

Quesito 1 (Punti 5)

Data la travatura reticolare mostrata nella Figura 1, determinare:

1. le reazioni vincolari
2. le forze agenti nelle aste

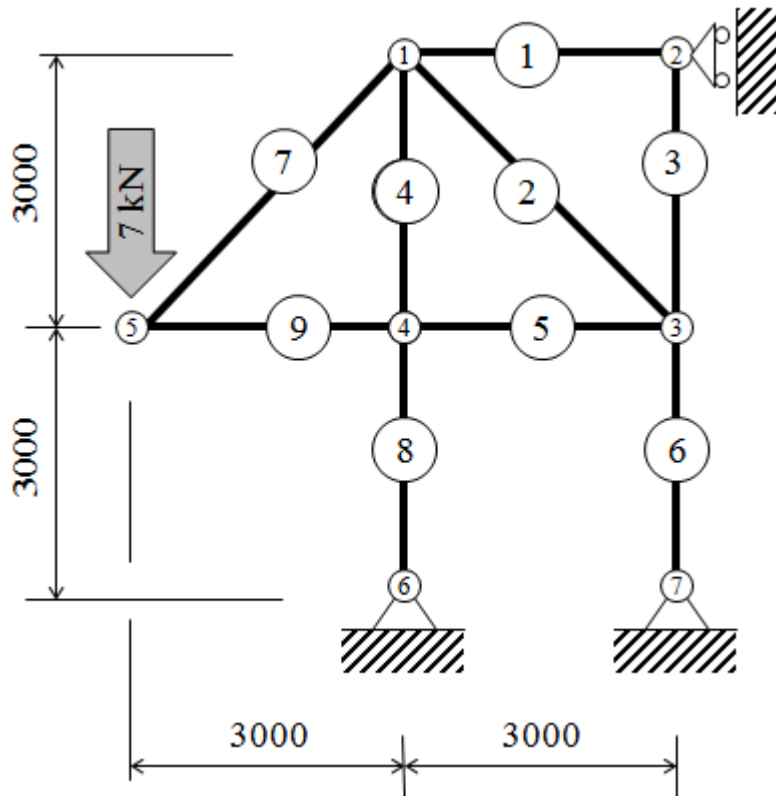


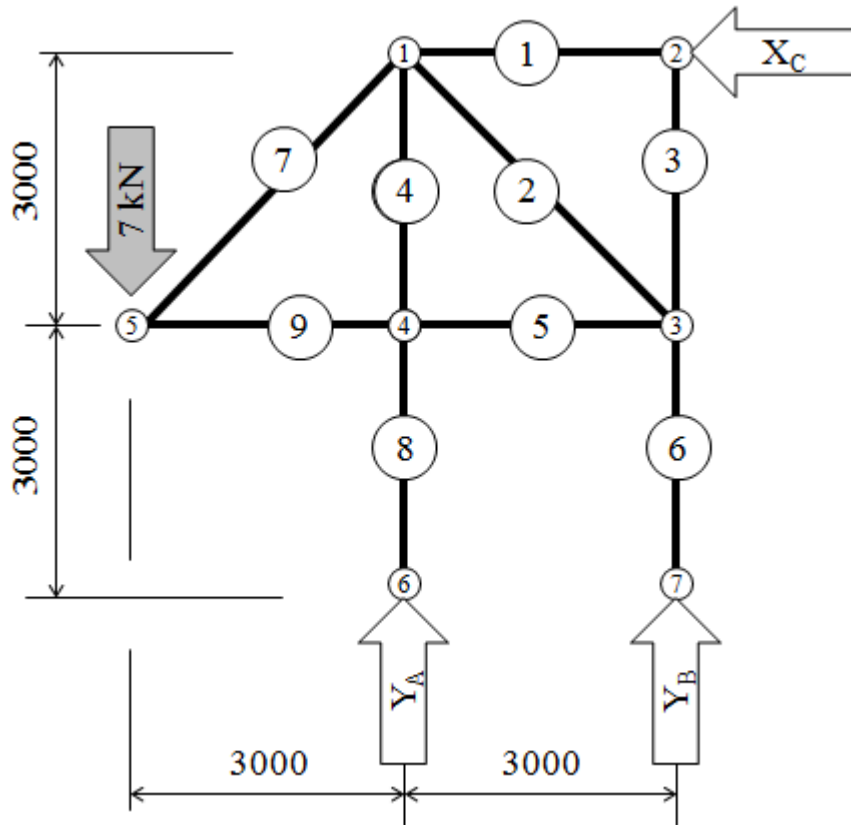
Fig. 1

Svolgimento

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente isostatica.

Fissato un SR cartesiano ortogonale, si sostituiscono i vincoli con le 3 reazioni vincolari incognite, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:



$$X_C := 0 \quad Y_A := 0 \quad Y_B := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow X_C = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_A + Y_B - 7 = 0$$

$$MR_{x2} = 0 \rightarrow Y_A \cdot 3000 - 7 \cdot 6000 = 0$$

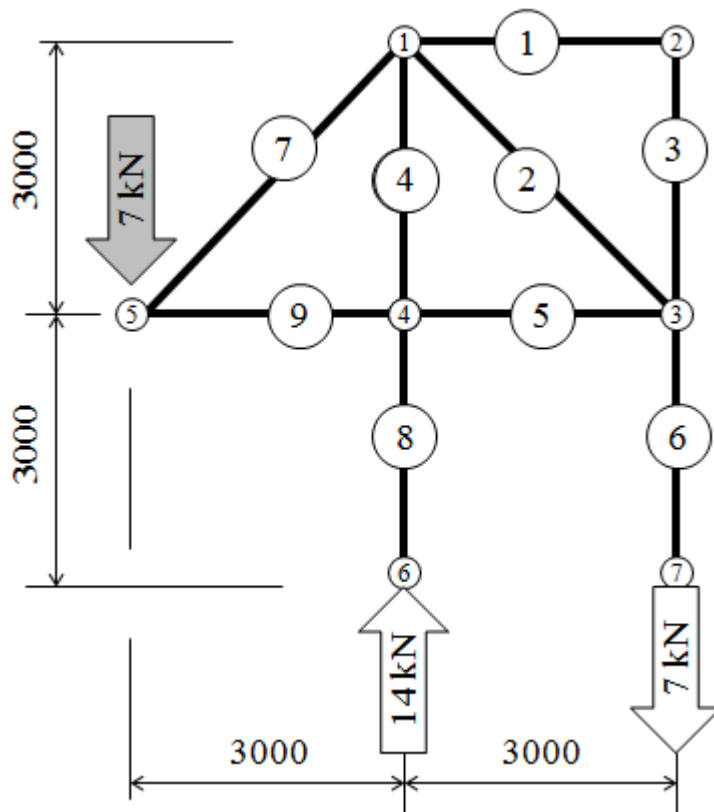
$$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find}(X_C, Y_A, Y_B)$$

$$X_C = 0$$

$$Y_A = 14$$

$$Y_B = -7$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma finale di corpo libero con tutti i carichi esterni applicati alla struttura.



Forze agenti nelle aste.

Si osserva in primo luogo che risulta immediatamente:

$$N_1 := 0 \quad N_3 := 0$$

$$N_8 := -14 \quad N_6 := 7$$

Si procede alla soluzione, per le rimanenti aste, utilizzando il metodo dei nodi.

Nodo 5

$$N_7 := 0 \quad N_9 := 0$$

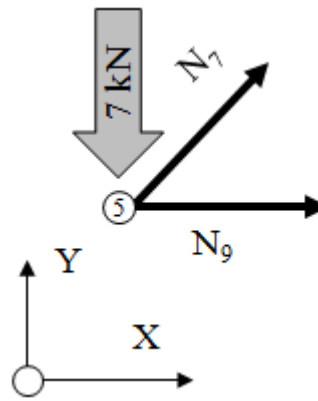
Given

$$R_x = 0 \rightarrow N_9 + N_7 \cdot \cos\left(\frac{45 \cdot \pi}{180}\right) = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow N_7 \cdot \sin\left(\frac{45 \cdot \pi}{180}\right) - 7 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_7 \\ N_9 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_7, N_9)$$

$$N_7 = 9.899 \quad N_9 = -7$$



Nodo 4

$$N_4 := 0 \quad N_5 := 0$$

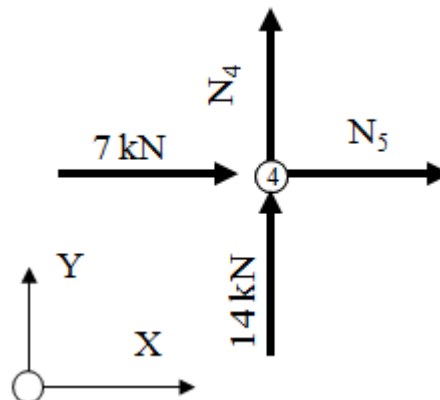
Given

$$R_x = 0 \rightarrow N_5 + 7 = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow N_4 + 14 = 0$$

$$\begin{pmatrix} N_5 \\ N_4 \end{pmatrix} := \text{Find}(N_5, N_4)$$

$$N_5 = -7 \quad N_4 = -14$$



Nodo 3

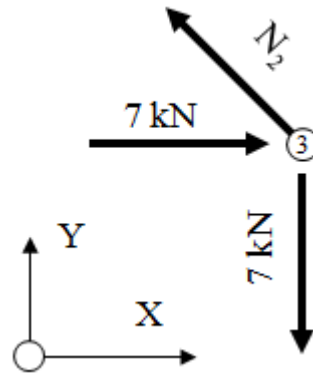
$$N_2 := 0$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow -N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 7 = 0$$

$$N_2 := \text{Find}(N_2)$$

$$N_2 = 9.899$$



RIASSUNTO DEI RISULTATI

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = 9.899$$

$$N_3 = 0$$

$$N_4 = -14$$

$$N_5 = -7$$

$$N_6 = 7$$

$$N_7 = 9.899$$

$$N_8 = -14$$

$$N_9 = -7$$

Quesito 2a (Punti 21)

Dato la struttura spaziale di sezione uniforme mostrata in Figura 2a.1 determinare:

1. Le reazioni vincolari
2. l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione nella struttura, scrivendone l'espressione analitica in funzione di una opportuna coordinata presa lungo la fibra baricentrica e tracciandone il diagramma.
3. Lo spostamento verticale del punto A.

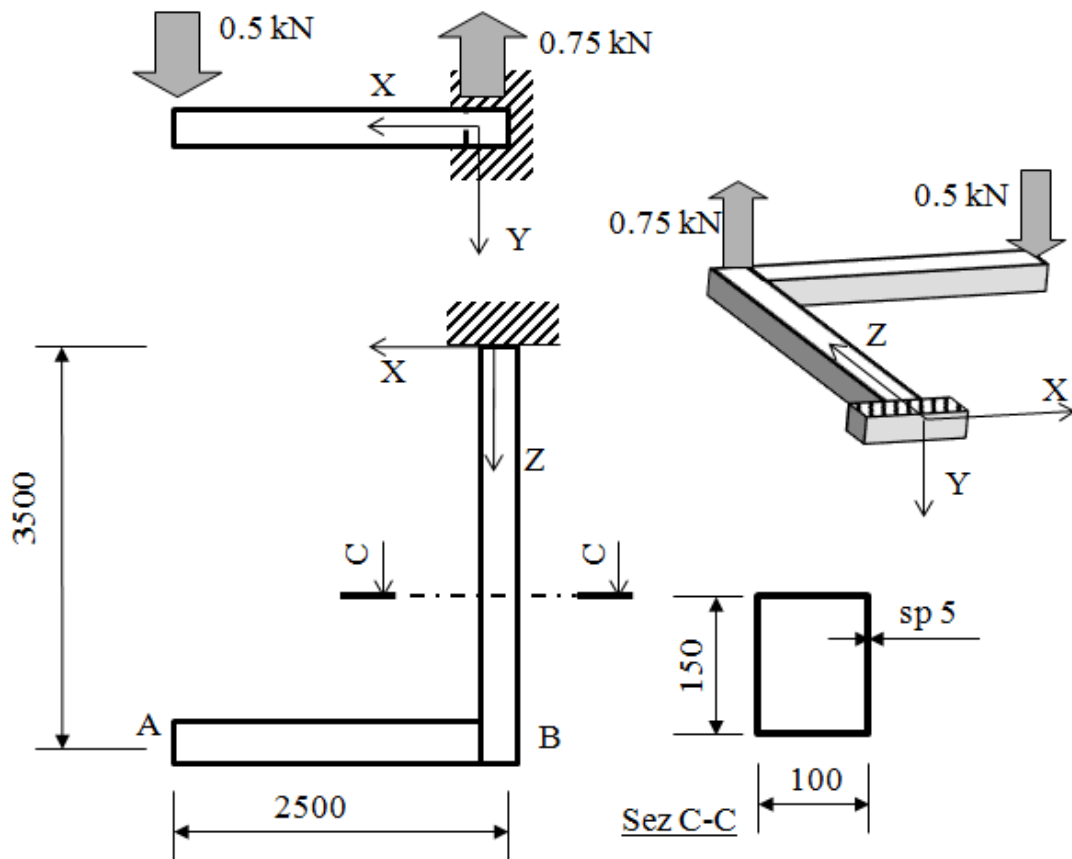


Fig. 2a

Caratteristiche della sezione

$$A_0 := 100 \cdot 150 \cdot \text{mm}^2 - 90 \cdot 140 \cdot \text{mm}^2$$

$$J_x := \left(\frac{100 \cdot 150^3}{12} - \frac{90 \cdot 140^3}{12} \right) \cdot \text{mm}^4$$

$$J_y := \left(\frac{150 \cdot 100^3}{12} - \frac{140 \cdot 90^3}{12} \right) \cdot \text{mm}^4$$

$$J_0 := J_x + J_y$$

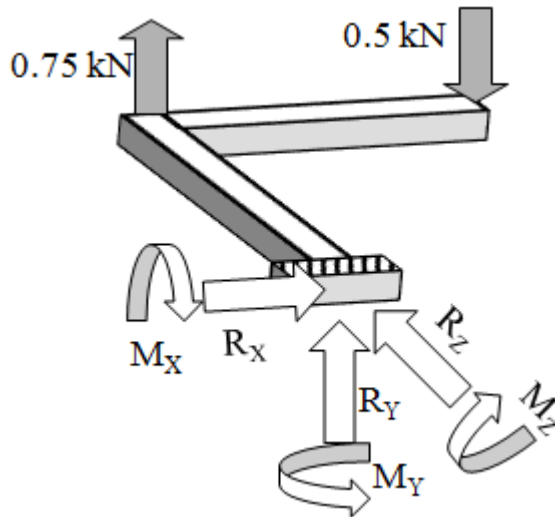
Dati Materiale

$$E_Y := 210000 \cdot \text{MPa}$$

$$G_Y := \frac{E_Y}{2 \cdot (1 + 0.3)}$$

Calcolo delle reazioni vincolari.

Fissato un SR cartesiano ortogonale, come nella Figura 2a, sostituendo al vincolo di incastro le sei reazioni incognite si ottiene il seguente diagramma di corpo libero:



$$R_X := 0 \cdot \text{kN}$$

$$R_Y := 0 \cdot \text{kN}$$

$$R_Z := 0 \cdot \text{kN}$$

$$M_X := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_Y := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_Z := 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow R_X = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow R_Y + 0.75 \cdot \text{kN} - 0.5 \cdot \text{kN} = 0$$

$$R_z = 0 \rightarrow R_Z = 0$$

$$MR_{x0} = 0 \rightarrow M_X + (0.75 \cdot \text{kN} \cdot 3500 \cdot \text{mm} - 0.5 \cdot \text{kN} \cdot 3500 \cdot \text{mm}) = 0$$

$$MR_{y0} = 0 \rightarrow M_Y = 0$$

$$MR_{z0} = 0 \rightarrow M_Z + 0.5 \cdot \text{kN} \cdot 2500 \cdot \text{mm} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_Z \\ M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} := \text{Find}(R_X, R_Y, R_Z, M_X, M_Y, M_Z)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni incognite:

$$R_X = 0 \cdot \text{kN}$$

$$R_Y = -250 \text{ N}$$

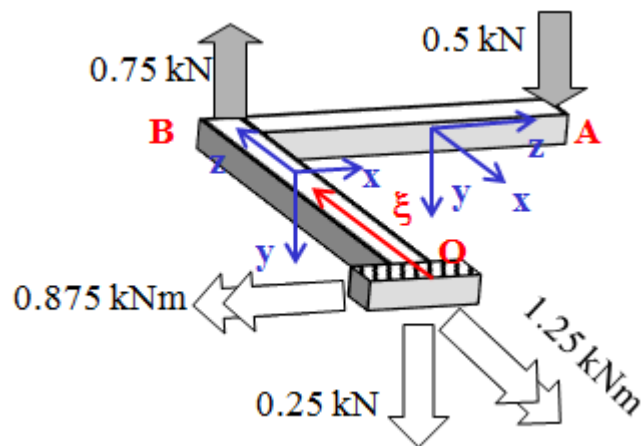
$$R_Z = 0 \cdot \text{kN}$$

$$M_X = -0.875 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_Y = 0 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_Z = -1.25 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura:



DIAGRAMMI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce la coordinata curvilinea ξ (origine nel punto O, valore compreso tra 0 e 6000 mm) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento locale x-y-z per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, la cui disposizione nei diversi tratti di trave è mostrata in figura.

Si noti che, per semplificare la rappresentazione, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono stati rappresentati in forma lineare piana. Ai fini di una più semplice interpretazione, si noti che i punti significativi indicati sulla figura corrispondono ai seguenti valori della coordinata curvilinea ξ : Punto O $\rightarrow \xi=0$; Punto B $\rightarrow \xi=3500$ mm; Punto A $\rightarrow \xi=6000$ mm.

Forza Normale

$$\xi := 0 \cdot \text{m}, 0.001 \cdot \text{m} \dots 6 \cdot \text{m}$$

$$\underline{\underline{N}}(\xi) := 0$$

(questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0)

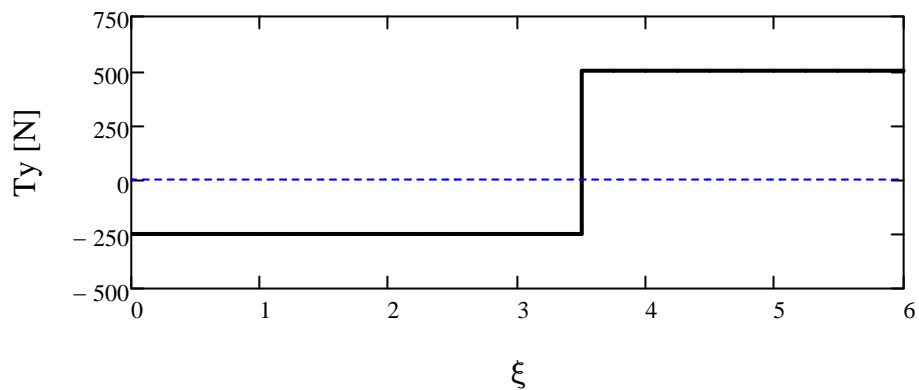
$$\underline{\underline{xx}}(\xi) := 0$$

Taglio T_x

$$T_x(\xi) := 0$$

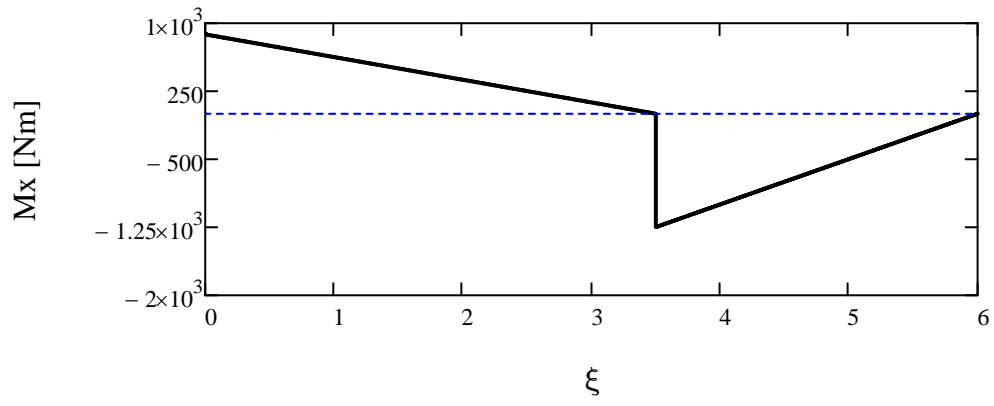
Taglio T_y

$$T_y(\xi) := \begin{cases} -250 & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 3.5 \cdot \text{m} \\ 500 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M_x

$$M_x(\xi) := \begin{cases} (0.75 - 0.5) \cdot \text{kN} \cdot (3.5 \cdot \text{m} - \xi) & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 3.5 \cdot \text{m} \\ -0.5 \cdot \text{kN}(6 \cdot \text{m} - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$

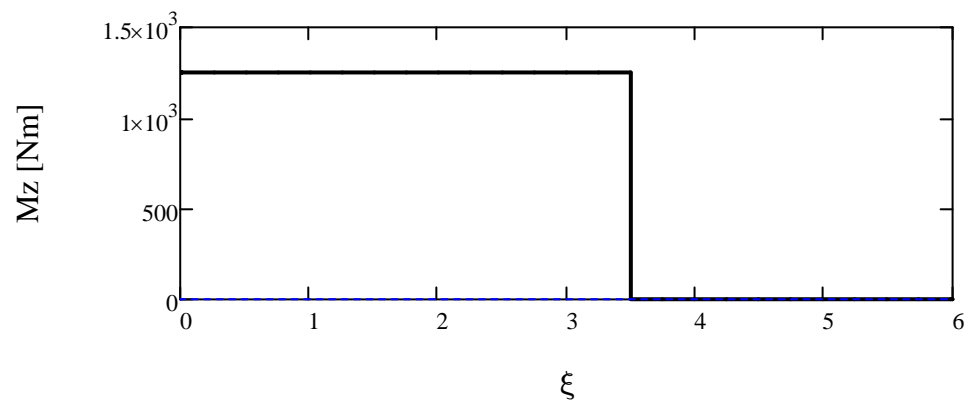


Momento M_y

$$M_y(\xi) := 0$$

Momento M_z

$$M_z(\xi) := \begin{cases} 0.5 \cdot \text{kN} \cdot 2.5 \cdot \text{m} & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 3.5 \cdot \text{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

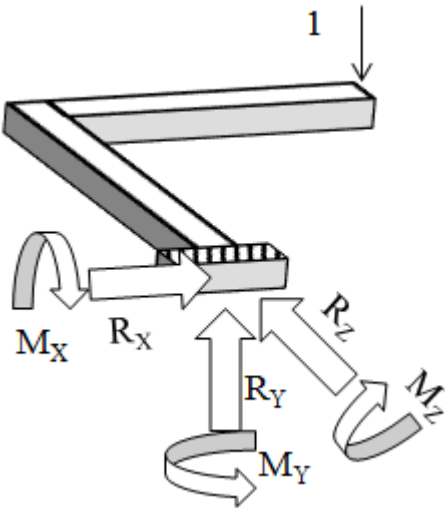


CALCOLO DELLO SPOSTAMENTO DEL PUNTO A

Lo spostamento del punto A può essere calcolato con il metodo degli integrali di Mohr. A tale scopo, si introduce un carico unitario nel punto A, avente direzione uguale a quella nella quale si vuole calcolare lo spostamento.

Calcolo delle reazioni vincolari.

Fissato un SR cartesiano ortogonale si ottiene il seguente diagramma di corpo libero:



$$R_{X1} := 0$$

$$M_{X1} := 0 \cdot m$$

$$R_{Y1} := 0$$

$$M_{Y1} := 0 \cdot m$$

$$R_{Z1} := 0$$

$$M_{Z1} := 0 \cdot m$$

Given

$$R_x = 0 \rightarrow R_{X1} = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow R_{Y1} - 1 = 0$$

$$R_z = 0 \rightarrow R_Z = 0$$

$$MR_{x_0} = 0 \rightarrow M_{X1} - 1 \cdot 3500 \cdot \text{mm} = 0$$

$$MR_{y_0} = 0 \rightarrow M_{Y1} = 0$$

$$MR_{z_0} = 0 \rightarrow M_{Z1} + 1 \cdot 2500 \cdot \text{mm} = 0$$

$$\begin{pmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ R_{Z1} \\ M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \end{pmatrix} := \text{Find}(R_{X1}, R_{Y1}, R_{Z1}, M_{X1}, M_{Y1}, M_{Z1})$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni incognite:

$$R_{X1} = 0$$

$$R_{Y1} = 1$$

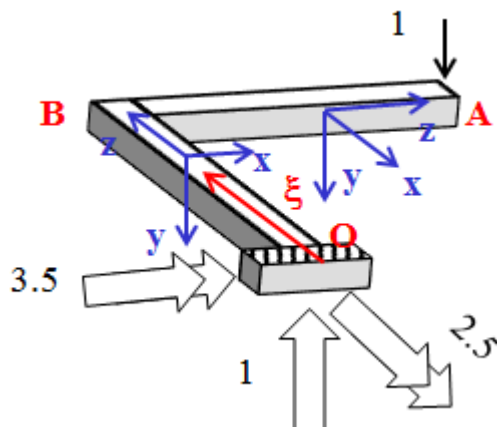
$$R_{Z1} = 0$$

$$M_{X1} = 3.5 \cdot \text{m}$$

$$M_{Y1} = 0 \cdot \text{m}$$

$$M_{Z1} = -2.5 \cdot \text{m}$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura:



Forza Normale

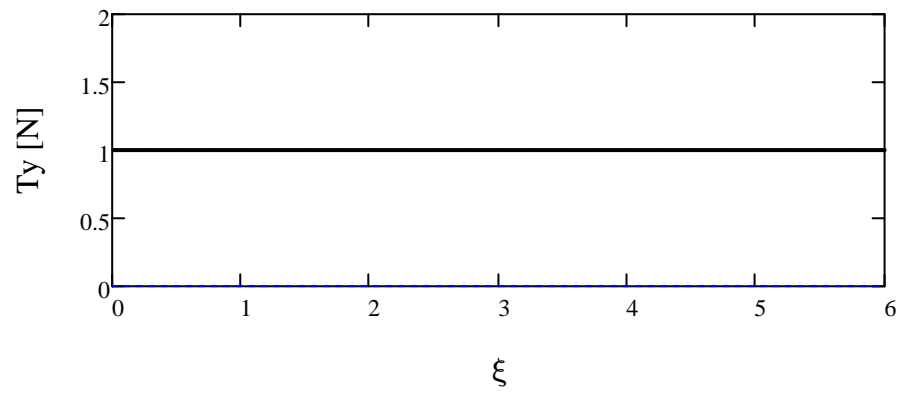
$$N_1(\xi) := 0$$

Taglio T_x

$$T_{X1}(\xi) := 0$$

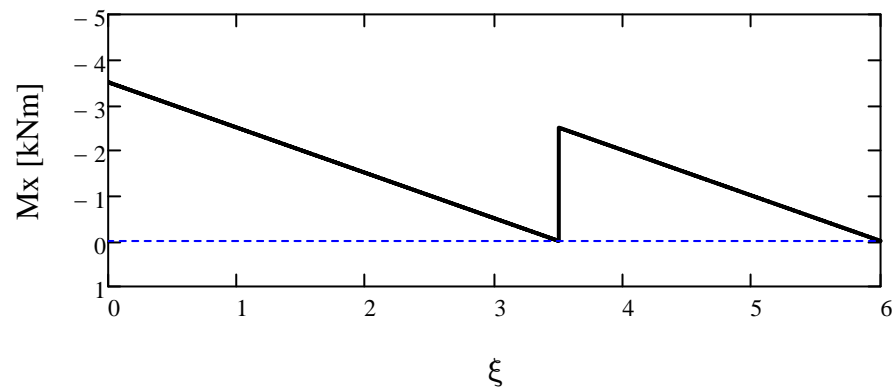
Taglio T_Y

$$T_{y1}(\xi) := 1$$



Momento M_x

$$M_{x1}(\xi) := \begin{cases} -1 \cdot (3.5 \cdot m - \xi) & \text{if } 0 \cdot m \leq \xi \leq 3.5 \cdot m \\ -1(6 \cdot m - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$

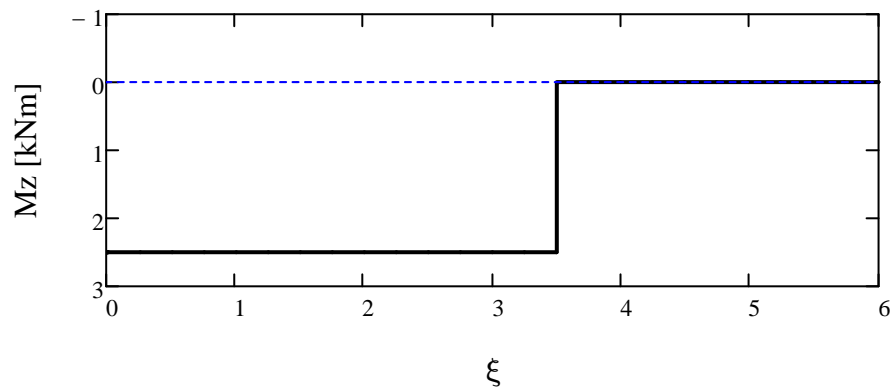


Momento M_y

$$M_{y1}(\xi) := 0$$

Momento M_z

$$M_{z1}(\xi) := \begin{cases} 1 \cdot 2.5 \cdot \text{m} & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 3.5 \cdot \text{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Integrali di Mohr

$$\delta_{MM} := \int_0^{6 \cdot \text{m}} \frac{M_x(\xi) \cdot M_{x1}(\xi)}{E_Y \cdot J_x} + \frac{M_z(\xi) \cdot M_{z1}(\xi)}{G_Y \cdot J_0} d\xi = 0.011 \text{ m}$$

Quesito 2b (alternativo al quesito 2a) (Punti 16)

È data la struttura piana di sezione uniforme mostrata in Figura 2b.1.

Si chiede di determinare:

1. le reazioni vincolari
2. l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione, scrivendone l'espressione analitica in funzione di una opportuna coordinata presa lungo la fibra baricentrica e tracciandone il diagramma
3. Lo spostamento verticale del Punto B e quello orizzontale del punto A.

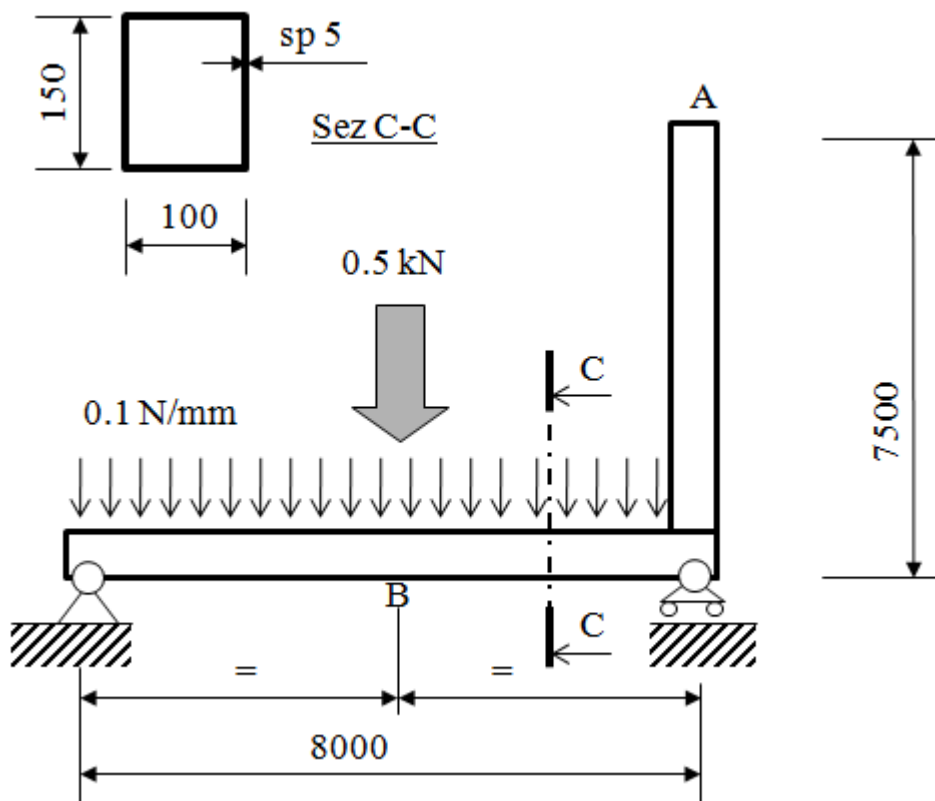


Fig. 2b1

Caratteristiche della sezione

$$A_0 := 100 \cdot 150 \cdot \text{mm}^2 - 90 \cdot 140 \cdot \text{mm}^2$$

$$J_x := \left(\frac{100 \cdot 150^3}{12} - \frac{90 \cdot 140^3}{12} \right) \cdot \text{mm}^4$$

Dati Materiale

$$E_Y := 210000 \text{ MPa}$$

Calcolo delle reazioni vincolari

La struttura è esternamente ed internamente isostatica.

Fissato un SR cartesiano ortogonale, si sostituiscono i vincoli con le 3 reazioni vincolari incognite, ottenendo il seguente diagramma di corpo libero:

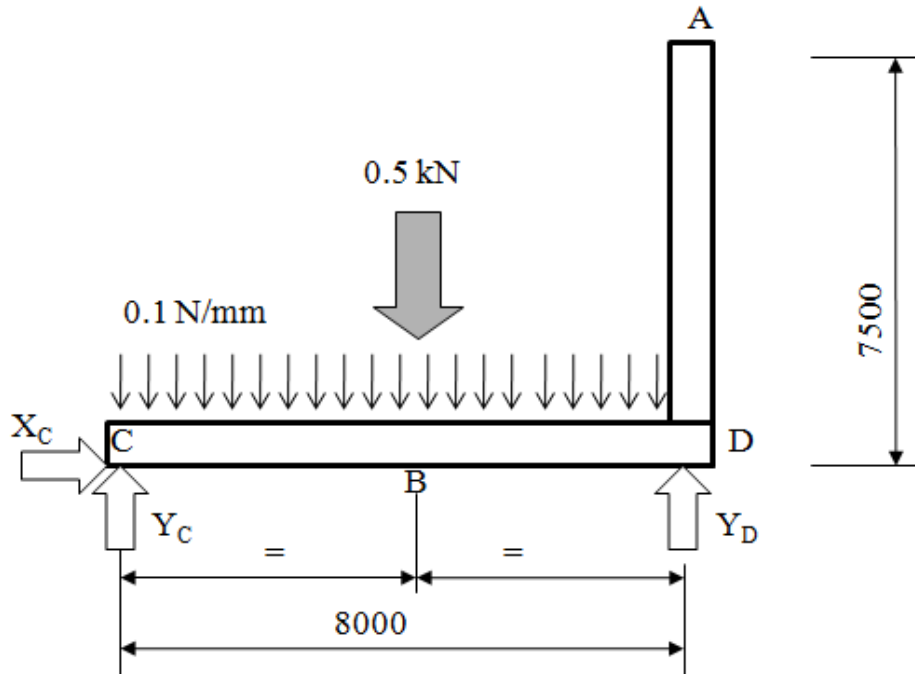


Fig. 2b2

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (forze in kN, lunghezze in m, momenti calcolati rispetto al polo B):

$$X_c := 0 \cdot \text{kN} \quad Y_c := 0 \cdot \text{kN} \quad Y_d := 0 \cdot \text{kN}$$

Given

Equilibrio intera struttura

$$R_x = 0 \rightarrow X_c = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_c + Y_d - 0.5 \cdot \text{kN} - 0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 8 \cdot \text{m} = 0$$

$$MR_{zC} = 0 \rightarrow Y_d \cdot 8 \cdot \text{m} - 0.5 \cdot \text{kN} \cdot 4 \cdot \text{m} - 0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 8 \cdot \text{m} \cdot \frac{8}{2} \cdot \text{m} = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Y_d \end{pmatrix} := \text{Find}(X_c, Y_c, Y_d)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari:

$$Y_c = 0.65 \cdot \text{kN}$$

$$Y_d = 0.65 \cdot \text{kN}$$

$$X_c = 0 \cdot \text{kN}$$

Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura, con tutte le forze applicate.

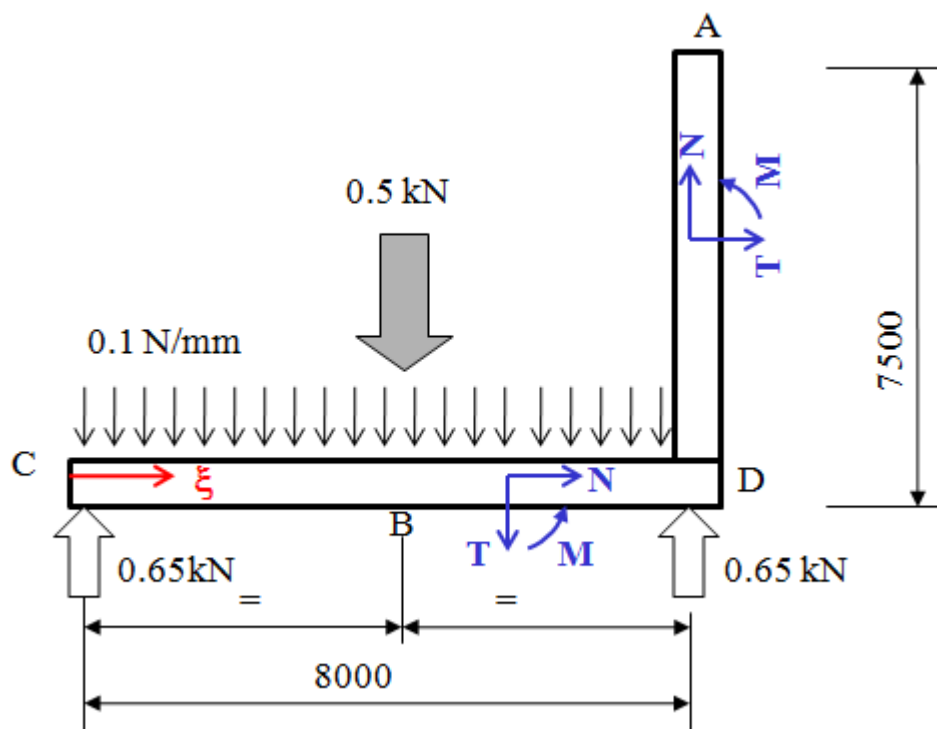


Fig. 2b3

DIAGRAMMI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Ai fini del tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione, si introduce una coordinata curvilinea ξ (origine nel punto C, termine nel punto A, valore compreso tra 0 e 15.5 m) e si fissa sulla generica sezione il sistema di riferimento locale N-T per il calcolo della caratteristiche di sollecitazione, la cui disposizione nei diversi tratti di trave è mostrata in figura 2b3.

Si noti che, per semplificare la rappresentazione, i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono stati rappresentati sotto forma lineare

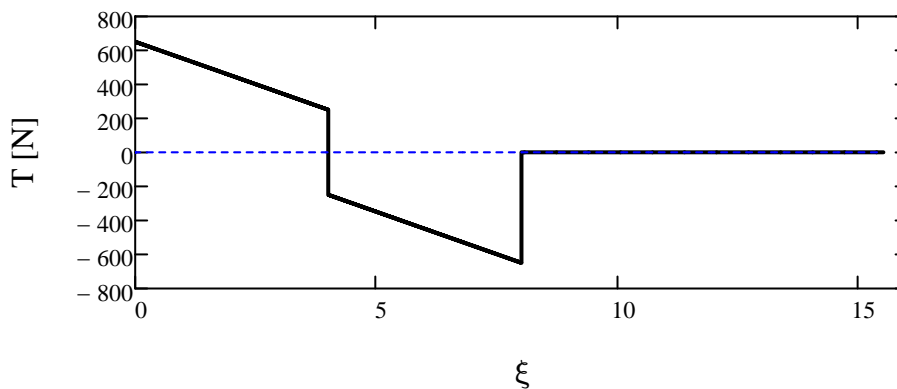
$$\xi := 0 \cdot \text{m}, 0.001 \cdot \text{m} .. 15.5 \cdot \text{m} \quad \mathbf{xx}(\xi) := 0 \cdot \mathbf{kN} \quad (\text{questa variabile fittizia ha il solo scopo di far comparire sui diagrammi la linea corrispondente al valore 0})$$

Forza Normale [kN]

$$\mathbf{N}_0(\xi) := 0$$

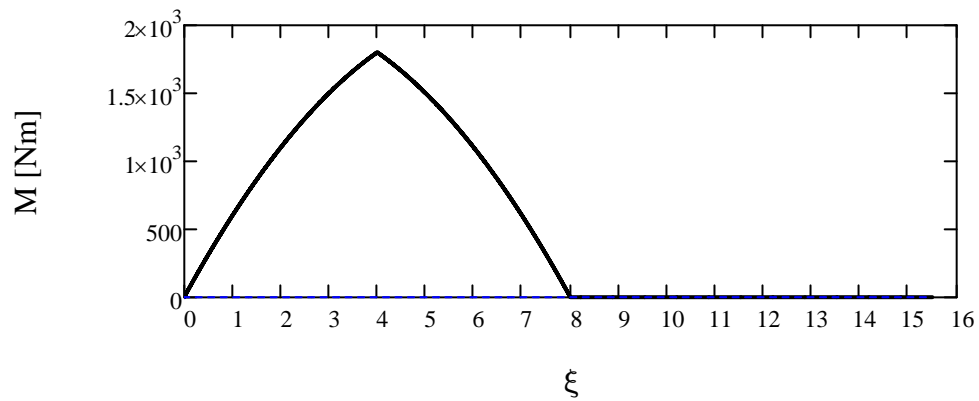
Taglio T

$$\mathbf{T}(\xi) := \begin{cases} -0.1 \cdot \frac{\mathbf{N}}{\text{mm}} \cdot \xi + 650 \cdot \mathbf{N} & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 4 \cdot \text{m} \\ -650 \cdot \mathbf{N} + 0.1 \cdot \frac{\mathbf{N}}{\text{mm}} \cdot (8 \cdot \text{m} - \xi) & \text{if } 4 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 8 \cdot \text{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M

$$M(\xi) := \begin{cases} 0.65 \cdot \text{kN} \cdot \xi - 0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \frac{\xi^2}{2} & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 4 \cdot \text{m} \\ 0.65 \cdot \text{kN} \cdot (8 \cdot \text{m} - \xi) - 0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot \frac{(8 \cdot \text{m} - \xi)^2}{2} & \text{if } 4 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 8 \cdot \text{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



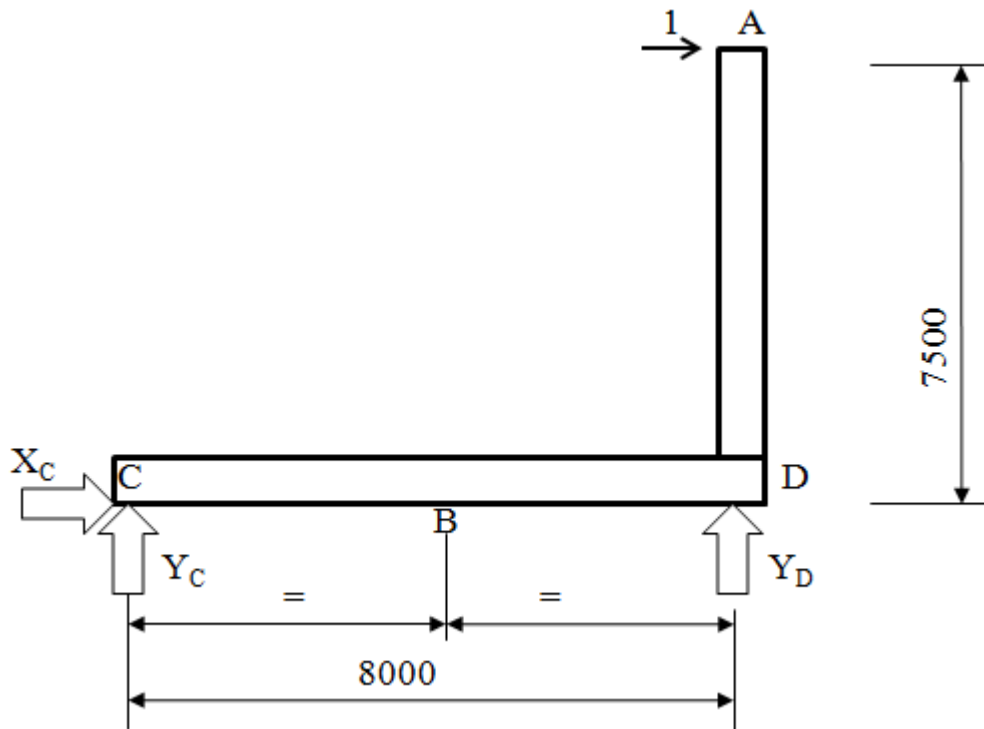
SPOSTAMENTO VERTICALE DEL PUNTO B

Lo spostamento può essere calcolato come sovrapposizione degli effetti tra lo spostamento al centro di una trave appoggiata soggetta a carico concentrato e distribuito.

$$\delta_B := \frac{0.1 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot (8 \cdot \text{m})^4}{120 \cdot E_Y \cdot J_X} + \frac{0.5 \cdot \text{kN} \cdot (8 \cdot \text{m})^3}{24 \cdot E_Y \cdot J_X} = 8.886 \cdot \text{mm}$$

SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DEL PUNTO A

Lo spostamento orizzontale del punto A può essere calcolato con il metodo degli integrali di Mohr, inserendo un carico unitario nel punto stesso, diretto concordemente con lo spostamento da calcolare. Si ottiene il seguente diagramma di corpo libero con le reazioni vincolari incognite



Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo C):

$$X_{c1} := 0 \quad Y_{c1} := 0 \quad Y_{d1} := 0$$

Given

Equilibrio intera struttura

$$R_x = 0 \rightarrow X_{c1} + 1 = 0$$

$$R_y = 0 \rightarrow Y_{c1} + Y_{d1} = 0$$

$$MR_{zC} = 0 \rightarrow Y_{d1} \cdot 8 \cdot m - 1 \cdot 7.5 \cdot m = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_{c1} \\ Y_{c1} \\ Y_{d1} \end{pmatrix} := \text{Find}(X_{c1}, Y_{c1}, Y_{d1})$$

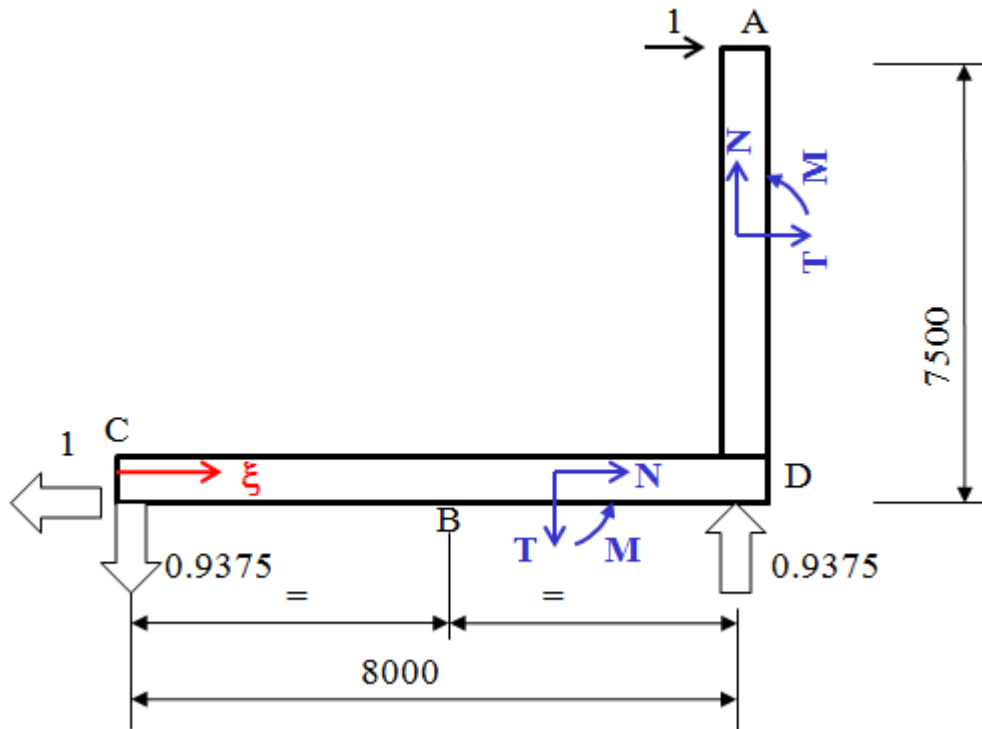
Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari:

$$Y_{c1} = -0.938$$

$$Y_{d1} = 0.938$$

$$X_{c1} = -1$$

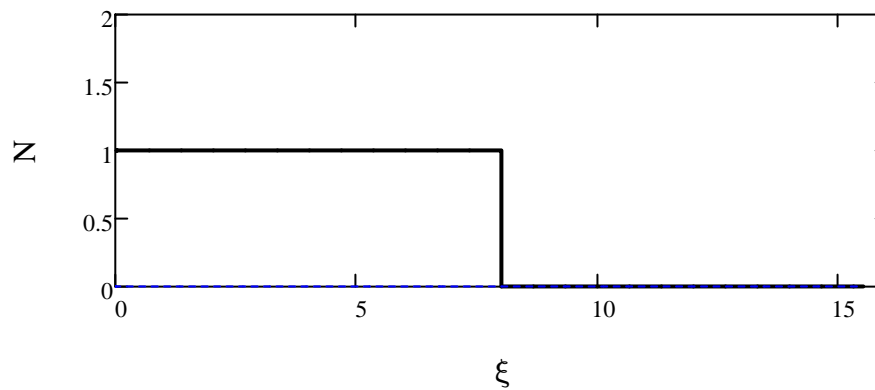
Si ottiene in tal modo il seguente diagramma di corpo libero della struttura, con tutte le forze applicate.



Diagrammi caratteristiche di sollecitazione per il carico unitario

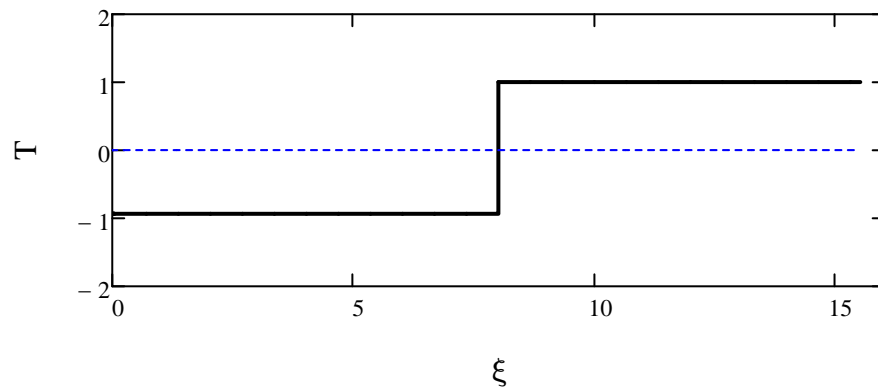
Forza Normale

$$N_1(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 8 \cdot \text{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



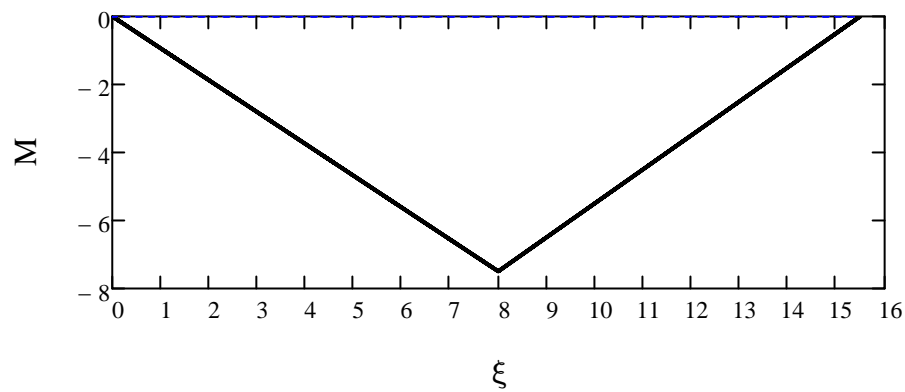
Taglio T

$$T_1(\xi) := \begin{cases} -0.9375 & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 8 \cdot \text{m} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Momento M

$$M_1(\xi) := \begin{cases} -0.9375\xi & \text{if } 0 \cdot \text{m} \leq \xi \leq 8 \cdot \text{m} \\ -1 \cdot (15.5 \cdot \text{m} - \xi) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Lo spostamento del punto A risulta dato da:

$$\delta_A := \int_0^{8 \cdot \text{m}} \frac{M(\xi) \cdot M_1(\xi)}{E_Y \cdot J_x} d\xi = -0.02 \text{ m}$$

Quesito 3 (Punti 4)

Data la sezione mostrata in Fig. 3,:

1. determinare la posizione del baricentro "G"
2. determinare i momenti di inerzia rispetto ai due assi centrali principali.

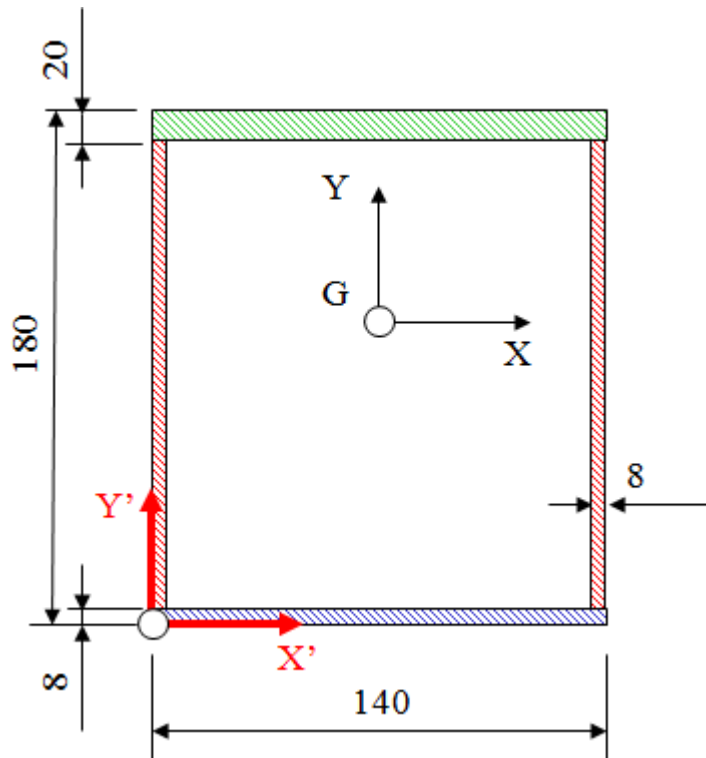


Fig. 3

Posizione del baricentro.

Fissato un SR "X'-Y'", si vede subito che, in esso la coordinata X' del baricentro è pari a 70 per simmetria.

Per il calcolo della posizione lungo l'asse Y' si procede considerando il contributo delle diverse aree colorate riportate nella figura.

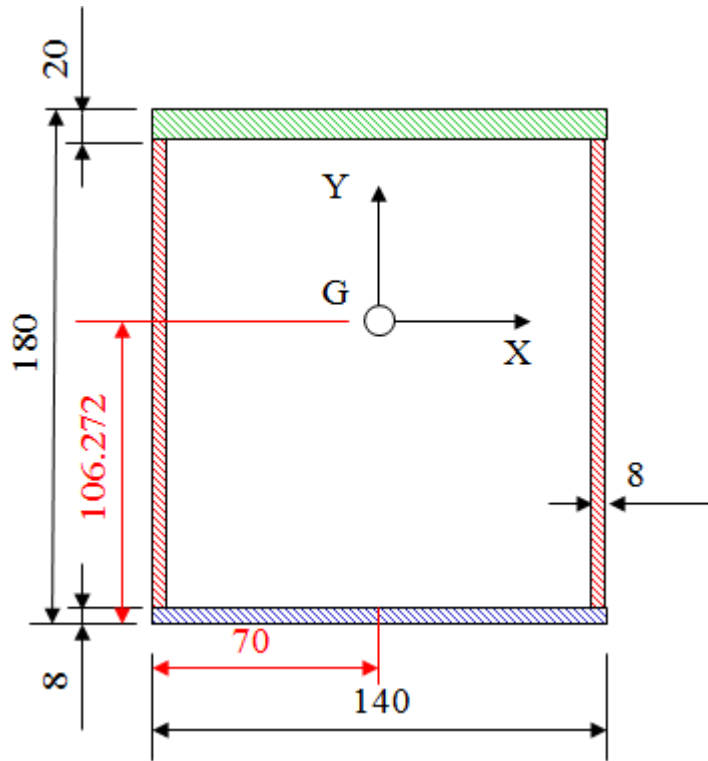
$$A := 140 \cdot \text{mm} \cdot 180 \cdot \text{mm} - 124 \cdot \text{mm} \cdot 152 \cdot \text{mm} \quad \text{Area totale}$$

$$A = 6.352 \times 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

$$S_G := 20 \cdot \text{mm} \cdot 140 \cdot \text{mm} \cdot 170 \cdot \text{mm} + 2 \cdot 152 \cdot \text{mm} \cdot 8 \cdot \text{mm} \cdot 84 \cdot \text{mm} + 140 \cdot \text{mm} \cdot 8 \cdot \text{mm} \cdot 4 \cdot \text{mm}$$

$$Y_G := \frac{S_G}{A} \quad Y_G = 107.804 \text{ mm}$$

La posizione del baricentro risulta pertanto quella riportata nella seguente Figura.



Momenti di inerzia

Gli assi centrali principali risultano, per simmetria, quelli indicati nella Figura precedente. Nel calcolo dei momenti di inerzia si considera separatamente il contributo delle diverse aree individuate nella Figura stessa.

Calcolo di J_x

$$J_{x1} := \frac{140\text{mm} \cdot (20\text{mm})^3}{12} + 140\text{mm} \cdot 20\text{mm} \cdot (170\text{mm} - Y_G)^2$$

$$J_{x2} := \frac{8\text{mm} \cdot (152\text{mm})^3}{12} + 8\text{mm} \cdot 152\text{mm} \cdot (Y_G - 84\text{mm})^2$$

$$J_{x3} := \frac{140\text{mm} \cdot (8\text{mm})^3}{12} + 140\text{mm} \cdot 8\text{mm} \cdot (4\text{mm} - Y_G)^2$$

$$J_x := J_{x1} + 2J_{x2} + J_{x3} \quad J_x = 2.906 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4$$

Calcolo di J_y

$$J_y := \frac{180\text{mm} \cdot (140\text{mm})^3}{12} - \frac{152\text{mm} \cdot (124\text{mm})^3}{12} = 1.701 \times 10^7 \cdot \text{mm}^4$$