UNIVERSITA DI PISA - ANNO ACCADEMICO 2007-8
CORSO DI LAUREA IN ING. ELETTRICA (N.O.)

CORSO DI
PRINCIPI DI MECCANICA E COSTRUZIONI MECCANICHE

VERIFICA INTERMEDIA DEL 12-05-2012

ESERCIZIO 1 (Punti 9)

Data la struttura di sollevamento mostrata in Figura 1.1, calcolare lo spostamento verticale del punto *B* conseguente al sollevamento della massa M tramite la carrucola.

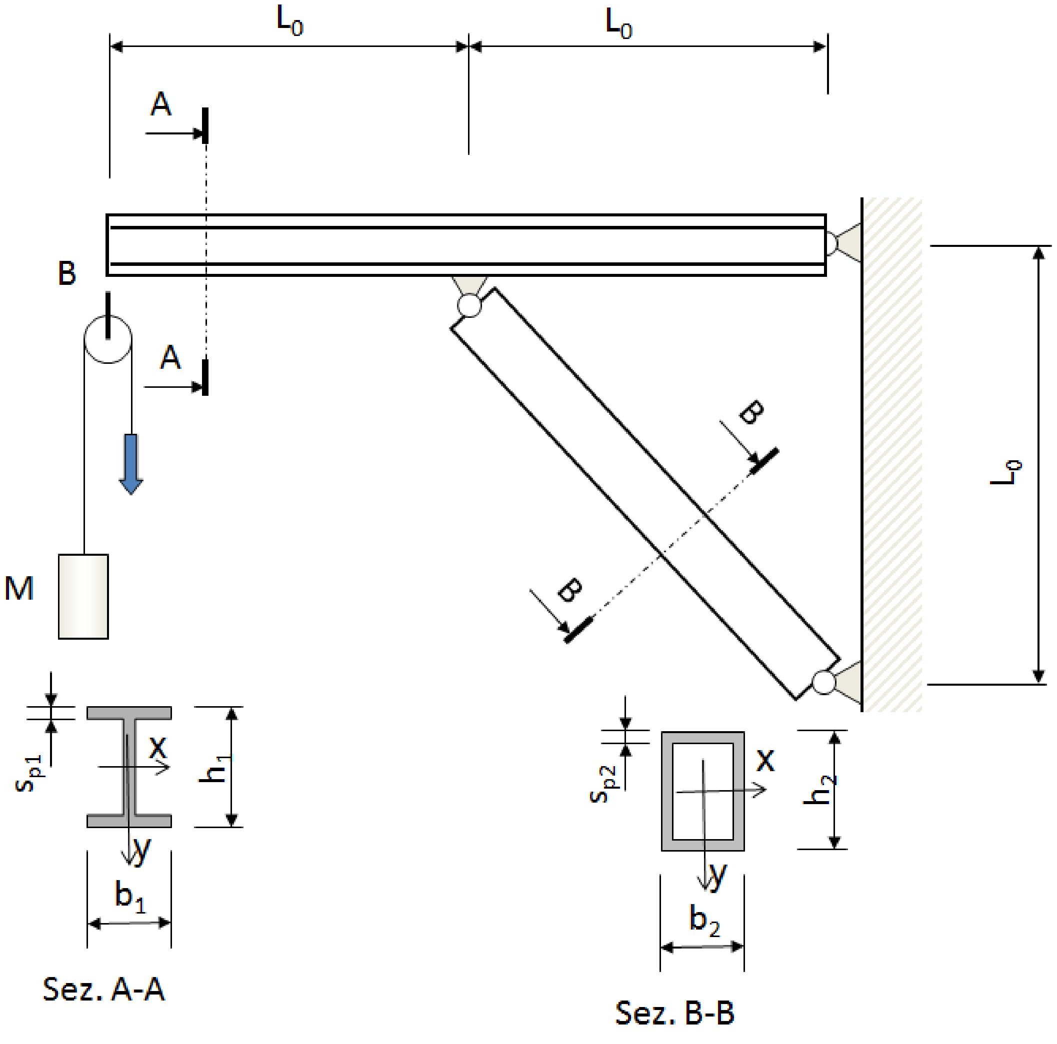


Fig. 1.1

Dati

$L_0 := 1100 \cdot mm$ $\quad M := 125 \cdot kg$ $\quad E := 210000 \cdot MPa$ Modulo Young acciaio

$b_1 := 50 \cdot mm$ $\quad h_1 := 90 \cdot mm$ $\quad s_{p1} := 2 \cdot mm$

$b_2 := 25 \cdot mm$ $\quad h_2 := 50 \cdot mm$ $\quad s_{p2} := 1 \cdot mm$

Svolgimento

La forza complessiva applicata alla trave per il sollevamento della massa M è pari a:

$F_0 := 2 \cdot M \cdot g$ $\qquad\qquad$ $F_0 = 2.452 \times 10^3 \, N$

Si ottiene quindi il seguente schema di calcolo con tre reazioni vincolari incognite.

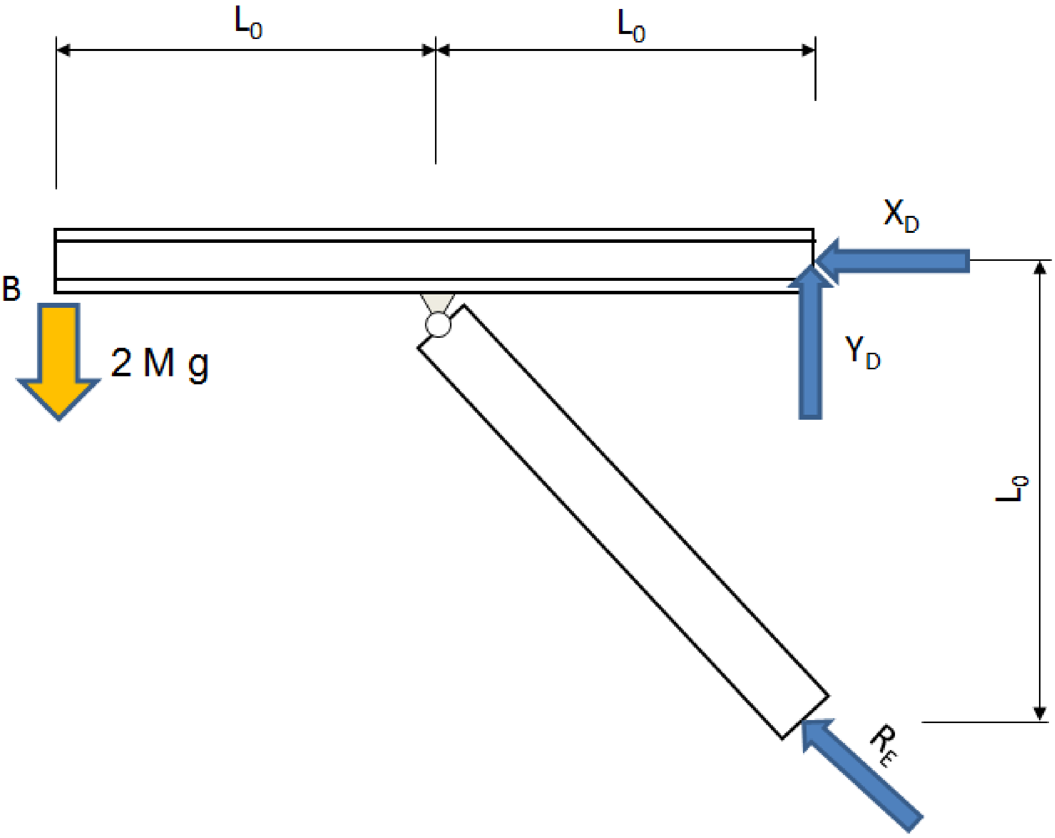


Fig. 1.2

Calcolo reazioni vincolari

Dalle Equazioni di equilibrio si ottiene (momenti calcolati rispetto al polo D):

$X_D := 0 \qquad Y_D := 0 \qquad R_E := 0$

Given

$R_x = 0$ ---> $\qquad X_D + R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$R_y = 0$ ---> $\qquad Y_D + R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F_0 = 0$

MzD = 0 ---> $\qquad F_0 \cdot 2 \cdot L_0 - R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ R_E \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(X_D, Y_D, R_E)$$

Ottenendo i seguenti valori delle reazioni vincolari (in KN):

$X_D = -4.903 \cdot kN$ $\quad$ $Y_D = -2.452 \cdot kN$ $\quad$ $R_E = 6.934 \cdot kN$

Caratteristiche sezioni e materiale

Le carattristiche geometriche delle sezioni della travi sono date da:

Trave orizzontale

$$A_1 := (h_1 \cdot b_1) - 2 \cdot \frac{(b_1 - s_{p1})}{2} \cdot (h_1 - 2 \cdot s_{p1}) \qquad A_1 = 372 \cdot mm^2$$

$$J_{1x} := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} - 2 \cdot \frac{(b_1 - s_{p1})}{2} \cdot \frac{(h_1 - 2 \cdot s_{p1})^3}{12} \qquad J_{1x} = 4.933 \times 10^5 \cdot mm^4$$

$$J_{1y} := 2 \frac{s_{p1} \cdot b_1^3}{12} + \frac{(h_1 - 2 \cdot s_{p1}) \cdot s_{p1}^3}{12} \qquad J_{1y} = 4.172 \times 10^4 \cdot mm^4$$

Trave obliqua

$$A_2 := h_2 \cdot b_2 - (h_2 - 2 \cdot s_{p2}) \cdot (b_2 - 2 \cdot s_{p2}) \qquad A_2 = 146 \cdot mm^2$$

$$J_{2x} := \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} - (b_2 - 2s_{p2}) \cdot \frac{(h_2 - 2 \cdot s_{p2})^3}{12} \qquad J_{2x} = 4.845 \times 10^4 \cdot mm^4$$

$$J_{2y} := \frac{b_2^3 \cdot h_2}{12} - (b_2 - 2s_{p2})^3 \cdot \frac{(h_2 - 2 \cdot s_{p2})}{12} \qquad J_{2y} = 1.644 \times 10^4 \cdot mm^4$$

Caratteristiche di sollecitazione

Per il calcolo dello spostamento del punto B si ricorre al metodo del bilancio di energia. In base alle reazioni vincolari calcolate si ottiene il seguente diagramma di corpo libero (Fig. 1.3):

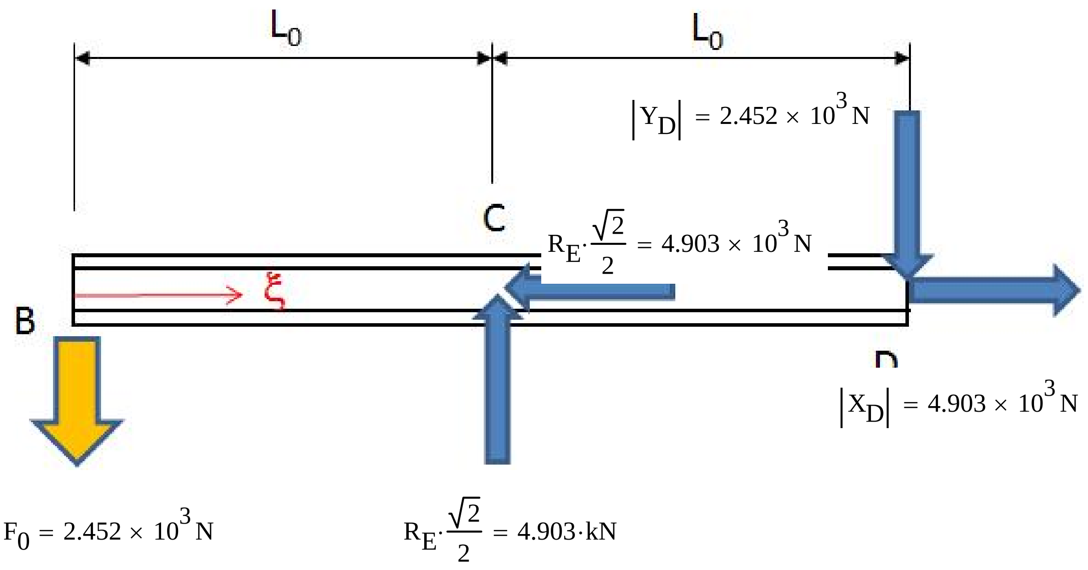


Fig. 1.3

dal quale si ricavano, per la trave orizzontale, i seguenti andamenti delle caratteristiche di sollecitazione in funzione della coordinata curvilinea ξ.

$\xi := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. 2 \cdot L_0$

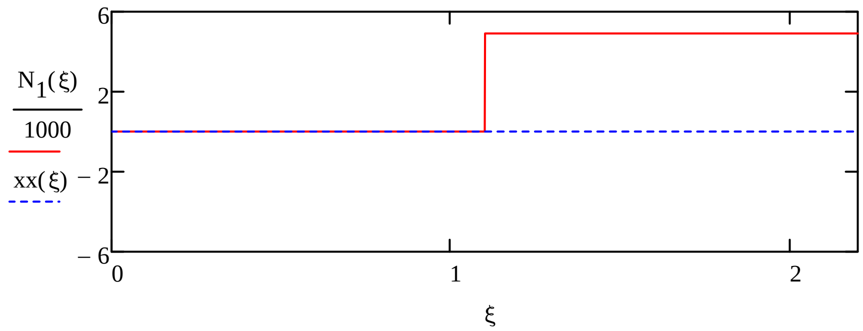
$xx(\xi) := 0$

Forza normale

La forza normale risulta data da:

$$N_1(\xi) := \begin{cases} 0 \cdot N & \text{if } 0 \le \xi \le L_0 \\ R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$R_E = 6.934 \cdot kN$



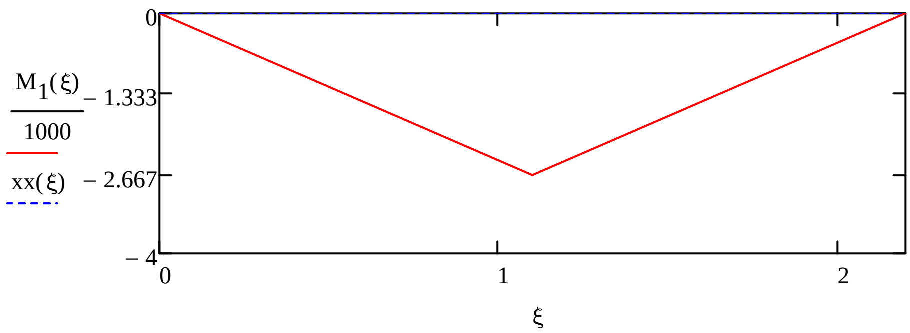
Taglio

Il taglio non viene tracciato, dato che il suo contributo allo spostamento di B è trascurabile:

Momento flettente

Il momento flettente risulta dato da:

$$M_1(\xi) := \begin{cases} -F_0 \cdot \xi & \text{if } 0 \le \xi \le L_0 \\ -\left|Y_D\right| \cdot \left(2 \cdot L_0 - \xi\right) & \text{otherwise} \end{cases} \qquad M_1\left(L_0\right) = -2.697 \times 10^3\, J$$



Asta obliqua

Per quanto concerne l'asta obliqua, essa risulta soggetta alla sola forza normale data da:

$$N_c := R_E = 6.934 \cdot kN$$

<u>*Calcolo dello spostamento di B*</u>

Lo spostamento δ_B del punto B può essere calcolato uguagliando il lavoro compiuto dal carico F

$$L_F := \frac{F_0 \cdot \delta_B}{2}$$

all'energia elastica immagazzinata all'interno della trave e della fune:

$$L_e := \int_0^{2 \cdot L_0} \frac{M(\xi)^2}{2E \cdot J_{1x}} + \frac{N(\xi)^2}{2E \cdot A_1}\, d\xi + \int_0^{L_0 \cdot \sqrt{2}} \frac{N_c^{\,2}}{2E \cdot A_2}\, d\xi$$

Da cui si ottiene:

$$\delta_B := \left[\int_0^{2 \cdot L_0} \frac{\left(M_1(\xi)\right)^2}{E \cdot J_{1x}} + \frac{\left(N_1(\xi)\right)^2}{E \cdot A_1}\, d\xi + \int_0^{L_0 \cdot \sqrt{2}} \frac{N_c^{\,2}}{E \cdot A_2}\, d\xi\right] \cdot \frac{1}{F_0}$$

$$\delta_B = 22.134 \cdot mm$$

ESERCIZIO 2 (Punti 7)

Verificare la resistenza della struttura di Fig. 1.1

Dati:

$$\sigma_{amm} := 500 \cdot MPa$$

Svolgimento

Asta orizzontale - Verifica a tensione ammissibile

La sezione più sollecitata risulta quella centrale, immediatamente a destra del punto B. Su tale sezione abbiamo forza normale e momento flettente, per cui la tensione massima in valore assoluto risulta data da:

$$\sigma_{max1} := \left| \frac{M_1(L_0)}{J_{1x}} \cdot \frac{h_1}{2} \right| + \left| \frac{R_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{A_1} \right| = 259.204 \cdot MPa$$

Asta obliqua - Verifica a tensione ammissibile

La trave è sollecitata da una forza normale uniforme, per cui la tensione massima in valore assoluto risulta data da:

$$\sigma_{max2} := \left| \frac{R_E}{A_2} \right| = 47.496 \cdot MPa$$

Asta obliqua - Verifica ad instabilità

La trave è sollecitata da una forza normale uniforme, per cui il carico critico risulta dato da:

$$P_{cr} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{2y}}{\left(L_0 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 14.077 \cdot kN \qquad R_E = 6.934 \cdot kN$$

ESERCIZIO 3 (Punti 8)

Si suponga che all'estremo *B* della struttura di Fig. 1.1, venga fissata una massa M_0 (vedi la Fig. 3.1).
Si calcoli l'ampiezza di oscillazione in direzione verticale dell'estremo *B* in presenza di una forzante sinusoidale agente nella sttessa direzione ed avente ampiezza F_{max} e frequenza f_0.
Si conideri trascurabile la massa delle due travi.

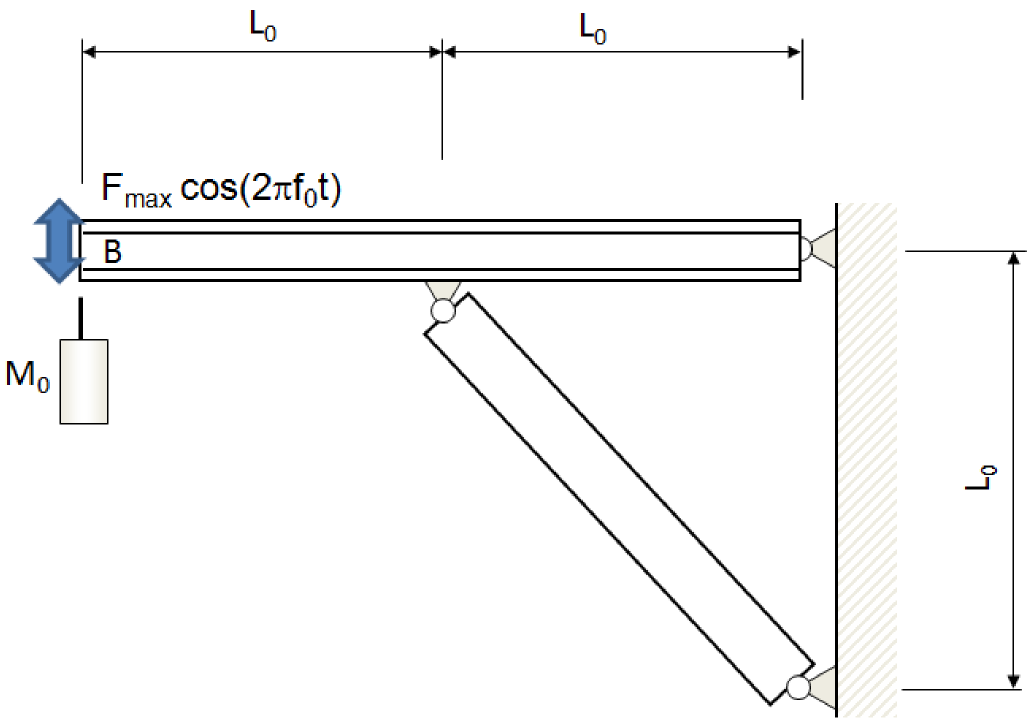


Fig. 3.1

Dati

$\xi := 0.05$ smorzamento relativo

$M_0 := 400 \cdot kg$

$F_{max} := 500 \cdot N$ ampiezza forzante

$f_0 := 3 \cdot Hz$ frequenza forzante

Svolgimento

Dato che la massa della trave può essere trascurata, la struttura è assimilabile ad un semplice sistema massa-molla ad un solo grado di libertà, nel quale la massa è quella sollevata (M) mentre la rigidezza corrisponde a quella verticale dell'intera struttura nel punto B.
La rigidezza della molla equivalente alla struttura può pertanto essere valutata come:

$$k := \frac{F_0}{\delta_B} = 1.108 \times 10^5 \cdot \frac{N}{m}$$

La frequenza propria del sistema risulta quindi data da::

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{M_0}} = 16.641\,\frac{1}{s} \qquad\qquad 2\cdot\pi\cdot f_0 = 18.85\,\frac{1}{s}$$

L'ampiezza della risposta forzata del sistema sarà quindi data da:

$$X_B := \frac{F_0}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{2\cdot\pi\cdot f_0}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\cdot\xi\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot f_0}{\omega_n}\right)^2}} = 0.073\,m$$