posizione orizzontale “ x_G ” del baricentro ed il valore del momento di inerzia rispetto all’asse principale centrale “Y” della sezione mostrata in Figura 4.

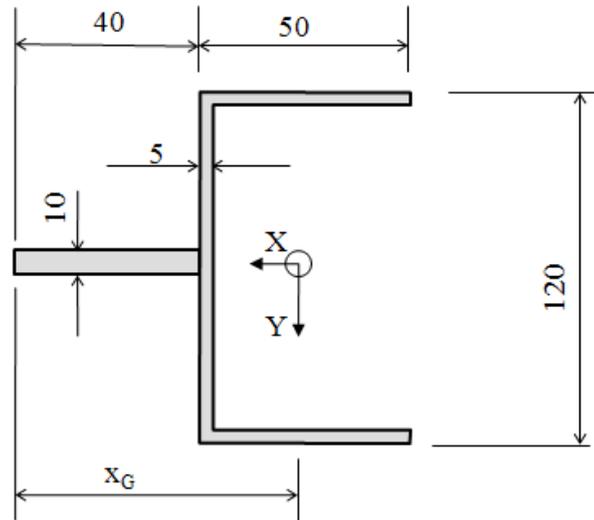
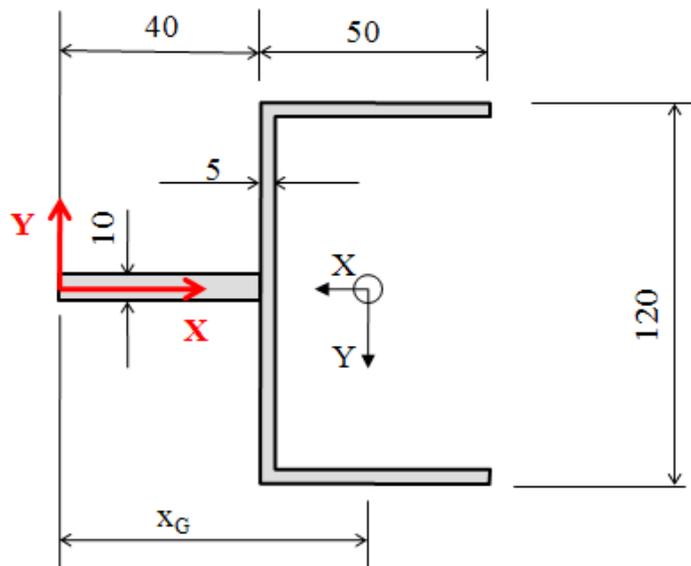


Fig. 4

Posizione del baricentro

Per il calcolo della posizione orizzontale del baricentro è opportuno fare uso di un SR ausiliario, collocato come in figura.

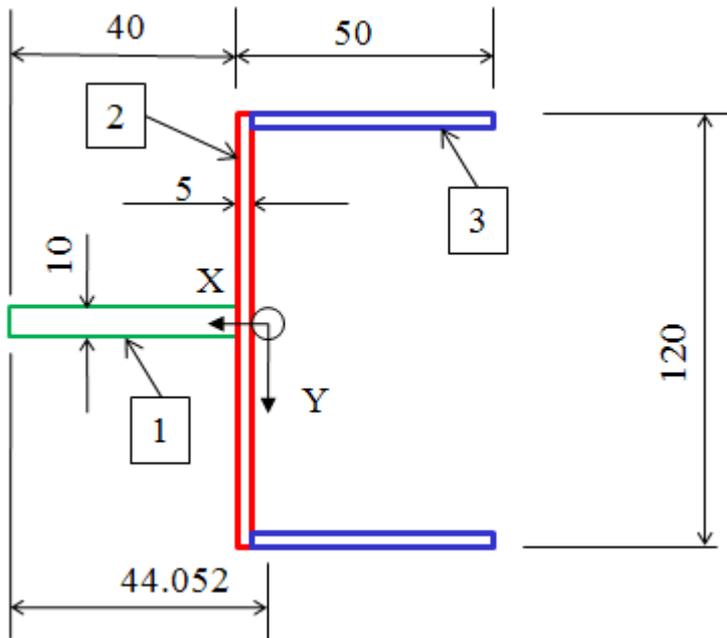


$$x_G := \frac{(40 \cdot 10) \cdot 20 + (120 \cdot 5) \cdot 42.5 + 2 \cdot (45 \cdot 5) \cdot 67.5}{(40 \cdot 10) + (120 \cdot 5) + 2 \cdot (45 \cdot 5)}$$

$$x_G = 44.052$$

Momento attorno all'asse Y

Il momento attorno all'asse centrale principale Y può essere valutato come somma del contributo delle diverse parti nelle quali può essere scomposta la figura.



$$J_{Y1} := \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 40^3 + (10 \cdot 40) \cdot (x_G - 20)^2$$

$$J_{Y2} := \frac{1}{12} \cdot 120 \cdot 5^3 + (120 \cdot 5) \cdot (x_G - 42.5)^2$$

$$J_{Y3} := 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 45^3 + (45 \cdot 5) \cdot (67.5 - x_G)^2 \right]$$

$$J_Y := J_{Y1} + J_{Y2} + J_{Y3}$$

$$J_Y = 6.108 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Quesito 4 (Punti 3)

La sezione mostrata in Fig. 5 è soggetta ad una forza normale $N = -180 \text{ kN}$. Calcolare quale valore massimo può essere assunto dai momenti flettenti M_x ed M_y (uguali tra loro) affinché il valore massimo (algebrico) della tensione normale sulla sezione stessa si mantenga $= 0$.

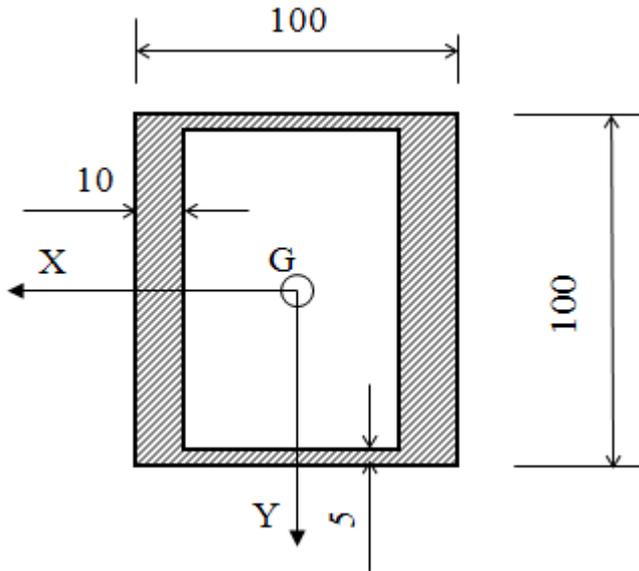


Fig. 5

Calcolo caratteristiche geometriche sezione

Data la doppia simmetria, il baricentro della figura proposta si trova al centro dei due lati.

$$H := 100$$

$$s_{p1} := 5$$

$$s_{p2} := 10$$

$$A_0 := H \cdot H - (H - 2 \cdot s_{p1}) \cdot (H - 2 \cdot s_{p2})$$

$$J_{x0} := \frac{H \cdot H^3}{12} - \frac{(H - 2 \cdot s_{p2}) \cdot (H - 2 \cdot s_{p1})^3}{12}$$

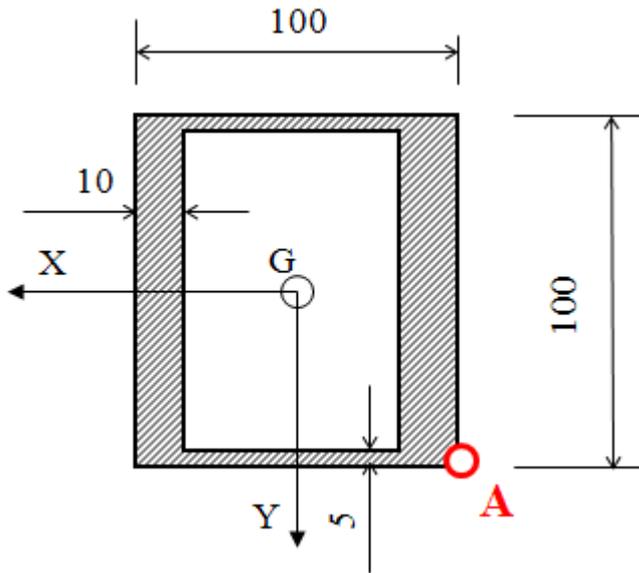
$$J_{y0} := \frac{H \cdot H^3}{12} - \frac{(H - 2 \cdot s_{p1}) \cdot (H - 2 \cdot s_{p2})^3}{12}$$

$$N_0 := -180000$$

$$H := 100$$

Calcolo del valore del momento richiesto

Il punto della sezione nel quale si verifica la massima tensione (in senso algebrico) è quello indicato con A nella figura seguente.



$$M_{\max} := \frac{\frac{-N_0}{A_0}}{\frac{H}{2} \cdot \left(\frac{1}{J_{x0}} + \frac{1}{J_{y0}} \right)}$$

$$M_{\max} = 2.519 \times 10^6$$