UNIVERSITA DI PISA - ANNO ACCADEMICO 2007-8
CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA (N.O.)

CORSO DI
MECCANICA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI MECCANICHE

VERIFICA INTERMEDIA DEL 15-06-2009

t1ta0t0nt0ts1e1**ESERCIZIO 1 (Punti 15 o 12)**

Data la forca per carrello di sollevamento mostrata in Figura 1, calcolare lo spostamento verticale del punto di estremità conseguente al sollevamento della massa M.
Nota: per ottenere il punteggio di 12 è sufficiente che si imposti correttamente la relazione risolutiva (in forma di integrale) indicando correttamente gli estremi di integrazione e l'espressione completa e corretta di tutte le funzioni integrande, ma senza svolgere compiutamente il calcolo.

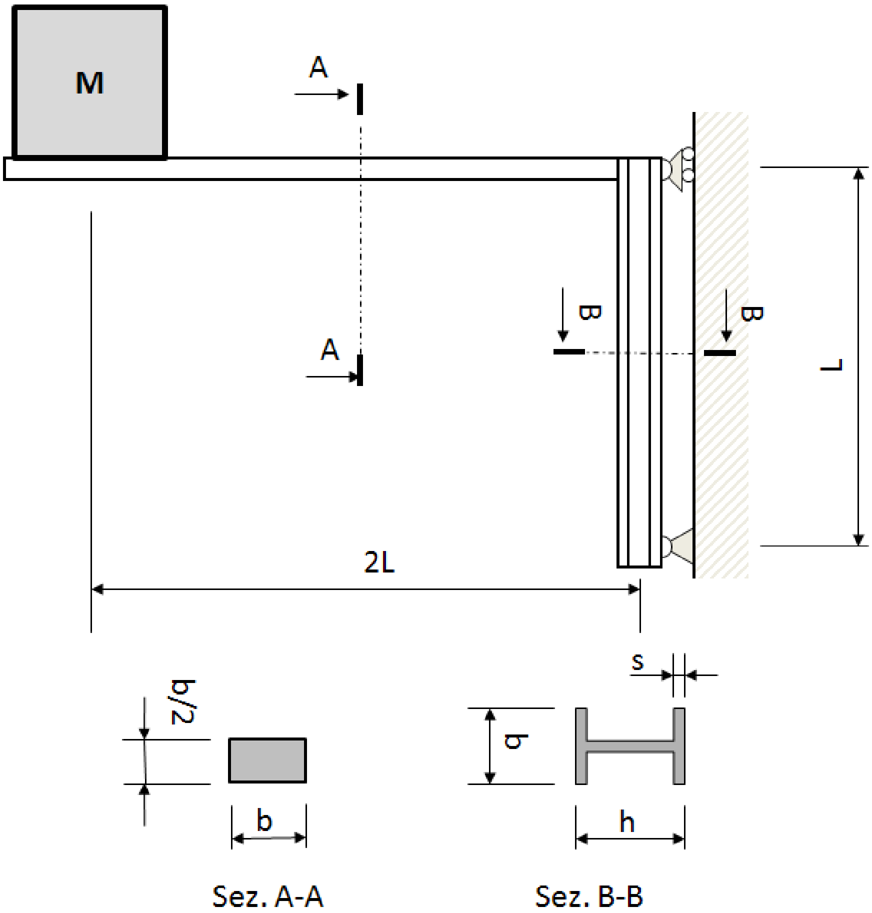


Fig. 1.1

Dati

$L := 500 \cdot mm$

$b := 60 \cdot mm$

$M := 300 \cdot kg$

$s := 2 \cdot mm$

Materiale: acciaio

$h := 90 \cdot mm$

Altri parametri

$E := 210000 \cdot MPa$ Modulo Young acciaio

Svolgimento

La forza complessiva applicata alla trave per il sollevamento della massa M è pari a:

$F := M \cdot g$ $F = 2.942 \times 10^{3} N$

Si ottiene quindi il seguente schema di calcolo con tre reazioni vincolari incognite.

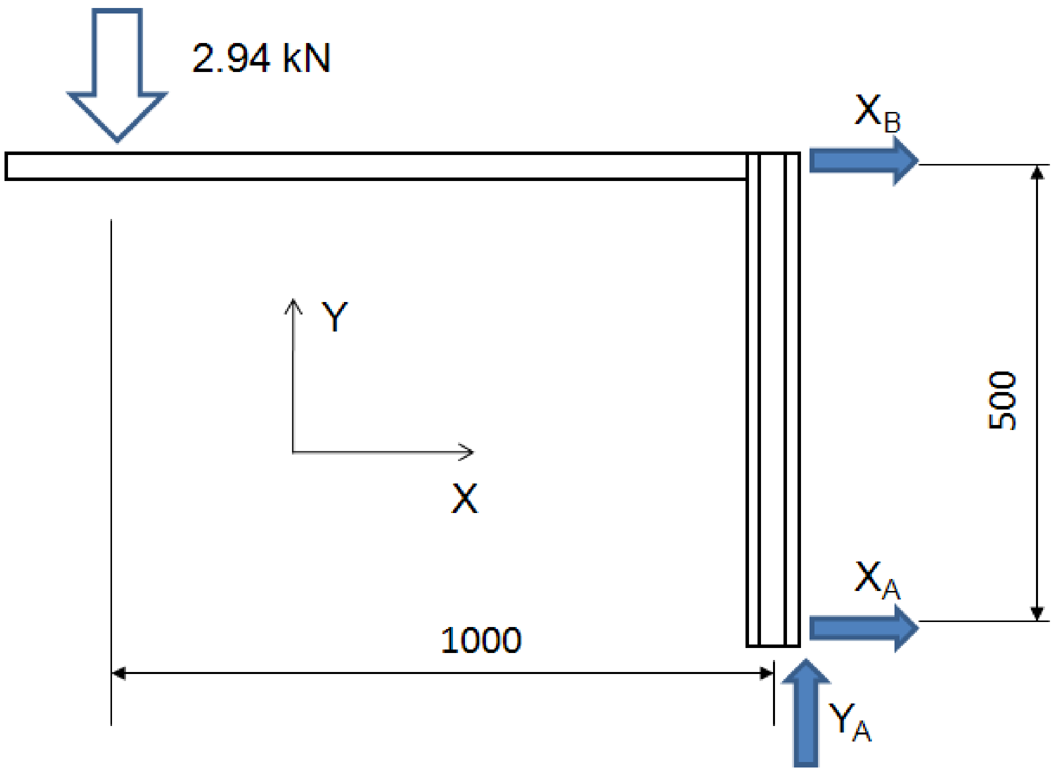


Fig. 1.2

Calcolo reazioni vincolari

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo A):

$X_A := 0$ $Y_A := 0$ $X_B := 0$

Given

R_x = 0 ---> $X_A + X_B = 0$

R_y = 0 ---> $Y_A - F = 0$

MzA = 0 ---> $F \cdot 2 \cdot L - X_B \cdot L = 0$

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(X_A, Y_A, X_B)$$

si ottengono i seguenti valori delle reazioni vincolari :

$X_A = -5.884 \cdot kN$ $\qquad$ $Y_A = 2.942 \cdot kN$ $\qquad$ $X_B = 5.884 \cdot kN$

Caratteristiche sezioni e materiale

Le caratteristiche geometriche delle sezioni della trave sono calcolate nel seguito.

Tratto orizzontale

$$A_1 := \frac{b^2}{2} \qquad A_1 = 1.8 \times 10^3 \cdot mm^2$$

$$J_1 := \frac{b^4}{12 \cdot 2^3} \qquad J_1 = 1.35 \times 10^5 \cdot mm^4$$

Tratto verticale

$$A_2 := 2 \cdot b \cdot s + (h - 2 \cdot s) \cdot s \qquad A_2 = 412 \cdot mm^2$$

$$J_2 := \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \cdot \frac{(b - s)}{2} \cdot \frac{(h - 2 \cdot s)^3}{12} \qquad J_2 = 5.707 \times 10^5 \cdot mm^4$$

Caratteristiche di sollecitazione

Per il calcolo dello spostamento del punto di appoggio della massa si ricorre al metodo del bilancio di energia. In base alle reazioni vincolari calcolate si ottiene il seguente diagramma di corpo libero (Fig. 1.3):

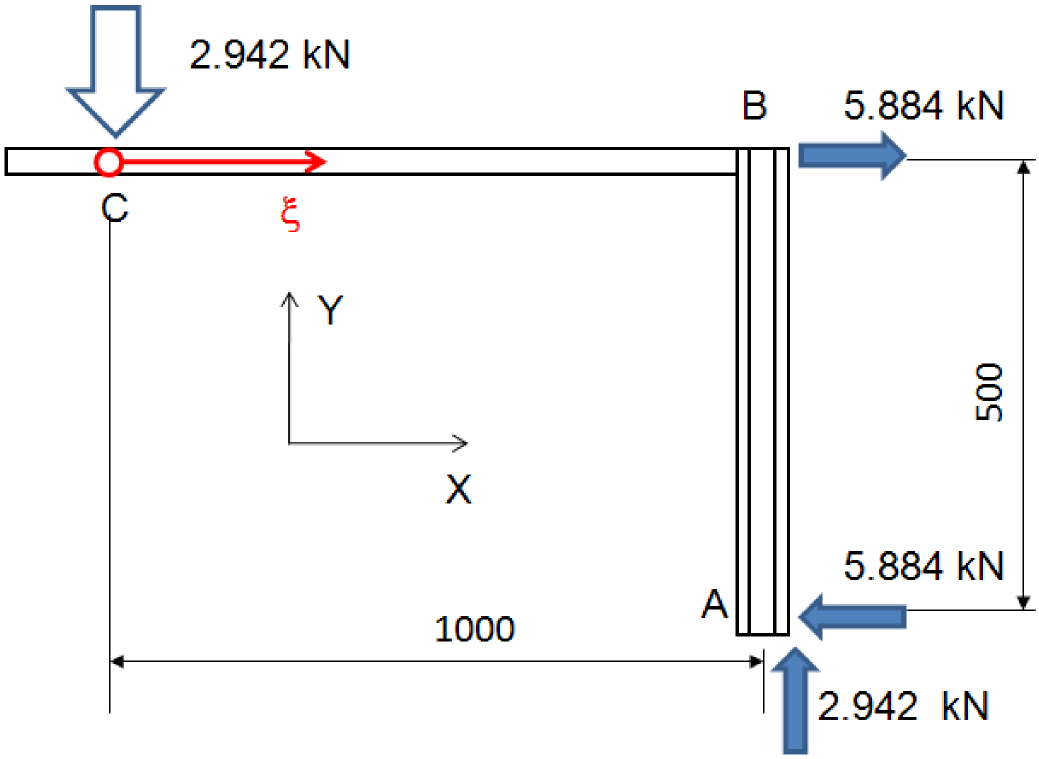


Fig. 1.3

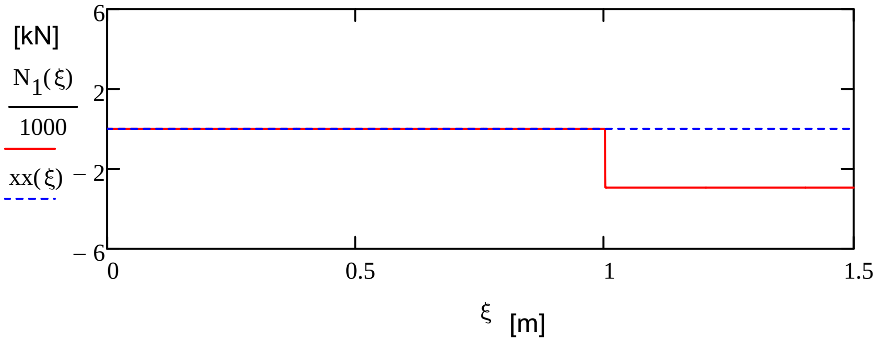
dal quale si ricavano, per la trave orizzontale, i seguenti andamenti delle caratteristiche di sollecitazione in funzione della coordinata curvilinea ξ.

$\xi := 0\cdot mm, 1\cdot mm \,..\, 3\cdot L$

$xx(\xi) := 0$

Forza normale
La forza normale risulta data da:

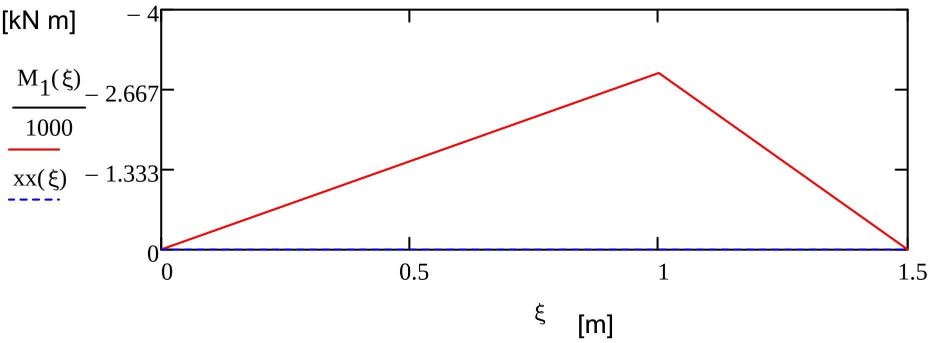
$$N_1(\xi) := \begin{cases} 0 \cdot N & \text{if } 0 \le \xi \le 2 \cdot L \\ -2942 \cdot N & \text{otherwise} \end{cases}$$



Taglio
Il taglio non viene tracciato, dato che il suo contributo allo spostamento è trascurabile:

Momento flettente
Il momento flettente risulta dato da:

$$M_1(\xi) := \begin{cases} -2.942 \cdot kN \cdot \xi & \text{if } 0 \le \xi \le 2 \cdot L \\ -5.884 \cdot kN \cdot (3 \cdot L - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Calcolo dello spostamento

Lo spostamento δ_C del punto di appoggia della massa può essere calcolato uguagliando il lavorc compiuto dal carico F

$$L_F := \frac{F \cdot \delta_C}{2}$$

all'energia elastica immagazzinata all'interno della trave:

$$L_e := \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\cdot L} \frac{M(\xi)^2}{2E\cdot J_1} + \frac{N(\xi)^2}{2E\cdot A_1}\, d\xi + \int_{2\cdot L}^{3\cdot L} \frac{M(\xi)^2}{2E\cdot J_2} + \frac{N(\xi)^2}{2E\cdot A_2}\, d\xi\right)$$

Da cui si ottiene:

$$\delta_C := \left(\int_0^{2\cdot L} \frac{M_1(\xi)^2}{2E\cdot J_1} + \frac{N_1(\xi)^2}{2E\cdot A_1}\, d\xi + \int_{2\cdot L}^{3\cdot L} \frac{M_1(\xi)^2}{2E\cdot J_2} + \frac{N_1(\xi)^2}{2E\cdot A_2}\, d\xi\right)\cdot\frac{2}{F}$$

$$\delta_C = 38.7\cdot mm$$

ESERCIZIO 2 (Punti 10)

Calcolare il massimo valore della massa M che può essere sollevata (rimanendo in campo elastico lineare) tramite il dispositivo mostrato in Fig. 1, sotto le seguenti ipotesi:

- si trascurino le tensioni di taglio
- non si consideri l'effetto della flessione su eventuali fenomeni di instabilità elastica

.

Dati:

$\sigma_{amm} := 700 \cdot MPa$ (tensione ammissibile materiale forza)

Svolgimento

Tratto orizzontale

Per il tratto orizzontale (C-B) della trave il valore massimo delle caratteristiche di sollecitazione si verifica nel punto B.
La tensione massima sulla sezione in tale punto vale:

$$\sigma_{maxB1} := \frac{M_1(2 \cdot L)}{J_1} \cdot \left(\frac{-b}{4}\right) \qquad \sigma_{maxB1} = 326.889 \cdot MPa$$

Tratto verticale

Per il tratto verticale (B-A) della trave il valore massimo delle caratteristiche di sollecitazione si verifica nel punto B.
La tensione massima sulla sezione in tale punto vale:

$$\sigma_{maxB2} := \left| \frac{M_1(2 \cdot L)}{J_2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1(2.5 \cdot L)}{A_2} \right| \qquad \sigma_{maxB2} = 239.107 \cdot MPa$$

Inoltre il tratto verticale è compresso, per cui occorre verificare che non si raggiunga la tensione critica:

$$\sigma_{crit} := \frac{\dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot J_2}{L^2}}{A_2} \qquad \sigma_{crit} = 1.148 \times 10^4 \cdot MPa$$

Calcolo del valore massimo ammissibile della massa M.

Essendo il problema lineare, il valore massimo ammissibile della massa potrà essere calcolato come prodotto del valore attuale per il fattore che determina il raggiungimento della condizione critica più vicina:

$$M_{lim} := M \cdot \min\left(\frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{maxB1}}, \frac{\sigma_{amm}}{\sigma_{maxB2}}, \frac{\sigma_{crit}}{\frac{-N_1(2.5 \cdot L)}{A_2}}\right)$$

$$M_{lim} = 642.42\,\mathrm{kg}$$

ESERCIZIO 3 (Punti 5)

Data la struttura mostrata in Fig. 1, calcolare (in cicli/sec) la prima frequenza naturale, considerando la massa sollevata come concentrata nel suo baricentro ed oscillante in direzione verticale e la trave come priva di massa propria.

Svolgimento

Dato che la massa della trave può essere trascurata, la struttura è assimilabile ad un semplice sistema massa-molla ad un solo grado di libertà (Fig. 4.2), nel quale la massa è quella sollevata, mentre la rigidezza corrisponde a quella flessionale della trave nel punto di appoggio della massa stessa.
La rigidezza della molla equivalente alla trave può pertanto essere valutata come rapporto tra il carico applicato ed il relativo spostamento:

$$k := \frac{F}{\delta_C} \qquad k = 7.602 \times 10^4 \cdot \frac{N}{m} \qquad M = 300\,kg$$

Il valore del primo modo proprio per una oscillazione verticale nel piano della Fig. 1 è dato da:

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad \omega = 15.919\,\frac{1}{s}$$

$$f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \qquad f = 2.534\,\frac{1}{s}$$