UNIVERSITA DI PISA - ANNO ACCADEMICO 2010-11
CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA (N.O.)

CORSO DI
PRINCIPI DI MECCANICA E COSTRUZIONI MECCANICHE

VERIFICA INTERMEDIA DEL 14-05-2011

ESERCIZIO 1 (Punti 15 o 12)

Data la struttura mostrata in Figura 1.1, calcolare lo spostamento verticale del punto di "A" all'estremità della trave orizzontale.
Nota: per ottenere il punteggio di 12 è sufficiente che si imposti correttamente la relazione risolutiva (i forma di integrale) indicando correttamente gli estremi di integrazione e l'espressione completa e corret di tutte le funzioni integrande, ma senza svolgere compiutamente il calcolo.

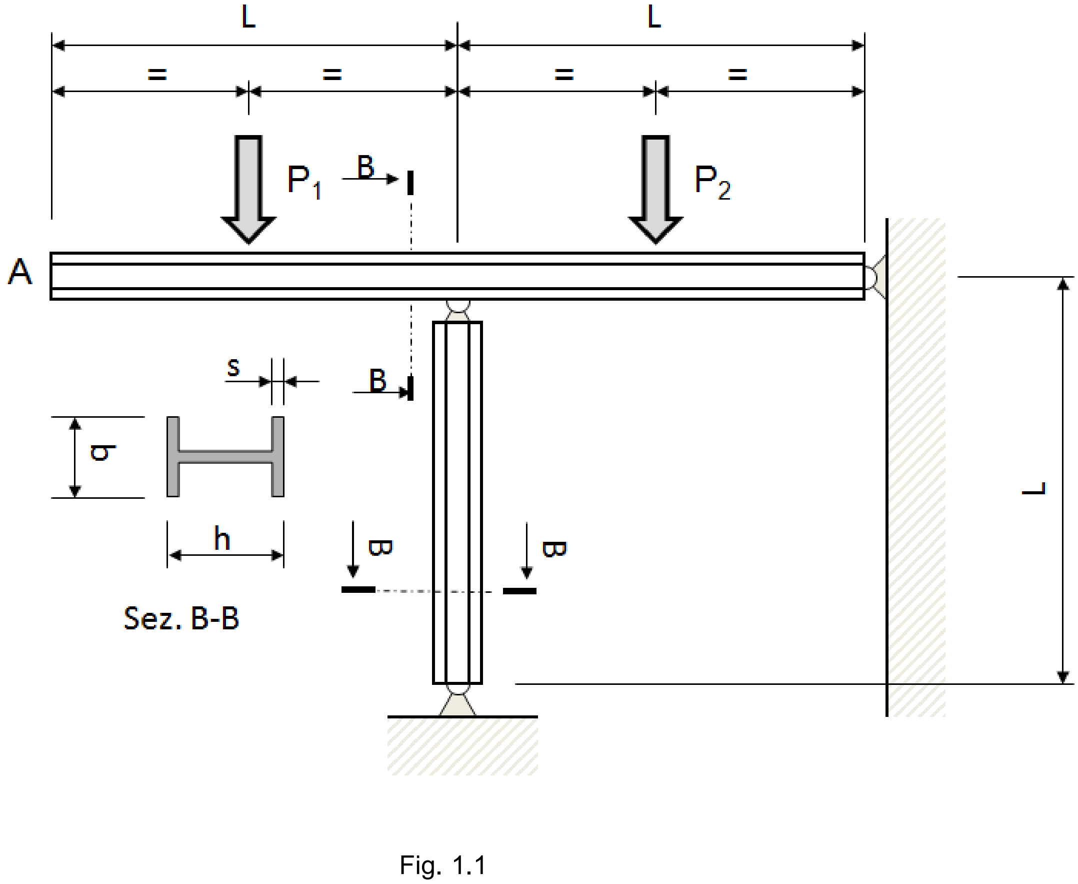


Fig. 1.1

Dati

$L := 2000 \cdot mm$

Materiale: acciaio

$b := 60 \cdot mm$

$s_0 := 2 \cdot mm$

$h := 90 \cdot mm$

$P_1 := 5 \cdot kN$

$P_2 := 10 \cdot kN$

Altri parametri

$E := 210000 \cdot MPa$ Modulo Young acciaio

Svolgimento

La forza complessiva applicata alla trave per il sollevamento della massa M è pari a:

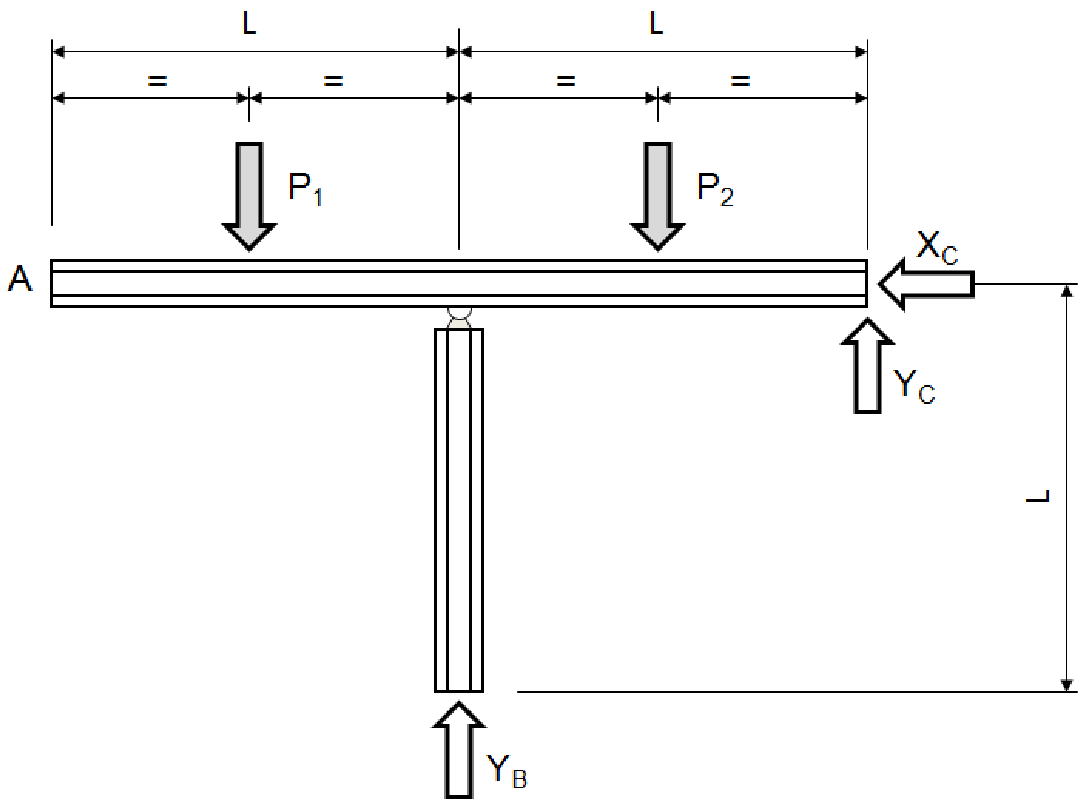


Fig. 1.2

Calcolo reazioni vincolari

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo C):

$X_C := 0$ $Y_C := 0$ $Y_B := 0$

Given

$R_x = 0$ ---> $X_C = 0$

$R_y = 0$ ---> $Y_B + Y_C - P_1 - P_2 = 0$

MzC = 0 ---> $Y_B \cdot L - P_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot L - P_2 \cdot \frac{L}{2} = 0$

$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_B \\ Y_C \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(X_C, Y_B, Y_C)$$

si ottengono i seguenti valori delle reazioni vincolari :

$X_C = 0 \cdot kN$ $\qquad$ $Y_B = 12.5 \cdot kN$ $\qquad$ $Y_C = 2.5 \cdot kN$

Caratteristiche sezioni e materiale

Le caratteristiche geometriche delle sezioni della trave sono calcolate nel seguito.

$$A_0 := 2 \cdot b \cdot s_0 + (h - 2 \cdot s_0) \cdot s_0 \qquad A_0 = 412 \cdot mm^2$$

$$J_x := \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \cdot \frac{(b - s_0)}{2} \cdot \frac{(h - 2 \cdot s_0)^3}{12} \qquad J_x = 5.707 \times 10^5 \cdot mm^4$$

$$J_y := \frac{b^3 \cdot 2 \cdot s_0}{12} + \frac{s_0^{\,3} \cdot (h - 2 \cdot s_0)}{12} \qquad J_y = 7.206 \times 10^4 \cdot mm^4$$

Caratteristiche di sollecitazione

In base alle reazioni vincolari calcolate si ottiene il seguente diagramma di corpo libero (Fig. 1.3):

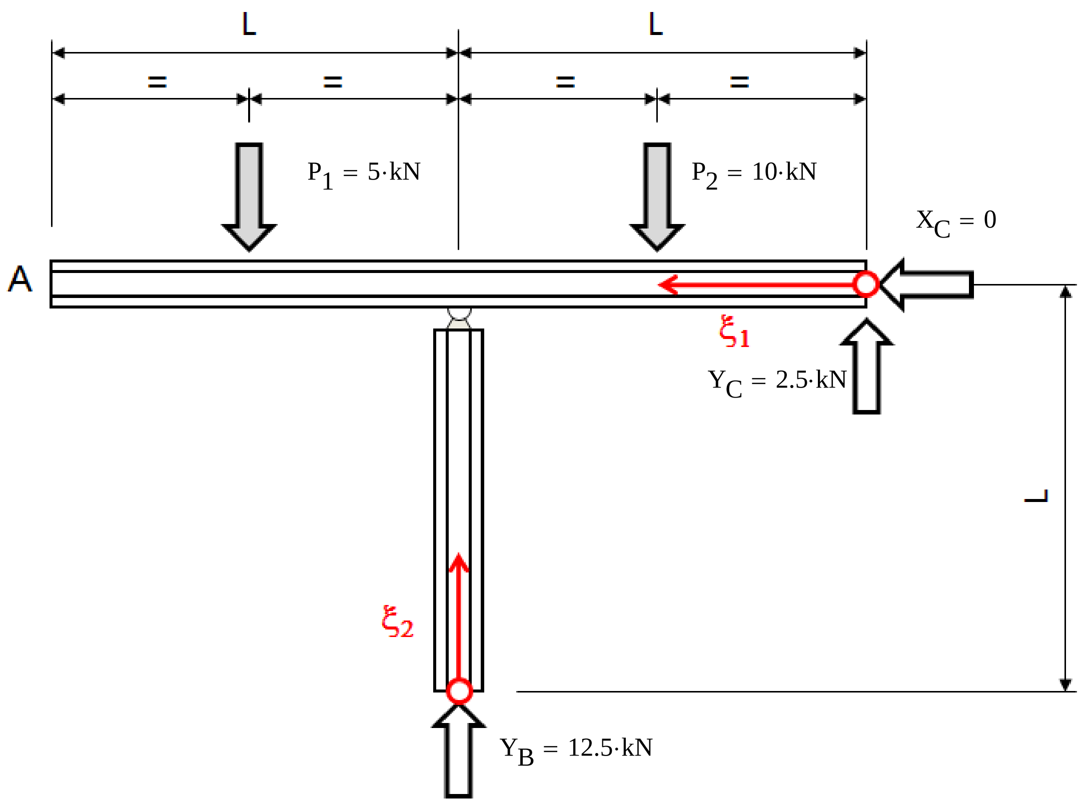


Fig. 1.3

dal quale si ricavano, per la trave orizzontale, i seguenti andamenti delle caratteristiche di sollecitazione in funzione della coordinata curvilinea ξ_1.

$$\xi_1 := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. 2 \cdot L$$

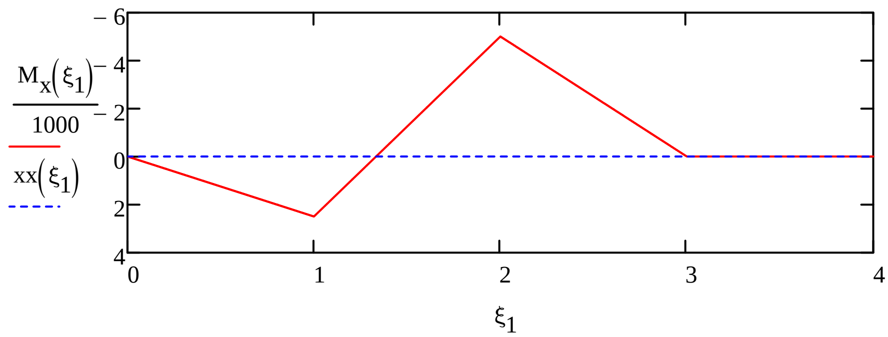
$$xx(\xi) := 0$$

Forza normale
La forza normale risulta identicamente nulla:

Taglio
Il taglio non viene tracciato, dato che il suo contributo allo spostamento è trascurabile:

Momento flettente
Il momento flettente risulta dato da:

$$M_x(\xi_1) := \begin{cases} Y_C \cdot \xi_1 & \text{if } 0 \le \xi_1 \le \dfrac{L}{2} \\ Y_C \cdot \xi_1 - P_2 \cdot \left(\xi_1 - \dfrac{L}{2}\right) & \text{if } \dfrac{L}{2} \le \xi_1 \le L \\ -P_1 \cdot \left(\dfrac{3}{2} \cdot L - \xi_1\right) & \text{if } L \le \xi_1 \le \dfrac{3L}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$M_x(2 \cdot m) = -5 \cdot kN \cdot m$ $\qquad$ $M_x(1 \cdot m) = 2.5 \cdot kN \cdot m$

Mentre per la trave verticale, si ha la sola forza normale, di valore costante.

$\xi_2 := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. L$

$N_V(\xi_2) := -12.5 \cdot kN$

Calcolo dello spostamento

Lo spostamento δ_C del punto di appoggia della massa può essere calcolato tramite il metodo degli integrali di Mohr. A tale scopo, si inserisce un carico unitario nel punto A e si valutano le relative reazioni vincolari (Fig. 1.4).

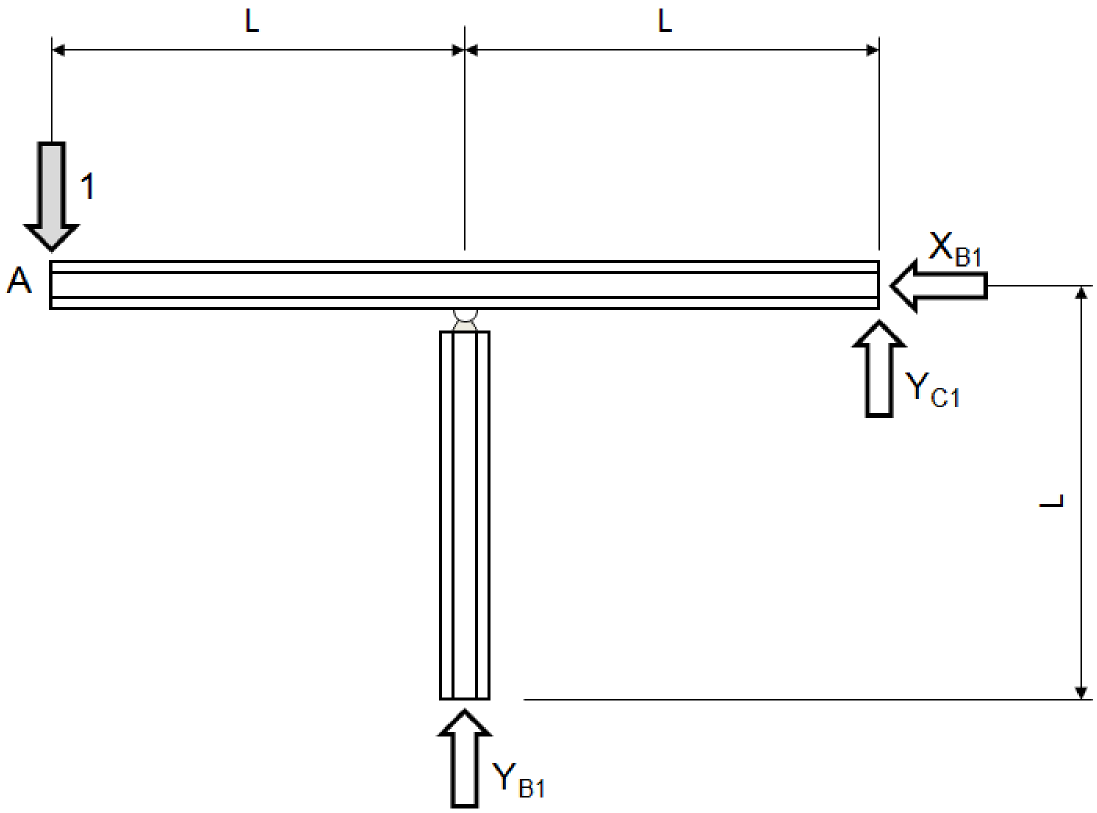


Fig. 1.4

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo C):

$X_{C1} := 0 \qquad Y_{C1} := 0 \qquad Y_{B1} := 0$

Given

$R_x = 0$ ---> $\qquad X_{C1} = 0$

$R_y = 0$ ---> $\qquad Y_{B1} + Y_{C1} - 1 = 0$

MzC = 0 ---> $\qquad Y_{B1} \cdot L - 1 \cdot 2 \cdot L = 0$

$$\begin{pmatrix} X_{C1} \\ Y_{B1} \\ Y_{C1} \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(X_{C1}, Y_{B1}, Y_{C1})$$

si ottengono i seguenti valori delle reazioni vincolari :

$X_{C1} = 0 \qquad\qquad Y_{B1} = 2 \qquad\qquad Y_{C1} = -1$

dai quali si ricava il seguente diagramma di corpo libero (Fig. 1.5).

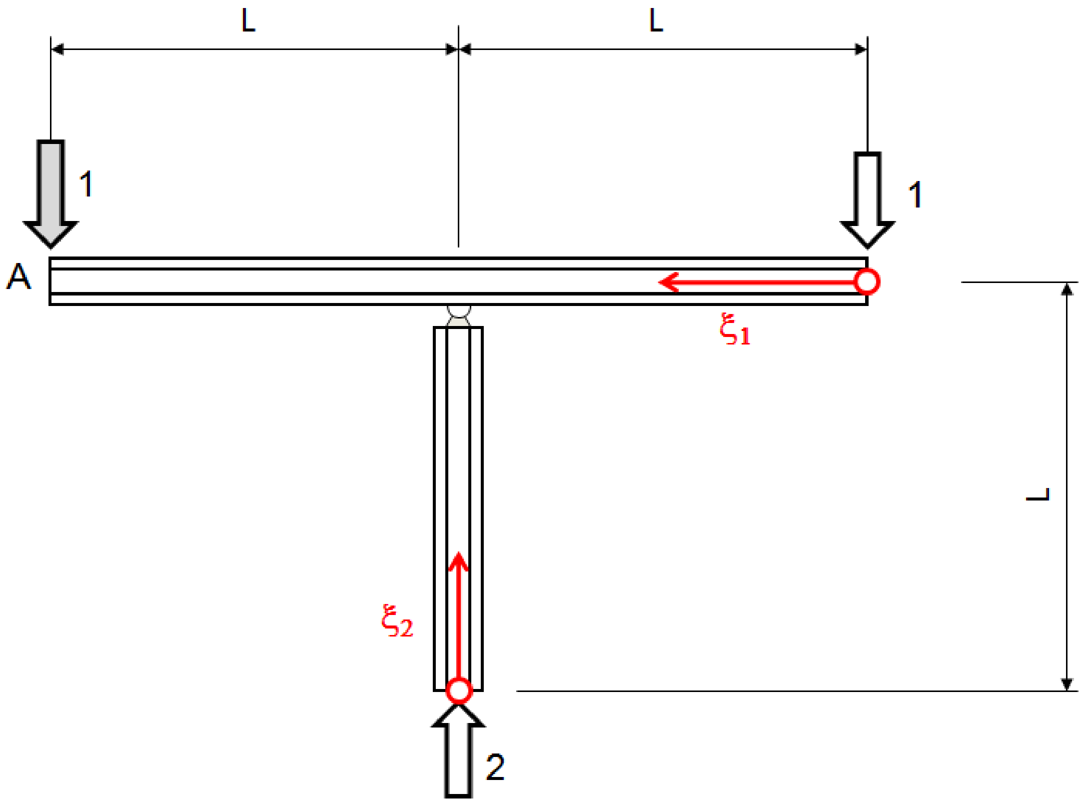


Fig. 1.5

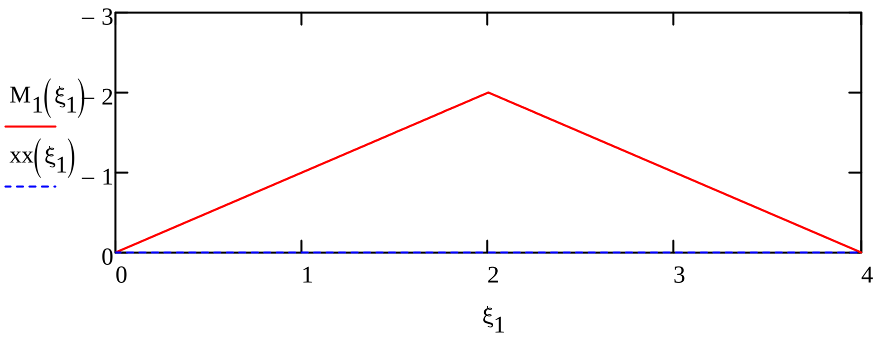
dal quale si ricavano, per la trave orizzontale, i seguenti andamenti delle caratteristiche di sollecitazione in funzione della coordinata curvilinea ξ_1.

Forza normale
La forza normale risulta identicamente nulla:

Taglio
Il taglio non viene tracciato, dato che il suo contributo allo spostamento è trascurabile:

Momento flettente
Il momento flettente risulta dato da:

$$M_1(\xi_1) := \begin{cases} -1\cdot\xi_1 & \text{if } 0 \le \xi_1 \le L \\ -1\cdot(2\cdot L - \xi_1) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Mentre per la trave verticale, si ha la sola forza normale, di valore costante.

$$\xi_2 := 0\cdot mm, 1\cdot mm .. L$$

$$N_{V1}(\xi_2) := -2$$

Calcolo dello spostamento

Il calcolo dello spostamento si ottiene tramite l'integrale di Mohr

Da cui si ottiene:

$$\delta_A := \left(\int_0^{2\cdot L} \frac{M_1(\xi_1)\cdot M_x(\xi_1)}{E\cdot J_x}\,d\xi_1 + \int_0^{L} \frac{N_{V1}(\xi_2)\cdot N_V(\xi_2)}{E\cdot A_0}\,d\xi_2\right) = 49.249\cdot mm$$

ESERCIZIO 2 (Punti 10)

Verificare la resistenza della struttura contro i principali meccanismi di cedimento, sotto le seguenti ipotesi:

- si trascurino le tensioni di taglio

.

Dati:

$\sigma_{amm} := 700 \cdot MPa$ (tensione ammissibile materiale)

Svolgimento

Tratto orizzontale

Per il tratto orizzontale (C-B) della trave il valore massimo delle caratteristiche di sollecitazione si verifica nel punto ξ_1=2m.

La tensione massima sulla sezione in tale punto vale:

$$\sigma_{maxB1} := \frac{M_x(L)}{J_x} \cdot \left(\frac{-b}{4} \right) \qquad \sigma_{maxB1} = 131.411 \cdot MPa$$

Tratto verticale

Per il tratto verticale (B-A) della trave il valore delle caratteristiche di sollecitazione è costante ed include la sola forza normale

La tensione massima sulla sezione in tale punto vale:

$$\sigma_{maxB2} := \left| \frac{N_V(L)}{A_0} \right| \qquad \sigma_{maxB2} = 30.34 \cdot MPa$$

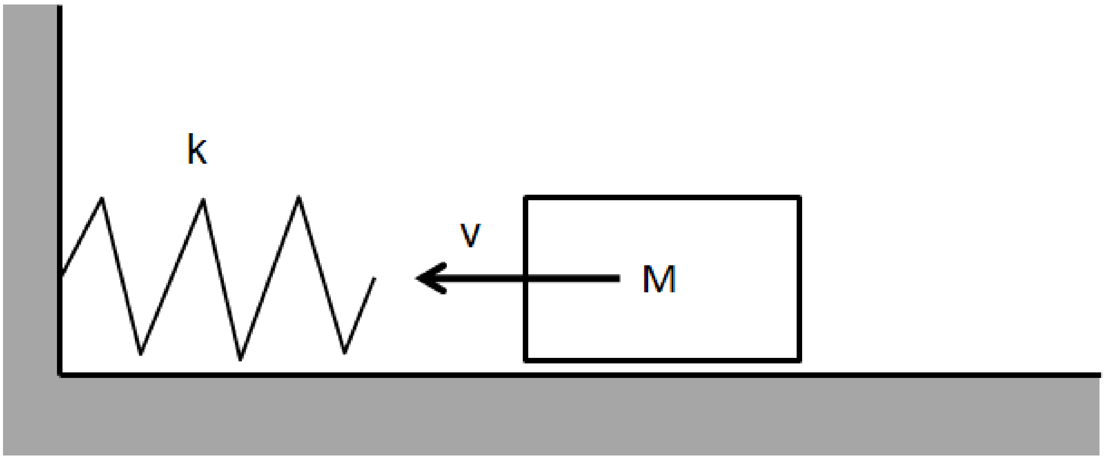
Inoltre il tratto verticale è compresso, per cui occorre verificare che non si raggiunga la tensione critica:

$$\sigma_{crit} := \frac{\dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot J_y}{L^2}}{A_0} \qquad \sigma_{crit} = 90.623 \cdot MPa$$

Esercizio 3 (Punti 5)

La massa M (Fig. 3.1) si muove senza attrito con velocità "V_0" su di un piano orizzontale. All'istante t=0 essa viene in contatto con la molla di rigidezza k e rimane ad essa bloccata per t>0.

Fornire la legge del moto del sistema per t>0



Fug. 3.1

$M := 10 \cdot kg$ $\qquad$ $k := 25000 \cdot \frac{N}{m}$ $\qquad$ $V_0 := 25 \cdot \frac{m}{s}$

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{M}} = 50\,\frac{1}{s}$$

$$X := \frac{V_0}{\omega_n} = 0.5\,m$$