CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA

CORSO DI “MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE”

VERIFICA INTERMEDIA DEL 18/01/2010

Quesito 1 (Punti 5)
Data la travatura reticolare mostrata nella Figura 1, determinare:
1. le reazioni vincolari
2. le forze agenti nelle aste

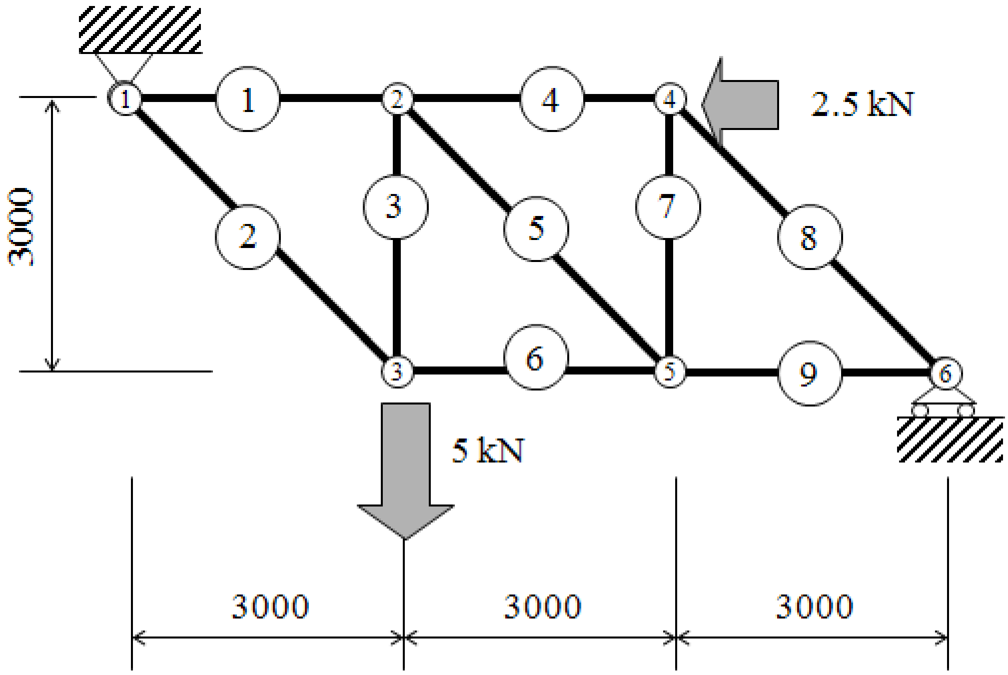
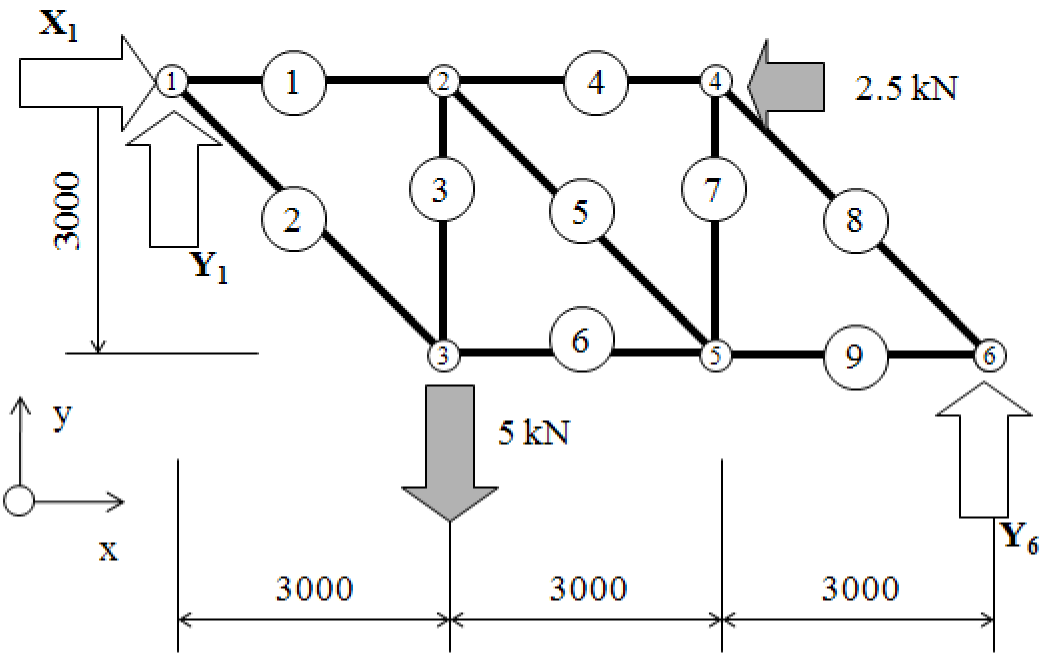


Fig. 1

__**Svolgimento**__

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente isostatica.
Fissato un SR cartesiano ortogonale, si sostituiscono i vincoli con le 3 reazioni vincolari incognite, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:



$Y_6 := 0$ $\quad X_1 := 0$ $\quad Y_1 := 0$

Given

$R_x = 0$ ---> $\quad X_1 - 2.5 = 0$

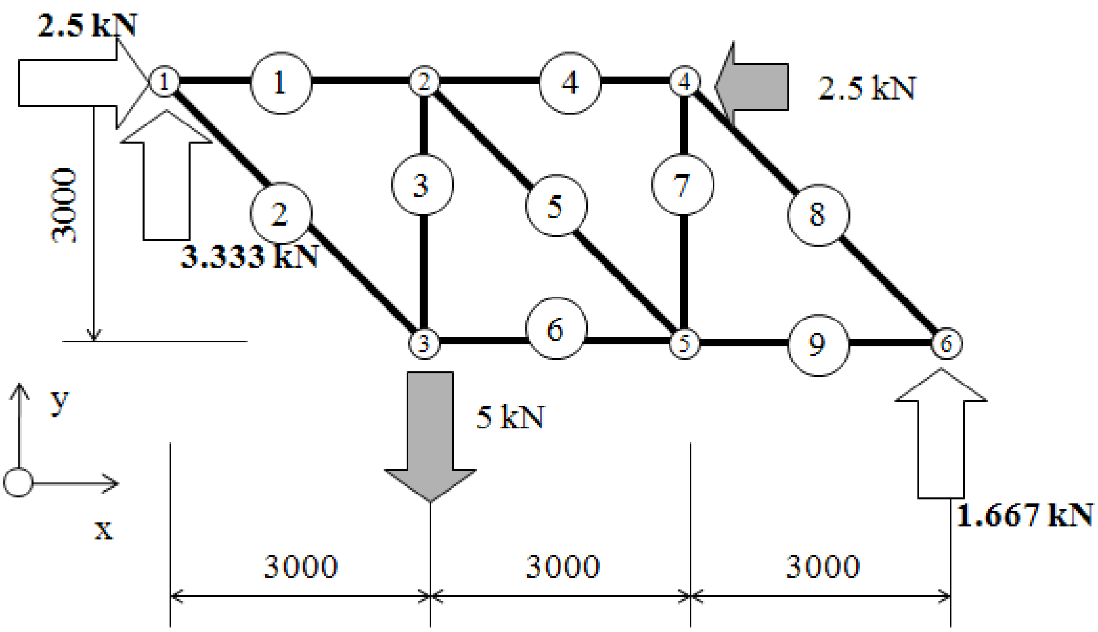
$R_y = 0$ ---> $\quad Y_1 + Y_6 - 5 = 0$

$MR_{x1} = 0$ ---> $\quad Y_6 \cdot 9000 - 5 \cdot 3000 = 0$

$$\begin{pmatrix} Y_6 \\ Y_1 \\ X_1 \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_6, Y_1, X_1)$$

$Y_6 = 1.667$ $\quad Y_1 = 3.333$ $\quad X_1 = 2.5$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma finale di corpo libero con tutti i carichi esterni applicati alla struttura.



Forze agenti nelle aste.

Si procede alla soluzione utilizzando il metodo dei nodi.

Nodo 6

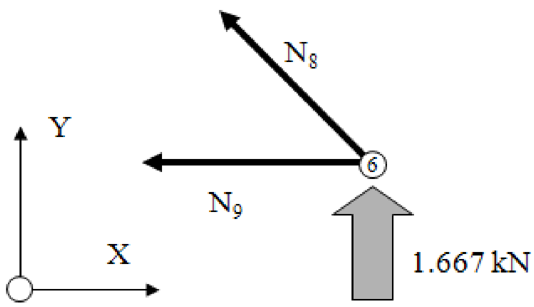
$N_8 := 0$ $\qquad\qquad$ $N_9 := 0$

Given

$R_x = 0$ ---> $\qquad -N_9 - N_8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$R_y = 0$ ---> $\qquad N_8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.667 = 0$

$\begin{pmatrix} N_8 \\ N_9 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_8, N_9)$



$N_8 = -2.357$ $\qquad\qquad$ $N_9 = 1.667$

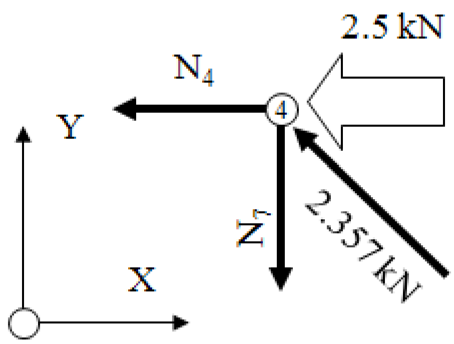
Nodo 4

$\mathbf{N_4} := 0 \qquad \mathbf{N_7} := 0$

Given

$R_x = 0$ ---> $\qquad \mathbf{N_4} + 2.357 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2.5 = 0$

$R_y = 0$ ---> $\qquad 2.357 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{N_7} = 0$



$\begin{pmatrix} N_4 \\ N_7 \end{pmatrix} := \mathbf{Find}(N_4, N_7)$

$\mathbf{N_4} = -4.167 \qquad \mathbf{N_7} = 1.667$

Nodo 5

$\mathbf{N_5} := 0 \qquad \mathbf{N_6} := 0$

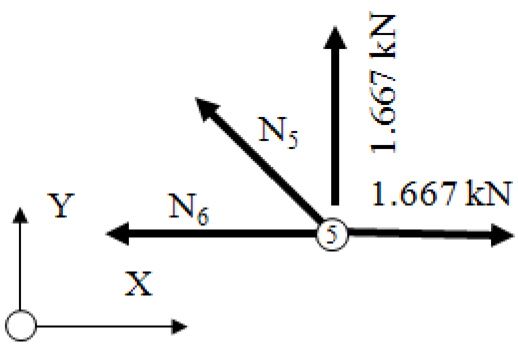
Given

$R_x = 0$ ---> $\quad -\mathbf{N_6} - \mathbf{N_5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.667 = 0$

$R_y = 0$ ---> $\quad \mathbf{N_5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1.667 = 0$

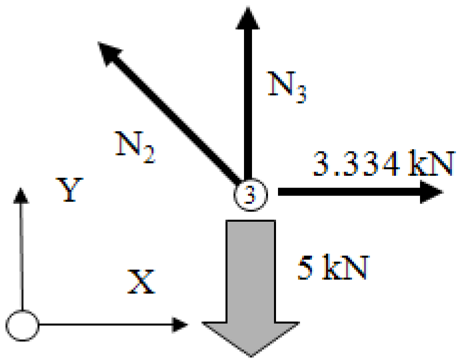
$\begin{pmatrix} N_5 \\ N_6 \end{pmatrix} := \mathbf{Find}(N_5, N_6)$

$\mathbf{N_5} = -2.357 \qquad \mathbf{N_6} = 3.334$



Nodo 3

$\mathbf{N_2} := 0 \qquad \mathbf{N_3} := 0$



Given

$R_x = 0$ ---> $-\mathbf{N_2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3.334 = 0$

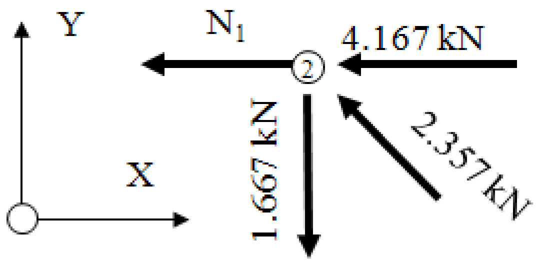
$R_y = 0$ ---> $\mathbf{N_2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 5 + \mathbf{N_3} = 0$

$\begin{pmatrix} \mathbf{N_2} \\ \mathbf{N_3} \end{pmatrix} := \textbf{Find}(\mathbf{N_2}, \mathbf{N_3})$

$\mathbf{N_2} = 4.715 \qquad \mathbf{N_3} = 1.666$

Nodo 2

$\mathbf{N_1} := 0$



Given

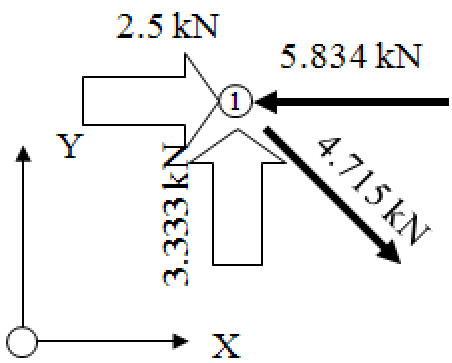
$R_x = 0$ ---> $-\mathbf{N_1} - 2.357\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4.167 = 0$

$R_y = 0$ ---> $-1.667 + 2.357\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -0$ **OK**

$\mathbf{N_1} := \textbf{Find}(\mathbf{N_1})$

$\mathbf{N_1} = -5.834$

Nodo 1 - Verifica finale equilibrio



$R_x = 0$ ---> $2.5 - 5.834 + 4.715\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

OK

$R_y = 0$ ---> $3.333 - 4.715\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -0$

RIASSUNTO DEI RISULTATI

$\mathbf{N_1} = -5.834 \qquad \mathbf{N_2} = 4.715 \qquad \mathbf{N_3} = 1.666$

$\mathbf{N_4} = -4.167 \qquad \mathbf{N_5} = -2.357 \qquad \mathbf{N_6} = 3.334$

$\mathbf{N_7} = 1.667 \qquad \mathbf{N_8} = -2.357 \qquad \mathbf{N_9} = 1.667$

Quesito 2a (Punti 16)

t1ta0t0nt0te1Dato la struttura spaziale mostrata in Figura 2a.1 determinare:

1. il valore delle forze F_1, F_2 ed F_3 richiesto per garantire l'equilibrio
2. l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione nella struttura, scrivendone l'espressione analitica in funzione di una opportuna coordinata presa lungo la fibra baricentrica e tracciandone il diagramma.

.

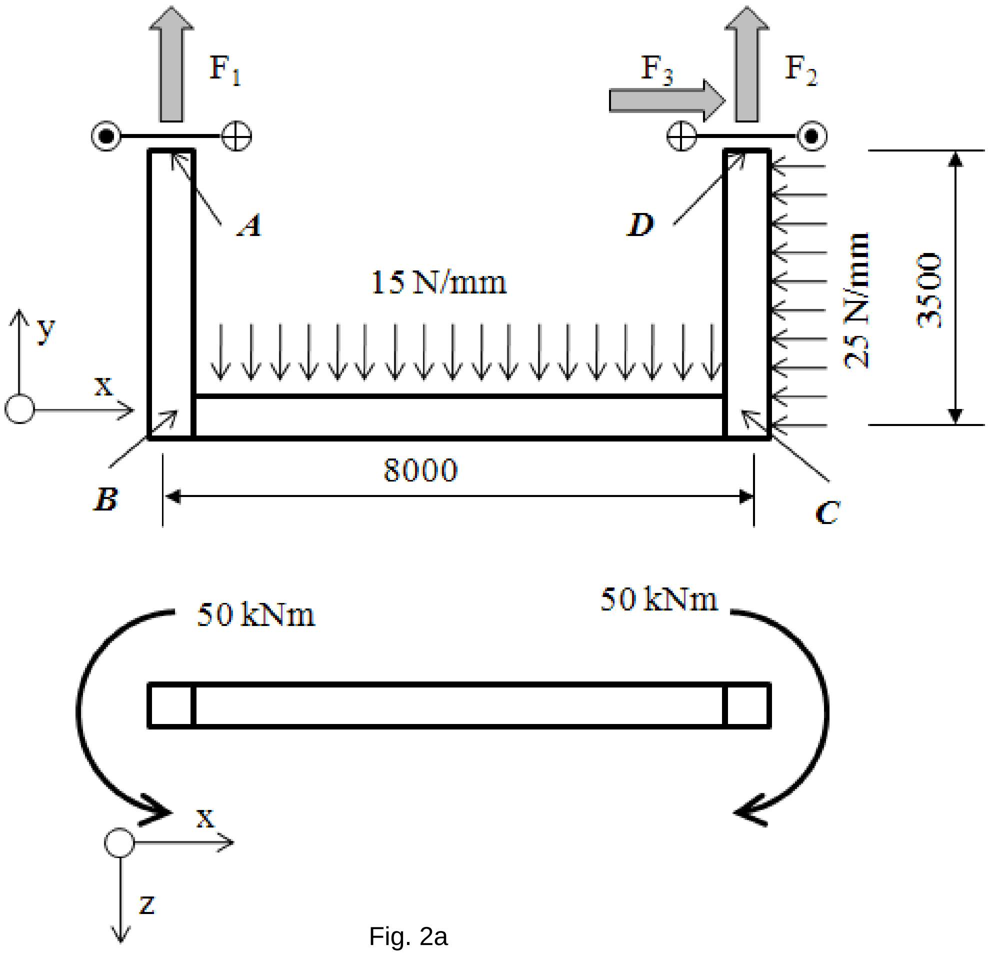


Fig. 2a

Calcolo delle forze richieste

Fissato un SR cartesiano ortogonale, come nella Figura 2a, si osserva che le seguenti equazioni di equilibrio sono automaticamente soddisfatte:

- traslazione in direzione "z";
- rotazione attorno all'asse "x"

Dalle romanenti Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in KN, lunghezze in m, momenti calcolati rispetto al polo *D*)::

$\mathbf{F_1} := 0 \cdot \mathbf{kN}$ $\qquad \mathbf{F_2} := 0$ $\qquad \mathbf{F_3} := 0$

Given

R_x = 0 ---> $\quad \mathbf{F_3} - 25 \cdot 3.5 = 0$

R_y = 0 ---> $\quad \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} - 15 \cdot 8 = 0$

R_z = 0 ---> Verificata automaticamente

MR_{xA} = 0 ---> Verificata automaticamente

MR_{yA} = 0 ---> $\quad 50 - 50 = 0$

MR_{zA} = 0 ---> $\quad -\mathbf{F_1} \cdot 8 + 15 \cdot 8 \cdot 4 - 25 \cdot 3.5 \cdot \frac{3.5}{2} = 0$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F_1} \\ \mathbf{F_2} \\ \mathbf{F_3} \end{pmatrix} := \mathbf{Find}(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3})$$

Ottenendo i seguenti valori delle forze incognite (in kN):

$\mathbf{F_1} = 40.859$ $\qquad \mathbf{F_2} = 79.141$ $\qquad \mathbf{F_3} = 87.5$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della trave, con tutte le forze esterne applicate.

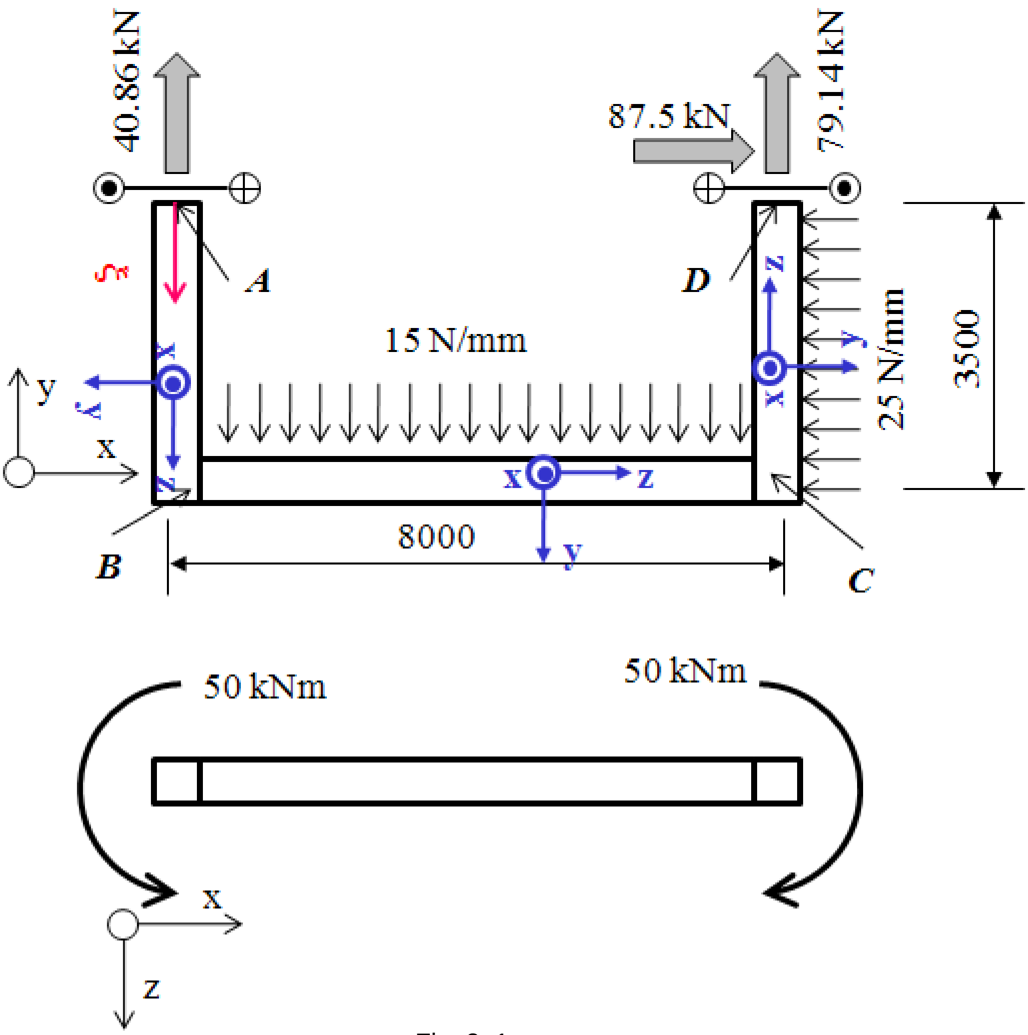


Fig. 2a1

DIAGRAMMI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce la coordinata curvilinea ξ (origine nel punto A, termine nel punto D, valore compreso tra 0 e 15.00 m) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento locale x-y-z per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, la cui disposizione nei diversi tratti di trave è mostrata in figura 2a1.

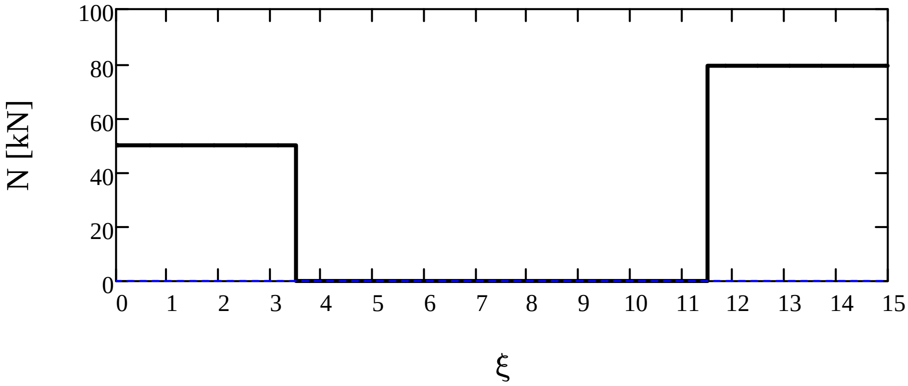
Si noti che, per semplificare la rappresentazione, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono stati rapresentati in forma lineare piana. Ai fini di una più semplice interpretazione, si noti che i punti significativi indicati sulla figura corrispondono ai seguenti valori della coordinata curvilinea ξ: Punto A-> ξ=0; Punto B -> ξ=3.50; Punto C -> ξ=11.50; Punto D -> ξ=15.00

Forza Normale [kN]

$\xi := 0, 0.001 .. 15.0$

$\mathbf{xx}(\xi) := 0$ (questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0)

$$N(\xi) := \begin{cases} 49.86 & \textbf{if } 0 \le \xi \le 3.5 \\ 0 & \textbf{if } 03.5 \le \xi \le 11.5 \\ 79.14 & \textbf{otherwise} \end{cases}$$

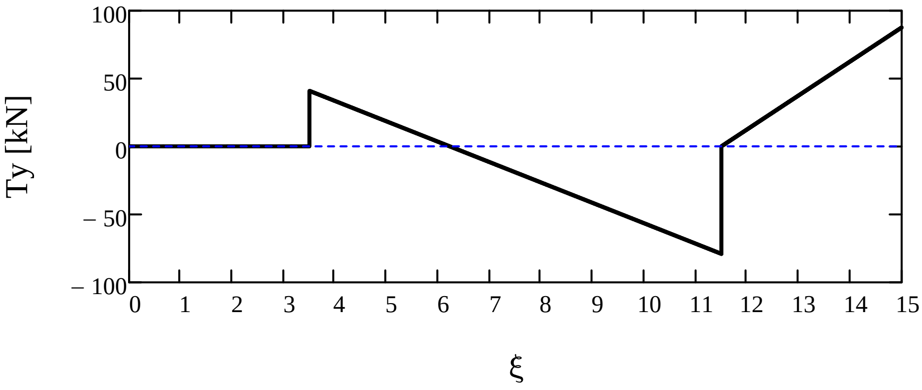


Taglio T_X

Il taglio T_X è identicamente nullo.

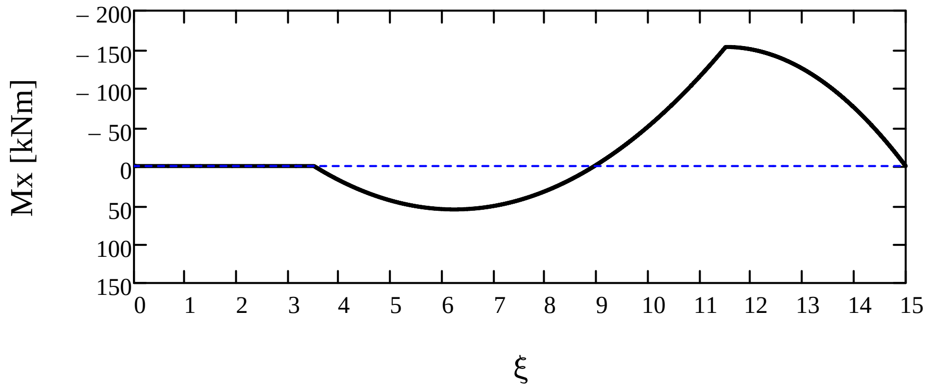
Taglio T_Y

$$T_y(\xi) := \begin{cases} 0 & \textbf{if } 0 \le \xi \le 3.5 \\ 15\cdot(11.5-\xi) - 79.14 & \textbf{if } 3.5 \le \xi \le 11.5 \\ [87.5 - 25\cdot(15-\xi)] & \textbf{if } 11.5 < \xi \le 15 \\ 0 & \textbf{otherwise} \end{cases}$$



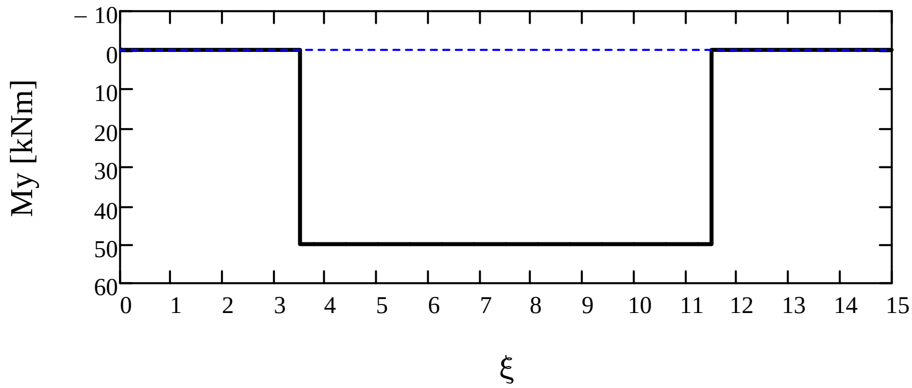
Momento M_X

$$M_{X.}(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le \xi \le 3.5 \\ \left[40.86\cdot(\xi - 3.5) - 15\cdot\dfrac{(\xi - 3.5)^2}{2}\right] & \text{if } 3.5 \le \xi \le 11.5 \\ 25\cdot\dfrac{(15-\xi)^2}{2} - 87.5(15-\xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



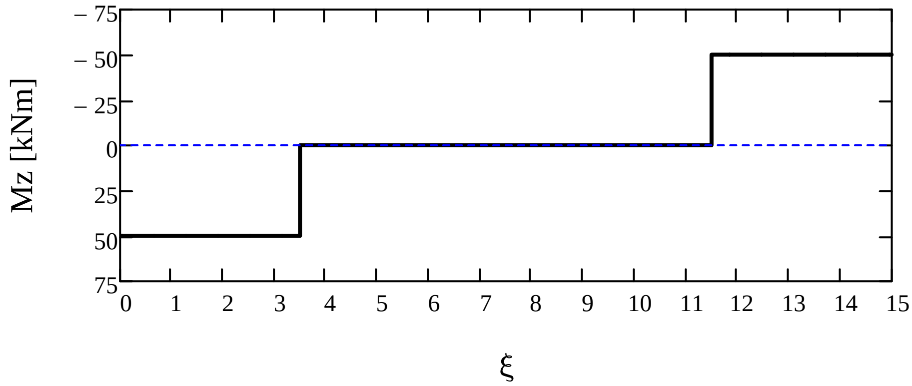
Momento M_Y

$$M_{y.}(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le \xi \le 3.5 \\ 50 & \text{if } 3.5 \le \xi \le 11.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M_Z

$$M_{Z.}(\xi) := \begin{cases} 50 & \textbf{if} \quad 0 \le \xi \le 3.5 \\ 0 & \textbf{if} \quad 3.5 \le \xi \le 11.5 \\ -50 & \textbf{otherwise} \end{cases}$$



Quesito 2b (alternativo al quesito 2a) (Punti 13)
È data la struttura piana mostrata in Figura 2b.1, composta da un telaio esterno ad "U" e da un elemento scorrevole attraverso una apposita guida.
Si chiede di determinare:

1. le reazioni vincolari, esterne ed interne
2. l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione nel telaio esterno ad "U", scrivendone l'espressione analitica in funzione di una opportuna coordinata presa lungo la fibra baricentrica e tracciandone il diagramma

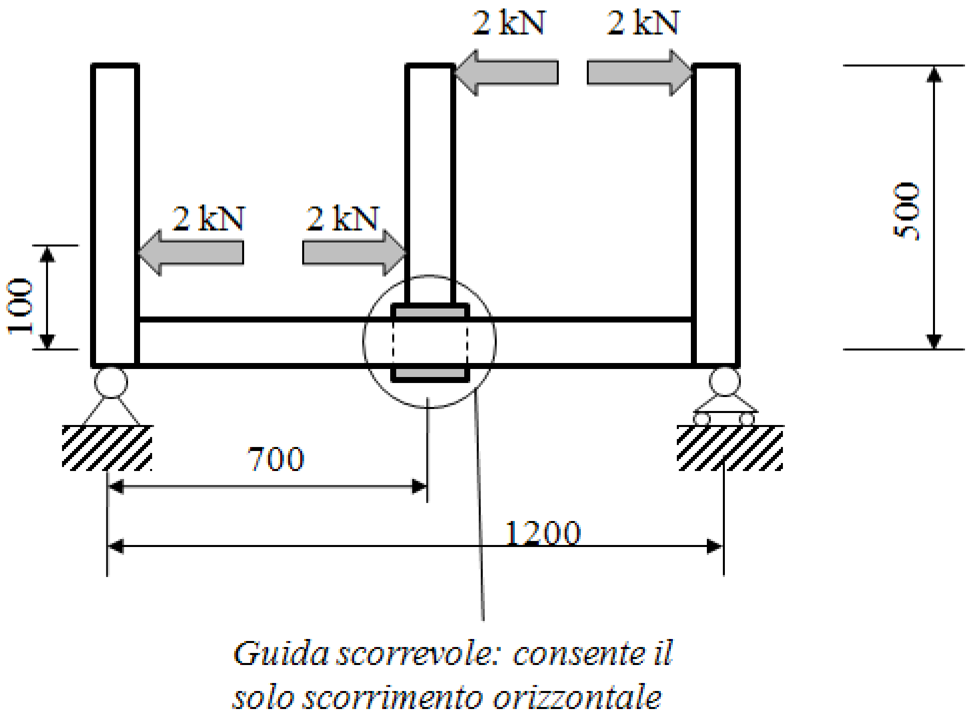
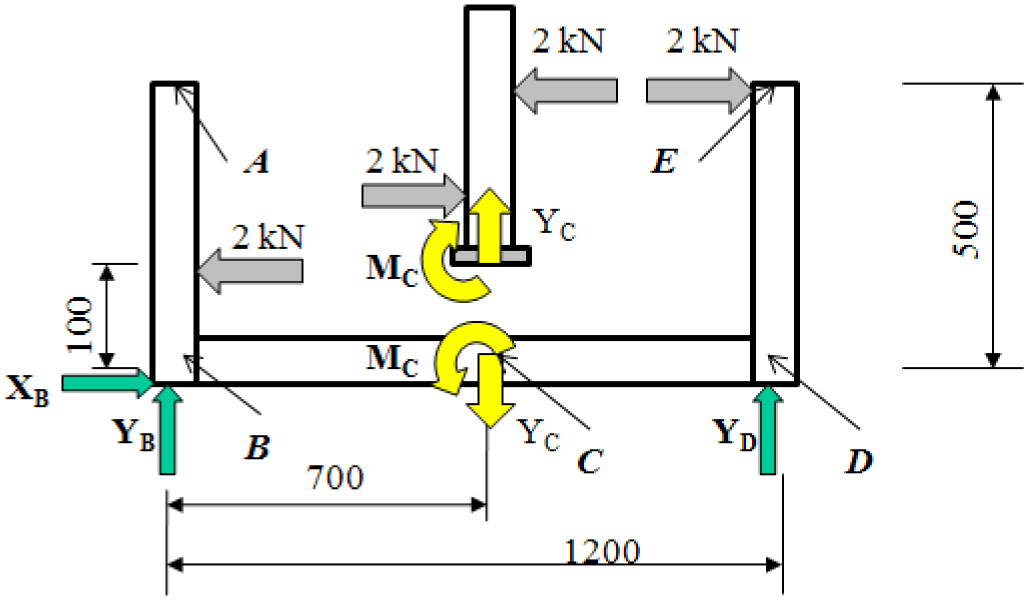


Fig. 2b

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente ed internamente isostatica.
Fissato un SR cartesiano ortogonale, si sostituiscono i vincoli con le 5 reazioni vincolari (3 esterne + 2 interne) incognite, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:



Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in KN, lunghezze in m, momenti calcolati rispetto al polo B):

$X_B := 0 \cdot kN$ $\quad Y_B := 0$ $\quad Y_D := 0$ $\quad Y_C := 0$ $\quad M_C := 0$

Given

Equilibrio intera struttura

$R_x = 0$ ---> $\quad X_B + 2 - 2 + 2 - 2 = 0$

$R_y = 0$ ---> $\quad Y_B + Y_D = 0$

$MR_{zB} = 0$ ---> $\quad Y_D \cdot 1.2 = 0$

$$\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Y_D \end{pmatrix} := \text{Find}(X_B, Y_B, Y_D)$$

Given

Equilibrio asta scorrevole

$R_x = 0$ ---> Verificato automaticamente

$R_y = 0$ ---> $Y_C = 0$

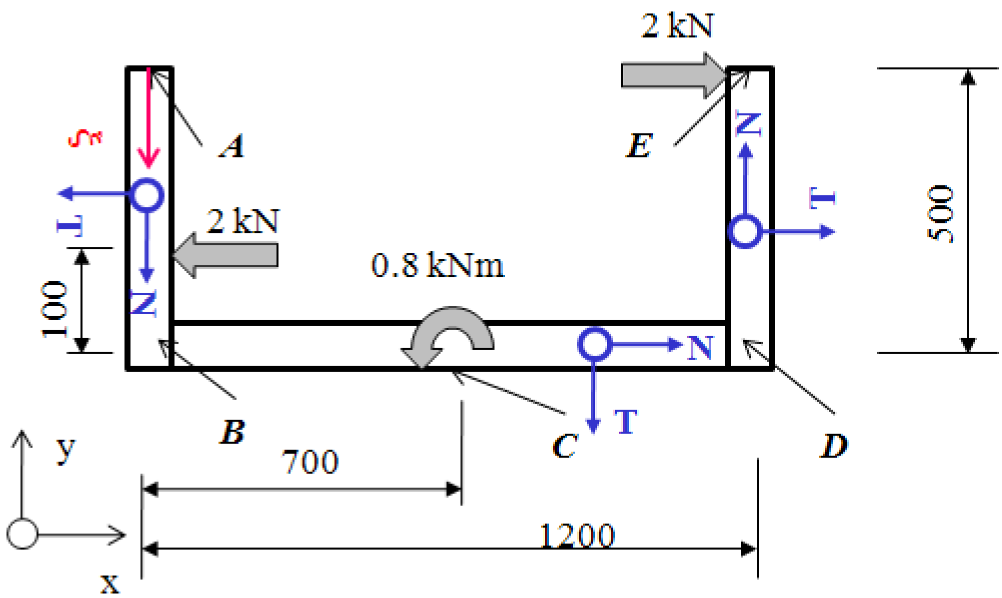
$MR_{zC} = 0$ ---> $-M_C - 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.5 = 0$

$$\begin{pmatrix} Y_C \\ M_C \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(Y_C, M_C)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in kN e kNm):

$X_B = 0$ $Y_B = 0$ $Y_D = 0$ $Y_C = 0$ $M_C = 0.8$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura, con tutte le forze esterne ed interne applicate.



DIAGRAMMI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

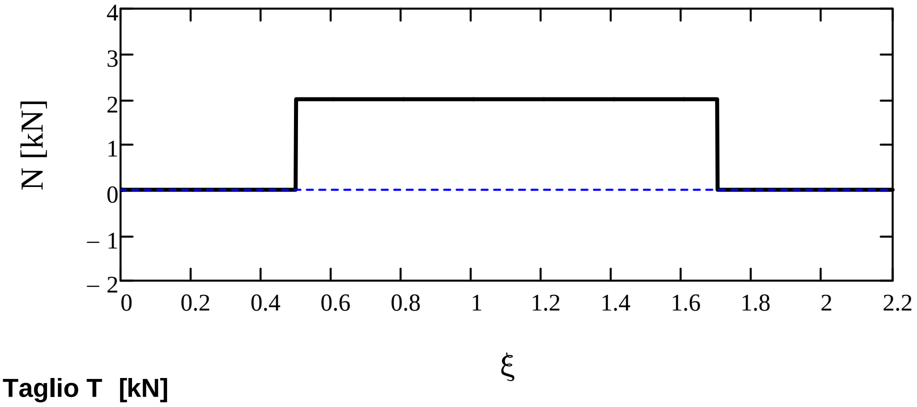
Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce una coordinata curvilinea ξ (origine nel punto A, termine nel punto E, valore compreso tra 0 e 2.20 m) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento locale N-T per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, la cui disposizione nei diversi tratti di trave è mostrata in figura.
Si noti che, per semplificare la rappresentazione, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono stati rappresentati sotto forma di un diagramma lineare

Forza Normale [kN]

$\xi := 0, 0.001 .. 2.20$

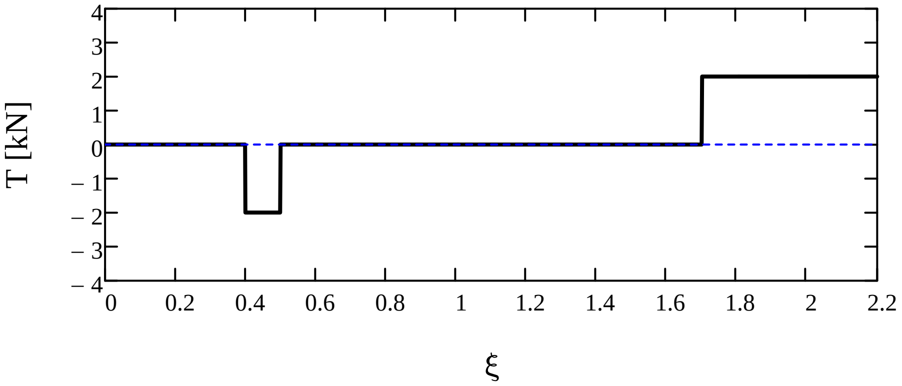
$\mathbf{xx}(\xi) := 0$ (questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0)

$$N(\xi) := \begin{cases} 0 & \textbf{if } 0 \le \xi \le 0.5 \\ 2 & \textbf{if } 0.5 \le \xi \le 1.7 \\ 0 & \textbf{otherwise} \end{cases}$$



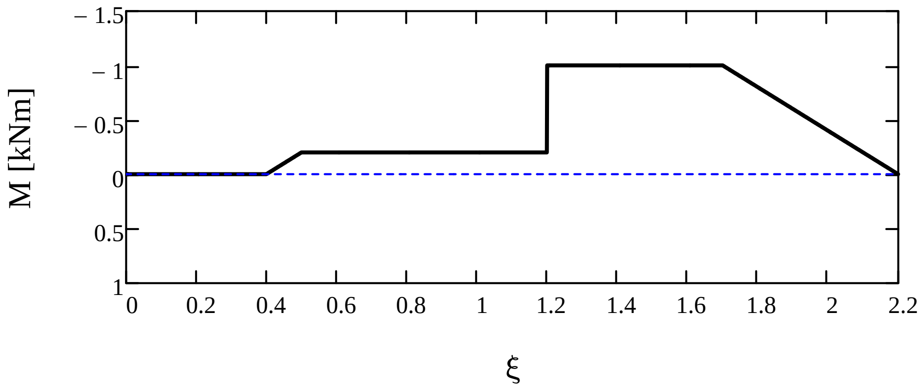
Taglio T [kN]

$$T(\xi) := \begin{cases} 0 & \textbf{if } 0 \le \xi \le 0.4 \\ -2 & \textbf{if } 0.4 \le \xi \le 0.5 \\ 0 & \textbf{if } 0.5 \le \xi \le 1.7 \\ 2 & \textbf{otherwise} \end{cases}$$



Momento M [kNm]

$$\mathbf{M}(\xi) := \begin{cases} 0 & \textbf{if } 0 \le \xi \le 0.4 \\ -2\cdot(\xi - 0.4) & \textbf{if } 0.4 \le \xi \le 0.5 \\ -2\cdot 0.1 & \textbf{if } 0.5 \le \xi \le 1.2 \\ -2\cdot 0.1 - 0.8 & \textbf{if } 1.2 \le \xi \le 1.7 \\ -2\cdot(2.2 - \xi) & \textbf{otherwise} \end{cases}$$



Quesito 3 (Punti 4)
Data la sezione a “doppio T” con rotaia mostrata in Fig. 3,:
1. determinare la posizione del baricentro “G”
2. determinare i momenti di inerzia rispetto ai due assi centrali principali.

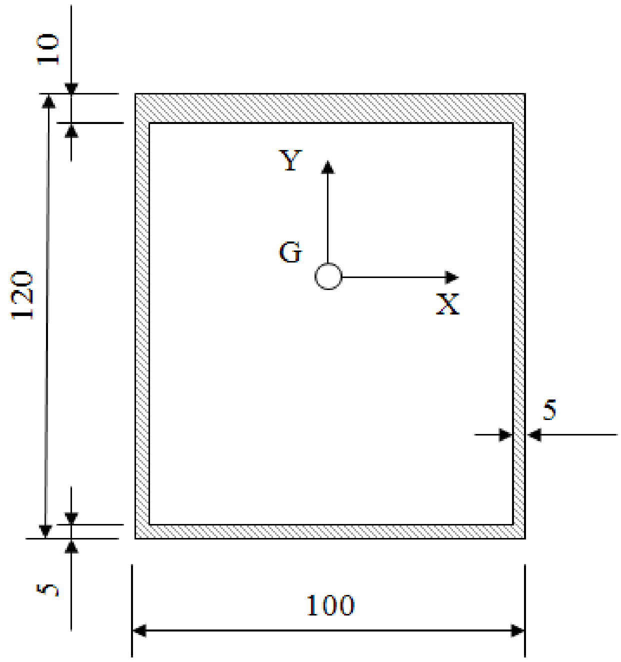
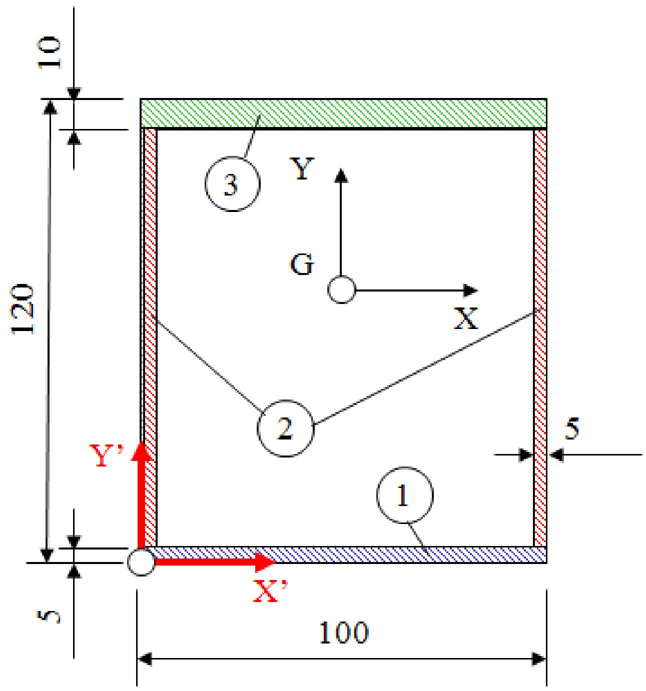


Fig. 3

Posizione del baricentro.
Fissato un SR "X'-Y'", si vede subito che, in esso la coordinata X' del baricento è pari a 50 per simmetria.



Per il calcolo della posizione lungo l'asse Y' si procede considerando il contributo delle diverse aree colorate riportate nella figura.

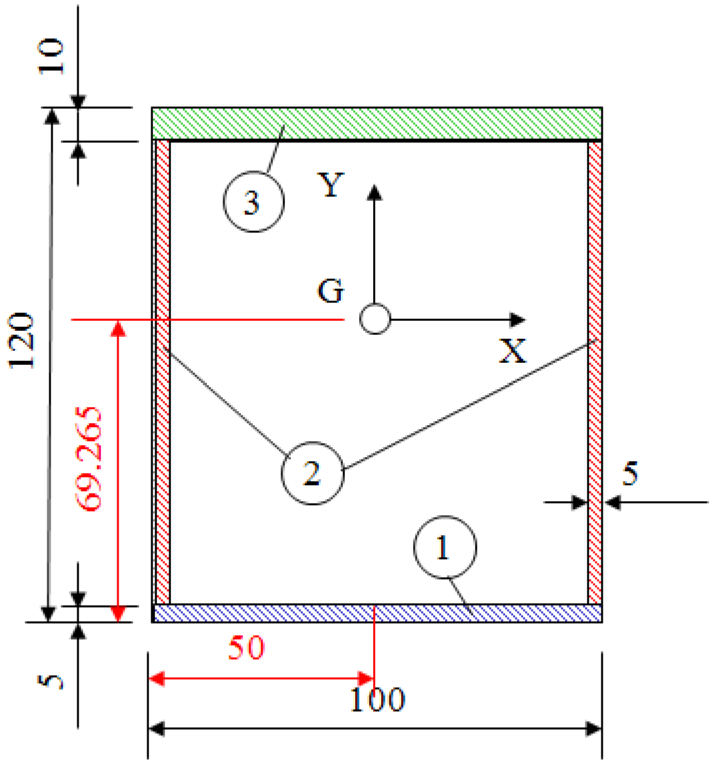
$A := 120 \cdot mm \cdot 100 \cdot mm - 105 \cdot mm \cdot 90 \cdot mm$ Area totale

$A = 2.55 \times 10^3 \cdot mm^2$

$$S_G := 10mm \cdot 100mm \cdot 115mm + 2 \cdot 5mm \cdot 105mm \cdot \frac{(110 \cdot mm + 5 \cdot mm)}{2} + 5 \cdot mm \cdot 100 \cdot mm \cdot 2.5 \cdot mm$$

$Y_G := \dfrac{S_G}{A}$ $\qquad Y_G = 69.265 \cdot mm$

La posizione del baricentro risulta pertanto quella riportata nella seguente Figura.



Momenti di inerzia
Gli assi centrali principali risultano, per simmetria, quelli indicati nella Figura precedente.
Nel calcolo dei momenti di inerzia si considera separatamente il contributo delle diverse aree individuate nella Figura stessa.

Calcolo di J_x

$$J_{x1} := \frac{100mm\cdot(5mm)^3}{12} + 100mm\cdot 5mm\cdot\left(Y_G - \frac{5mm}{2}\right)^2$$

$$J_{x2} := \frac{5mm\cdot(105mm)^3}{12} + 5mm\cdot 105mm\cdot\left[Y_G - \frac{(110\cdot mm + 5\cdot mm)}{2}\right]^2$$

$$J_{x3} := \frac{100mm\cdot(10mm)^3}{12} + 100mm\cdot 10mm\cdot\left[\frac{(120\cdot mm + 110\cdot mm)}{2} - Y_G\right]^2$$

$$J_x := J_{x1} + 2J_{x2} + J_{x3}$$

$$J_x = 5.44 \times 10^6\cdot mm^4$$

Calcolo di J_y

$$J_{yA} := \frac{120mm\cdot(100mm)^3}{12}$$

$$J_{yB} := \frac{105mm\cdot(90mm)^3}{12}$$

$$J_y := J_{yA} - J_{yB}$$

$$J_y = 3.621 \times 10^6\cdot mm^4$$

Quesito 4 (Punti 5)

Calcolare le tensioni normali e tangenziali massime (valore assoluto, espresse in MPa) mostrarne l'ubicazione per la sezione mostrata nella Figura 3, soggetta alle seguenti caratteristiche di sollecitazione:

$M_x := 25 \cdot kN \cdot m$

$M_y := 10 \cdot kN \cdot m$

$M_z := 80 \cdot kN \cdot m$

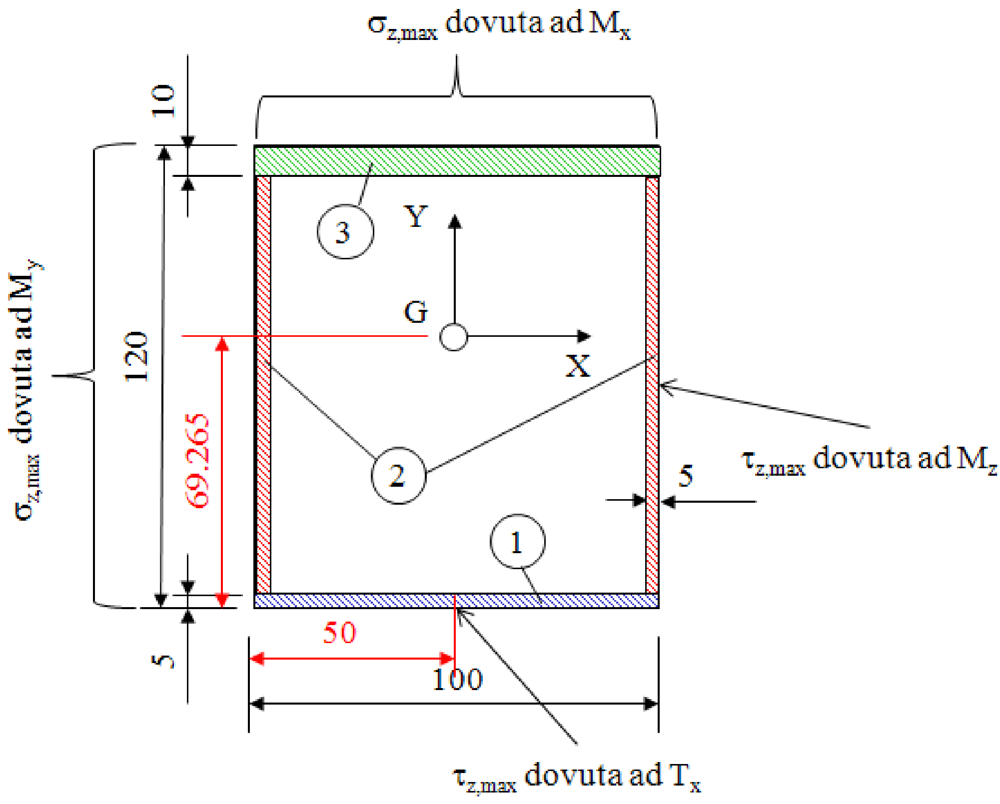
$T_x := 120 \cdot kN$

Momento M_x

Si applica la formula di Navier, la massima tensione (valore relativio) si verifica nel punto della sezione a maggiore distanza positiva dall'asse X (bordo superiore).

$y_{max} := 120 \cdot mm - Y_G$ $\qquad$ $y_{max} = 50.735 \cdot mm$

$\sigma_{zmax} := \frac{M_x}{J_x} y_{max}$ $\qquad$ $\sigma_{zmax} = 233.164 \cdot MPa$



Momento M_y

Si applica la formula di Navier, la massima tensione (valore relativo ed assoluto) si verifica nel punto della sezione a maggiore distanza negativa dall'asse Y.

$x_{max} := -50 \cdot mm$

$\sigma_{zmaxy} := -\frac{M_y}{J_y} x_{max}$ $\qquad \sigma_{zmaxy} = 138.074 \cdot MPa$

Momento M_z

Si applica la formula di Bredt. La massima tensione si verifica in tutta la zona nella quale lo spessore è minimo.

$\Omega := 95 \cdot mm \cdot 112.5 \cdot mm$ $\qquad s_{min} := 5 \cdot mm$

$\tau_{max} := \frac{M_z}{2 \cdot \Omega \cdot s_{min}}$ $\qquad \tau_{max} = 748.538 \cdot MPa$

Taglio T_x

Si usa la formula di Jourawsky, calcolando il valore del momento statico in corispondenza dell'asse "Y", dove la tensione assume valore massimo.

$S_{yA} := 120 \cdot mm \cdot 50 \cdot mm \cdot \frac{50 \cdot mm}{2}$

$S_{yB} := 105 \cdot mm \cdot 45 \cdot mm \cdot \frac{45 \cdot mm}{2}$

$b := 10mm + 5mm$

$S_y := S_{yA} - S_{yB}$ $\qquad S_y = 4.369 \times 10^4 \cdot mm^3$

$\tau_{zx} := \frac{T_x \cdot S_y}{J_y \cdot b}$ $\qquad \tau_{zx} = 96.514 \cdot MPa$