

Quesito 1 (Punti 5)

Data la travatura reticolare mostrata nella Figura 1, determinare:

1. le reazioni vincolari
2. le forze agenti nelle aste

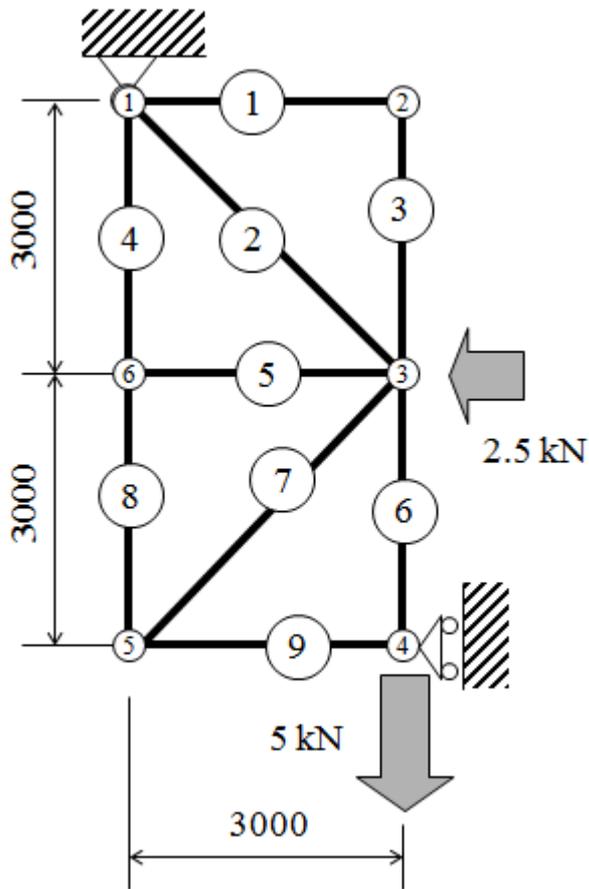


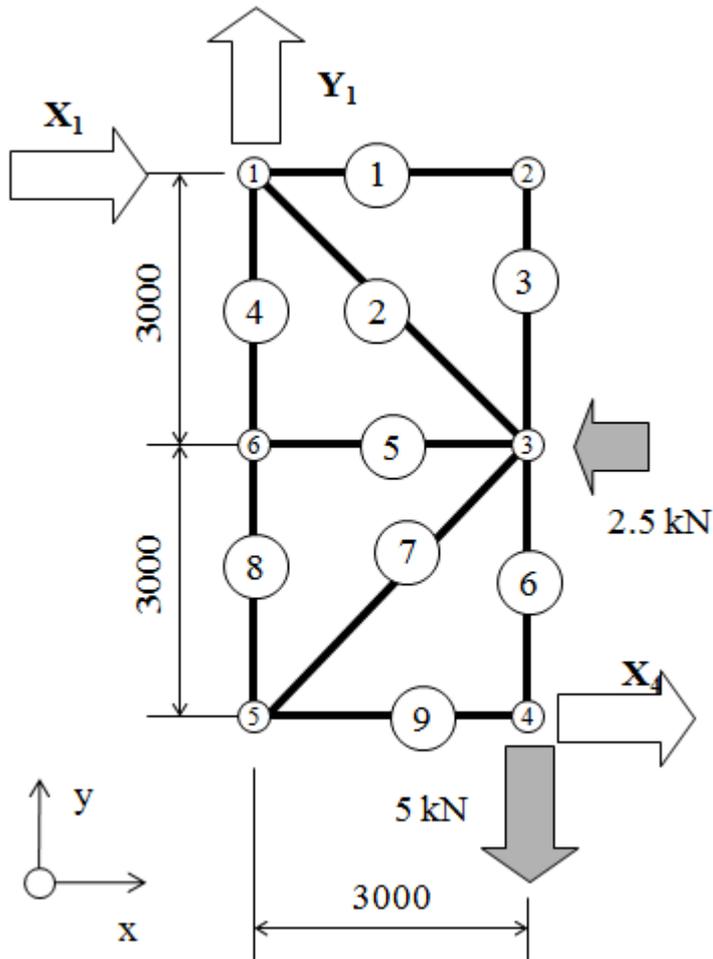
Fig. 1

Svolgimento

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente isostatica.

Fissato un SR cartesiano ortogonale, si sostituiscono i vincoli con le 3 reazioni vincolari incognite, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:



$$X_4 := 0 \quad X_1 := 0 \quad Y_1 := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow X_1 + X_4 - 2.5 = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_1 - 5 = 0$$

$$MR_{x1} = 0 \rightarrow X_4 \cdot 6000 - 5 \cdot 3000 - 2.5 \cdot 3000 = 0$$

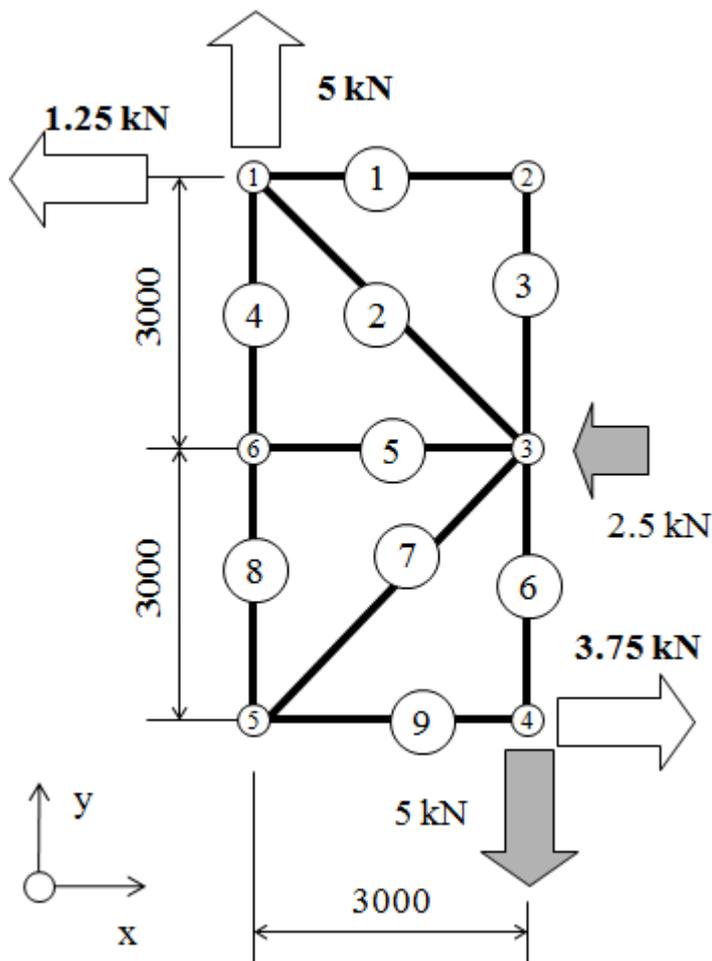
$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_1 \\ X_1 \end{pmatrix} := \text{Find}(X_4, Y_1, X_1)$$

$$X_4 = 3.75$$

$$Y_1 = 5$$

$$X_1 = -1.25$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma finale di corpo libero con tutti i carichi esterni applicati alla struttura.



Forze agenti nelle aste.

Si osserva in primo luogo che risulta immediatamente:

$$\mathbf{N}_1 := 0 \qquad \mathbf{N}_3 := 0 \qquad \mathbf{N}_5 := 0$$

Si procede alla soluzione, per le rimanenti aste, utilizzando il metodo dei nodi.

Nodo 4

$$\mathbf{N}_6 := 0 \qquad \mathbf{N}_9 := 0$$

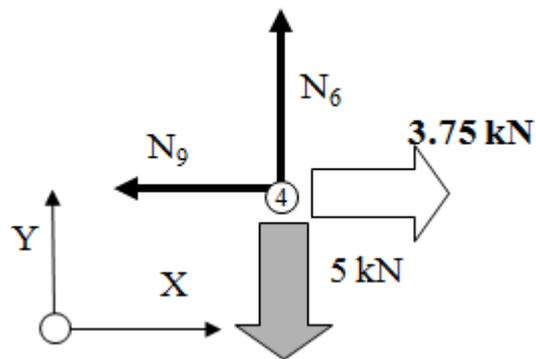
Given

$$R_x = 0 \longrightarrow -\mathbf{N}_9 + 3.75 = 0$$

$$R_y = 0 \longrightarrow \mathbf{N}_6 - 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_6 \\ \mathbf{N}_9 \end{pmatrix} := \text{Find}(\mathbf{N}_6, \mathbf{N}_9)$$

$$\mathbf{N}_6 = 5 \qquad \mathbf{N}_9 = 3.75$$



Nodo 5

$$\mathbf{N}_8 := 0 \qquad \mathbf{N}_7 := 0$$

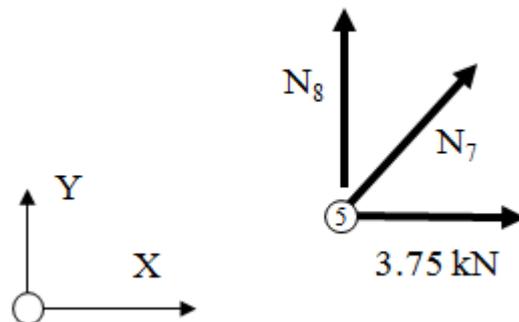
Given

$$R_x = 0 \longrightarrow \mathbf{N}_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3.75 = 0$$

$$R_y = 0 \longrightarrow \mathbf{N}_7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{N}_8 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_8 \\ \mathbf{N}_7 \end{pmatrix} := \text{Find}(\mathbf{N}_8, \mathbf{N}_7)$$

$$\mathbf{N}_8 = 3.75 \qquad \mathbf{N}_7 = -5.303$$



Nodo 1

$$N_2 := 0 \quad N_4 := 0$$

Given

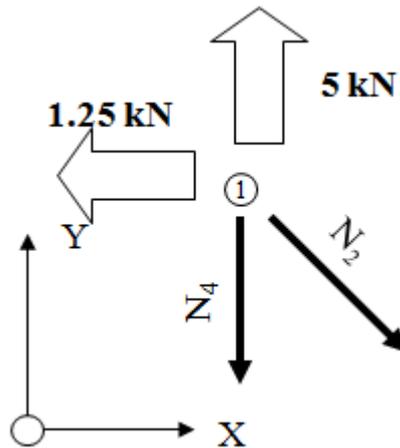
$$R_x = 0 \rightarrow N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.25 = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow -N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_4 + 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_2 \\ N_4 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_2, N_4)$$

$$N_2 = 1.768$$

$$N_4 = 3.75$$

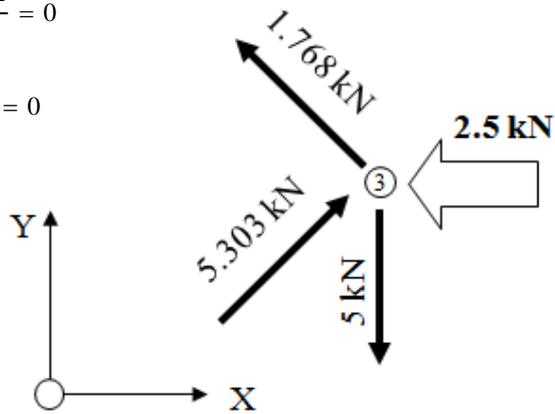


Nodo 3 - Verifica finale equilibrio

$$R_x = 0 \rightarrow -2.5 - 1.768 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5.303 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow 1.768 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5.303 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 = 0$$

OK



RIASSUNTO DEI RISULTATI

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = 1.768$$

$$N_3 = 0$$

$$N_4 = 3.75$$

$$N_5 = 0$$

$$N_6 = 5$$

$$N_7 = -5.303$$

$$N_8 = 3.75$$

$$N_9 = 3.75$$

Quesito 2a (Punti 16)

Data la struttura spaziale mostrata in Figura 2a.1 determinare:

1. il valore delle forze F_1 , F_2 ed F_3 richiesto per garantire l'equilibrio
2. l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione nella struttura, scrivendone l'espressione analitica in funzione di una opportuna coordinata presa lungo la fibra baricentrica e tracciandone il diagramma.

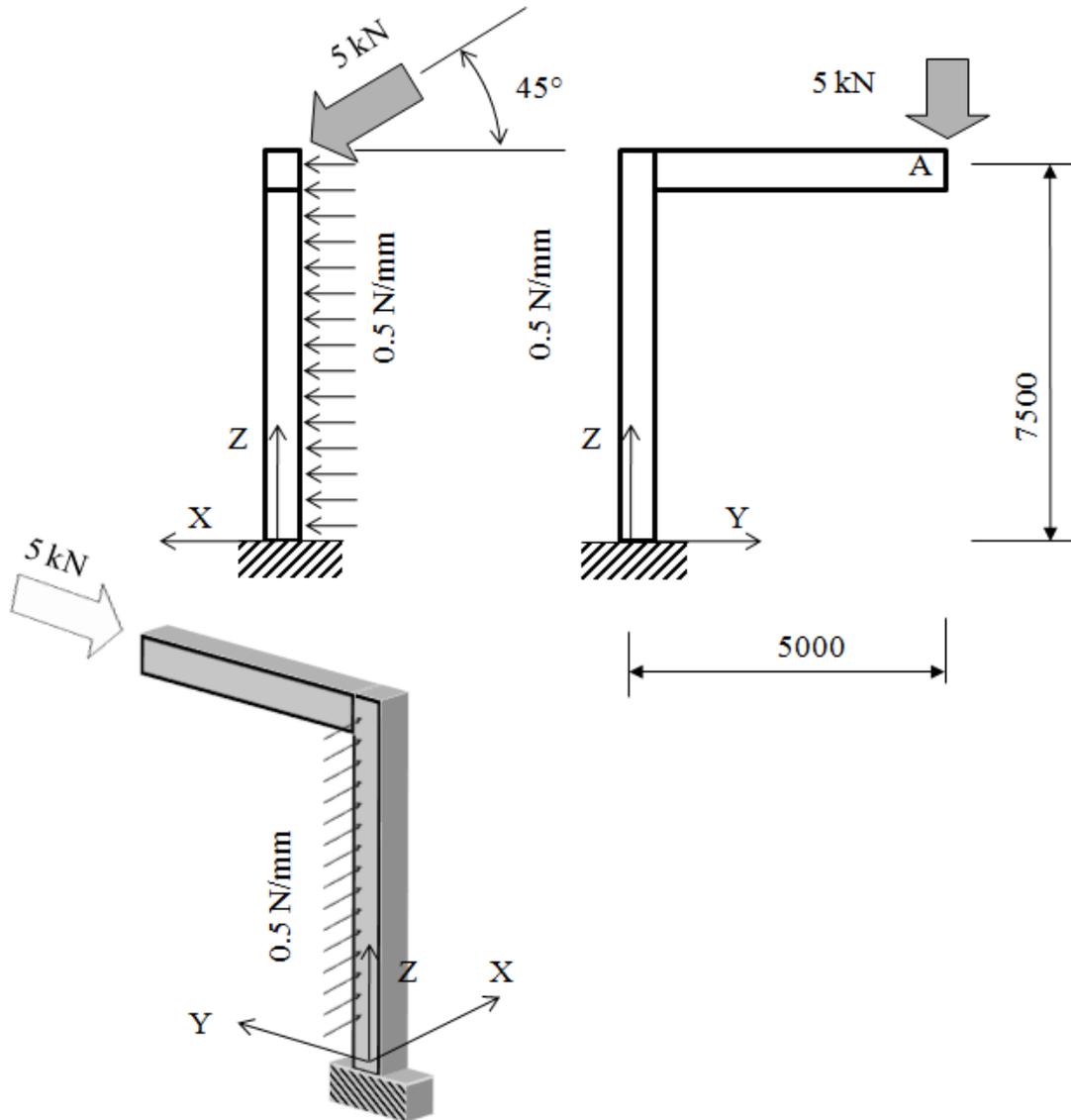
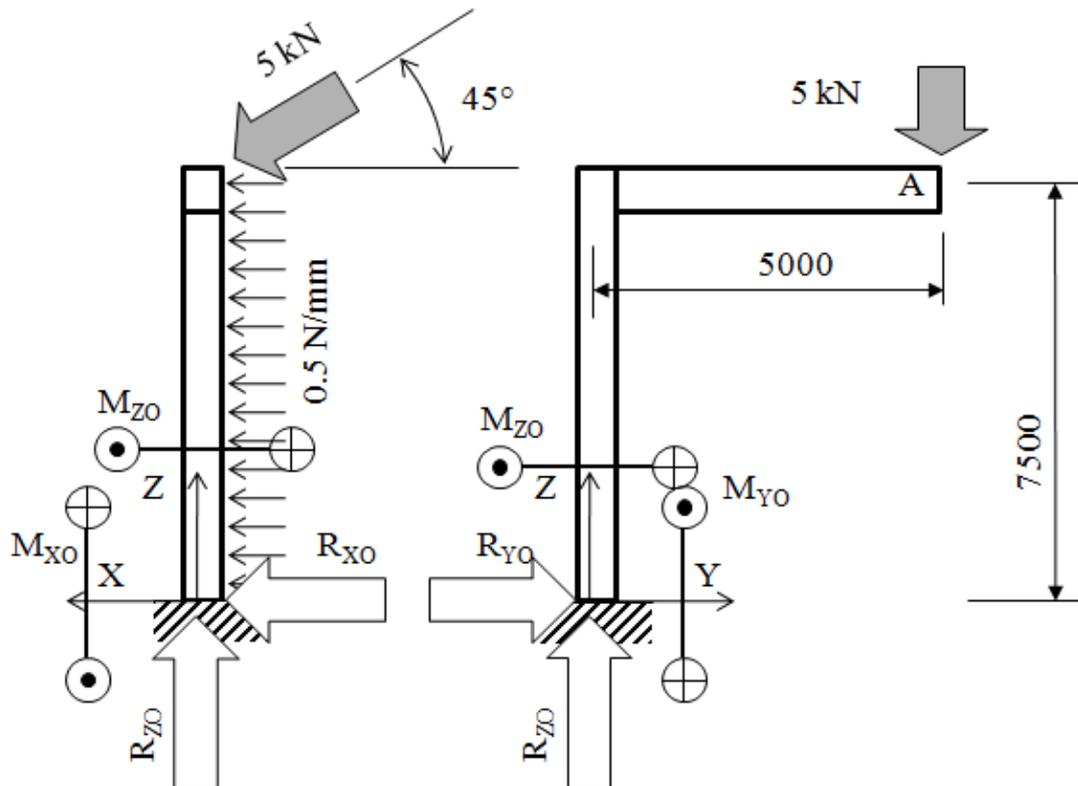


Fig. 2a

Calcolo delle reazioni vincolari.

Fissato un SR cartesiano ortogonale, come nella Figura 2a, sostituendo al vincolo di incastro le sei reazioni incognite si ottiene il seguente diagramma di corpo libero:



$$R_{XO} := 0 \cdot \text{kN}$$

$$R_{YO} := 0 \cdot \text{kN}$$

$$R_{ZO} := 0 \cdot \text{kN}$$

$$M_{XO} := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{YO} := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{ZO} := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow R_{XO} + 0.5 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 7500 \cdot \text{mm} + 5 \cdot \text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow R_{YO} = 0$$

$$R_z = 0 \rightarrow R_{ZO} - 5 \cdot \text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$MR_{xO} = 0 \rightarrow M_{xO} - 5 \cdot \text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 \cdot \text{m} = 0$$

$$MR_{yO} = 0 \rightarrow M_{yO} + 0.5 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 7500 \cdot \text{mm} \cdot \frac{7500}{2} \cdot \text{mm} + 5 \cdot \text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7500 \cdot \text{mm} = 0$$

$$MR_{zO} = 0 \rightarrow M_{zO} - 5 \cdot \text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5000 \cdot \text{mm} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{xO} \\ R_{yO} \\ R_{zO} \\ M_{xO} \\ M_{yO} \\ M_{zO} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{xO}, R_{yO}, R_{zO}, M_{xO}, M_{yO}, M_{zO})$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni incognite:

$$R_{xO} = -7.286 \cdot \text{kN}$$

$$R_{yO} = 0$$

$$R_{zO} = 3.536 \cdot \text{kN}$$

$$M_{xO} = 17.678 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

$$M_{yO} = -40.579 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{zO} = 17.678 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura:

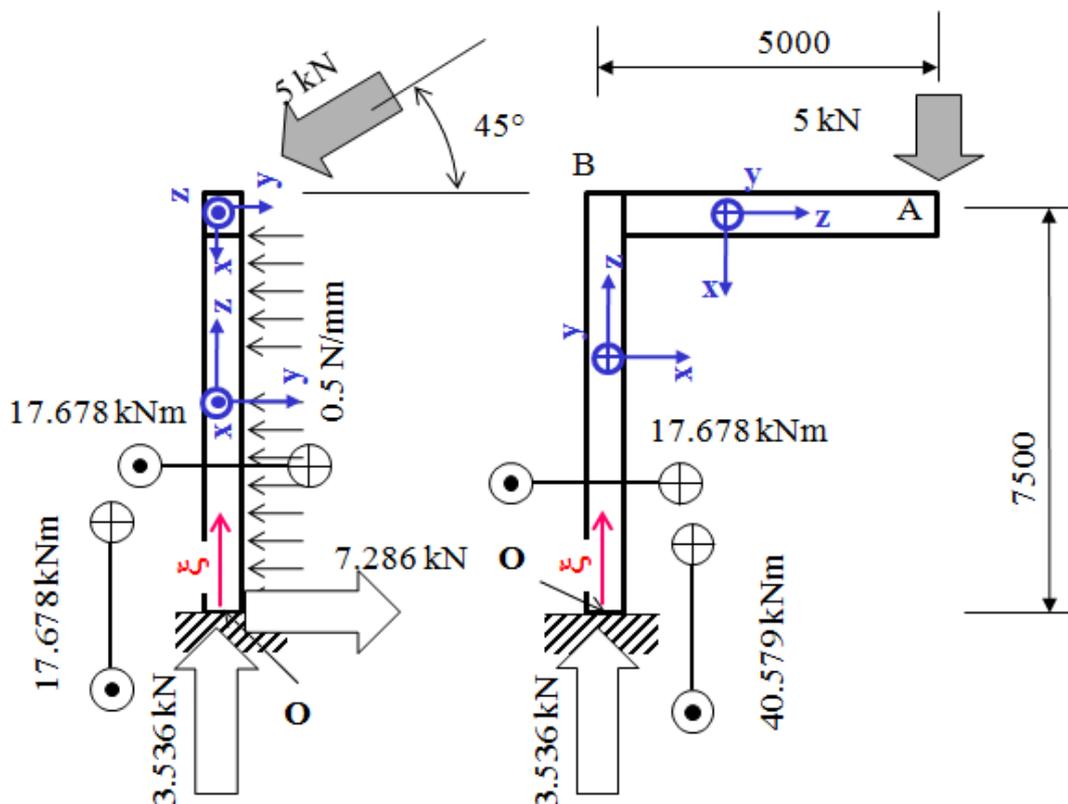


Fig. 2a1

DIAGRAMMI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce la coordinata curvilinea ξ (origine nel punto O, termine nel punto A, valore compreso tra 0 e 12.50 m) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento locale x-y-z per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, la cui disposizione nei diversi tratti di trave è mostrata in figura 2a1.

Si noti che, per semplificare la rappresentazione, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono stati rappresentati in forma lineare piana. Ai fini di una più semplice interpretazione, si noti che i punti significativi indicati sulla figura corrispondono ai seguenti valori della coordinata curvilinea ξ : Punto O -> $\xi=0$; Punto B -> $\xi=7.50$ m; Punto A -> $\xi=12.50$ m.

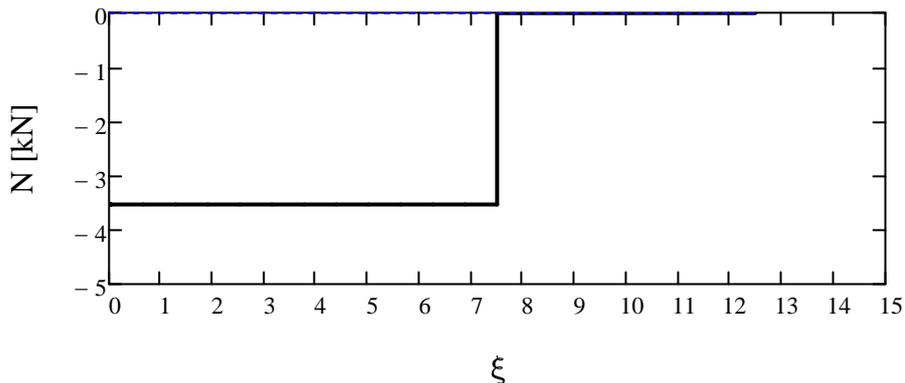
Forza Normale [kN]

(questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0)

$$\xi := 0, 0.001 \dots 12.5$$

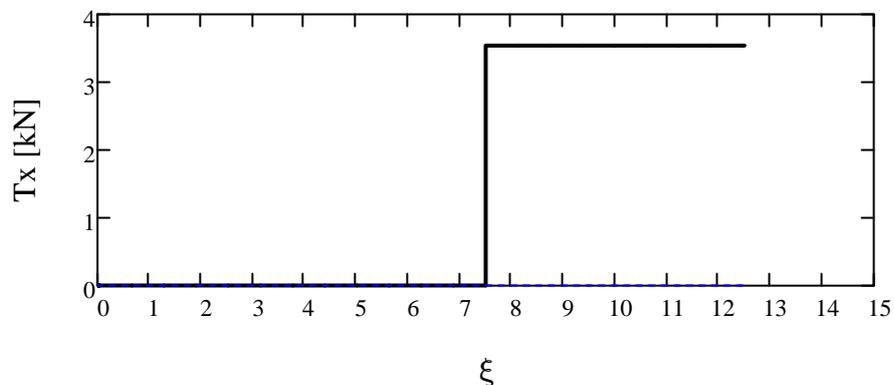
$$xx(\xi) := 0$$

$$N(\xi) := \begin{cases} -5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



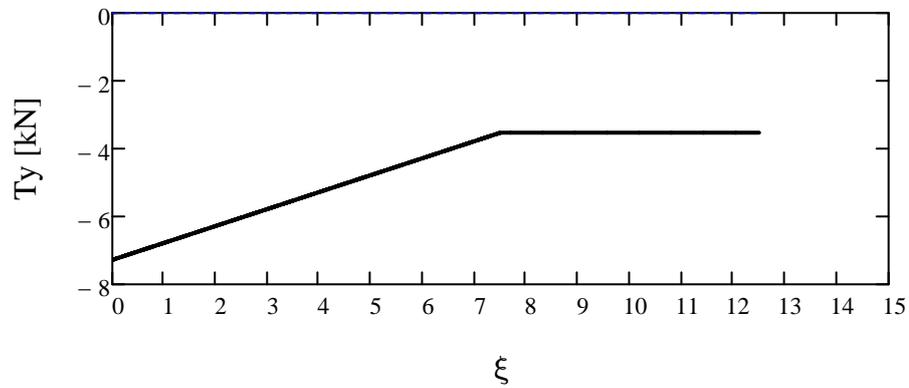
Taglio T_x

$$T_x(\xi) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ \left(5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$



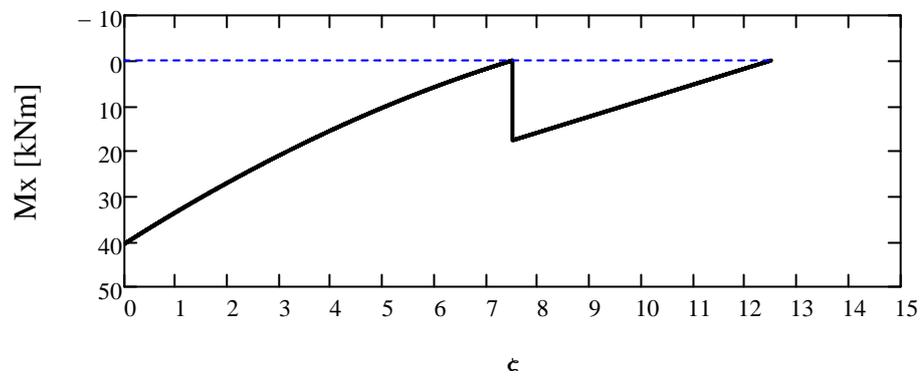
Taglio T_y

$$T_y(\xi) := \begin{cases} -[0.5 \cdot (7.5 - \xi)] - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ -\left(5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M_x

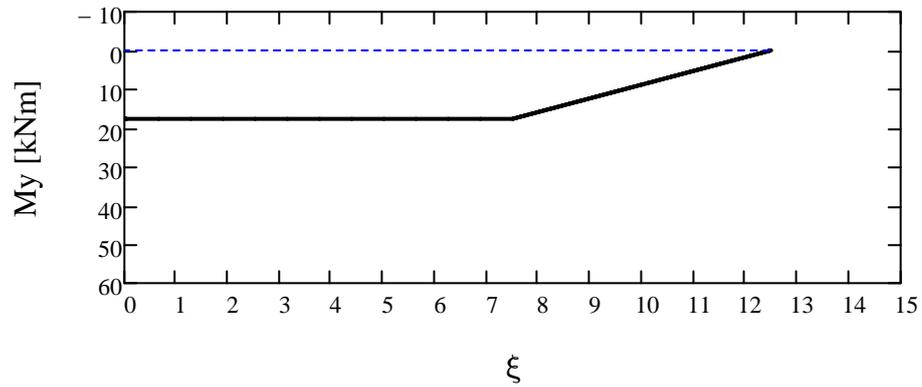
$$M_x(\xi) := \begin{cases} 0.5 \cdot \frac{(7.5 - \xi)^2}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (7.5 - \xi) & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (12.5 - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



5

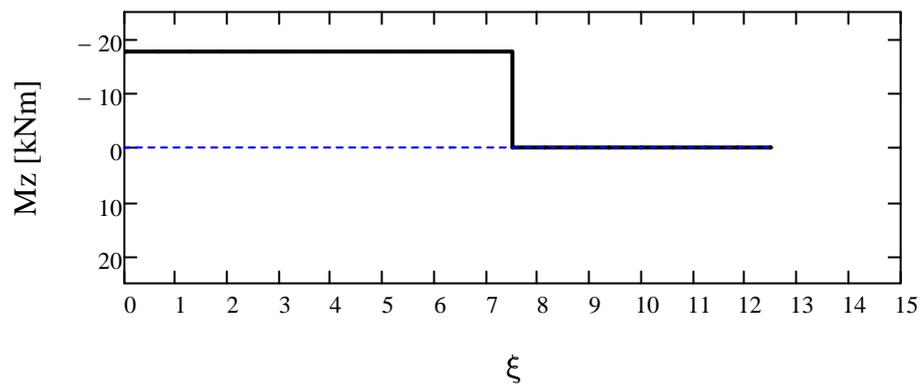
Momento M_y

$$M_y(\xi) := \begin{cases} 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (12.5 - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M_z

$$M_z(\xi) := \begin{cases} -5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Quesito 2b (alternativo al quesito 2a) (Punti 1

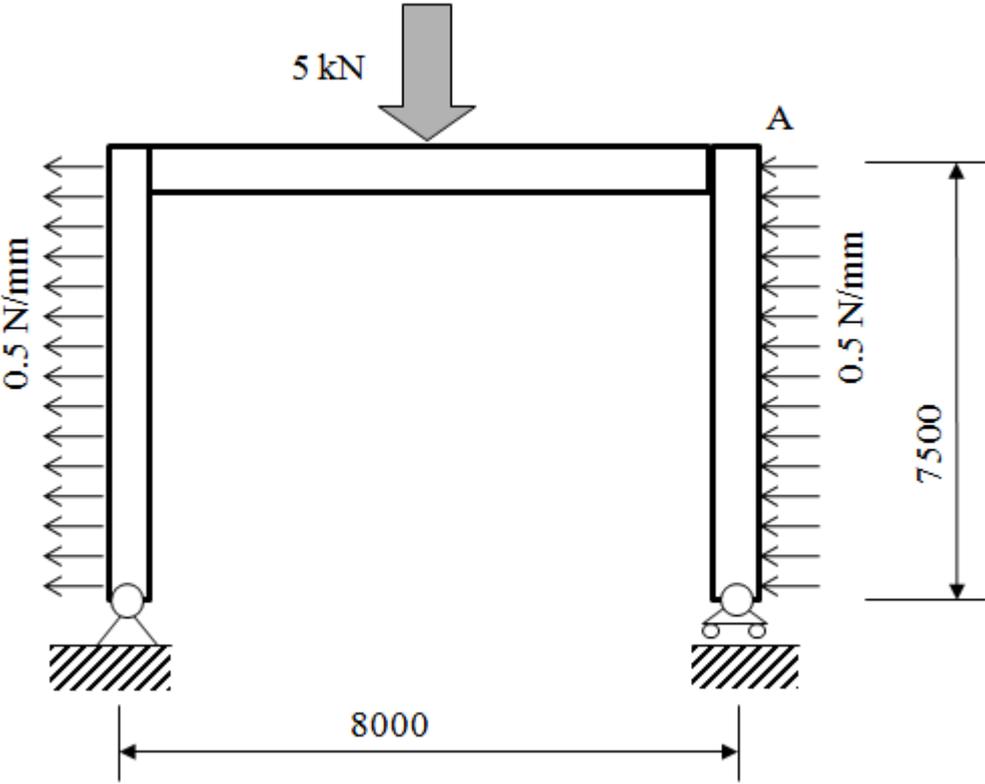


Fig. 2b1

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente ed internamente isostatica.

Fissato un SR cartesiano ortogonale, si sostituiscono i vincoli con le 3 reazioni vincolari incognite, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:

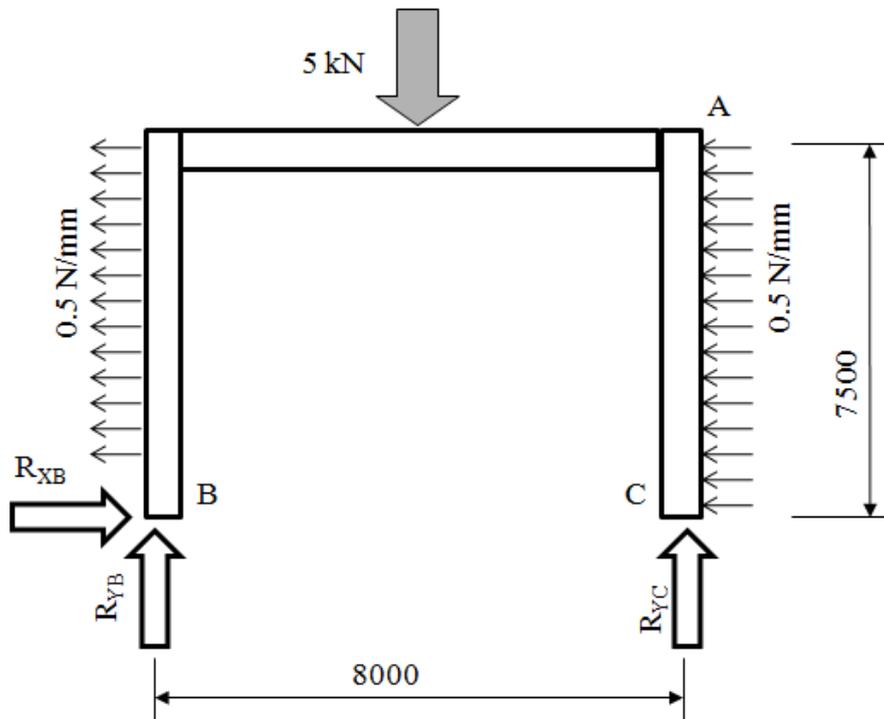


Fig. 2b2

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in kN, lunghezze in m, momenti calcolati rispetto al polo B):

$$R_{XB} := 0 \cdot \text{kN} \quad R_{YB} := 0 \cdot \text{kN} \quad R_{YC} := 0 \cdot \text{kN}$$

Given

Equilibrio intera struttura

$$R_x = 0 \rightarrow R_{XB} - 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 7.5 \cdot \text{m} = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow R_{YB} + R_{YC} - 5 \cdot \text{kN} = 0$$

$$M_{R_{ZB}} = 0 \rightarrow R_{YC} \cdot 8 \cdot \text{m} + 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 7.5 \cdot \text{m} \cdot \frac{7.5}{2} \cdot \text{m} - 5 \cdot \text{kN} \cdot 4 \cdot \text{m} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{XB} \\ R_{YB} \\ R_{YC} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{XB}, R_{YB}, R_{YC})$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari:

$$R_{XB} = 7.5 \cdot \text{kN}$$

$$R_{YB} = 6.016 \cdot \text{kN}$$

$$R_{YC} = -1.016 \cdot \text{kN}$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura, con tutte le forze applicate.

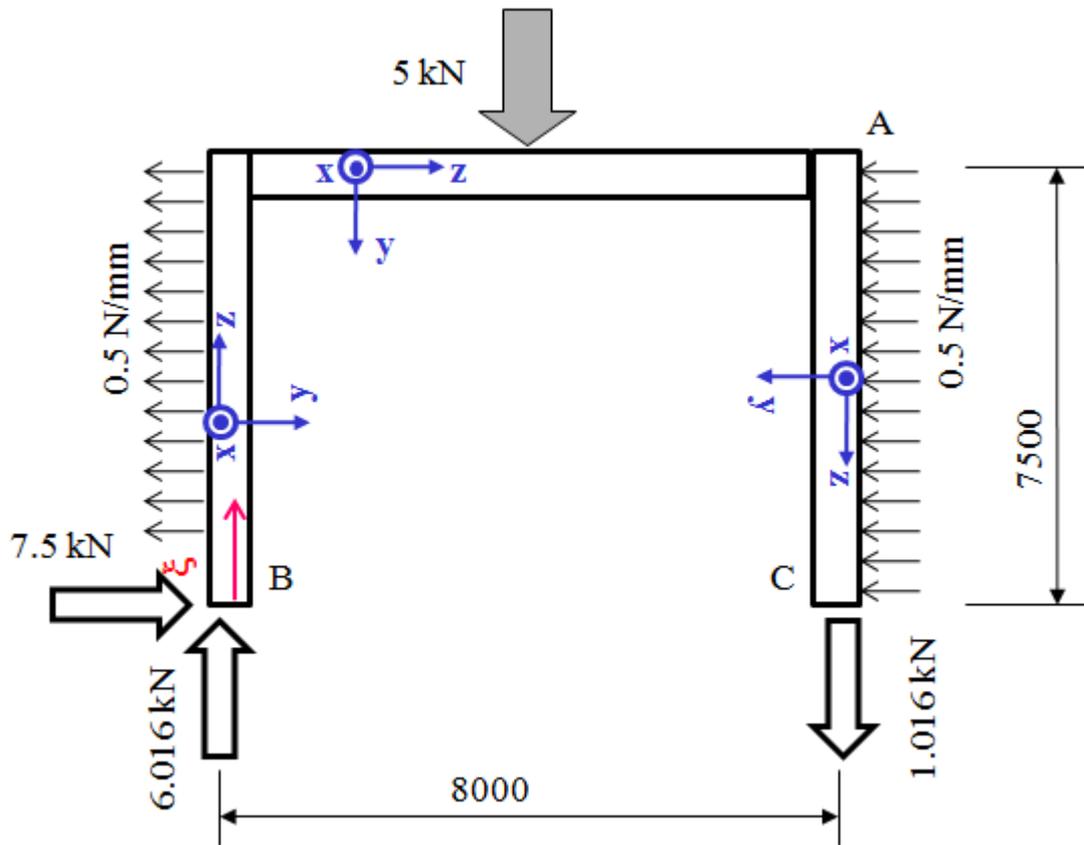


Fig. 2b3

DIAGRAMMI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce una coordinata curvilinea ξ (origine nel punto B, termine nel punto C, valore compreso tra 0 e 20 m) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento locale N-T per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, la cui disposizione nei diversi tratti di trave è mostrata in figura 2b3.

Si noti che, per semplificare la rappresentazione, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono stati rappresentati sotto forma di un diagramma lineare

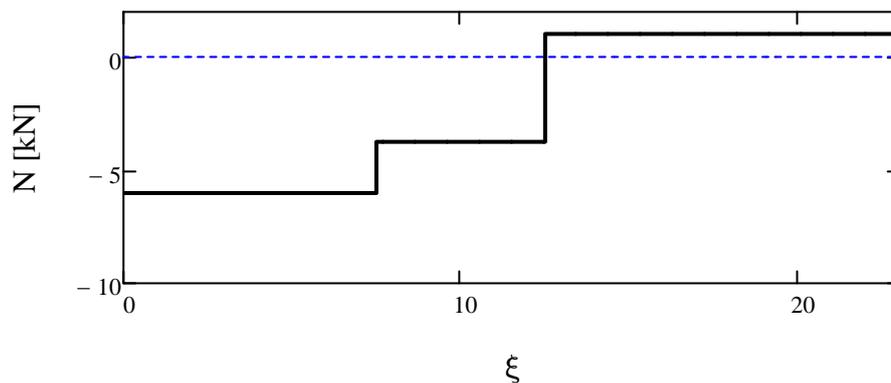
Forza Normale [kN]

(questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0)

$$\xi := 0, 0.001 \dots 23$$

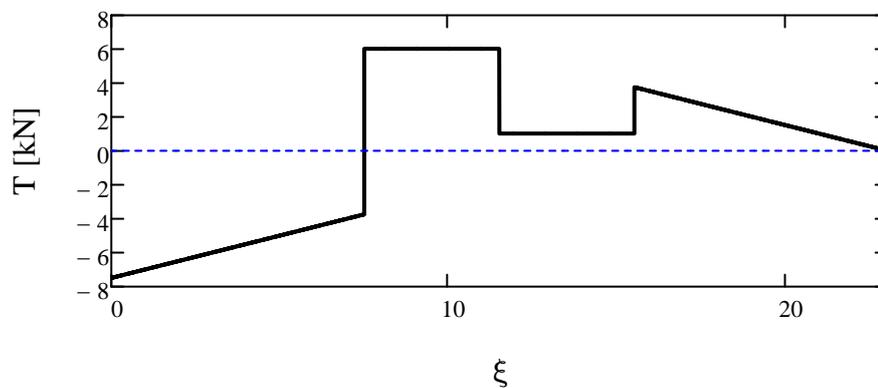
$$xx(\xi) := 0 \cdot \text{kN}$$

$$N(\xi) := \begin{cases} -5 - 1.016 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ -0.5 \cdot 7.5 & \text{if } 7.5 \leq \xi \leq 12.5 \\ 1.016 & \text{otherwise} \end{cases}$$



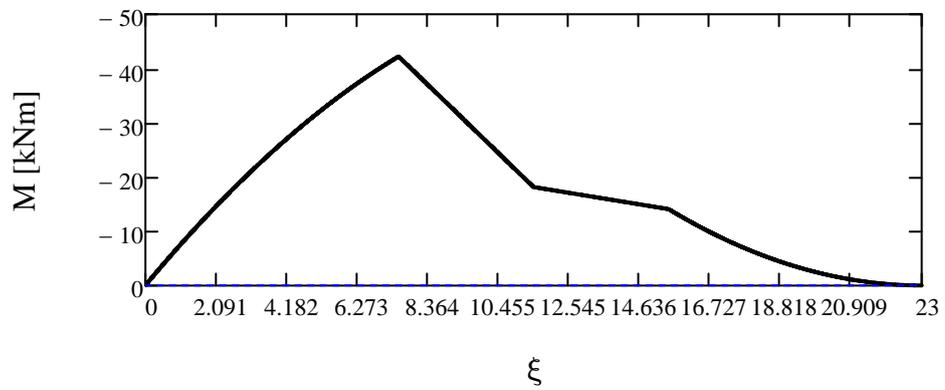
Taglio T [kN]

$$T(\xi) := \begin{cases} -0.5 \cdot (7.5 - \xi) - 0.5 \cdot 7.5 & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ 5 + 1.016 & \text{if } 7.5 \leq \xi \leq 11.5 \\ 1.016 & \text{if } 11.5 \leq \xi \leq 15.5 \\ 0.5 \cdot (23 - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M [kNm]

$$\mathbf{M}(\xi) := \begin{cases} -7.5 \cdot \xi + 0.5 \cdot \frac{\xi^2}{2} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 7.5 \\ -5 \cdot (11.5 - \xi) - 0.5 \cdot \frac{7.5^2}{2} - 1.016 \cdot (15.5 - \xi) & \text{if } 7.5 \leq \xi \leq 11.5 \\ -0.5 \cdot \frac{7.5^2}{2} - 1.016 \cdot (15.5 - \xi) & \text{if } 11.5 \leq \xi \leq 15.5 \\ -0.5 \cdot \frac{(23 - \xi)^2}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$



Quesito 3 (Punti 4)

Data la sezione mostrata in Fig. 3,:

1. determinare la posizione del baricentro "G"
2. determinare i momenti di inerzia rispetto ai due assi centrali principali.

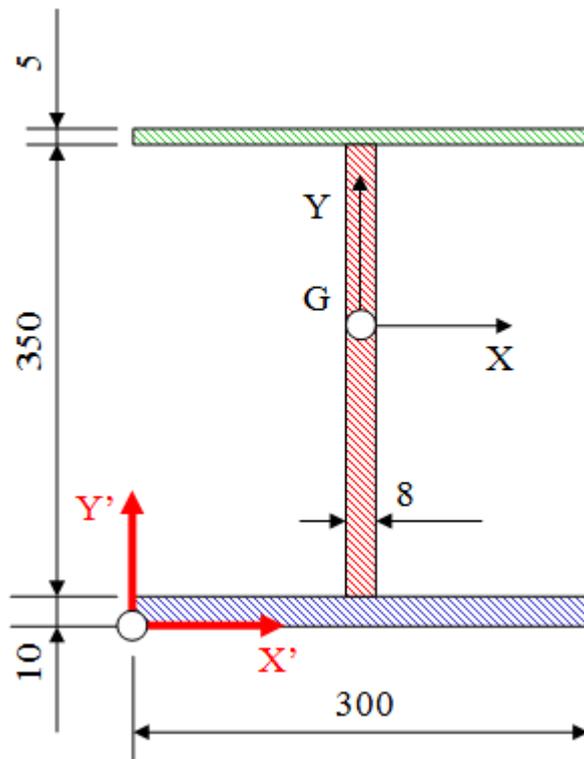


Fig. 3

Posizione del baricentro.

Fissato un SR "X'-Y'", si vede subito che, in esso la coordinata X' del baricentro è pari a 150 per simmetria.

Per il calcolo della posizione lungo l'asse Y' si procede considerando il contributo delle diverse aree colorate riportate nella figura.

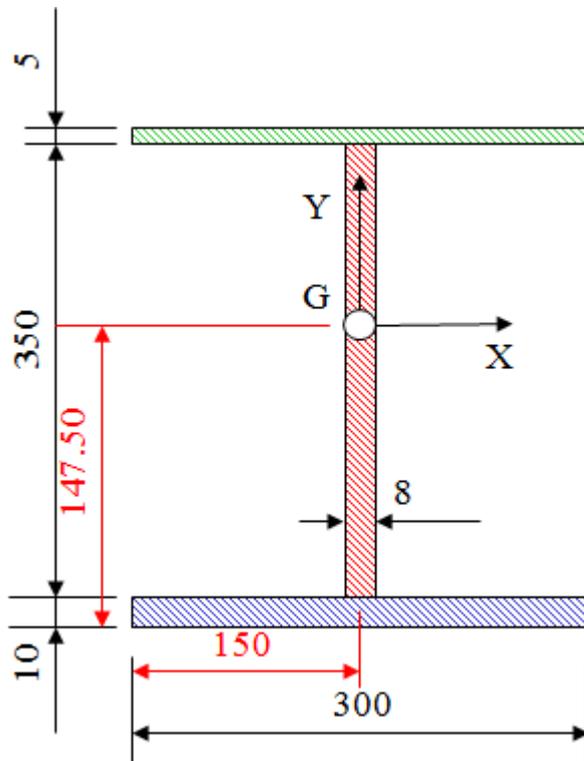
$$A := 300 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} + 300 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} + 350 \text{ mm} \cdot 8 \text{ mm} \quad \text{Area totale}$$

$$A = 7.3 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$S_G := 300 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} \cdot 362.5 \text{ mm} + 300 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm} + 350 \text{ mm} \cdot 8 \text{ mm} \cdot \left(\frac{350 \text{ mm}}{2} + 10 \text{ mm} \right)$$

$$Y_G := \frac{S_G}{A} \quad Y_G = 147.5 \text{ mm}$$

La posizione del baricentro risulta pertanto quella riportata nella seguente Figura.



Momenti di inerzia

Gli assi centrali principali risultano, per simmetria, quelli indicati nella Figura precedente. Nel calcolo dei momenti di inerzia si considera separatamente il contributo delle diverse aree individuate nella Figura stessa.

Calcolo di J_x

$$J_{x1} := \frac{300\text{mm} \cdot (5\text{mm})^3}{12} + 300\text{mm} \cdot 5\text{mm} \cdot (362.5\text{mm} - Y_G)^2$$

$$J_{x2} := \frac{8\text{mm} \cdot (350\text{mm})^3}{12} + 8\text{mm} \cdot 350\text{mm} \cdot \left[Y_G - \left(\frac{350\text{mm}}{2} + 10\text{mm} \right) \right]^2$$

$$J_{x3} := \frac{300\text{mm} \cdot (10\text{mm})^3}{12} + 300\text{mm} \cdot 10\text{mm} \cdot (5\text{mm} - Y_G)^2$$

$$J_x := J_{x1} + J_{x2} + J_{x3}$$

$$J_x = 1.628 \times 10^8 \cdot \text{mm}^4$$

Calcolo di J_y

$$J_{y1} := \frac{5\text{mm} \cdot (300\text{mm})^3}{12}$$

$$J_{y2} := \frac{350\text{mm} \cdot (8\text{mm})^3}{12}$$

$$J_{y3} := \frac{10\text{mm} \cdot (300\text{mm})^3}{12}$$

$$J_y := J_{y1} + J_{y2} + J_{y3}$$

$$J_y = 3.376 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4$$

Quesito 4 (Punti 5)

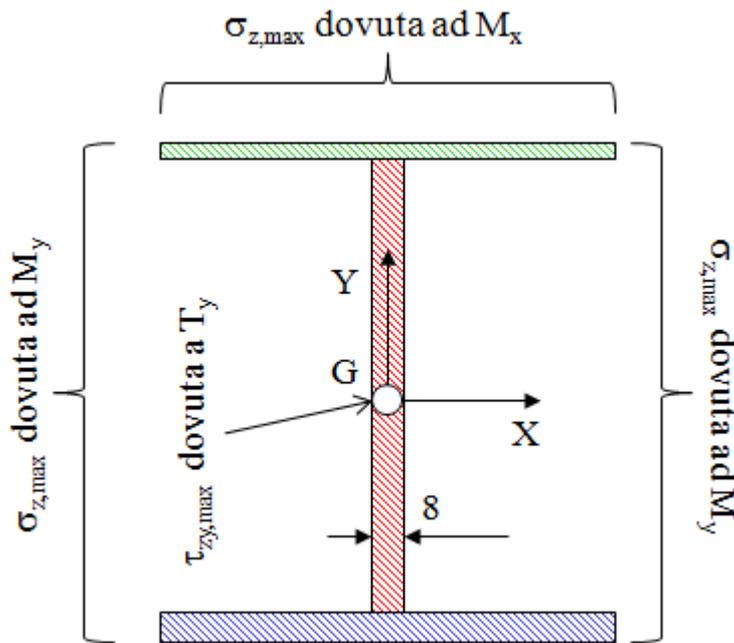
Calcolare le tensioni normali e tangenziali massime (in valore assoluto, espresse in MPa) e mostrarne l'ubicazione per la sezione mostrata nella Figura 3, soggetta alle seguenti caratteristiche di sollecitazione:

$$M_x := 35 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y := 15 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$N := 180 \cdot \text{kN}$$

$$T_y := 100 \cdot \text{kN}$$

**Momento M_x**

Si applica la formula di Navier, la massima tensione (valore assoluto) si verifica nel punto della sezione a maggiore distanza dall'asse X (bordo superiore).

$$y_{\max} := 365 \cdot \text{mm} - Y_G$$

$$y_{\max} = 217.5 \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_{z\max} := \frac{M_x}{J_x} y_{\max}$$

$$\sigma_{z\max} = 46.758 \cdot \text{MPa}$$

Momento My

Si applica la formula di Navier, la massima tensione (valore assoluto) si verifica nel punto della sezione a maggiore distanza dall'asse Y (bordi destro e sinistro).

$$x_{\max} := 150 \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_{z\max y} := \frac{M_y}{J_y} x_{\max} \qquad \sigma_{z\max y} = 66.637 \cdot \text{MPa}$$

Forza Normale

Le tensioni dovute alla forza normale sono costanti.

$$\sigma_{zN} := \frac{N}{A} \qquad \sigma_{zN} = 24.658 \cdot \text{MPa}$$

Taglio Ty

Si usa la formula di Jourawsky, calcolando il valore del momento statico in corrispondenza dell'asse "X", dove la tensione assume valore massimo.

$$S_{x1} := 300 \cdot \text{mm} \cdot 5 \cdot \text{mm} \cdot (362.5 \cdot \text{mm} - Y_G) \qquad 362.5 \cdot \text{mm} - Y_G = 215 \cdot \text{mm}$$

$$S_{x2} := (360 \cdot \text{mm} - Y_G) \cdot 8 \cdot \text{mm} \cdot \frac{(360 \cdot \text{mm} - Y_G)}{2}$$

$$b := 8 \text{mm}$$

$$S_x := S_{x1} + S_{x2} \qquad S_x = 5.031 \times 10^5 \cdot \text{mm}^3$$

$$\tau_{zy} := \frac{T_y \cdot S_x}{J_x \cdot b} \qquad \tau_{zy} = 38.629 \cdot \text{MPa}$$

$$10 \cdot \text{mm} \cdot 300 \cdot \text{mm} \cdot (Y_G - 5 \cdot \text{mm}) + (Y_G - 10 \cdot \text{mm}) \cdot 8 \cdot \text{mm} \cdot \frac{(Y_G - 10 \cdot \text{mm})}{2} = 5.031 \times 10^5 \cdot \text{mm}^3$$