

CORSO DI
MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE

VERIFICA INTERMEDIA DEL 15-06-2009

ESERCIZIO 1 (Punti 9)

Data la struttura di sollevamento mostrata in Figura 1.1, calcolare lo spostamento verticale del punto *B* conseguente al sollevamento della massa *M* tramite la carrucola.

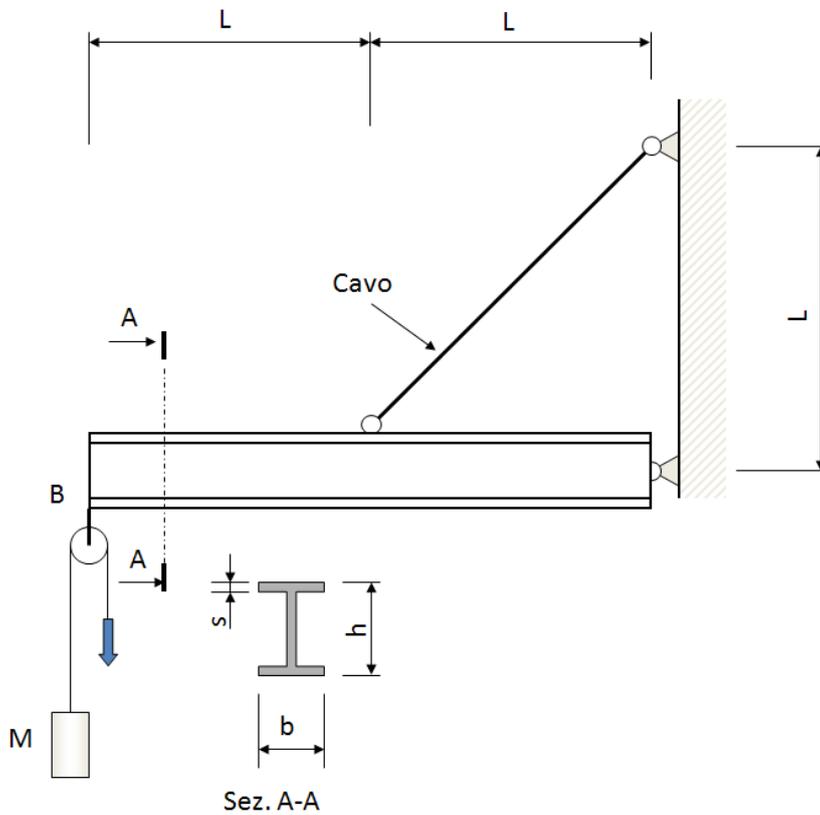


Fig. 1.1

Dati

$L := 900 \cdot \text{mm}$

$b := 80 \cdot \text{mm}$

$h := 110 \cdot \text{mm}$

$M := 125 \cdot \text{kg}$

$s := 2 \cdot \text{mm}$

$\phi := 7 \cdot \text{mm}$ Diametro cavo

$E := 210000 \cdot \text{MPa}$ Modulo Young acciaio

Svolgimento

La forza compressiva applicata alla trave per il sollevamento della massa M è pari a:

$$F := 2 \cdot M \cdot g \qquad F = 2.452 \times 10^3 \text{ N}$$

Si ottiene quindi il seguente schema di calcolo con tre reazioni vincolari incognite.

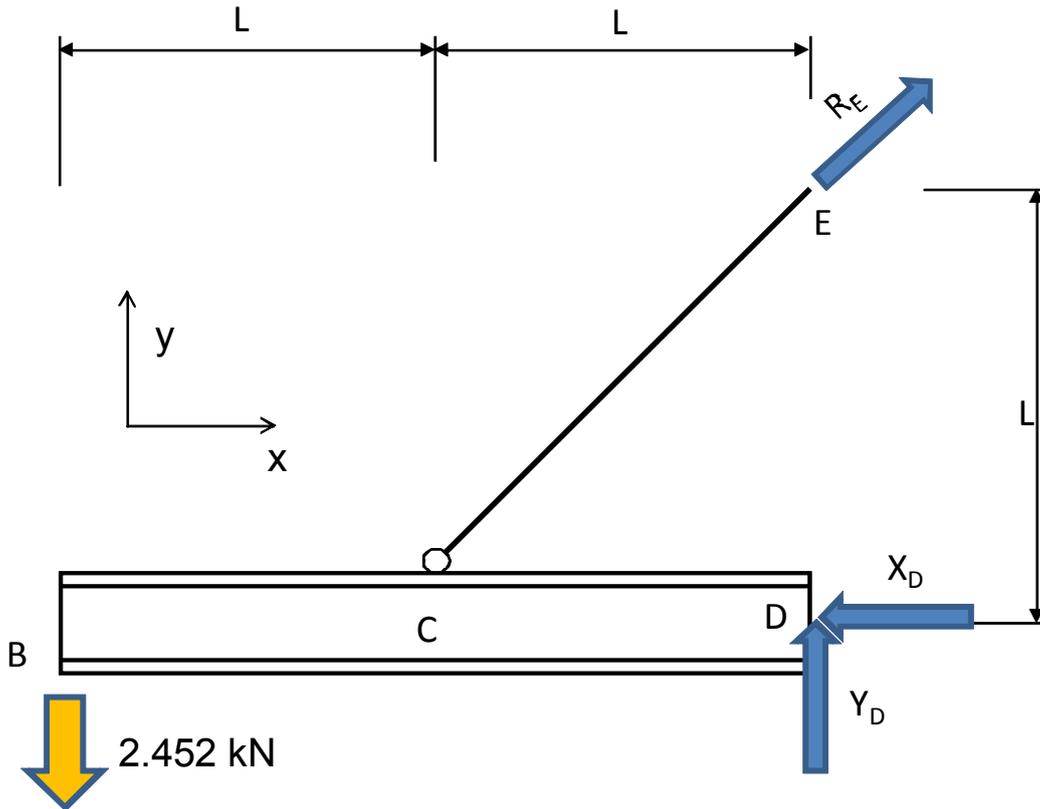


Fig. 1.2

Calcolo reazioni vincolari

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo D):

$$X_D := 0 \qquad Y_D := 0 \qquad R_E := 0$$

Given

$$R_x = 0 \text{ --->} \quad X_D - R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 0 \text{ --->} \quad Y_D + R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0$$

$$M_z D = 0 \text{ --->} \quad F \cdot 2 \cdot L - R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ R_E \end{pmatrix} := \text{Find}(X_D, Y_D, R_E)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in KN):

$$X_D = 4.903 \times 10^3 \text{ N} \quad Y_D = -2.452 \times 10^3 \text{ N} \quad R_E = 6.934 \times 10^3 \text{ N}$$

Caratteristiche sezioni e materiale

Le caratteristiche geometriche della sezione della trave sono date da:

$$A_1 := (h \cdot b) - 2 \cdot \frac{(b-s)}{2} \cdot (h-2 \cdot s) \quad A_1 = 532 \cdot \text{mm}^2$$

$$J_1 := \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \cdot \frac{(b-s)}{2} \cdot \frac{(h-2 \cdot s)^3}{12} \quad J_1 = 1.132 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

La sezione del cavo è invece pari a :

$$A_2 := \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} \quad A_2 = 38.485 \cdot \text{mm}^2$$

Caratteristiche di sollecitazione

Per il calcolo dello spostamento del punto B si ricorre al metodo del bilancio di energia. In base alle reazioni vincolari calcolate si ottiene il seguente diagramma di corpo libero (Fig. 1.3):

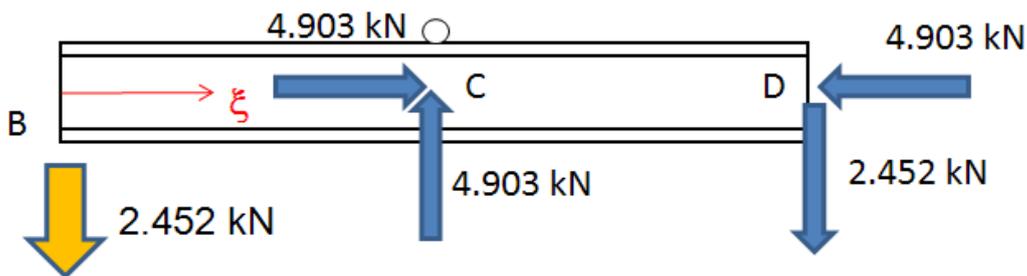


Fig. 1.3

dal quale si ricavano, per la trave orizzontale, i seguenti andamenti delle caratteristiche di sollecitazione in funzione della coordinata curvilinea ξ .

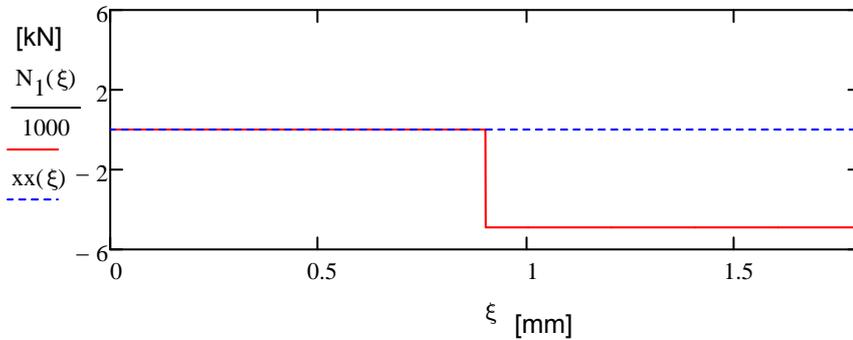
$$\xi := 0 \cdot \text{mm}, 1 \cdot \text{mm} \dots 2 \cdot L$$

$$xx(\xi) := 0$$

Forza normale

La forza normale risulta data da:

$$N_1(\xi) := \begin{cases} 0 \cdot N & \text{if } 0 \leq \xi \leq L \\ -4903 \cdot N & \text{otherwise} \end{cases}$$



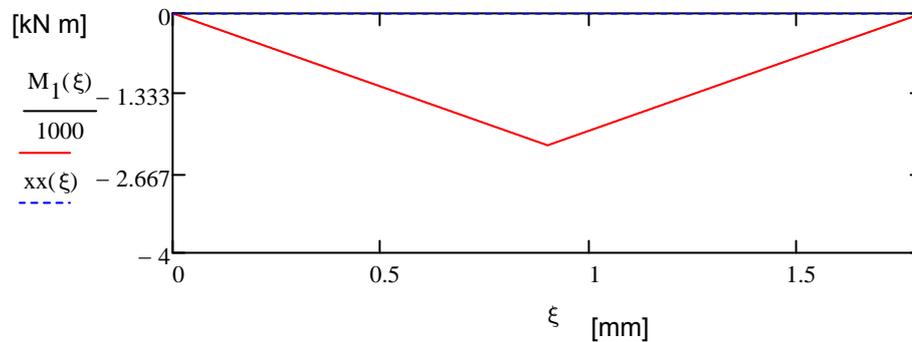
Taglio

Il taglio non viene tracciato, dato che il suo contributo allo spostamento di B è trascurabile:

Momento flettente

Il momento flettente risulta dato da:

$$M_1(\xi) := \begin{cases} -2.452 \cdot \text{kN} \cdot \xi & \text{if } 0 \leq \xi \leq L \\ -2.452 \cdot \text{kN} \cdot (2 \cdot L - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Forza normale cavo

Per quanto concerne il cavo, esso risulta soggetto alla sola forza normale data da:

$$N_c := 6.934 \cdot \text{kN}$$

Calcolo dello spostamento di B

Lo spostamento δ_B del punto B può essere calcolato uguagliando il lavoro compiuto dal carico F

$$L_F := \frac{F \cdot \delta_B}{2}$$

all'energia elastica immagazzinata all'interno della trave e della fune:

$$L_e := \int_0^{2 \cdot L} \frac{M(\xi)^2}{2E \cdot J_1} + \frac{N(\xi)^2}{2E \cdot A_1} d\xi + \int_0^{L \cdot \sqrt{2}} \frac{N_c^2}{2E \cdot A_2} d\xi$$

Da cui si ottiene:

$$\delta_B := \left[\int_0^{2 \cdot L} \frac{(M_1(\xi))^2}{E \cdot J_1} + \frac{(N_1(\xi))^2}{E \cdot A_1} d\xi + \int_0^{L \cdot \sqrt{2}} \frac{N_c^2}{E \cdot A_2} d\xi \right] \cdot \frac{1}{F}$$

$$\delta_B = 8.182 \cdot \text{mm}$$

ESERCIZIO 2 (Punti 9)

Calcolare il massimo valore della massa M che può essere sollevata tramite il dispositivo mostrato in Fig. 2.1. Non si consideri la resistenza del cavo orizzontale.

Dati:

$$L_0 := 2500\text{-mm} \quad B := 80\text{-mm} \quad \underset{\text{mm}}{H} := 110\text{-mm} \quad \underset{\text{mm}}{s} := 3\text{-mm}$$

$$\sigma_s := 700\text{-MPa} \quad \underset{\text{MPa}}{E} := 21000\text{-MPa} \quad \text{Modulo Young acciaio}$$

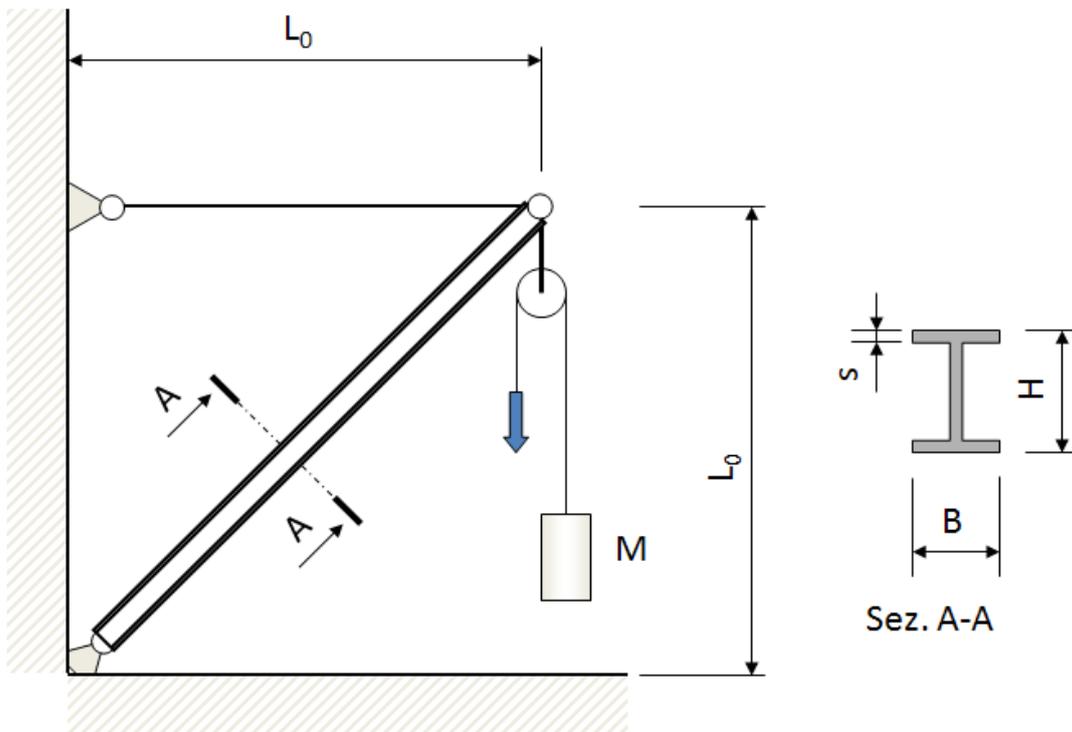


Fig. 2.1

Svolgimento

La forza complessiva applicata alla trave per il sollevamento della massa M è pari a:

$$F := 2 \cdot M \cdot g$$

La struttura è in tutto assimilabile ad una travatura reticolare, costituita dalla trave inclinata a 45° e dalla fune che agisce da tirante.

Dall'equilibrio della cerniera superiore (Fig. 2.2) si ricavano immediatamente le forze normali agenti nella trave e nella fune.

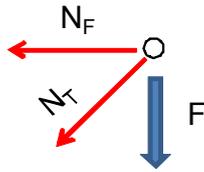


Fig. 2.2

$N_F := F$ Fune orizzontale

$N_T := F \cdot \sqrt{2}$ Trave inclinata a 45°

Le caratteristiche geometriche della sezione della trave sono:

$A_0 := H \cdot B - (H - 2 \cdot s) \cdot (B - s)$	$A_0 = 792 \cdot \text{mm}^2$	
$J_x := \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{(B - s) \cdot (H - 2 \cdot s)^3}{12}$	$J_x = 1.655 \times 10^6 \cdot \text{mm}^4$	Momento inerzia massimo
$J_y := \frac{H \cdot B^3}{12} - \frac{(B - s)^3 \cdot (H - 2 \cdot s)}{12}$	$J_y = 7.367 \times 10^5 \cdot \text{mm}^4$	Momento inerzia minimo

Calcolo del valore massimo ammissibile della massa M.

I possibili meccanismi di cedimento della trave sono:

- collasso plastico della sezione
- instabilità elastica

Nel seguito viene calcolato il valore limite di M per ognuno dei due meccanismi, assumendo il minore dei due come limitante.

Collasso plastico

$\sigma := \frac{F}{A_0}$ Tensione nella trave soggetta a forza normale

uguagliando al valore ammissibile (tensione di snervamento) si ricava:

$M_c := \frac{\sigma_s \cdot A_0}{2 \cdot g \cdot \sqrt{2}}$ $M_c = 1.999 \times 10^4 \text{ kg}$

Instabilità Elastica

Si assume che la trave si instabilizzi secondo il modo di Eulero nel piano corrispondente al momento di inerzia minimo, per cui si ha:

$$P_{cr} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{(L_0 \cdot \sqrt{2})^2}$$

Uguagliando al valore della forza normale agente si ricava:

$$M_i := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{(L_0 \cdot \sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot \sqrt{2}} \quad M_i = 440.395 \text{ kg}$$

Per cui si conclude che il valore massimo della massa sollevabile è pari a 440.4 kg

ESERCIZIO 3 (Punti 6)

Verificare la resistenza del giunto bullonato a flangia posto all'estremità della trave mostrata in Fig. 3.1. La flangia è di forma quadrata ed i bulloni sono disposti su di essa in maniera simmetrica. Condurre la verifica ad attrito.

Dati

$$L_1 := 1500\text{-mm} \quad b := 200\text{-mm} \quad d := 180\text{-mm}$$

$$M_m := 200\text{-kg} \quad (\text{massa del motore})$$

$$W := 5\text{-kW} \quad (\text{potenza trasmessa dal motore})$$

$$n := 3000 \cdot \frac{1}{\text{min}} \quad (\text{velocità di rotazione del motore in giri/min.})$$

$$\Phi := 10\text{-mm} \quad (\text{diametro bulloni})$$

$$\sigma_b := 1100\text{-MPa} \quad (\text{tensione limite del materiale dei bulloni})$$

$$f := 0.3 \quad (\text{coefficiente di attrito tra le flange})$$

$$\phi_{\min} := 1.5 \quad (\text{coefficiente di sicurezza minimo richiesto per il collegamento})$$

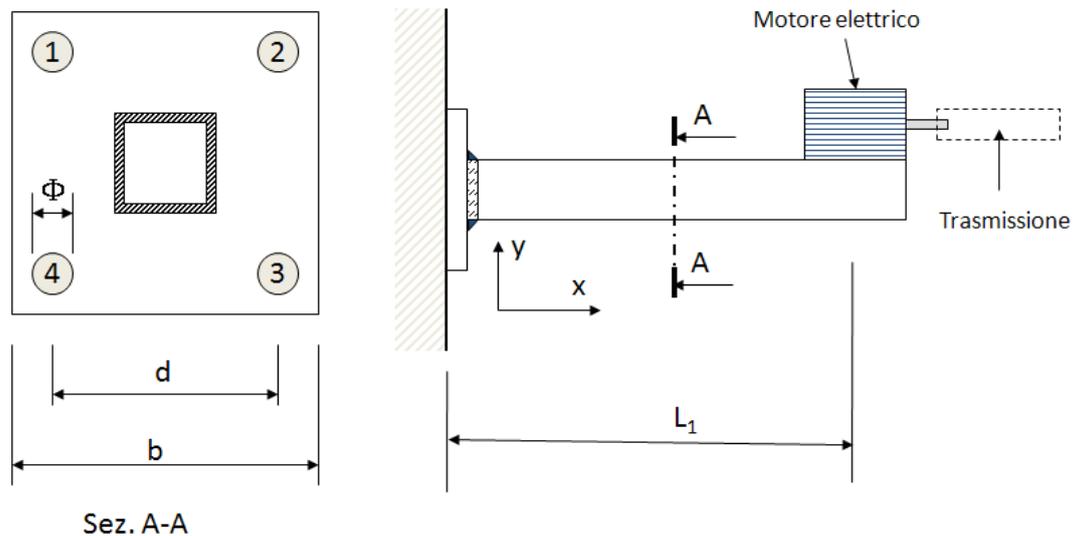


Fig. 3.1

Svolgimento

La struttura è chiamata a sostenere (Fig.3.2) una forza data dal peso del motore, pari a :

$$F_m := M_m \cdot g \qquad F_m = 1.961 \times 10^3 \text{ N}$$

ed un momento pari a quello richiesto per la trasmissione della potenza del motore attraverso l'albero di trasmissione, pari a:

$$\Omega := n \cdot 2 \cdot \pi \qquad \text{Velocità angolare albero motore} \qquad \Omega = 314.159 \frac{1}{\text{s}}$$

$$C_m := \frac{W}{\Omega} \qquad C_m = 1.592 \times 10^4 \cdot \text{N} \cdot \text{mm} \qquad \text{Coppia trasmessa dal motore}$$

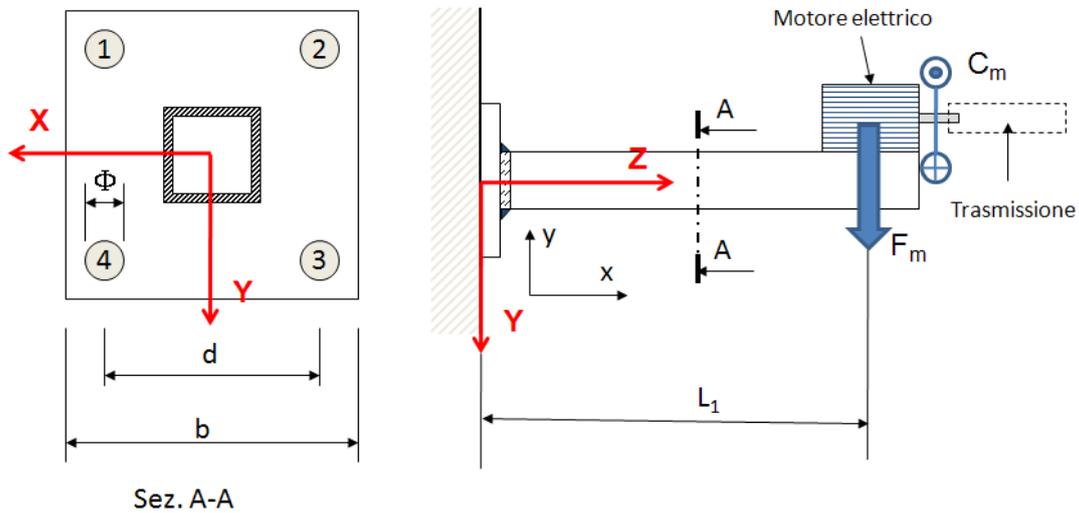


Fig. 3.2

Facendo uso del consueto SR con origine nel baricentro dei bulloni (in questo caso coincidente col baricentro della sezione della trave), si ha che il giunto deve trasmettere complessivamente le seguenti azioni:

$$\begin{aligned} F_X &:= 0 & F_Y &:= F_m & F_Z &:= 0 \\ M_X &:= -F_m \cdot L_1 & M_Y &:= 0 & M_Z &:= C_m \end{aligned}$$

Azioni dovute ad F_Y

La forza F_Y produce su ciascun bullone un'azione tagliante pari a:

$$T_Y := \frac{F_Y}{4} \qquad T_Y = 490.332 \text{ N}$$

Azioni dovute ad M_X

Il momento M_X produce su ciascun bullone un'azione di distacco pari a:

$$i := 1, 2 \dots 4 \quad j := 1, 2 \dots 4$$

Distanze dei singoli bulloni dall'asse X

$$Y_1 := \frac{-d}{2} \quad Y_2 := \frac{-d}{2} \quad Y_3 := \frac{d}{2} \quad Y_4 := \frac{d}{2}$$

$$N_i := \frac{M_X}{\left[\sum_j (Y_j)^2 \right]} \cdot Y_i$$

$$N_i =$$

$8.172 \cdot 10^3$
$8.172 \cdot 10^3$
$-8.172 \cdot 10^3$
$-8.172 \cdot 10^3$

Azioni dovute ad M_Z

Il momento M_Z produce su ciascun bullone un'azione di taglio pari a:

Distanze dei singoli bulloni dal baricentro

$$D_i := \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$T_Z := \frac{M_Z}{\left[\sum_j (D_j)^2 \right]} \cdot D_i = \frac{M_Z}{4 \cdot \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$T_Z := \frac{M_Z}{4 \cdot \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \qquad T_Z = 31.261 \text{ N}$$

Verifica

la verifica viene condotta ad attrito, sostituendo cautelativamente la somma vettoriale delle azioni taglianti con una somma algebrica.

Azione tagliante totale

$$T_{\text{tot}} := T_Y + T_Z$$

Azione di distacco totale

$$N_{\text{tot}} := N_1$$

Precarico bullone

$$N_0 := 0.8 \cdot \sigma_b \cdot \frac{\pi \cdot \Phi^2}{4}$$

Verifica

$$N_{\text{tot}} < 0.8 \cdot N_0 = 1 \quad \text{Verificata}$$

$$T_{\text{tot}} < \frac{f \cdot (N_0 - N_{\text{tot}})}{\phi_{\text{min}}} = 1 \quad \text{Verificata}$$

ESERCIZIO 4 (Punti 6)

Data la struttura mostrata in Fig. 4.1, si calcoli la velocità di rotazione del motore (in giri/1') per la quale si ha risonanza con la prima frequenza propria della struttura stessa. Nel calcolo si trascuri la massa della trave e si consideri la struttura come spaziale e soggetta a sole deformazioni flessionali..

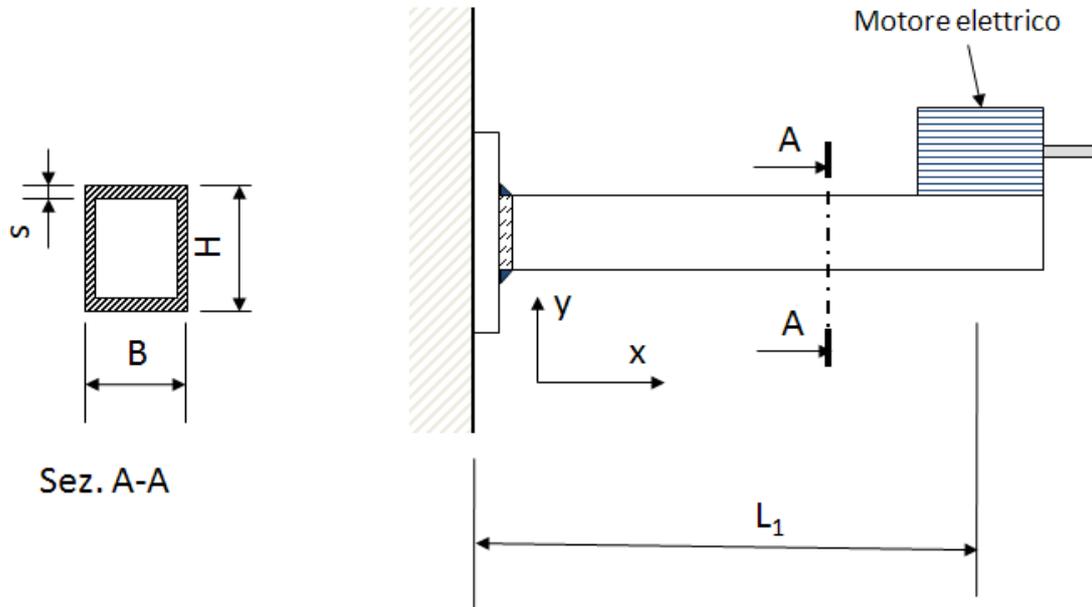


Fig. 4.1

Dati

$$L_1 := 1500 \cdot \text{mm} \quad B := 200 \cdot \text{mm} \quad H := 180 \cdot \text{mm} \quad s := 4 \cdot \text{mm}$$

$$M_m := 200 \cdot \text{kg} \quad (\text{massa del motore})$$

$$E_a := 70000 \cdot \text{MPa} \quad (\text{Modulo Young alluminio})$$

Svolgimento

Dato che la massa della trave può essere trascurata, la struttura è assimilabile ad un semplice sistema massa-molla ad un solo grado di libertà (Fig. 4.2), nel quale la massa è quella del motore, mentre la rigidità corrisponde a quella flessionale della trave nel punto di fissaggio del motore stesso.

La rigidità della molla equivalente alla trave può pertanto essere valutata come quella di una trave a mensola caricata all'estremità:

$$k := \frac{P}{\delta} = \frac{3 \cdot E_a \cdot J}{L_1^3}$$

Se si vuole ottenere il minimo valore della frequenza propria è necessario utilizzare il valore minimo del momento di inerzia della sezione, dato da:

$$J_{\min} := \frac{H \cdot B^3}{12} - \frac{(H - 2 \cdot s) \cdot (B - 2 \cdot s)^3}{12}$$

In tal modo si ha:

$$k := \frac{3 \cdot E_a \cdot J_{\min}}{L_1^3}$$

da cui:

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{M_m}} \qquad \omega = 75.968 \frac{1}{s}$$

La velocità di rotazione corrispondente del motore (in giri al minuto) è pari a:

$$n_r := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \qquad n_r = 725.445 \cdot \frac{1}{\text{min}}$$