



Corso di PROGETTAZIONE ASSISTITA DELLE STRUTTURE MECCANICHE

Rev: 02 del 03/10/2008

DOCENTE: Leonardo BERTINI

Dip. di Ingegneria Meccanica, Nucleare e della Produzione,
1° piano

Tel. : 050-836621

E.mail : leonardo.bertini@ing.unipi.it



CONTENUTI DEL CORSO

LEZIONI

- Basi teoriche del MEF
- Applicazione del MEF a problemi strutturali in campo elastico lineare
- Analisi critica dei risultati di un modello ad EF
- Criteri di modellazione di strutture con il MEF

ESERCITAZIONI

- Uso del programma ANSYS
- Esempi significativi di applicazione del MEF a problemi strutturali



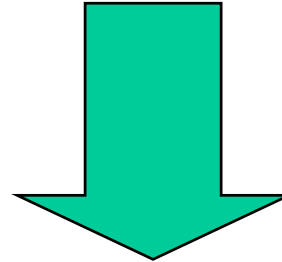
Elasticità

Elettromagnetismo

Fluidodinamica

Termodinamica

Etc...

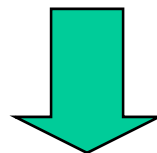
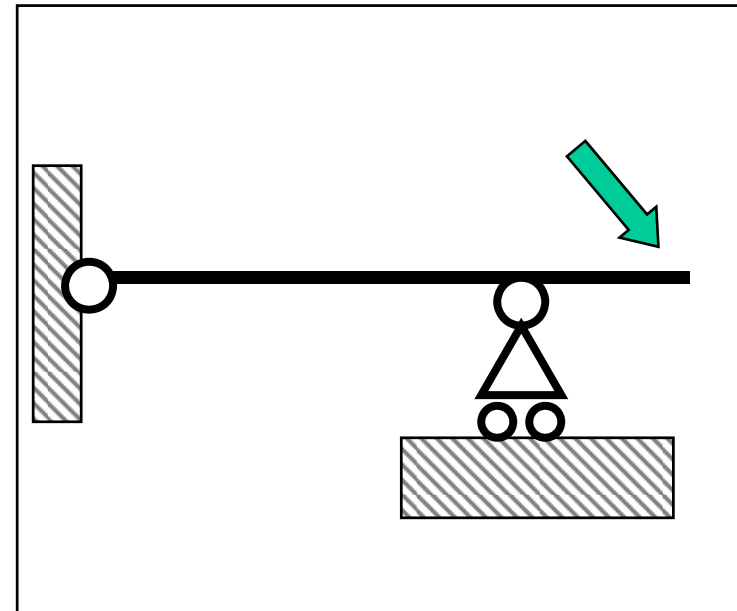
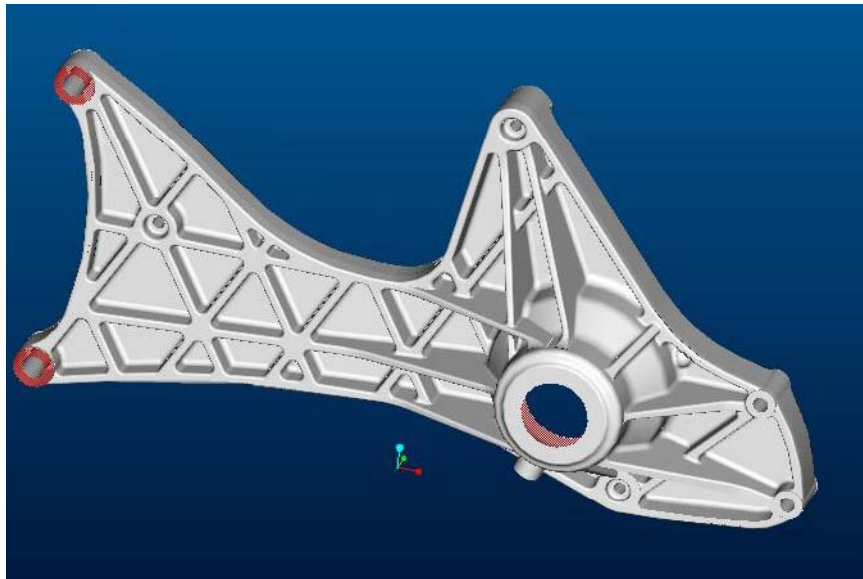


Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali

E.qni di Navier

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{G} = 0 \end{array} \right.$$

Soluzioni analitiche: solo in casi particolari, introducendo rilevanti semplificazioni (travi, piastre, gusci...)



Sviluppo di tecniche di soluzione **approssimate**



Metodi di soluzione approssimata:

- Differenze finite
- Elementi Finiti
- Elementi di contorno
- Metodi “mesh free”
- ...

Il Metodo degli Elementi Finiti (MEF) è oggi di gran lunga il più diffuso, soprattutto a causa della sua estrema versatilità



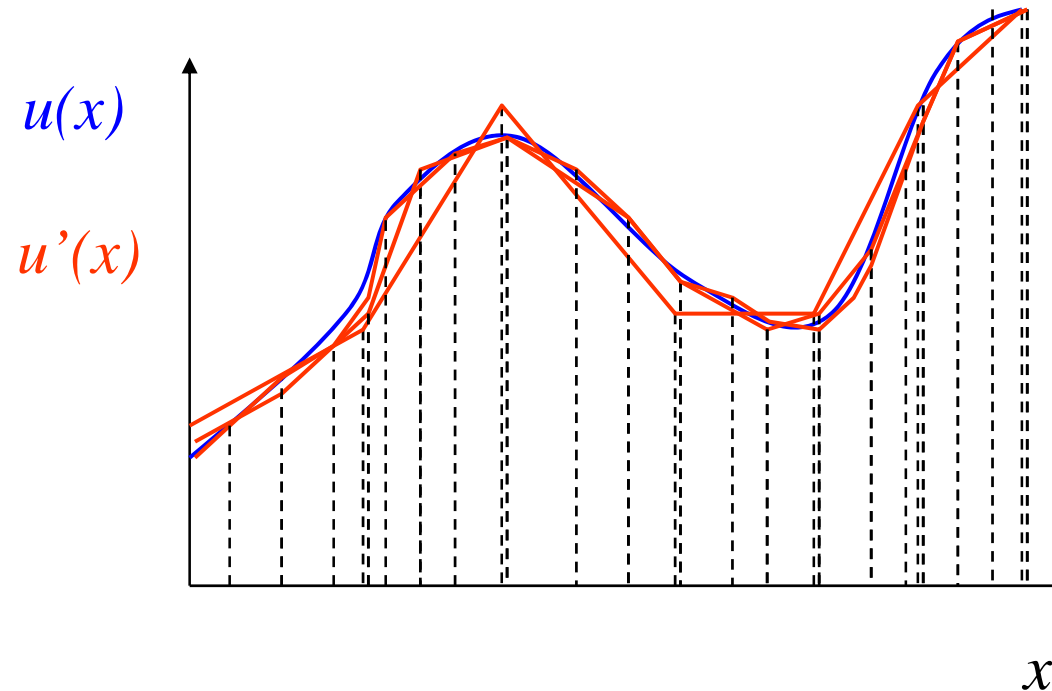
Idea centrale del MEF (e delle altre tecniche approssimate):

Problema originale: determinare le f.ni incognite u , v , w

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{Z}{G} = 0 \end{cases}$$

Problema sostitutivo: determinare delle funzioni sostitutive che approssimino u , v e w con un errore accettabile ai fini pratici e siano relativamente facili da calcolare

Esempio di funzione approssimante (problema monodimensionale)



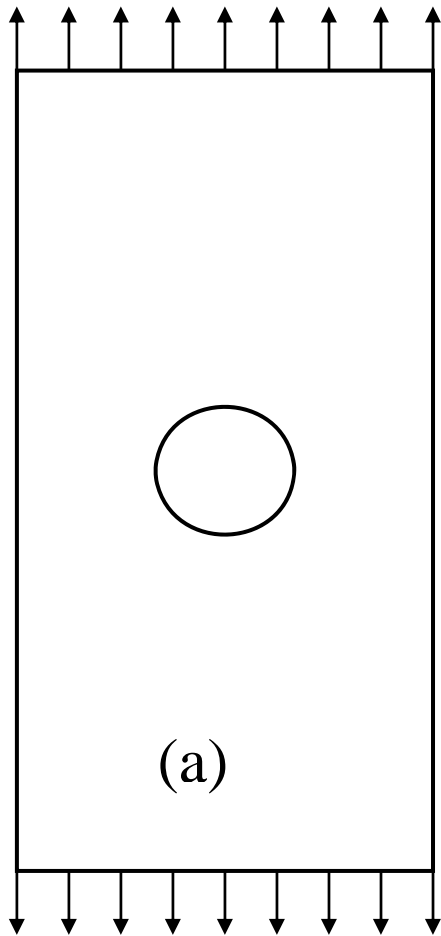
F.ne sostitutiva $u'(x)$:

- espressione matematica semplice
- nota ovunque una volta noto il valore di un n° finito di parametri

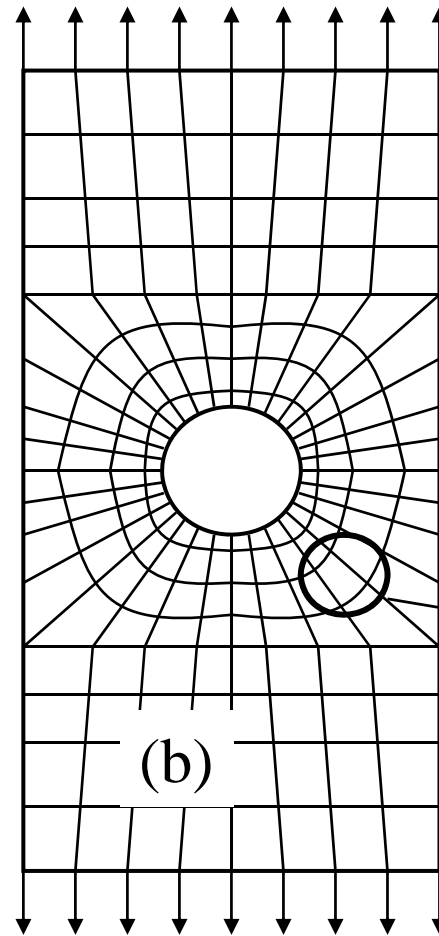
Oss.ni:

- necessario assicurare la **convergenza**
- soluzione affetta da **errori**

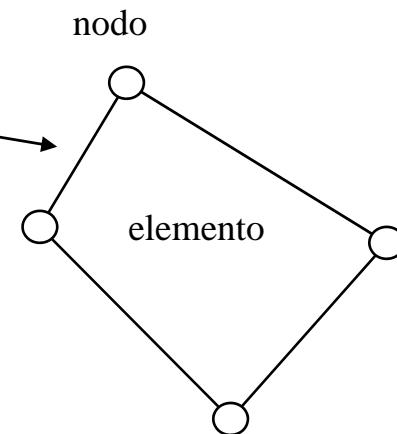
Discretizzazione



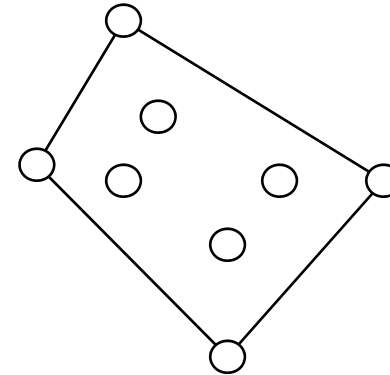
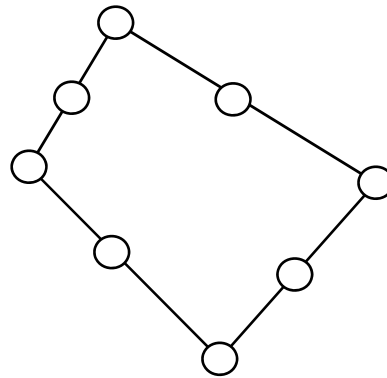
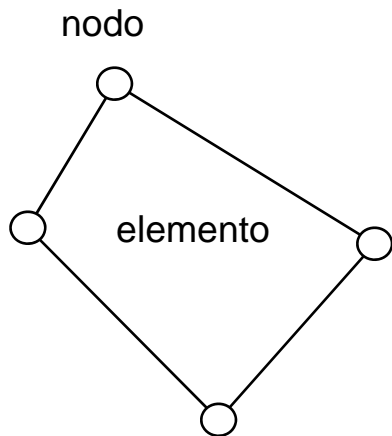
Struttura



Modello ("mesh")

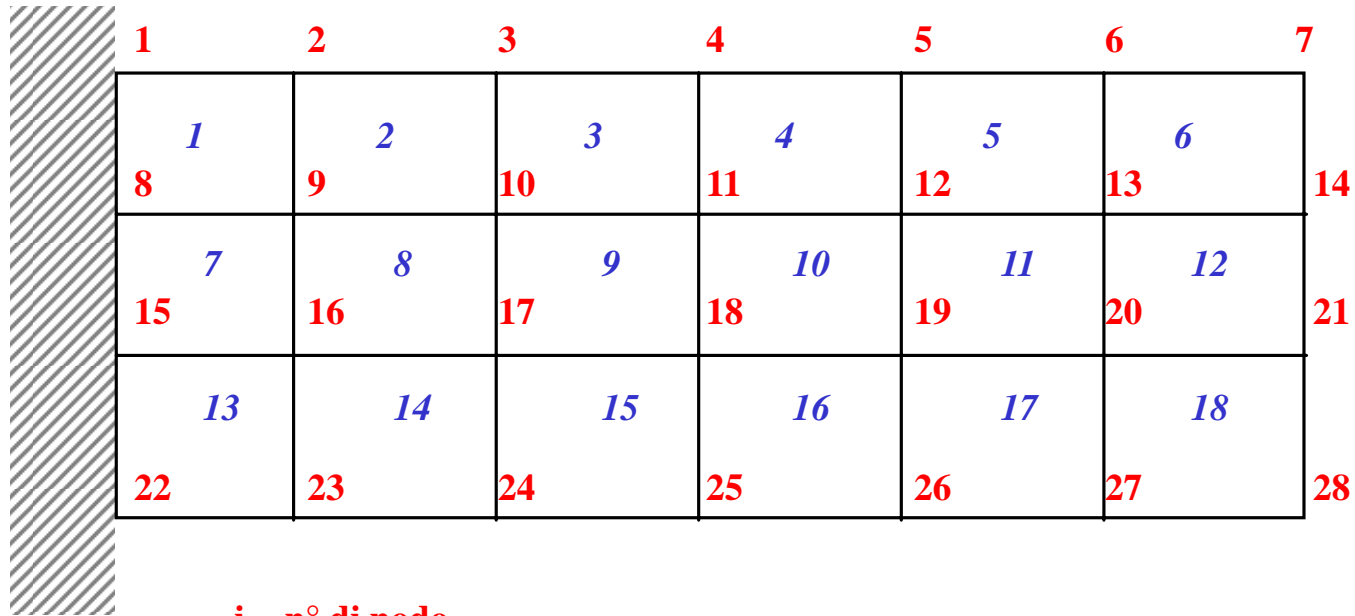


Esempi di elementi piani con diverse disposizioni dei nodi

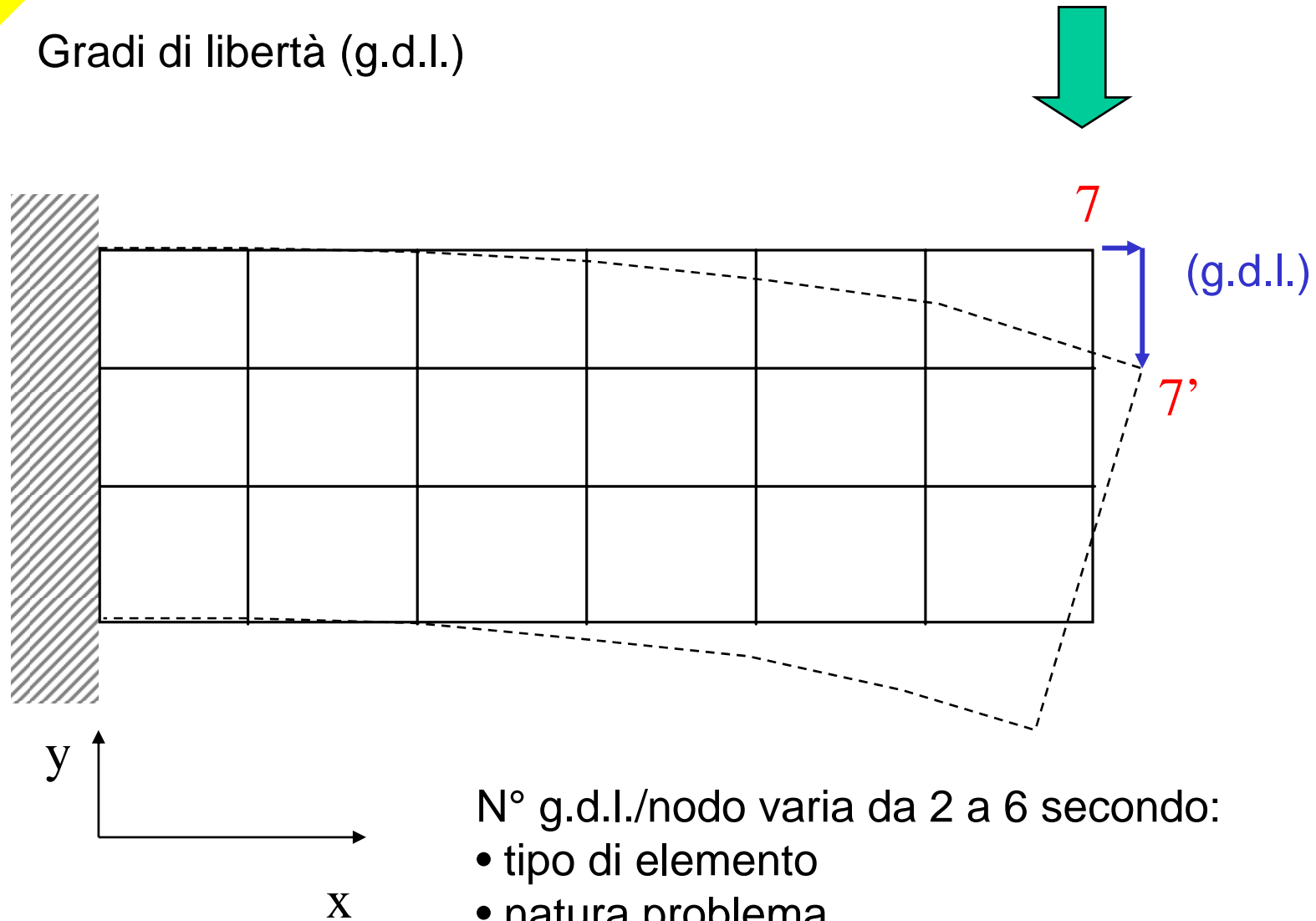




Nodi ed elementi identificati da un numero univoco



Gradi di libertà (g.d.l.)



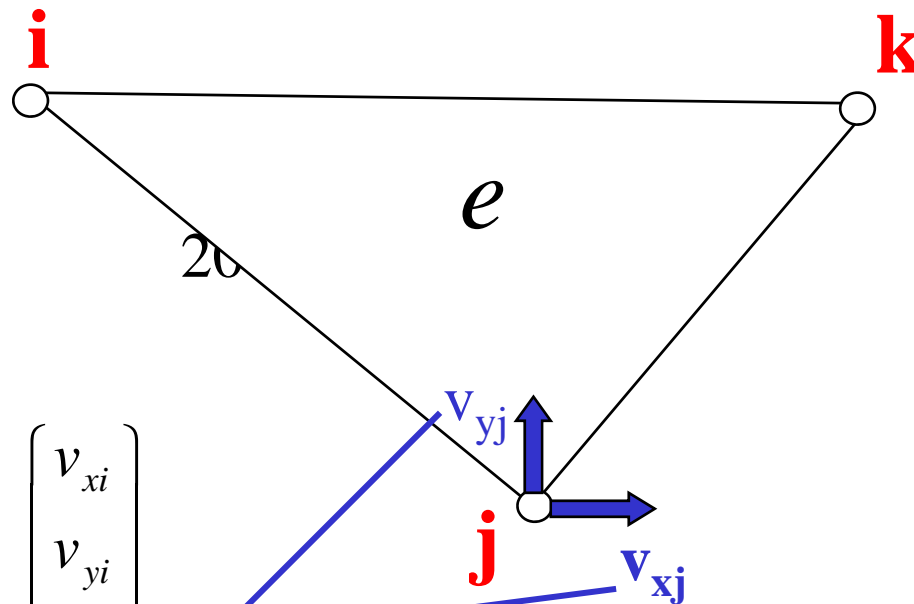
N° g.d.l./nodo varia da 2 a 6 secondo:

- tipo di elemento
- natura problema

$$N^{\circ} \text{ totale g.d.l.} = N^{\circ} \text{ g.d.l./nodo} * N^{\circ} \text{ nodi}$$

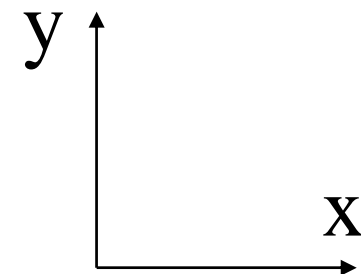
Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D



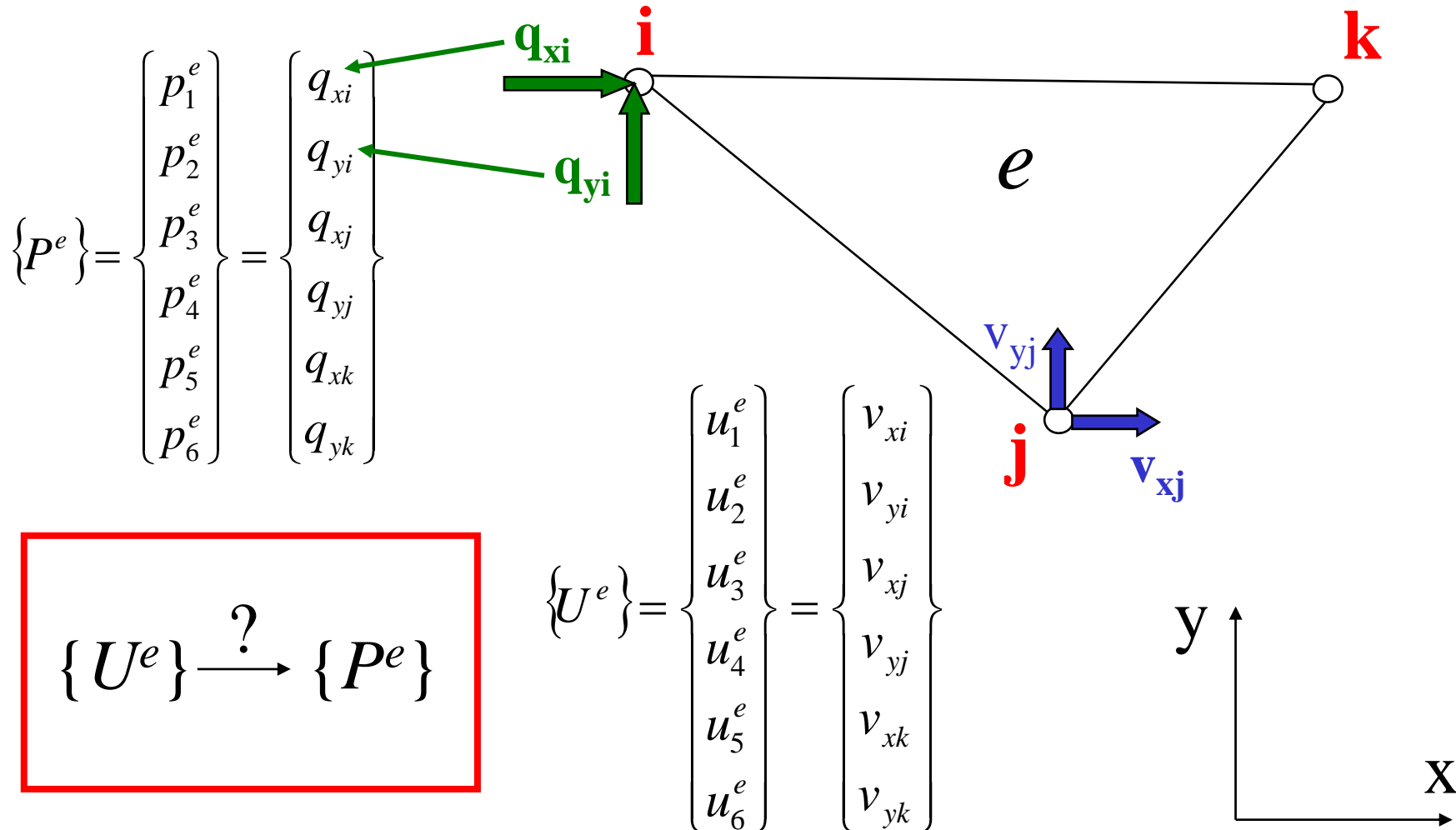
$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \\ u_5^e \\ u_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{xj} \\ v_{yj} \\ v_{xk} \\ v_{yk} \end{Bmatrix}$$

(6 x 1)



Studio del comportamento meccanico del singolo elemento

Elemento piano per problemi 2D





Studio condotto in campo lineare:

$$\{P^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\}$$

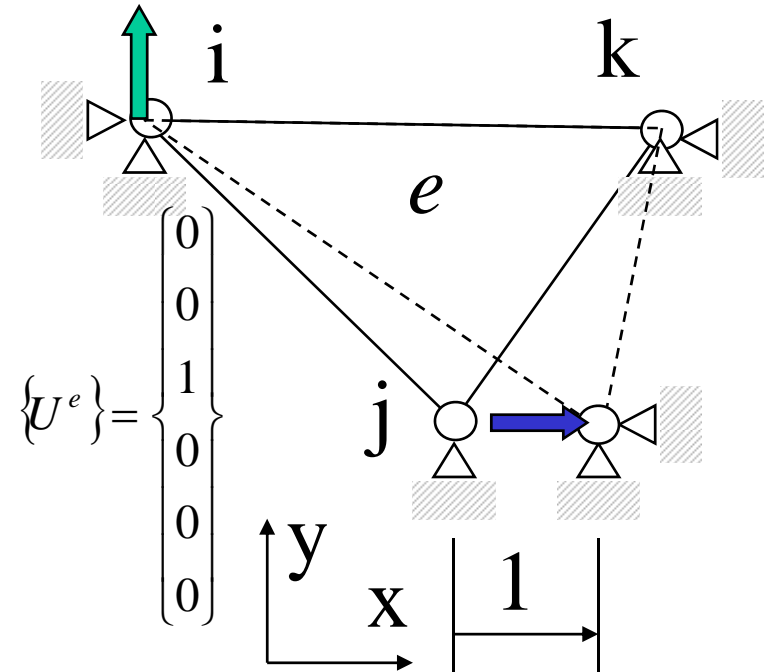
$$6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$$

Matrice di rigidezza dell'elemento

Significato fisico dei termini della matrice di rigidezza, k_{ij}

“Cedimento” vincolare:

$$\begin{Bmatrix} p_1^e \\ p_2^e \\ p_3^e \\ p_4^e \\ p_5^e \\ p_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



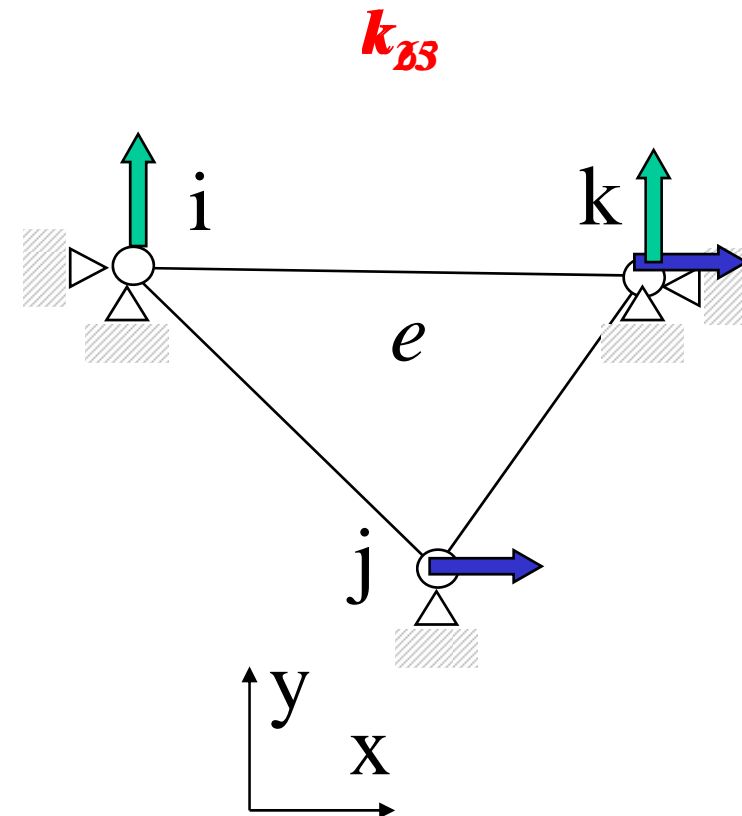
$$p_2^e = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot 0 + k_{23} \cdot 1 + \dots + k_{26} \cdot 0 = k_{23}$$

$$p_3^e = k_{33}; \quad p_4^e = k_{43} \dots$$

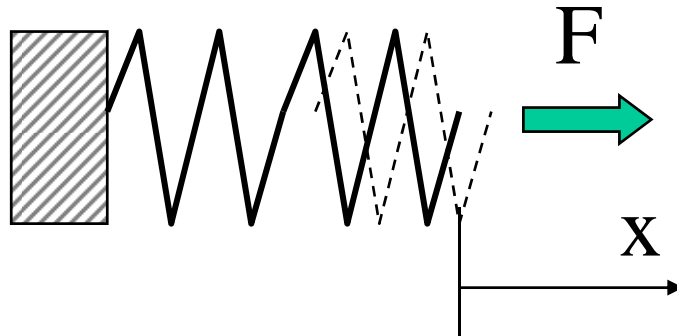
Il termine $k_{m,n}$ di $[K^e]$ è pari alla reazione vincolare presente secondo il grado di libertà “ m ” ($m=1,..6$), se si applica un sistema di spostamenti nodali in cui tutte le componenti sono nulle tranne la “ n -esima” che assume valore pari ad 1

$$p_m^e = \sum_n k_{m,n}^e u_n^e$$

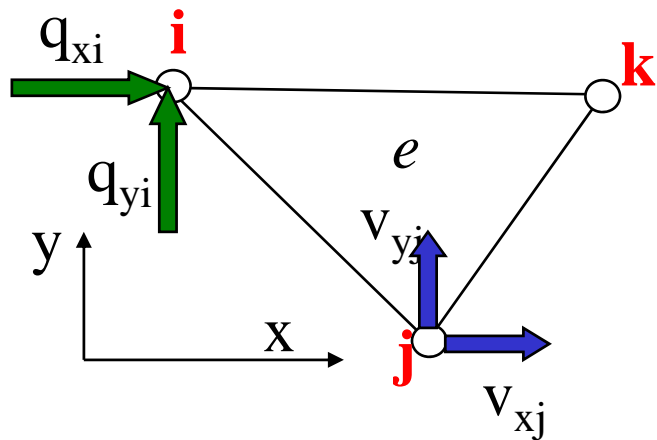
“peso” di u_n nel contribuire a p_m



Elemento = molla "multidimensionale"

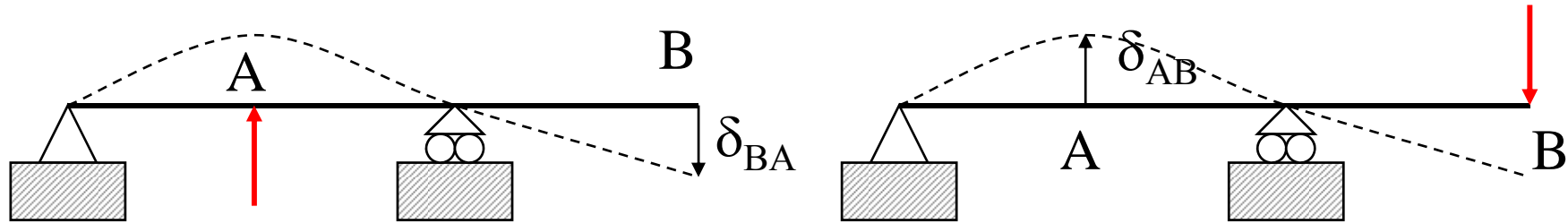


$$F = k x$$

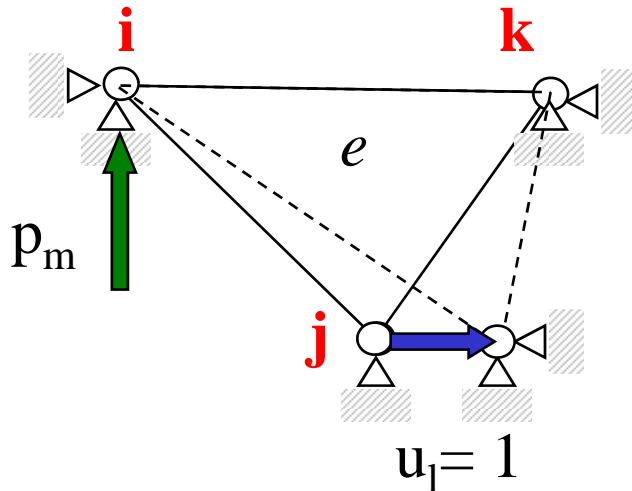


$$\{P^e\} = [K^e] \cdot \{U^e\}$$

Teorema di reciprocità



$$\delta_{AB} = \delta_{BA}$$



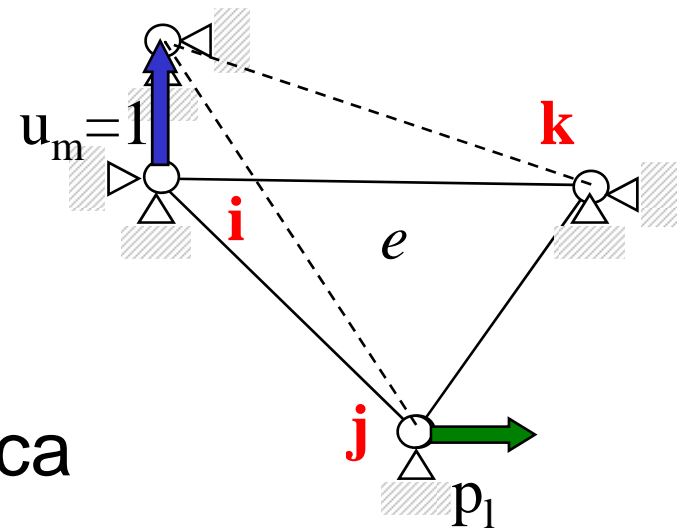
$$p_m^e = p_l^e$$



$$k_{ml} = k_{lm}$$

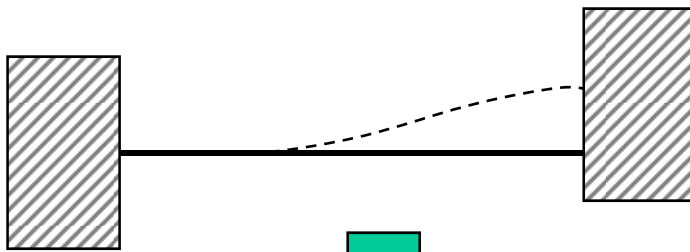


$[K^e]$ simmetrica



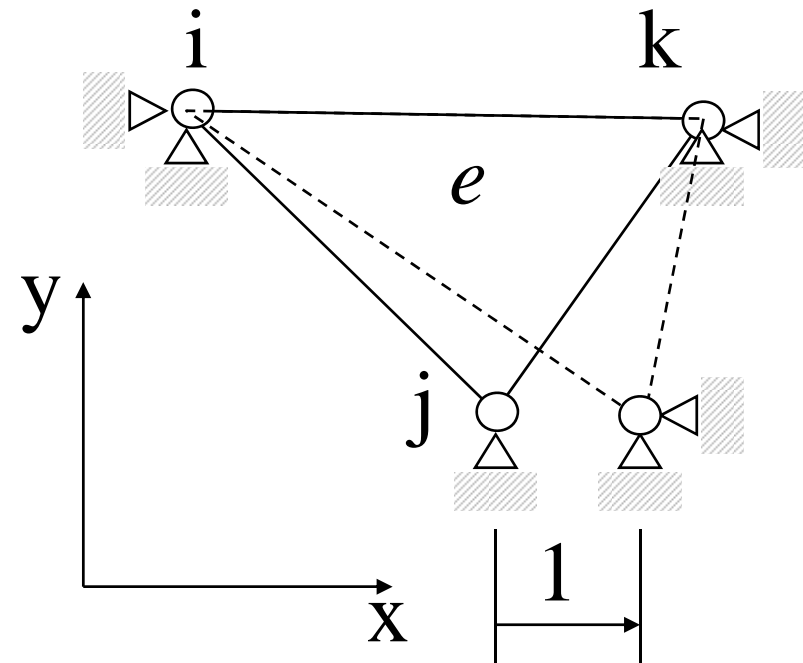
Valutazione di $[K^e]$

In casi semplici è possibile calcolare le reazioni vincolari in presenza di “cedimenti vincolari” dei nodi (Es. elementi trave)



si ottengono immediatamente le

$$k_{m,n}^e$$



In generale, questa procedura non è praticabile per un elemento di forma generica

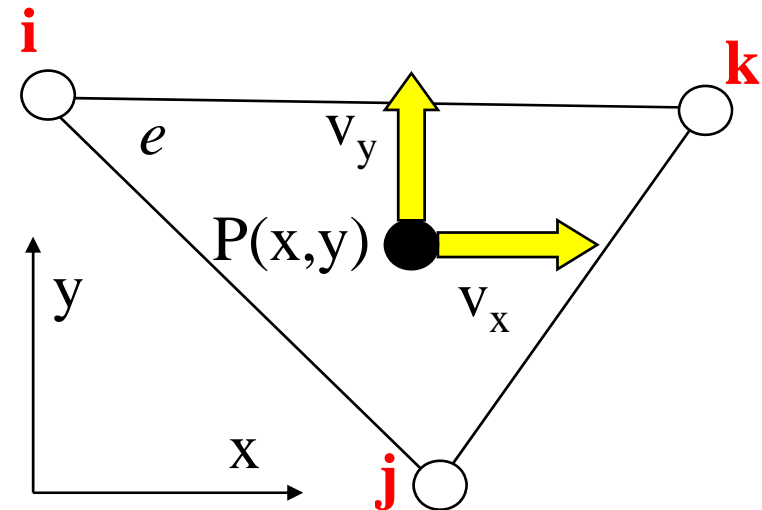
Spostamenti nei punti interni all'elemento

$$\left\{ v(x, y) \right\} = \left\{ \begin{matrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{matrix} \right\} = \left[N^e(x, y) \right] \cdot \left\{ U^e \right\}$$

2×1 2×1 2×6 6×1

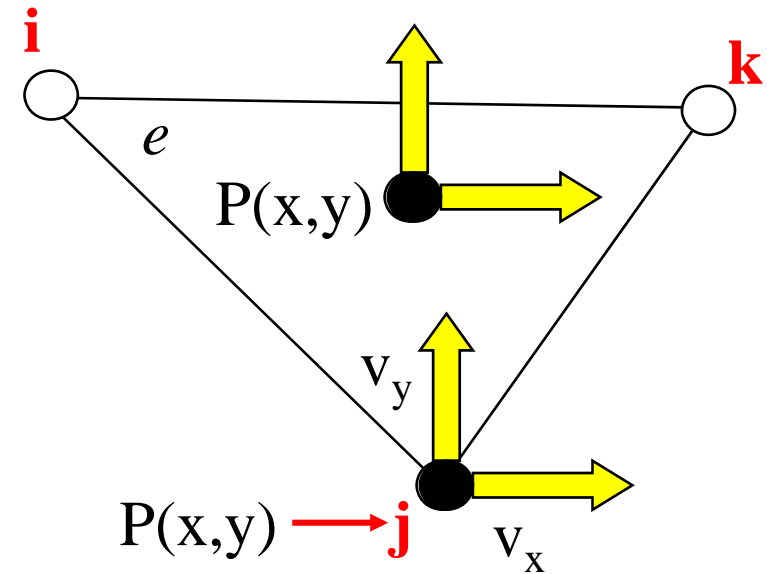
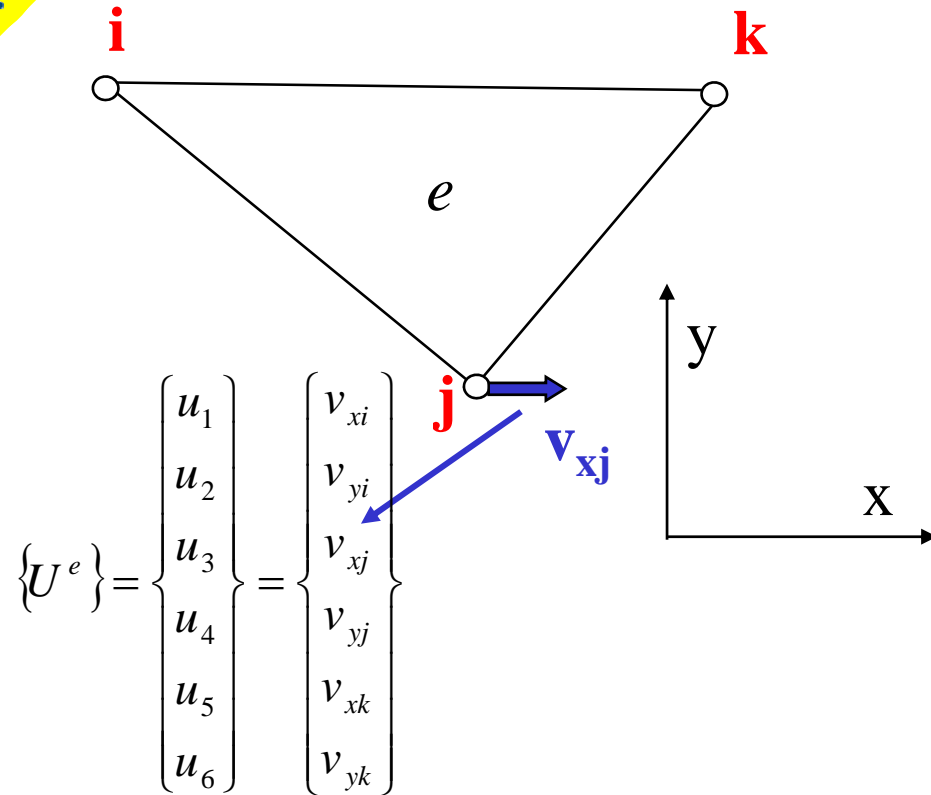
F.ni di forma ("shape functions")

$$v_r = \sum_{l=1}^6 N_{rl}^e(x, y) \cdot u_l$$



Ogni f.ne di forma rappresenta il "peso" (dipendente dalla posizione di P) che ciascuna componente di spostamento nodale ha nel determinare lo spostamento di P

Pb: - che forma matematica dare alle $N^e(x, y)$?
 - come determinare le $N^e(x, y)$?



$$v_1(x_j, y_j) = v_x(x_j, y_j) = \sum_{l=1}^6 N_{1l}^e(x_j, y_j) \cdot u_l =$$

$$= N_{11}^e(x_j, y_j) \cdot u_1 + N_{12}^e(x_j, y_j) \cdot u_2 + \dots = u_3$$

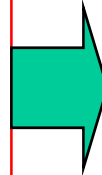
$$N_{1l}^e(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq 3 \\ 1 & \text{se } l = 3 \end{cases}$$

$$v_1(x_j, y_j) = \sum_{l=1}^6 N_{1l}^e(x_j, y_j) \cdot u_l = N_{11}^e(x_i, y_i) \cdot u_1 + N_{12}^e(x_i, y_i) \cdot u_2 + \dots$$

$$\begin{cases} N_{11}^e(x_i, y_i) = 1 & N_{14}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{12}^e(x_i, y_i) = 0 & N_{15}^e(x_i, y_i) = 0 \\ N_{13}^e(x_i, y_i) = 0 & N_{16}^e(x_i, y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{11}^e(x_j, y_j) = 0 & N_{14}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{12}^e(x_j, y_j) = 0 & N_{15}^e(x_j, y_j) = 0 \\ N_{13}^e(x_j, y_j) = 1 & N_{16}^e(x_j, y_j) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{11}^e(x_k, y_k) = 0 & N_{14}^e(x_k, y_k) = 0 \\ N_{12}^e(x_k, y_k) = 0 & N_{15}^e(x_k, y_k) = 1 \\ N_{13}^e(x_k, y_k) = 0 & N_{16}^e(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{12}(x_i, y_i) = 0 \\ N_{12}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{12}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

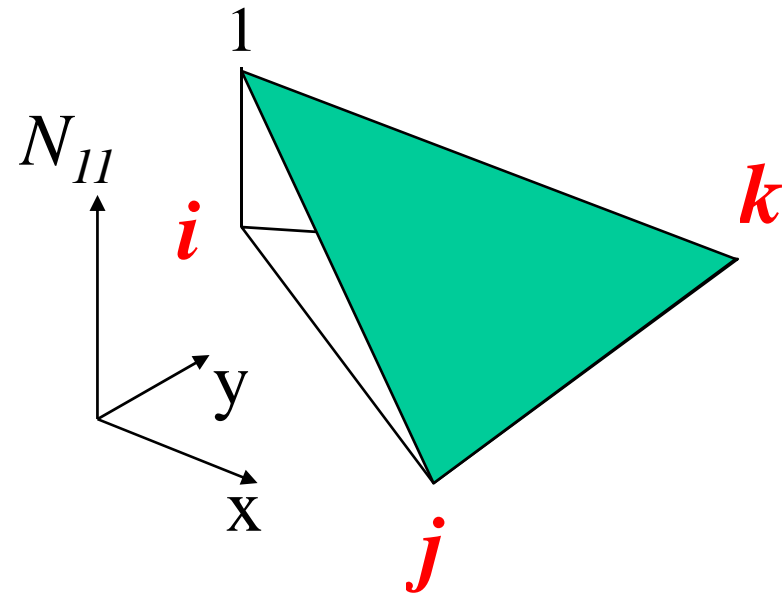
$$\begin{cases} N_{13}(x_i, y_i) = 0 \\ N_{13}(x_j, y_j) = 1 \\ N_{13}(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{14}(x_i, y_i) = 0 \\ N_{14}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{14}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{15}(x_i, y_i) = 0 \\ N_{15}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{15}(x_k, y_k) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{16}(x_i, y_i) = 0 \\ N_{16}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{16}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

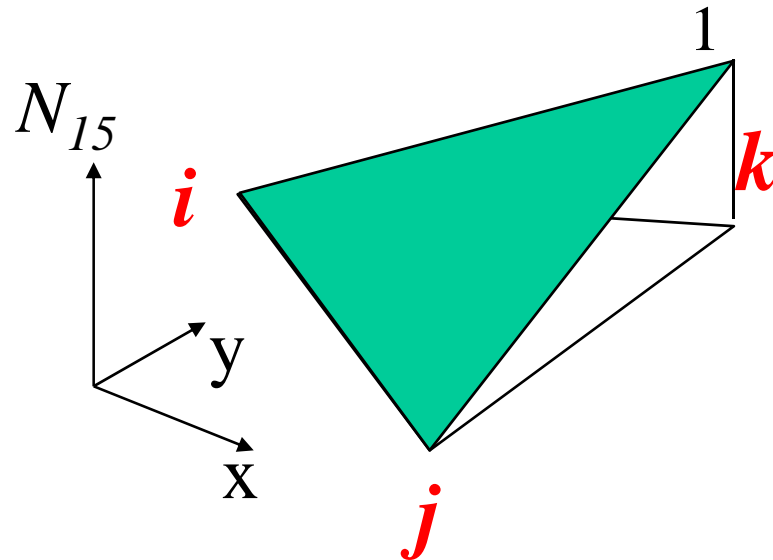
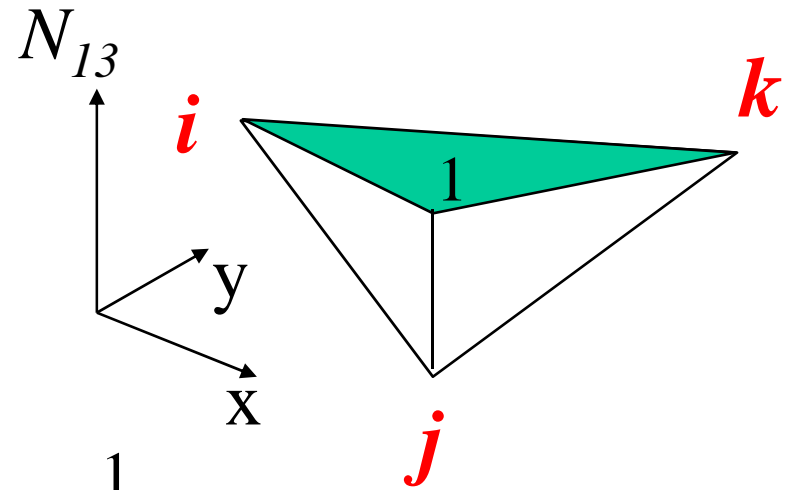
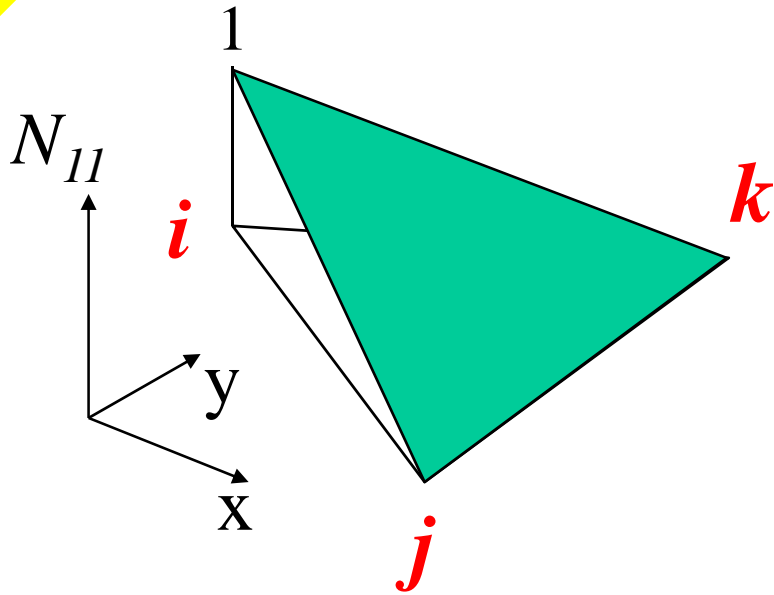
$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$

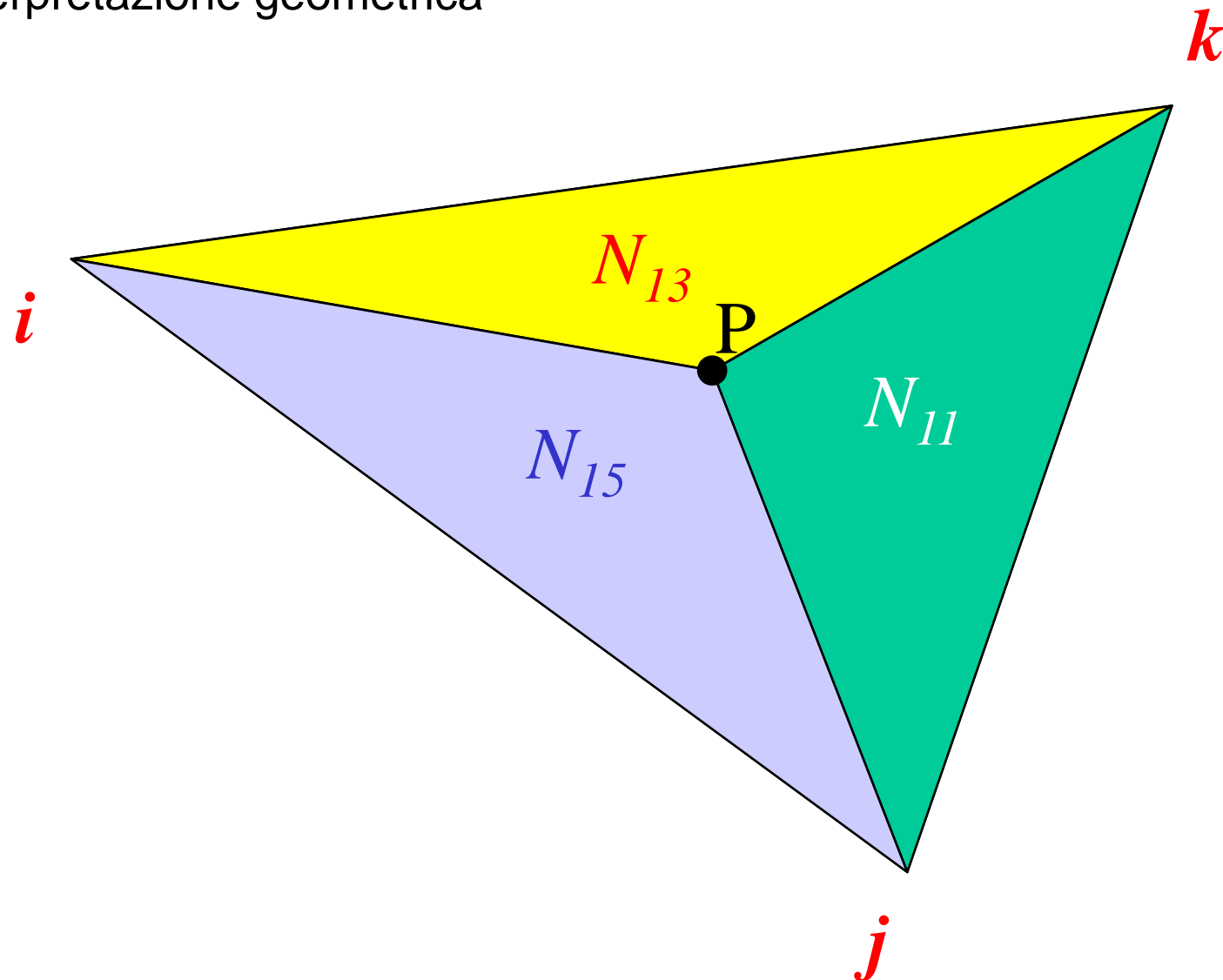
$$\begin{cases} A_{11} + B_{11}x_i + C_{11}y_i = 1 \\ A_{11} + B_{11}x_j + C_{11}y_j = 0 \\ A_{11} + B_{11}x_k + C_{11}y_k = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A_{11} = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta} \\ B_{11} = \frac{y_j - y_k}{2\Delta} \\ C_{11} = \frac{x_k - x_j}{2\Delta} \end{cases} \quad 2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$



Interpretazione geometrica

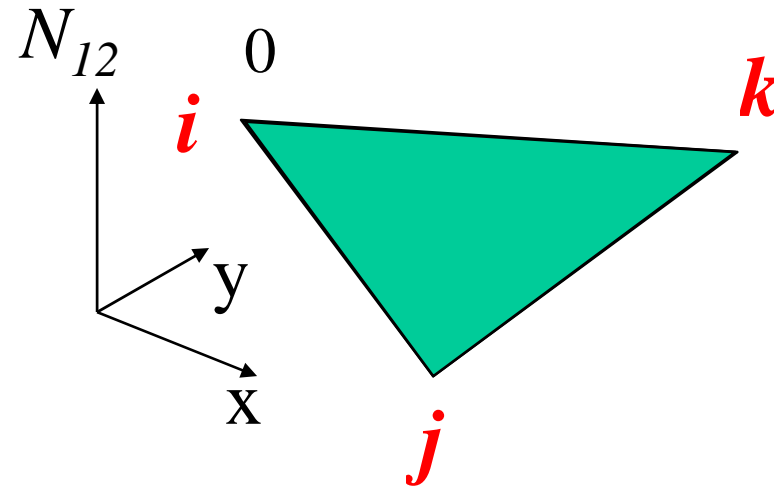


$$\begin{cases} N_{12}(x_i, y_i) = 0 \\ N_{12}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{12}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$

$$\begin{cases} A_{12} + B_{12}x_i + C_{12}y_i = 0 \\ A_{12} + B_{12}x_j + C_{12}y_j = 0 \\ A_{12} + B_{12}x_k + C_{12}y_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{12} = 0 \\ B_{12} = 0 \\ C_{12} = 0 \end{cases}$$





Matrice delle funzioni di forma

$$\underbrace{\{v(x, y)\}}_{2 \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{Bmatrix}}_{2 \times 1} = \underbrace{[N^e(x, y)]}_{2 \times 6} \cdot \underbrace{\{U^e\}}_{6 \times 1}$$



$$\begin{bmatrix} N_{11}(x, y) & 0 & N_{13}(x, y) & 0 & N_{15}(x, y) & 0 \\ 0 & N_{22} = N_{11} & 0 & N_{24} = N_{13} & 0 & N_{26} = N_{15} \end{bmatrix}$$



Calcolo delle deformazioni

Spostamenti

congruenza

Deformazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{array} \right\} = [L]\{v(x, y)\}$$

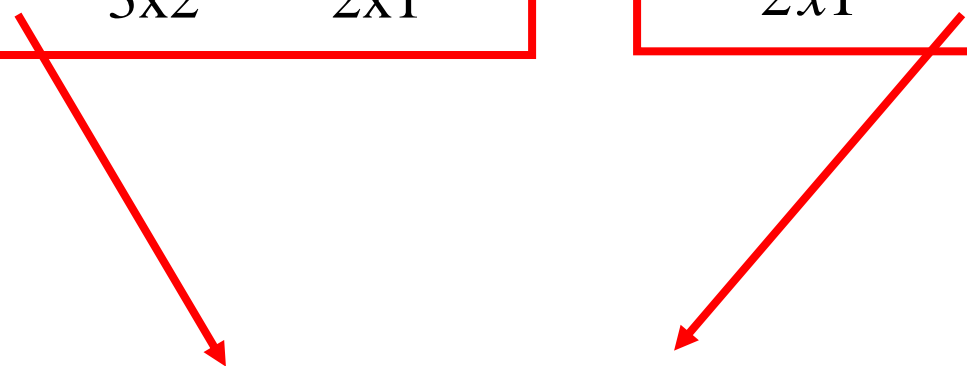


$$\{\varepsilon(x, y)\} = [L]\{v(x, y)\}$$

3x1 3x2 2x1

$$\{v(x, y)\} = [N(x, y)]\{U^e\}$$

2x1 2x6 6x1


$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{U^e\} = [B]\{U^e\}$$

3x1 3x6 6x1



Contenuto matrice [B]

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} & 0 & N_{26} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{13}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{22}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{24}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{26}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial y} & \frac{\partial N_{22}}{\partial x} & \frac{\partial N_{13}}{\partial y} & \frac{\partial N_{24}}{\partial x} & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & \frac{\partial N_{26}}{\partial x} \end{bmatrix}$$



$$N_{11} = A_{11} + B_{11}x + C_{11}y$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x} = B_{11} = \frac{y_j - y_k}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial y} = C_{11} = \frac{x_k - x_j}{2\Delta}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

Relazioni costitutive

Esempio 1: stato piano di tensione, materiale isotropo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$



Relazioni costitutive

Esempio 2: stato piano di deformazione, materiale isotropo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{array} \right. \quad [D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = 0$$

Valutazione di $[K^e]$

Principio dei Lavori Virtuali

$$L_{est} = L_{int}$$

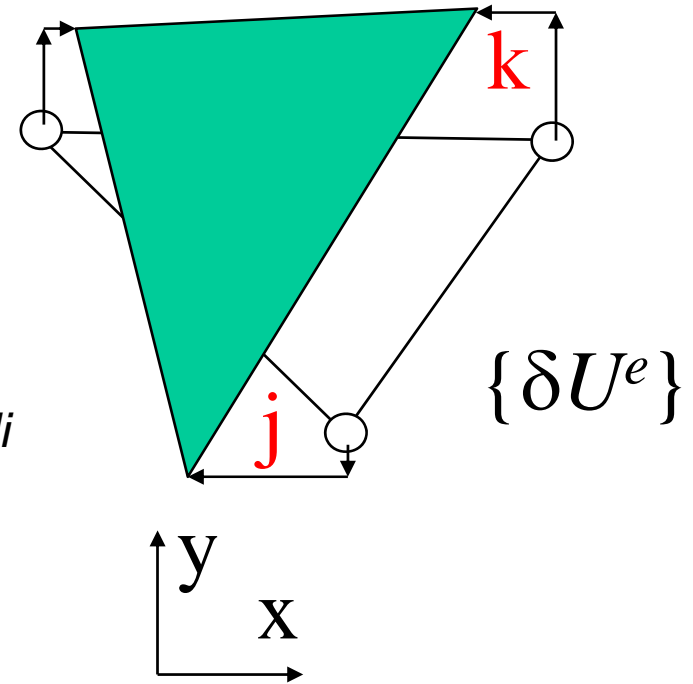
*Carichi nodali veri *
spost.nodali virtuali*

*Tensioni vere *
deformazioni virtuali*

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

Spost. virtuali

Carichi effettivi





$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta U^e\}$$

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta U^e\}^T [B]^T$$

$$L_{\text{int}} = \int_V \{\delta U^e\}^T [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D]\{\varepsilon\} dV$$



$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\}$$


$$L_{\text{int}} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B]\{U^e\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$



$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\}$$

$$L_{int} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$


$$\{\delta U^e\}^T \{P^e\} = \{\delta U^e\}^T \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$


$$\{P^e\} = \int_V [B]^T [D][B] dV \{U^e\}$$


$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

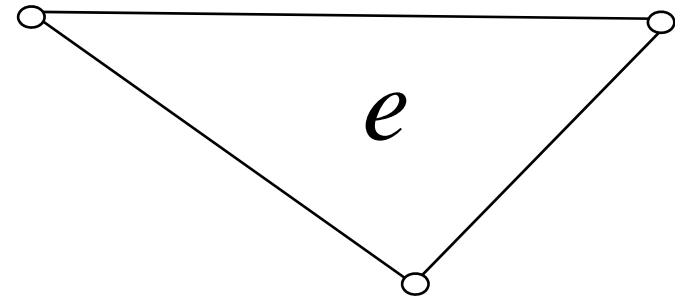
Applicazione

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[K^e] = [B]^T [D] [B] \int_V dV = [B]^T [D] [B] V$$





Osservazione: unità di misura

$$\begin{array}{c} \text{N m}^{-1} \rightarrow [K^e] = [B]^T [D] [B] V \leftarrow \text{m}^3 \\ \begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{m}^{-1} & \text{N m}^{-2} & \text{m}^{-1} \end{array} \end{array}$$

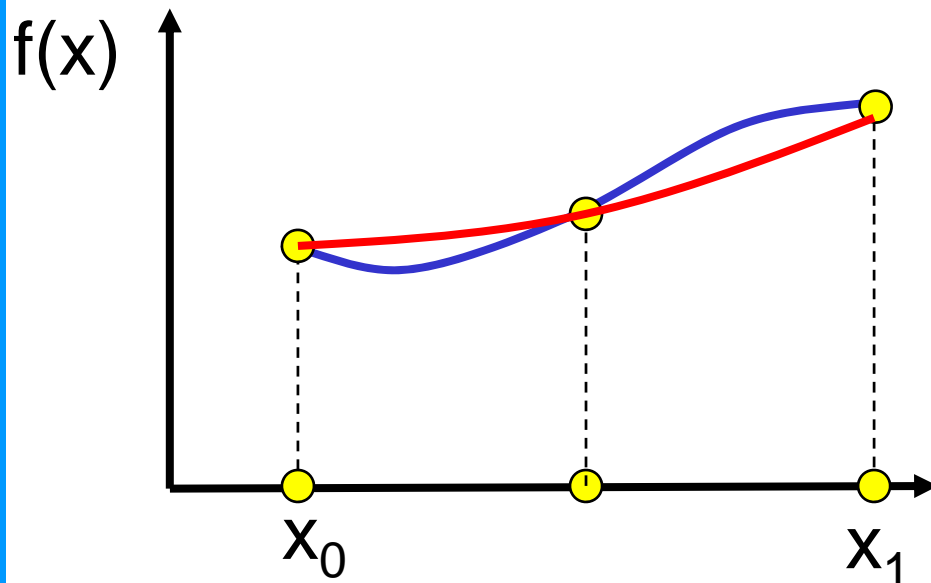
$$\frac{1}{m} \frac{N}{m^2} \frac{1}{m} m^3 = \frac{N}{m}$$

Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione:



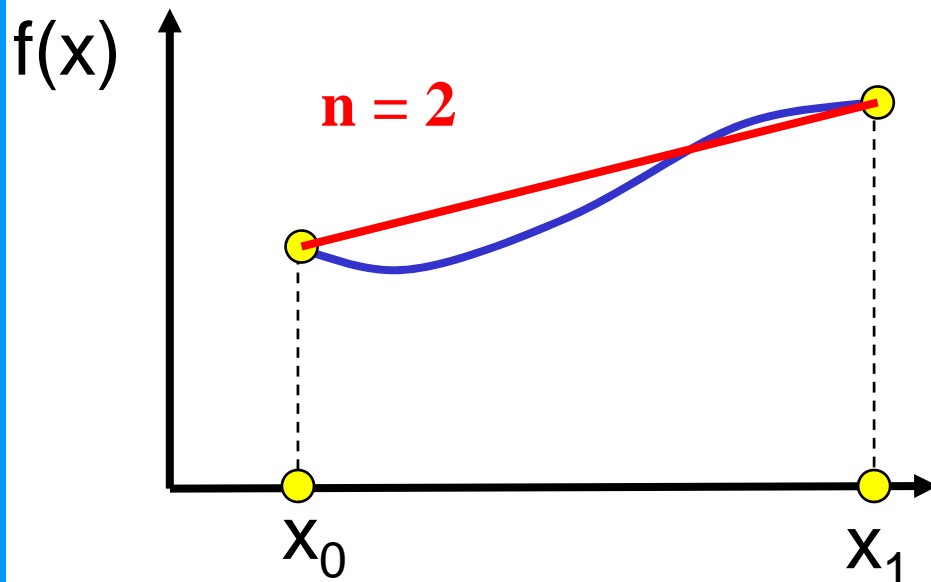
- 1) Si scelgono "a priori" n punti, x_i
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione:



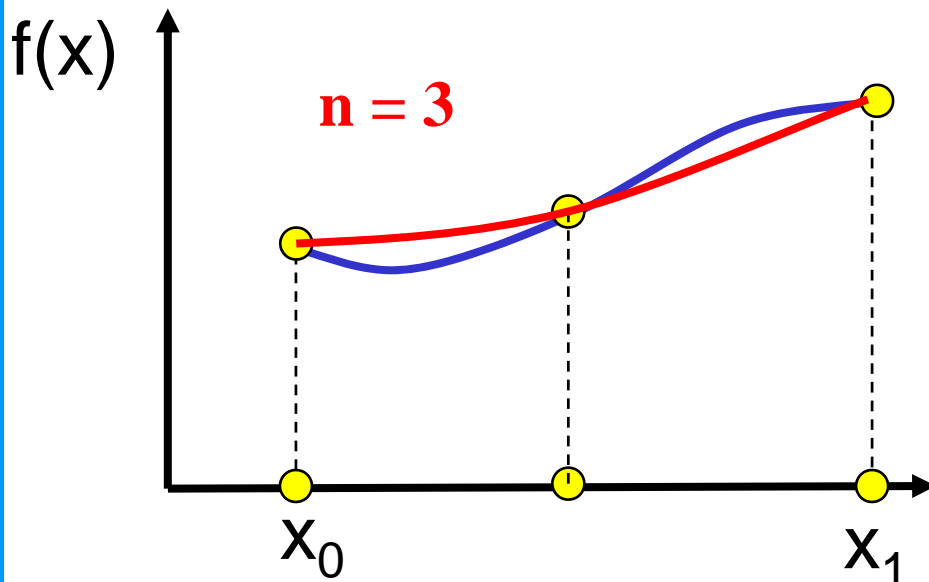
- 1) Si scelgono "a priori" n punti, x_i
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione:



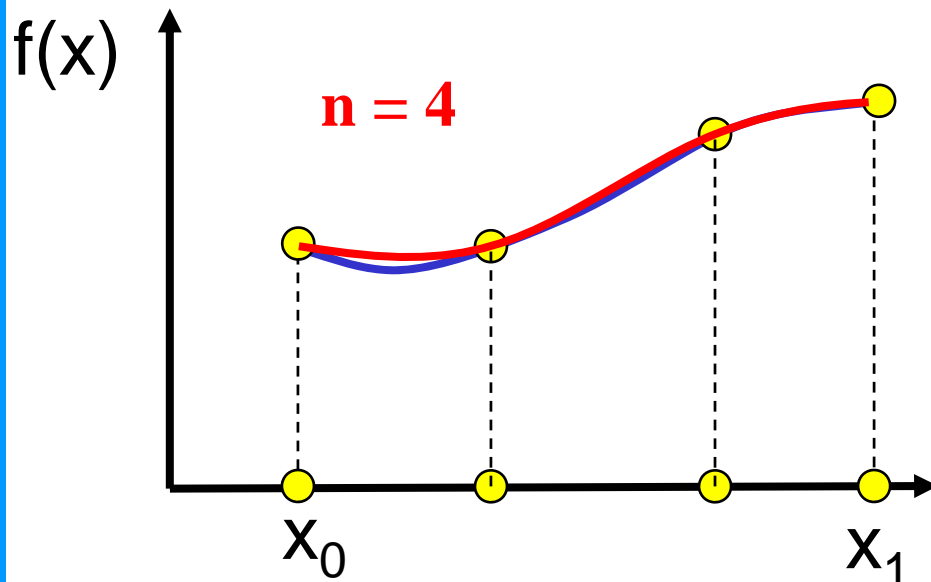
- 1) Si scelgono “a priori” n punti, x_i
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

Calcolo della matrice $[K^e]$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

Integrale calcolato numericamente (Metodo di Gauss)

Metodi classici di integrazione:

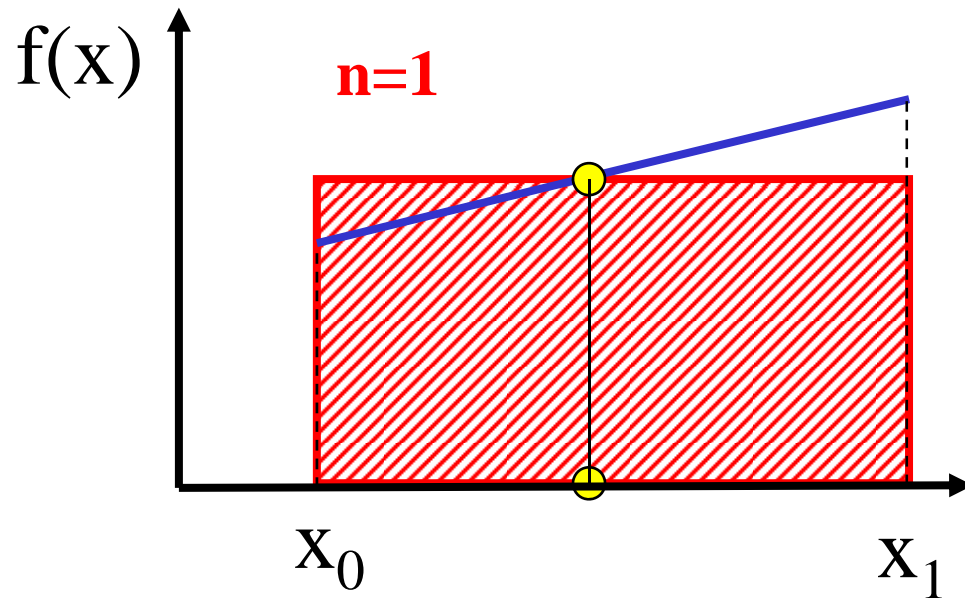


- 1) Si scelgono “a priori” n punti, x_i
- 2) Si calcolano i valori di $f(x_i)$
- 3) Si approssima $f(x)$ con il polinomio di grado $n-1$ passante per i punti scelti
- 4) Si integra il polinomio in forma chiusa

Integrazione secondo Gauss: esempio 1D

Integrale da calcolare $\rightarrow \int_{x_I}^{x_F} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$ Valore della f.ne nel punto x_i

↑
Peso



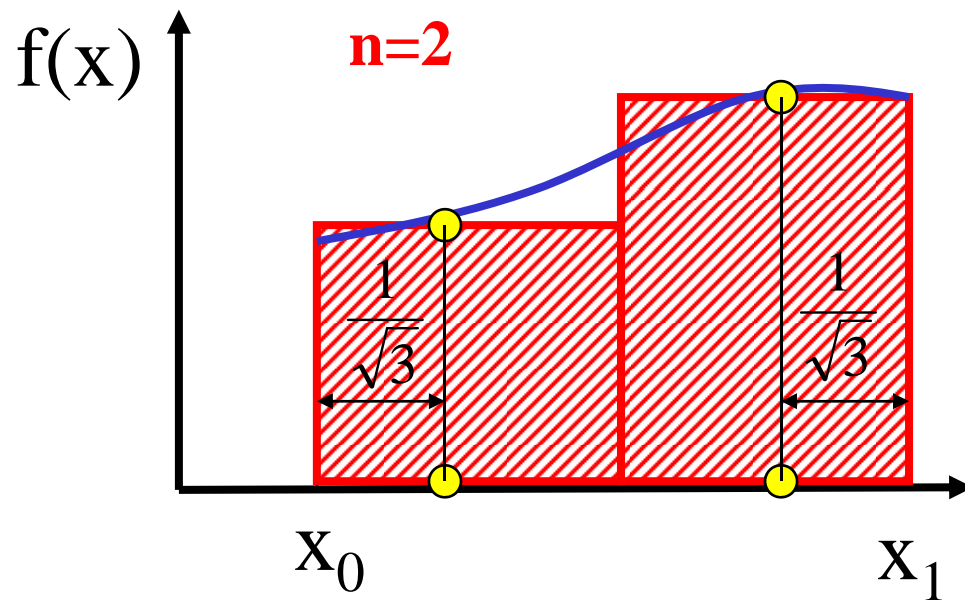
- 1) Si fissa n
- 2) Si scelgono gli x_i ed i W_i in modo da valutare in modo esatto l'integrale di un polinomio di grado $2n-1$ sull'intervallo dato

I punti x_i sono detti "punti di Gauss"

Integrazione secondo Gauss: esempio 1D

Integrale da calcolare $\rightarrow \int_{x_I}^{x_F} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \leftarrow$ Valore della f.ne nel punto x_i

↑
Peso



1) Si fissa n

2) Si scelgono gli x_i ed i W_i in modo da valutare in modo esatto l'integrale di un polinomio di grado $2n-1$ sull'intervallo dato

I punti x_i sono detti "punti di Gauss"



Vantaggi dell'integrazione secondo Gauss:

- fissato n , consente il calcolo esatto dell'integrale di una f.ne di grado $2n-1$ anziché $n-1$
- dato il grado n della f.ne che si vuole poter integrare esattamente, richiede il calcolo della f.ne stessa in $(n+1)/2$ punti, anziché in $n+1$ punti

Le posizioni dei punti di Gauss per integrali in 1, 2 e 3 dimensioni sono note per molti domini di integrazione.



ANALISI INTERA STRUTTURA

Congruenza



[B]

Costitutive



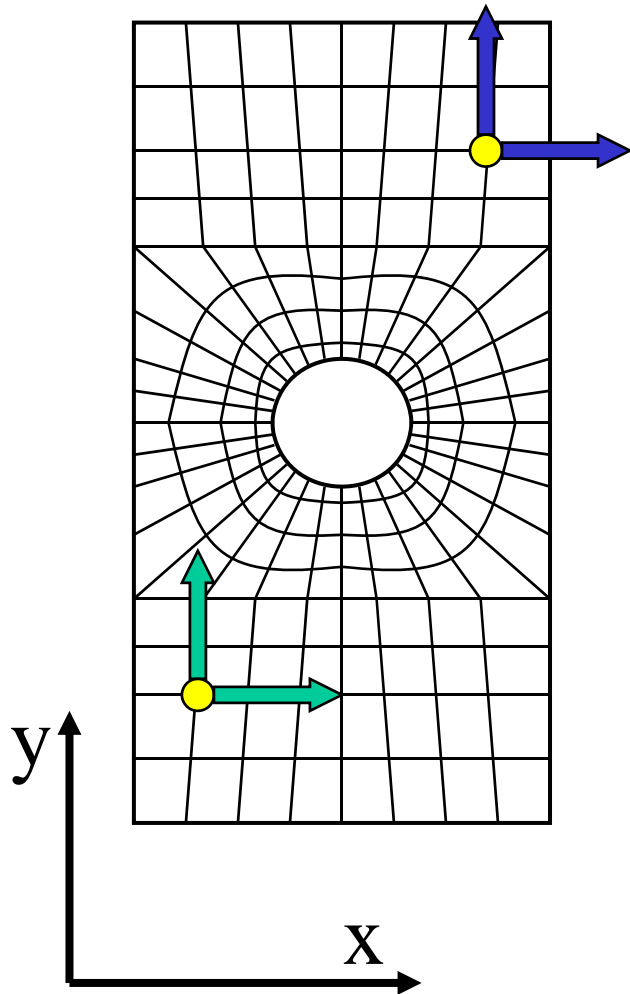
[D]

Equilibrio



Garantito per il singolo elemento (non ancora per la struttura)

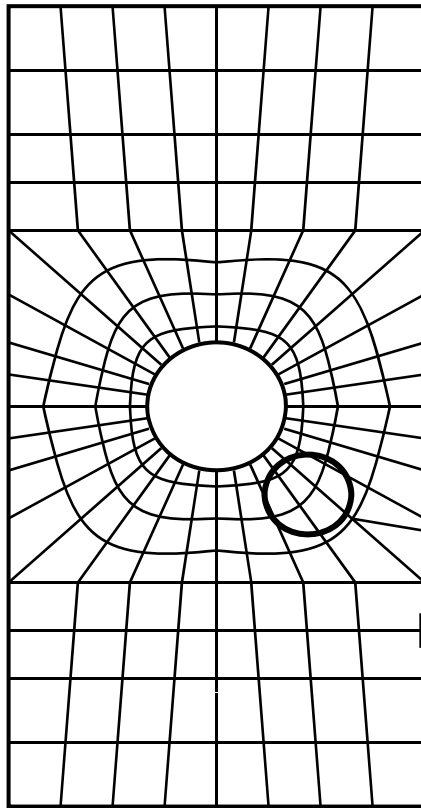
VETTORI DEGLI SPOSTAMENTI E DEI CARICHI ESTERNI PER L'INTERA STRUTTURA



$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ v_{yn_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ - \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ - \\ - \\ - \\ f_{yn_N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ - \\ - \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

VETTORI DEGLI SPOSTAMENTI E DEI CARICHI APPLICATI PER L'INTERA STRUTTURA



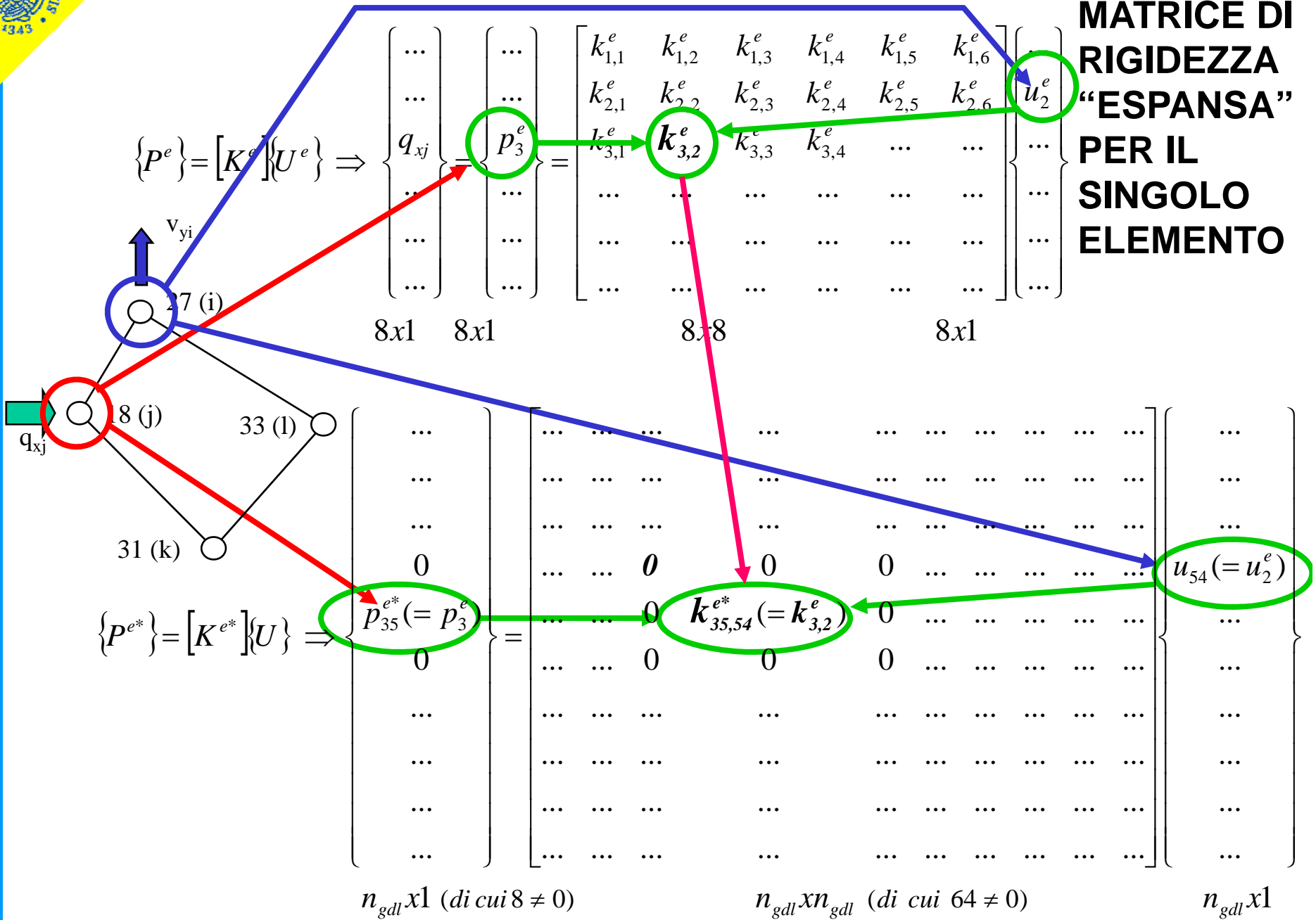
$$\{U\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{pmatrix}$$

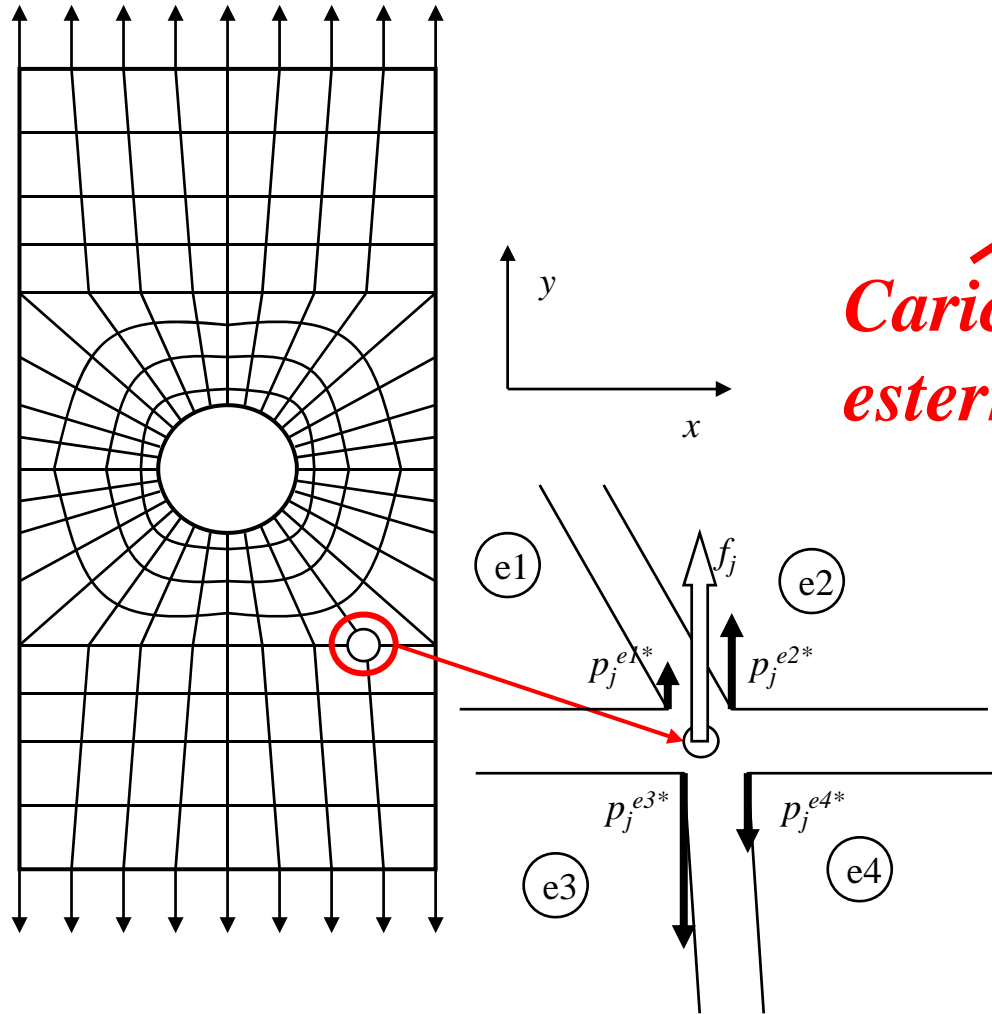
$u_{54} = v_{y27}$

$$\{F\} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_{35} = f_{x18} \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{pmatrix}$$



MATRICE DI RIGIDEZZA "ESPANSA" PER IL SINGOLO ELEMENTO





Carico esterno

$$f_j - \sum_{e=1}^{n_E} p_j^{e*} = 0$$

Carico applicato nel nodo all'elemento "e"

$$f_j = \sum_{e=1}^{n_E} p_j^{e*}$$



$$\{P^{e*}\} = [K^{e*}]\{U\}$$

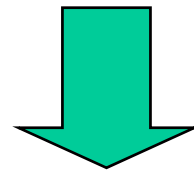
$$f_j = \sum_{e=1}^{n_E} P_j^{e*} = \sum_{e=1}^{n_E} \left(\sum_{i=1}^{n_{gdl}} k_{ji}^{e*} u_i \right) =$$

$$= \dots + \left(k_{ji}^{1*} + k_{ji}^{2*} + \dots + k_{ji}^{n_E*} \right) u_i + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{gdl}} \left(\sum_{e=1}^{n_E} k_{ji}^{e*} \right) u_i$$

$$\sum_{e=1}^{n_E} k_{ji}^{e*} = k_{ji}$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{n_{gdl}} \left(\sum_{e=1}^{n_E} k_{ji}^{e*} \right) u_i = \sum_{i=1}^{n_{gdl}} k_{ij} u_i$$



*Matrice di rigidezza
della struttura*

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

$n_{GDL} \times 1$

$n_{GDL} \times n_{GDL}$

$n_{GDL} \times 1$

SOLUZIONE

$$\{F\} = [K]\{U\}$$



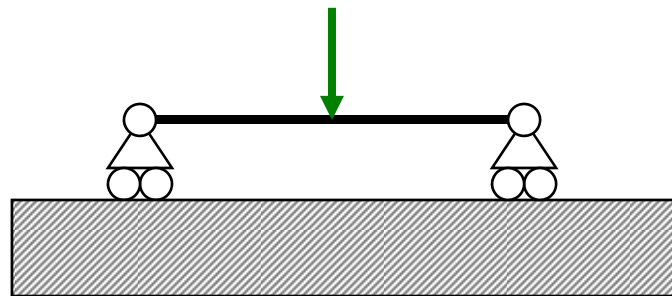
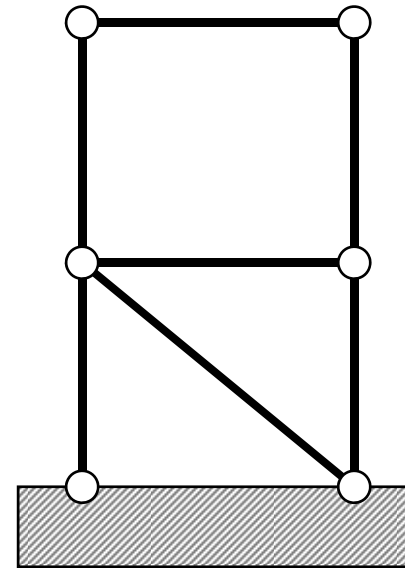
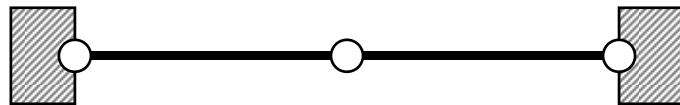
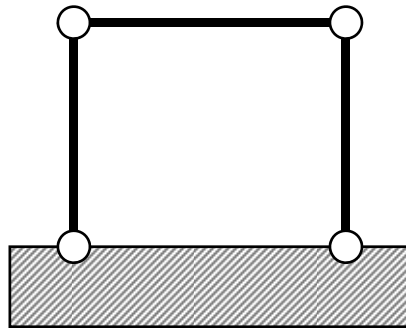
$$\{U\} = [K]^{-1}\{F\}$$

$$\text{c.n.s. : } \det[K] \neq 0$$

$$\det[K] \neq 0$$

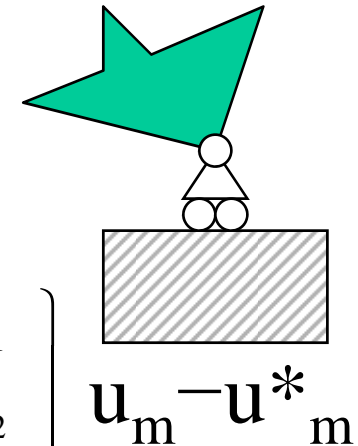


Struttura non labile

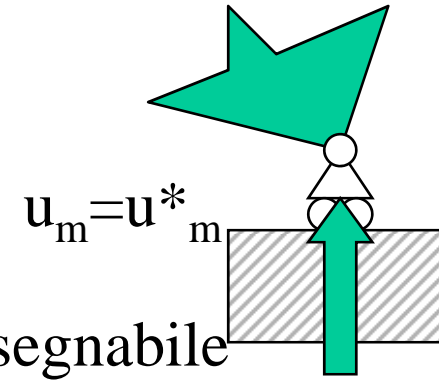


VINCOLI

Vincolare = assegnare “a priori” il valore di una delle componenti di spostamento (g.d.l.)



$$\begin{matrix} \left. \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\ \uparrow \\ n_{GDL} \cdot 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \left[\begin{matrix} k_{11} & k_{12} & - & - & k_{1m} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & - & k_{2m} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m1} & k_{m2} & - & - & k_{m,m} & - & k_{mn_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & - & k_{n_{GDL}m} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{matrix} \right] \\ \uparrow \\ n_{GDL} \cdot n_{GDL} \end{matrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_m \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{matrix} \right\} \\ \uparrow \\ n_{GDL} \cdot 1 \end{matrix}$$



f_m non assegnabile

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ - \\ f_m \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ - \\ k_{m,m} \\ - \\ k_{n_{GDL}m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m1} & k_{m2} & - & k_{m,m-1} & k_{m,m+1} & - & k_{mn_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & k_{n_{GDL}m-1} & k_{n_{GDL}m+1} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{Bmatrix}$$

$n_{GDL} \cdot 1$ $n_{GDL} \cdot (n_{GDL} - 1)$ $(n_{GDL} - 1) \cdot 1$

Introduzione vincolo = riduzione di 1 del numero di incognite ed equazioni

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_{m-1} \\ f_{m+1} \\ - \\ f_{n_{GDL}} \end{array} \right\} \\ \uparrow \\ (n_{GDL}-1) \cdot 1 \end{matrix} - u_m \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{c} k_{1m} \\ k_{2m} \\ - \\ k_{m-1,m} \\ k_{m+1,m} \\ - \\ k_{n_{GDL}m} \end{array} \right\} \\ \uparrow \\ (n_{GDL}-1) \cdot (n_{GDL}-1) \end{matrix} = \begin{matrix} \left[\begin{array}{ccccccc} k_{11} & k_{12} & - & k_{1m-1} & k_{1m+1} & - & k_{1n_{GDL}} \\ k_{21} & k_{22} & - & k_{2m-1} & k_{2m+1} & - & k_{2n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{m-1,1} & k_{m-1,1} & - & k_{m-1,m-1} & k_{m-1,m+1} & - & k_{m-1,n_{GDL}} \\ k_{m+1,1} & k_{m+1,2} & - & k_{m+1,m-1} & k_{m+1,m+1} & - & k_{m+1,n_{GDL}} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ k_{n_{GDL}1} & k_{n_{GDL}2} & - & k_{n_{GDL}m-1} & k_{n_{GDL}m+1} & - & k_{n_{GDL}n_{GDL}} \end{array} \right] \\ \uparrow \\ (n_{GDL}-1) \cdot (n_{GDL}-1) \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_{m-1} \\ u_{m+1} \\ - \\ u_{n_{GDL}} \end{array} \right\} \\ \uparrow \\ (n_{GDL}-1) \cdot 1 \end{matrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & X & X & X & X & 0 \\ & S & I & M & M & . & & & X & X & X & X \\ & & & & & & & & & X & X & X \\ & & & & & & & & & & X & X \\ & & & & & & & & & & & X \end{bmatrix}$$

La matrice $[K]$:

- è simmetrica
- ha una struttura “a banda” attorno alla diagonale principale



Esistono molti metodi di soluzione del sistema. Uno dei più comuni ed efficienti è il metodo di eliminazione diretta di Gauss.

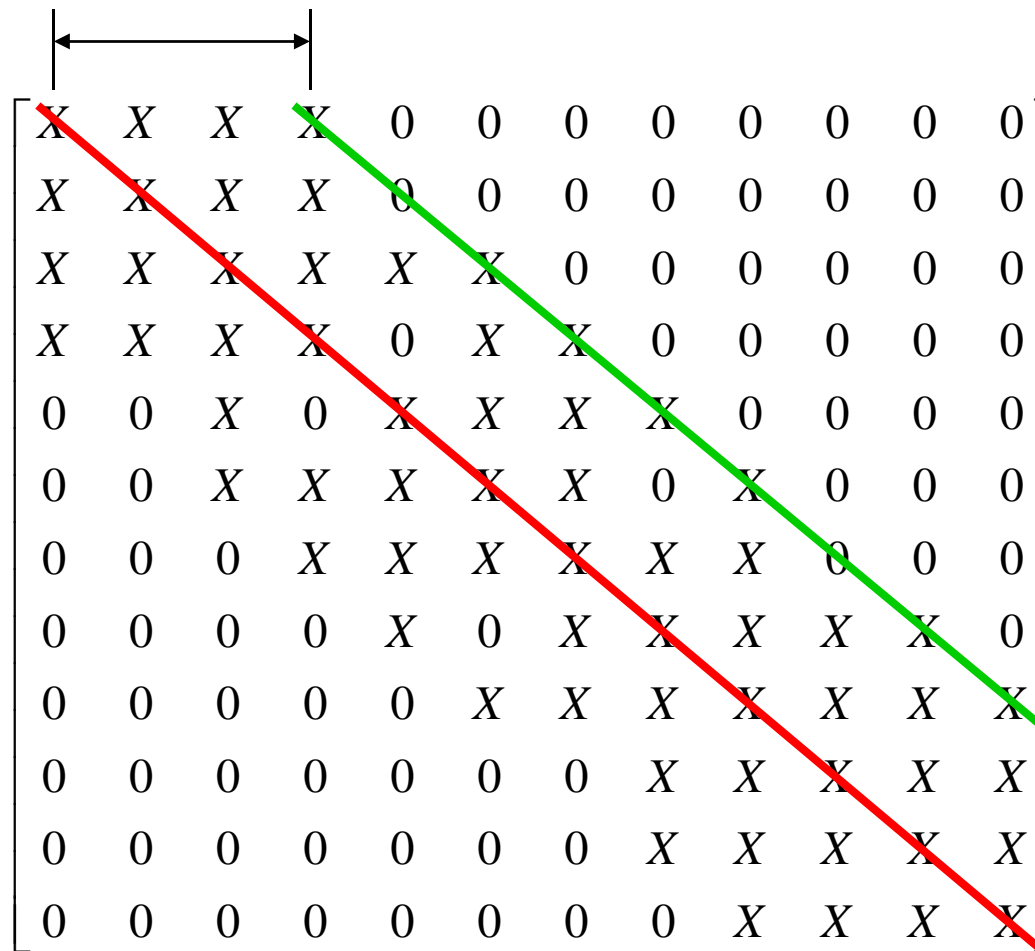
$$\begin{bmatrix} X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & X & X & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$$

FINALE



Larghezza di banda (“bandwidth”)



$$N^{\circ} \text{ operazioni} \approx (\text{largh. banda})^2 \cdot n_{GDL}$$



Larghezza di banda

dipende dal

Modo di costruire [K]

Esistono due modi principali di costruire la matrice [K]:

- seguendo l'ordine progressivo dei nodi;
- seguendo l'ordine progressivo degli elementi

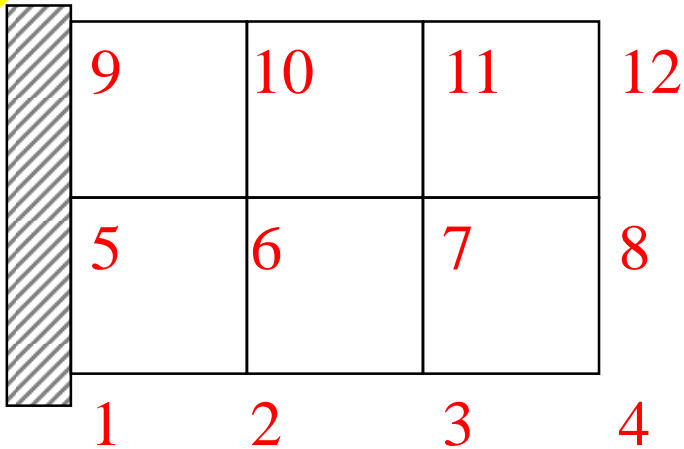


ORDINE NODI

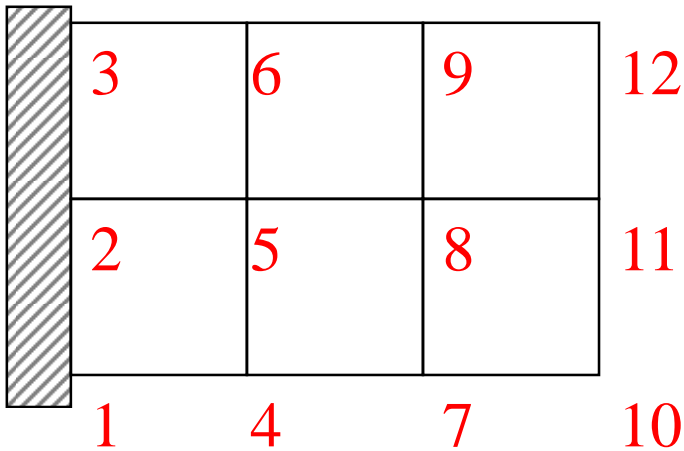
Max. diff. n° d'ordine per nodi attaccati allo stesso elemento

N° g.d.l. per nodo

$$\text{Largh. banda} = (n_{nE} + 1)n_{GDL,n}$$



Largh. Banda - 12

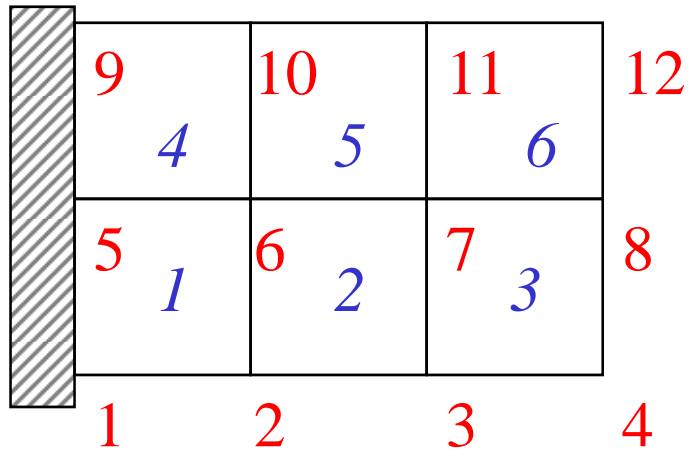


Largh. Banda = 10

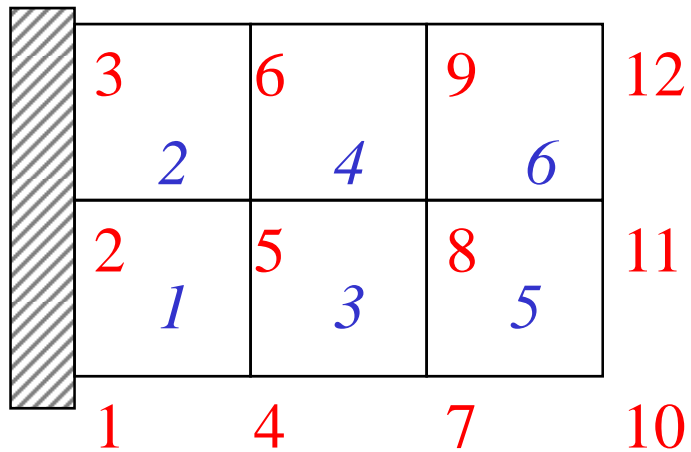
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0
	X	X	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0
		X	X	0	X	X	X	0	0	0	0	0
			X	0	0	X	X	0	0	0	0	0
				X	X	0	0	X	X	0	0	0
					X	X	0	X	X	X	0	0
						X	X	0	X	X	X	0
							X	X	0	X	X	0
								X	0	0	X	X
									X	X	0	0
										X	X	0
											X	X
												X



ORDINE ELEMENTI



Largh. Banda = 16



Largh. Banda = 12

Max. diff. n° d'ordine per elementi attaccati allo stesso nodo

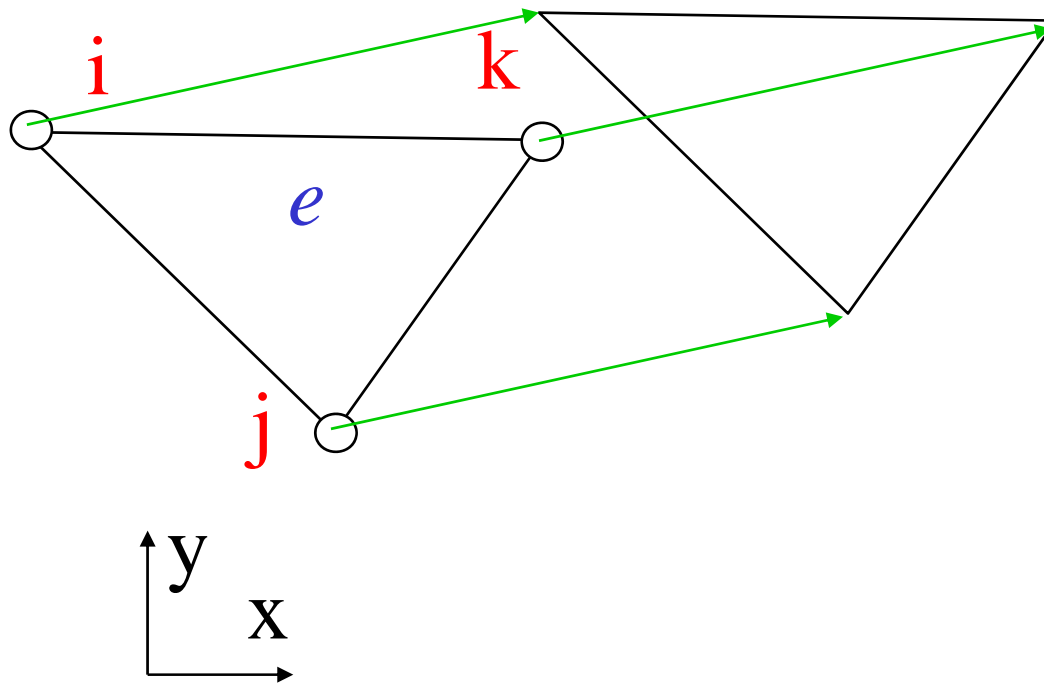
N° nodi per elemento/2

Largh. banda $\sim (n_{En})n_{nod,e}n_{GDL,n}$

1	2	5	6	3	7	4	8	9	10	11	12
X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0
	X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0
		X	X	0	0	0	0	X	X	0	0
			X	0	X	0	0	X	X	X	0
				X	X	X	X	0	0	0	0
					X	X	X	0	X	X	X
						X	X	0	0	0	0
							X	0	0	X	X
								X	X	0	0
									X	X	0
										X	X
											X

Condizioni di convergenza sulle funz.ni di forma

Condizione 1: la f.ne di spostamento deve dare luogo ad una deformazione nulla in tutti i punti dell'elemento quando il campo di spostamenti nodali corrisponde ad un moto rigido.





Verifica per elemento triangolare

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_x \\ u_y \\ u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & C_{24} & 0 & C_{26} \\ C_{11} & B_{22} & C_{13} & B_{24} & C_{15} & B_{26} \end{bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = [B]\{U^e\}$$

$$\varepsilon_x = B_{11}u_x + B_{13}u_x + B_{15}u_x$$

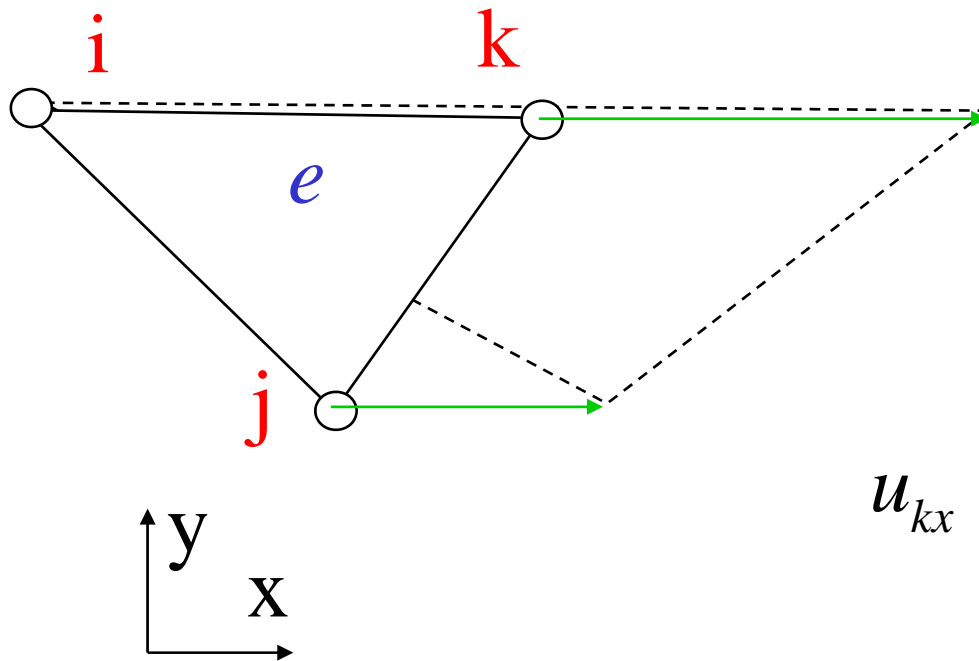
$$B_{11} = \frac{y_j - y_k}{2\Delta}$$

$$B_{13} = \frac{y_k - y_i}{2\Delta}$$

$$B_{15} = \frac{y_i - y_j}{2\Delta}$$

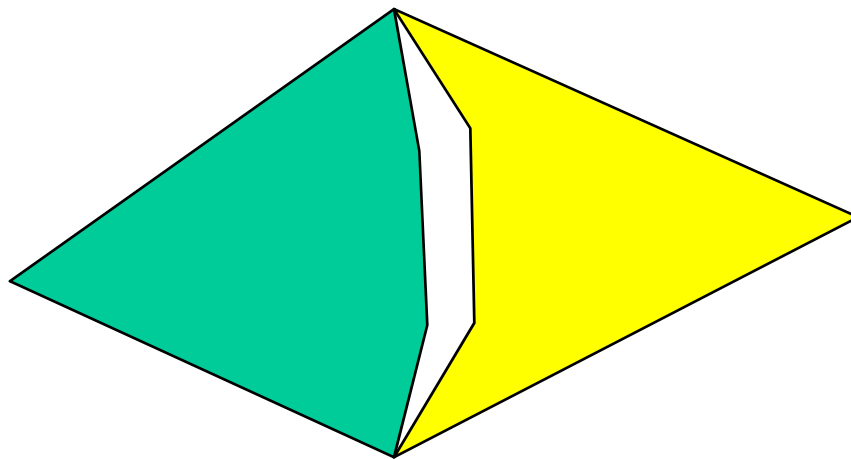
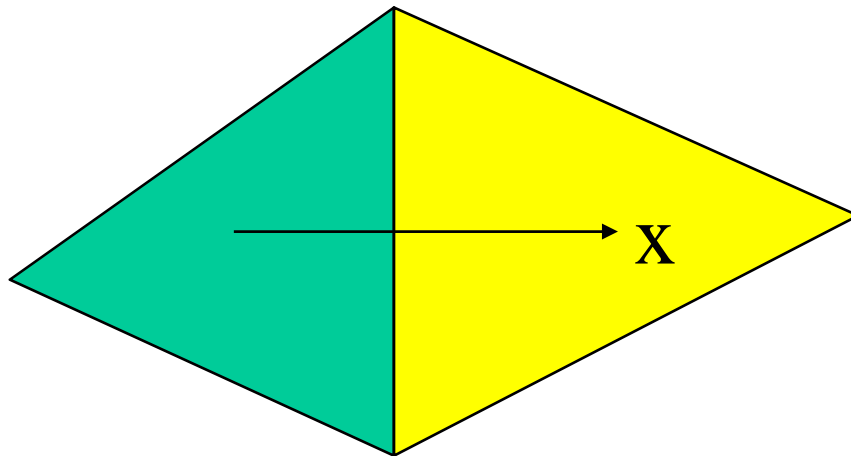
$$\varepsilon_x = \frac{y_j - y_k}{2\Delta}u_x + \frac{y_k - y_i}{2\Delta}u_x + \frac{y_i - y_j}{2\Delta}u_x = 0$$

Condizione 2: la f.ne di spostamento deve dare luogo ad una deformazione costante in tutti i punti dell'elemento quando il campo di spostamenti nodali è compatibile con tale condizione.



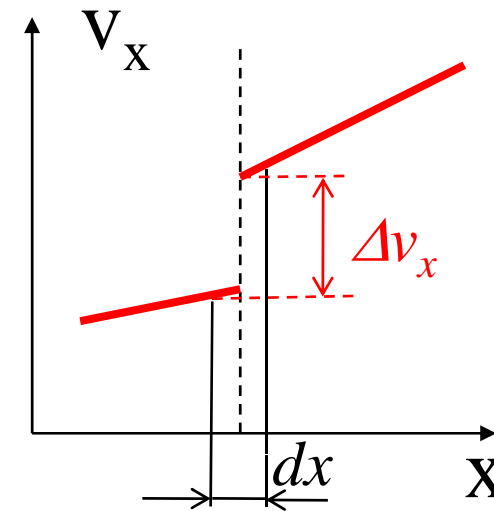
$$u_{kx} = \frac{(x_k - x_i)}{(x_j - x_i)} u_{jx}$$

Condizione 3: la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

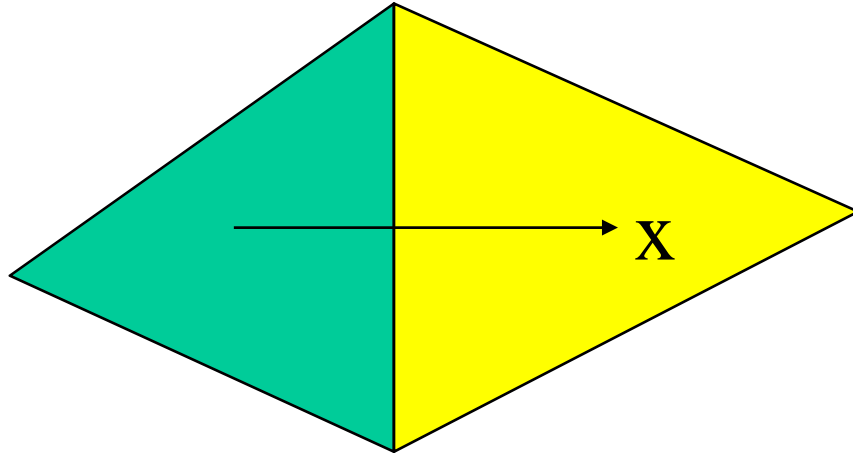


$\varepsilon \rightarrow \infty$

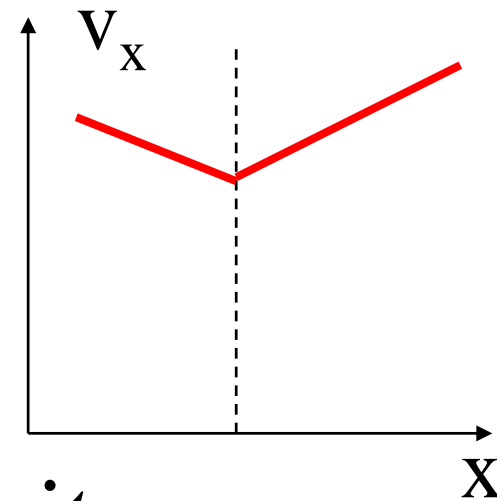
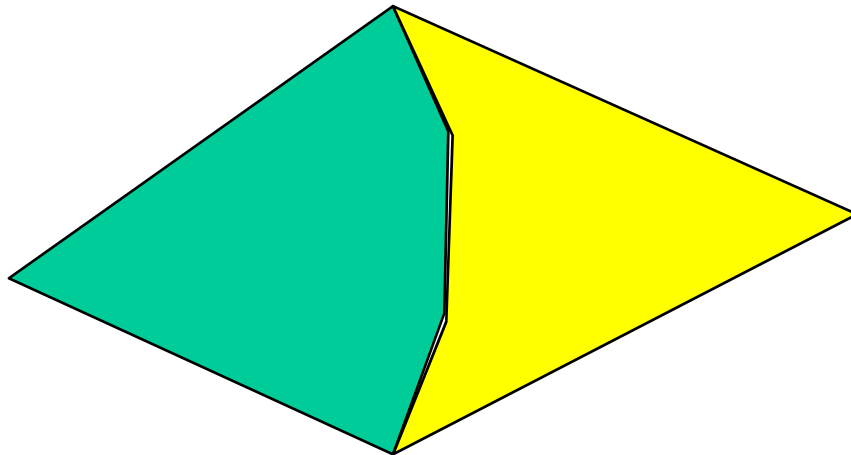
$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$



Condizione 3: la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

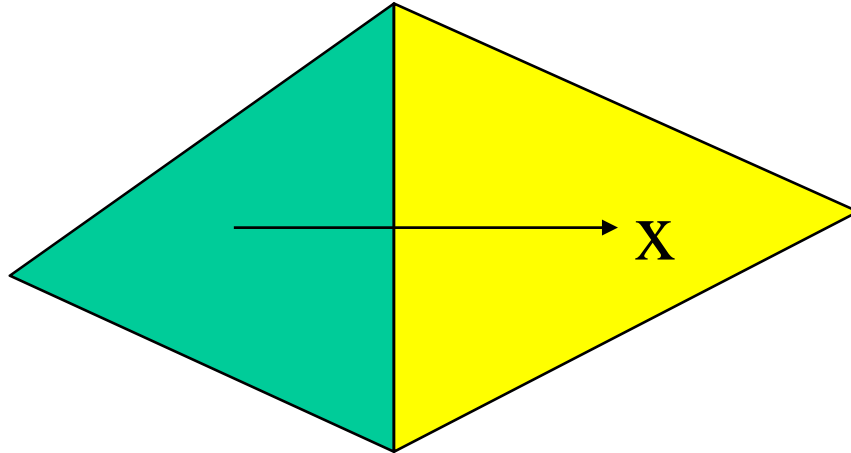


$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$



$\varepsilon \rightarrow$ *valore finito*

Condizione 3: la f.ne di spostamento deve dare luogo a deformazioni limitate all'interfaccia tra elementi diversi.

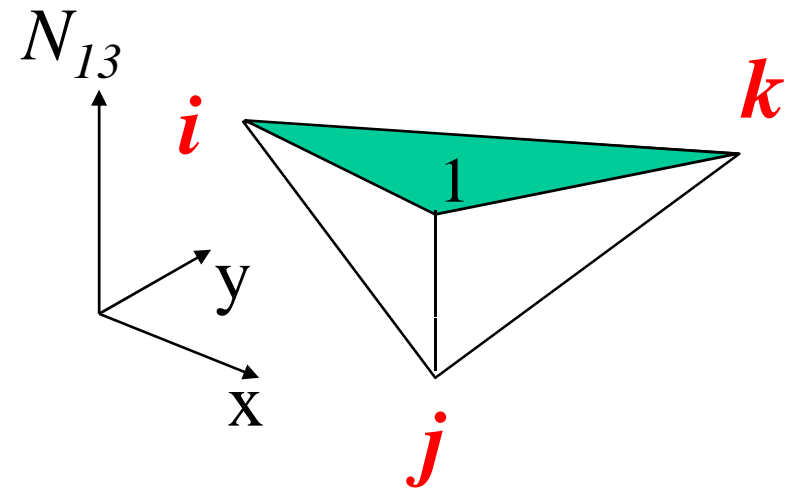
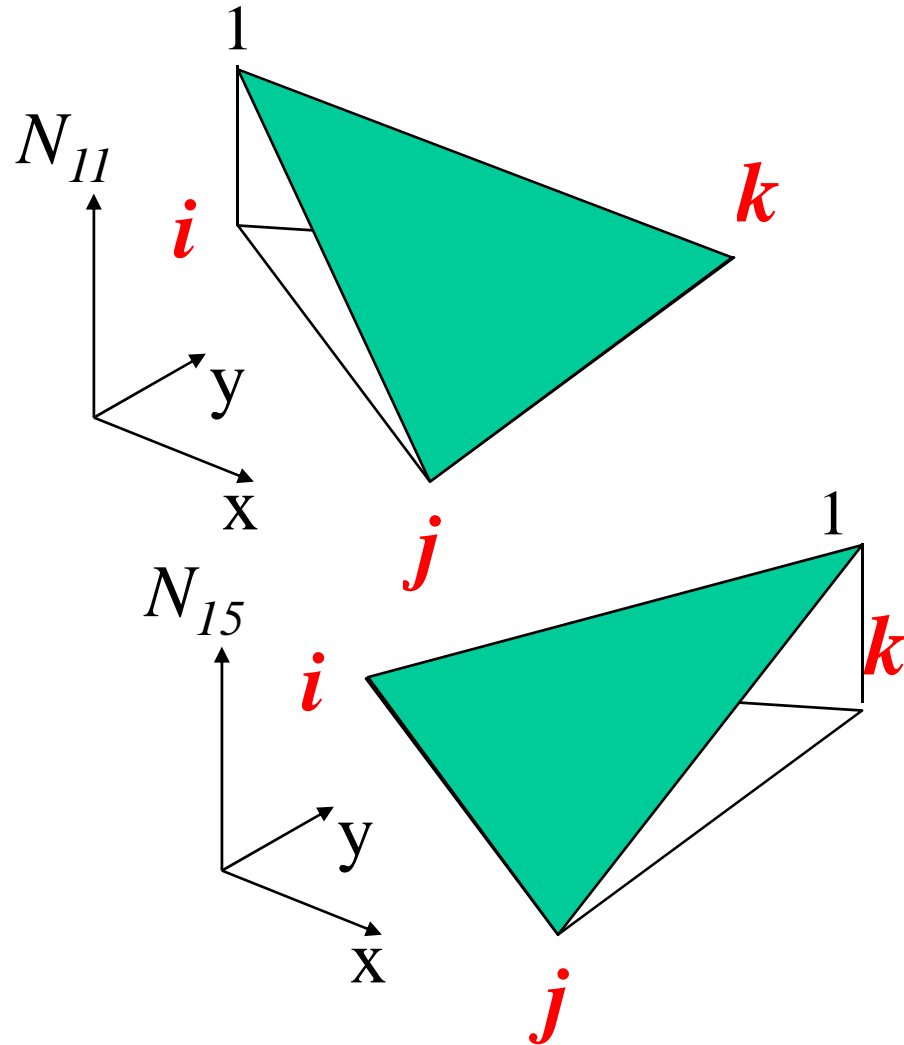


$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

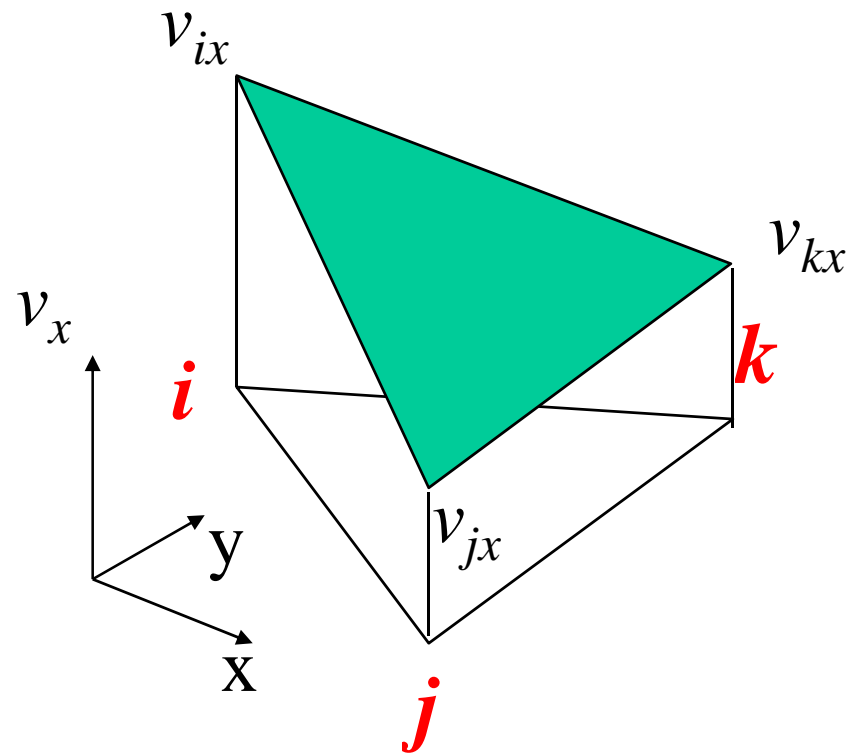
In generale:

Se le ε implicano la derivata *n-sima* della f.ne di spostamento, quest'ultima deve essere continua all'interfaccia con Classe di continuità C_{n-1}

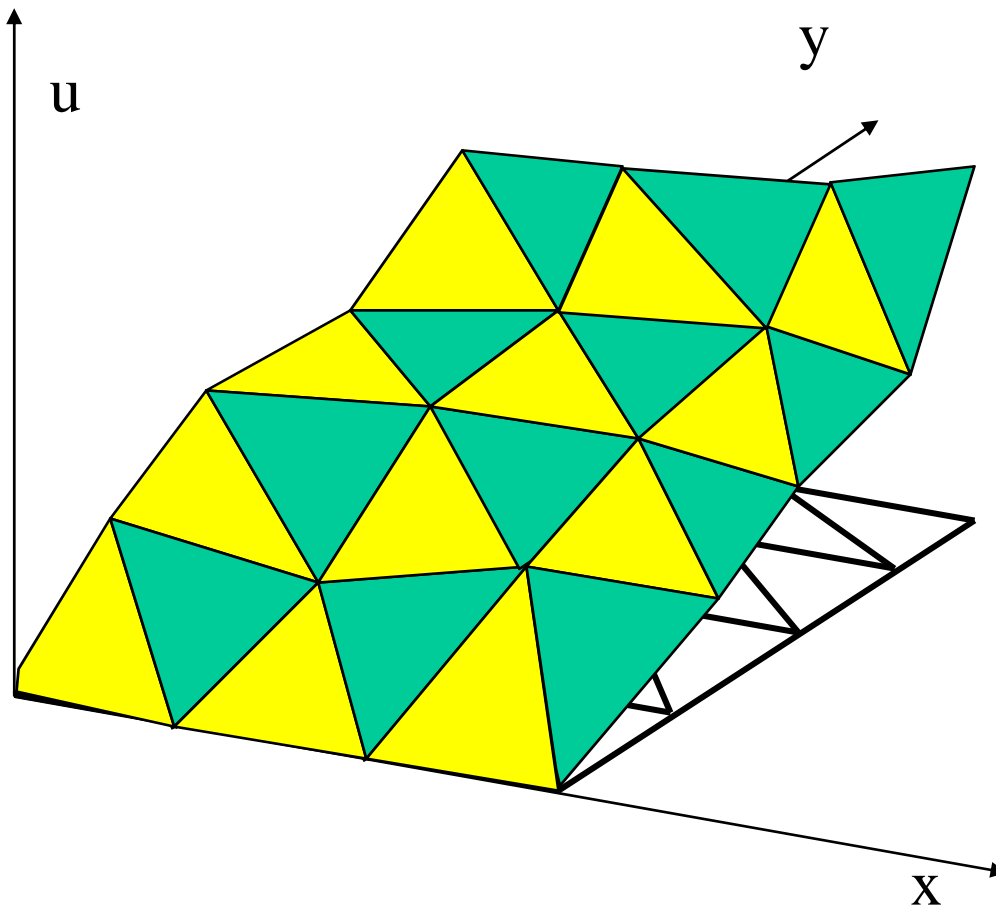
Oss.ne: la funzione di spostamento scelta garantisce tale continuità in quanto lo spostamento di un punto appartenente ad un lato non dipende dagli spostamenti del nodo opposto

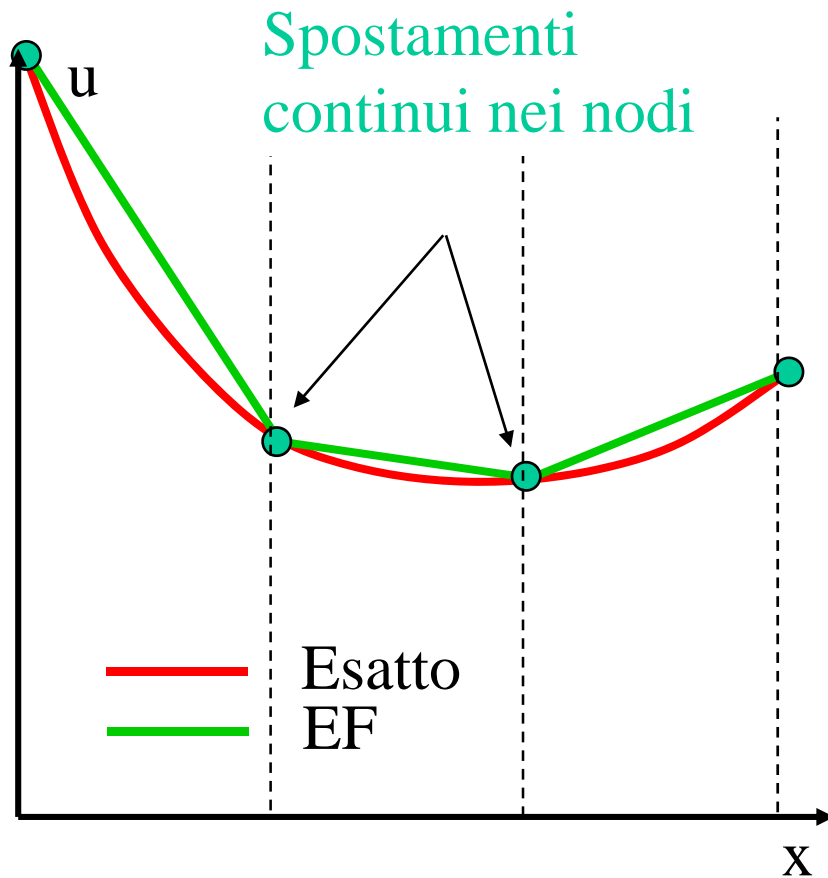
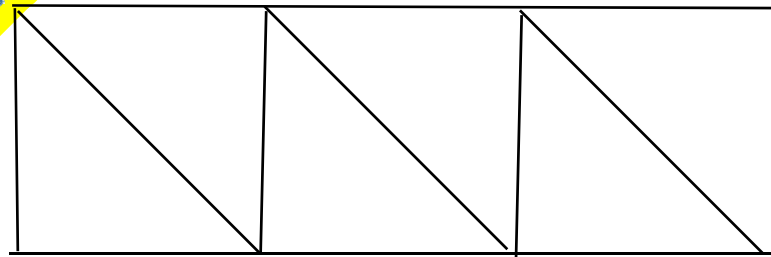


Approssimazione effettiva del campo di spostamenti sul singolo elemento



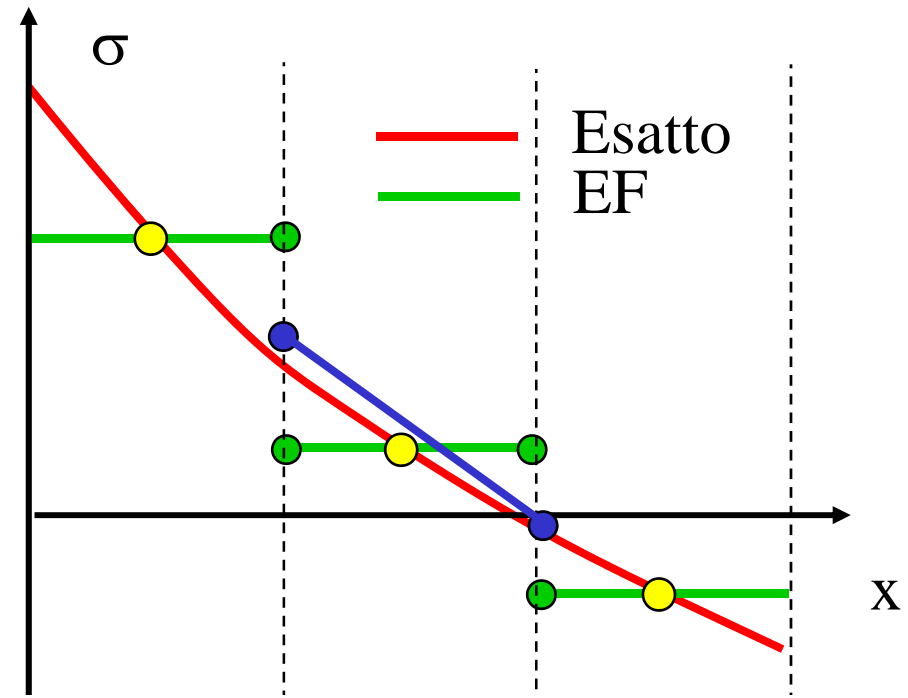
Approssimazione effettiva del campo di spostamenti sull'intero modello





Andamento effettivo delle tensioni

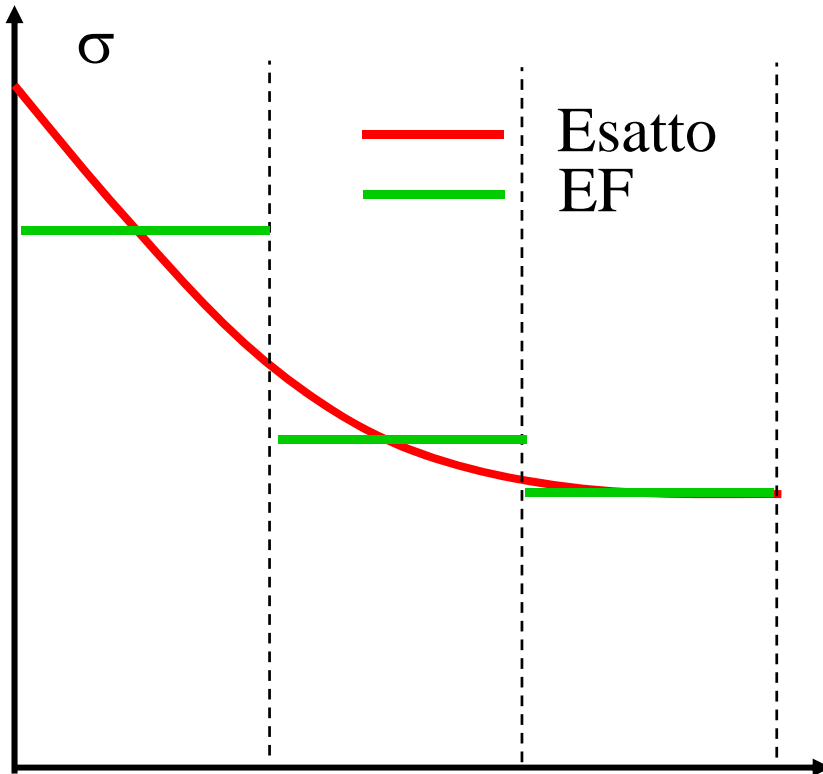
Tensioni discontinue nei nodi



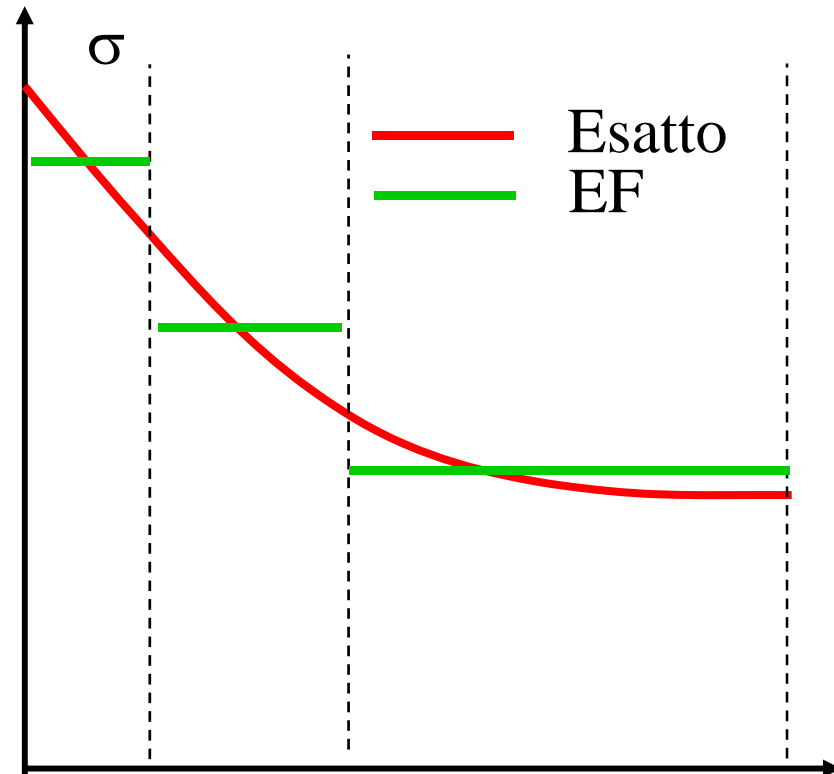
Calcolo di valori mediati nei nodi
(media aritmetica o altre tecniche)

Interpolazione dei valori mediati nodali
nelle zone interne (Es. tramite le N)

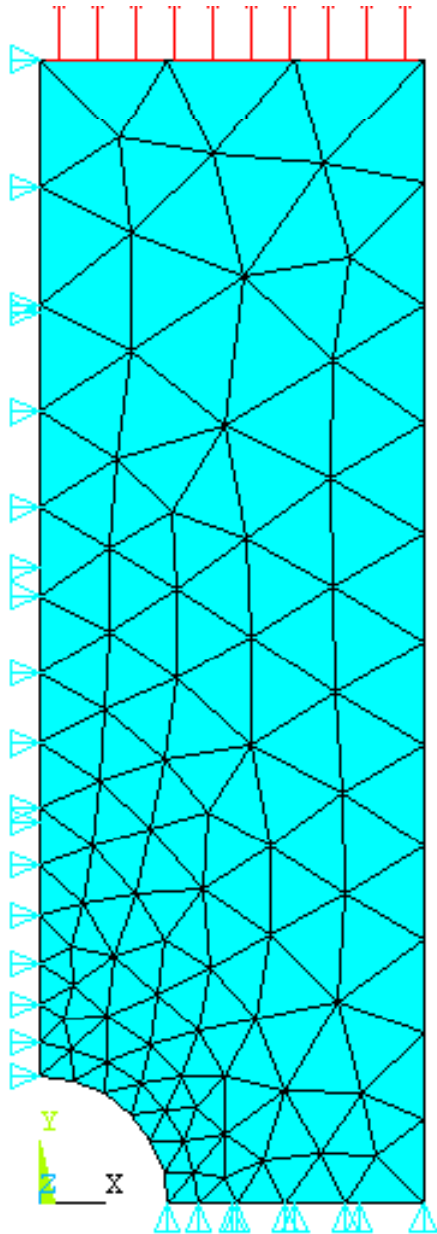
Dimensioni ottimali degli elementi



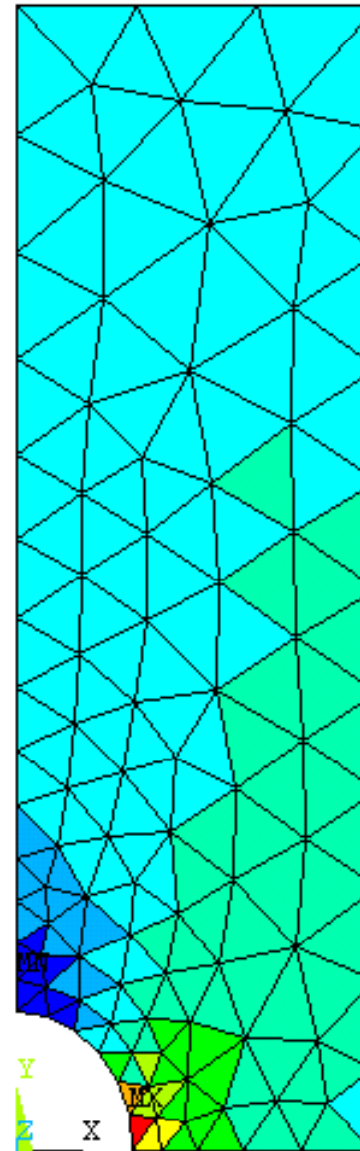
Dimensioni elementi
non ottimali



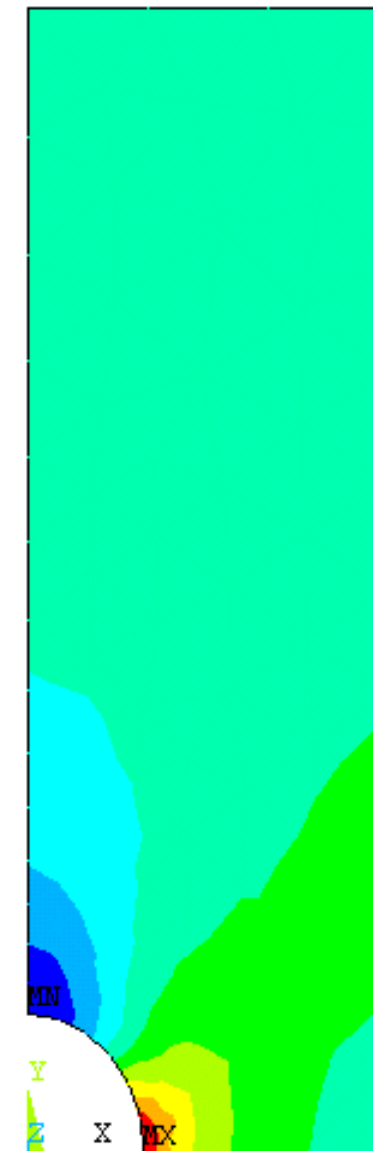
Dimensioni elementi
ottimali



Modello



Tensioni σ_y non mediate

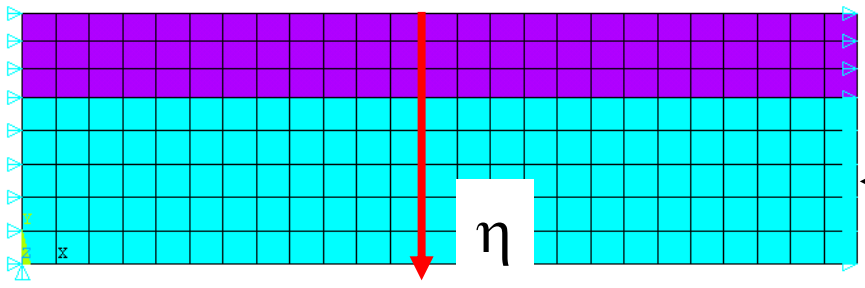
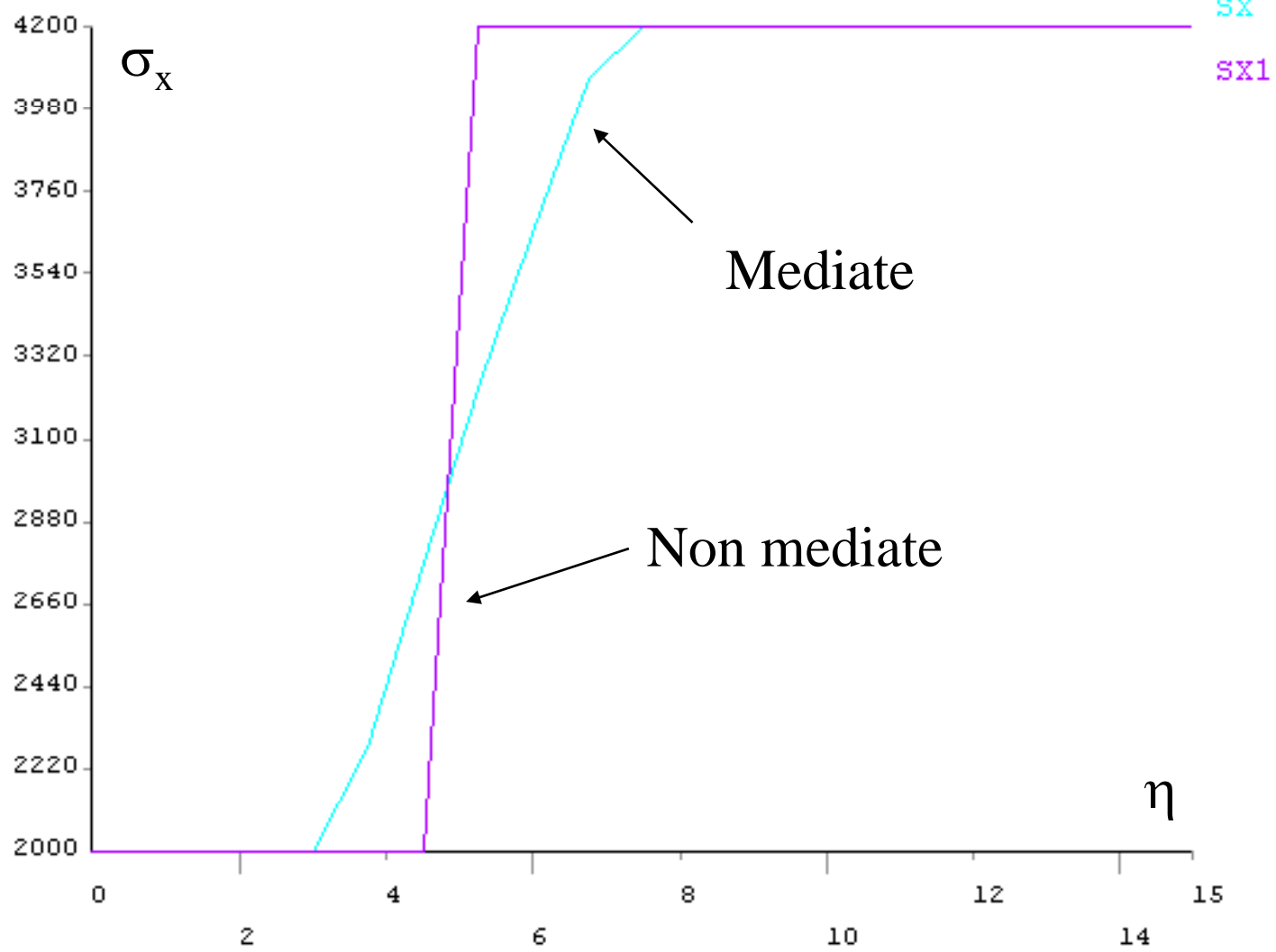


Tensioni σ_y mediate



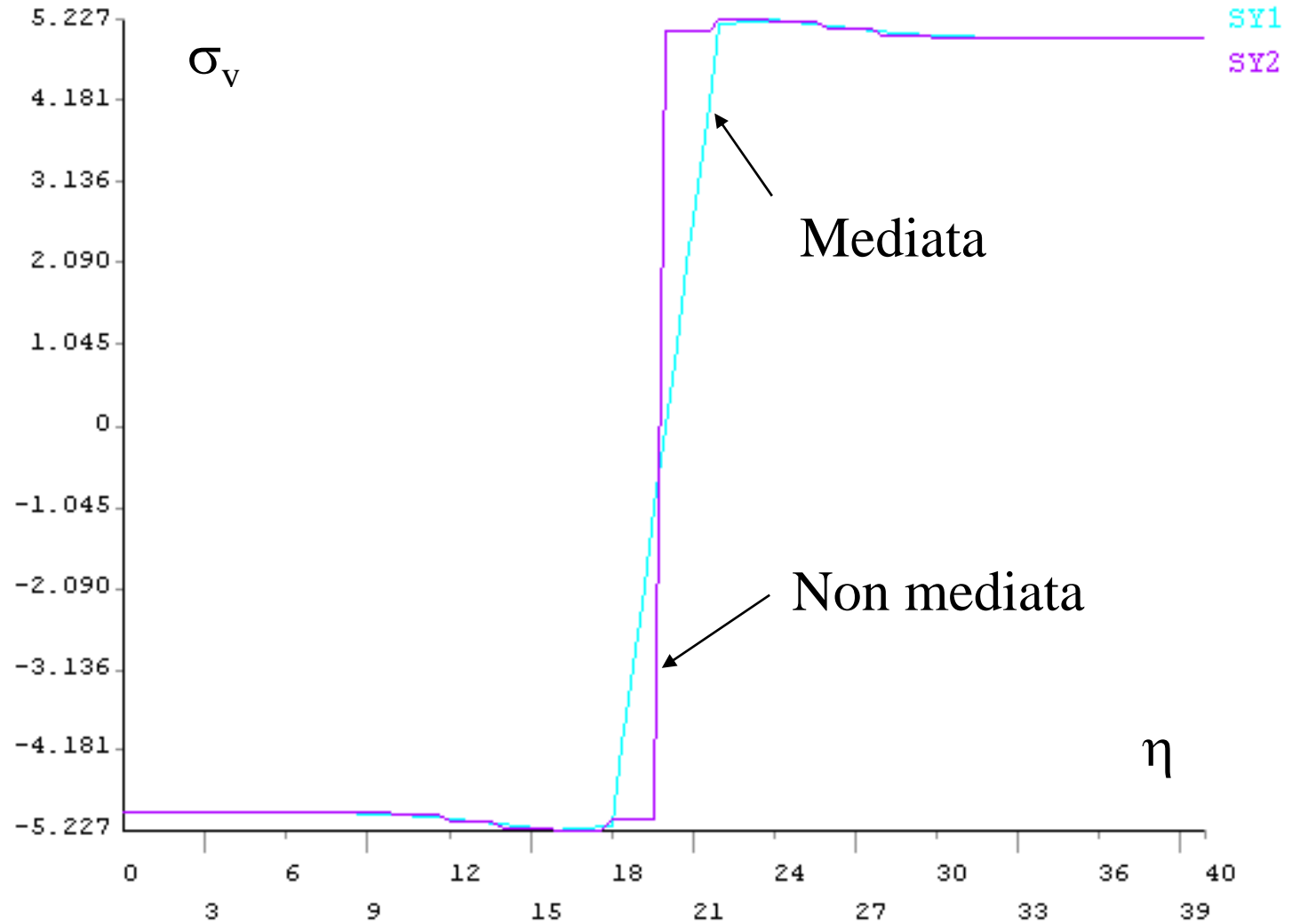
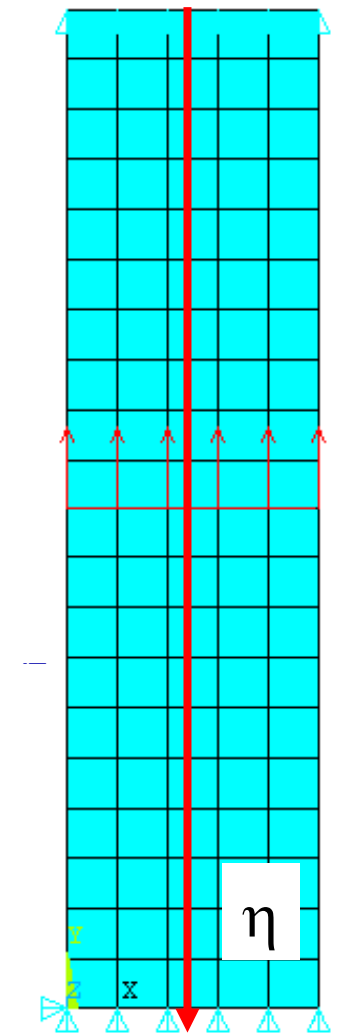
In casi in cui
l'operazione
Esempio 1
allungame

CdL Specialistica/Magistrale in Ingegneria Meccanica

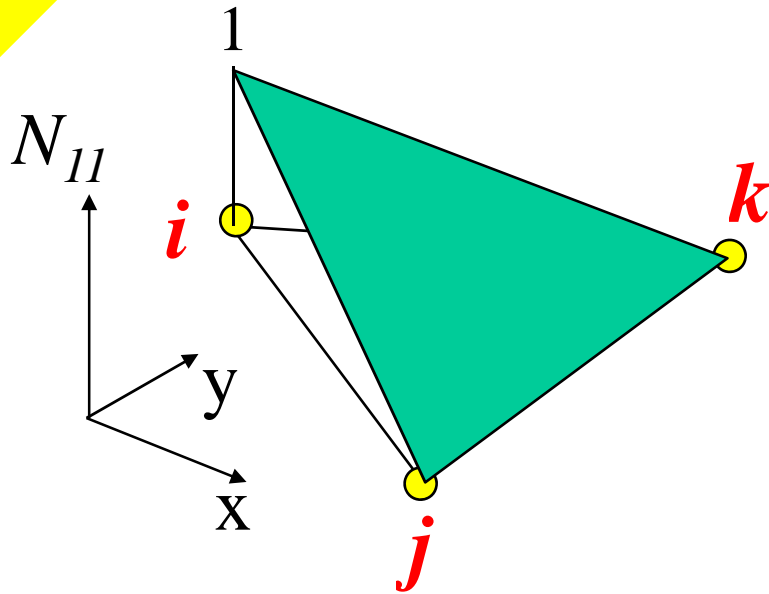


$E=10^5$ MPa

$E=2.1 \cdot 10^5$ MPa

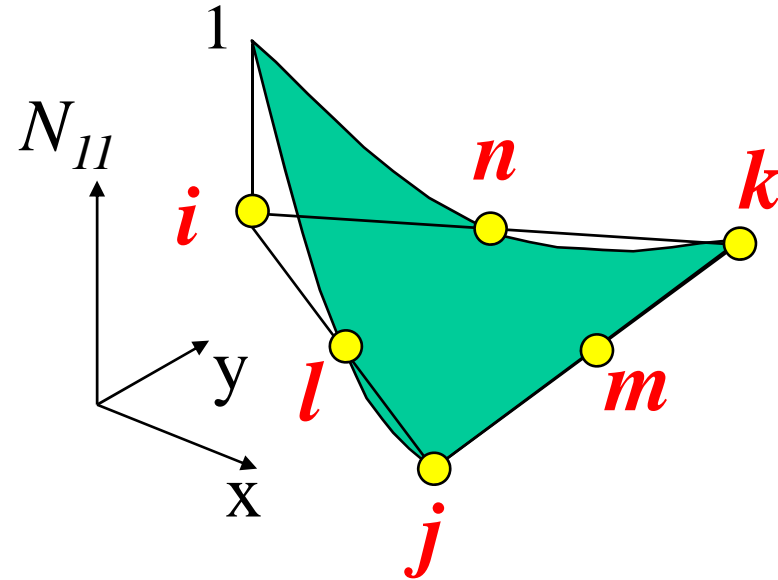


Elementi di ordine superiore



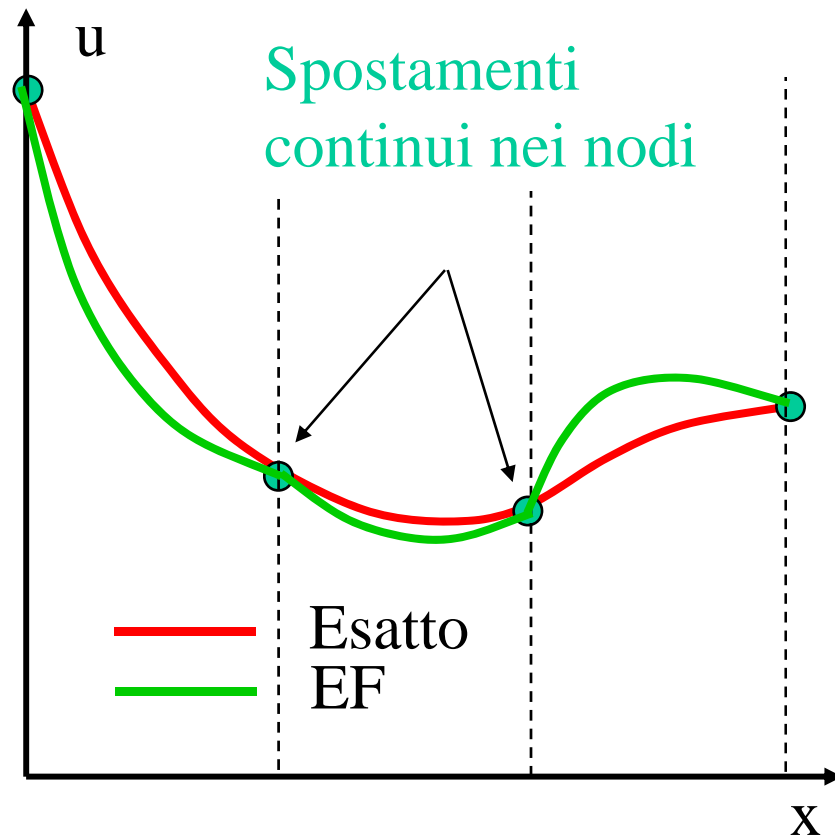
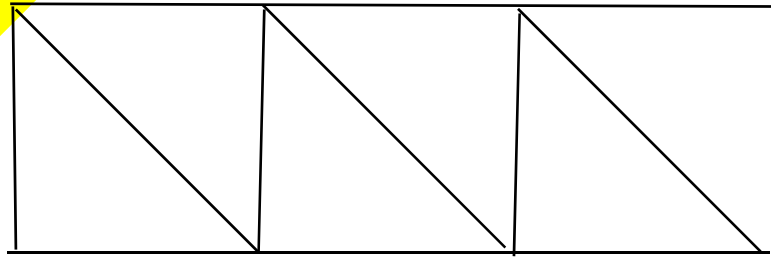
$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y$$



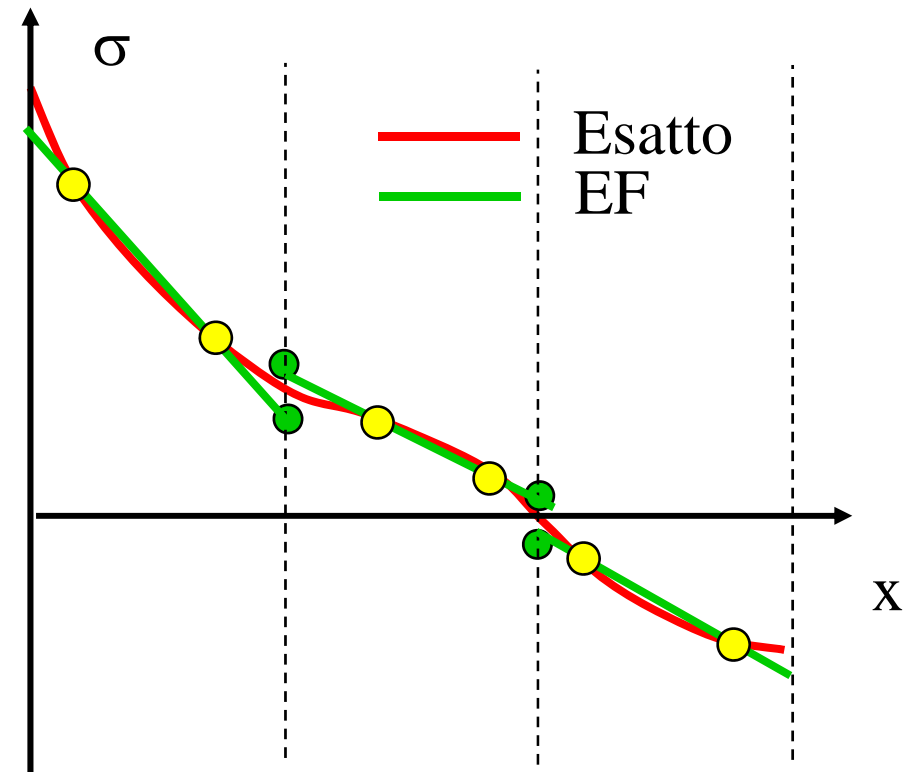
$$\begin{cases} N_{11}(x_i, y_i) = 1 \\ N_{11}(x_j, y_j) = 0 \\ N_{11}(x_k, y_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_{11}(x_l, y_l) = 0 \\ N_{11}(x_m, y_m) = 0 \\ N_{11}(x_n, y_n) = 0 \end{cases}$$

$$N_{lm}^e(x, y) = A_{lm} + B_{lm} \cdot x + C_{lm} \cdot y + D_{lm} \cdot x^2 + E_{lm} \cdot y^2 + F_{lm} \cdot xy$$



Elemento con F.ne Forma quadratica

Tensioni discontinue nei nodi



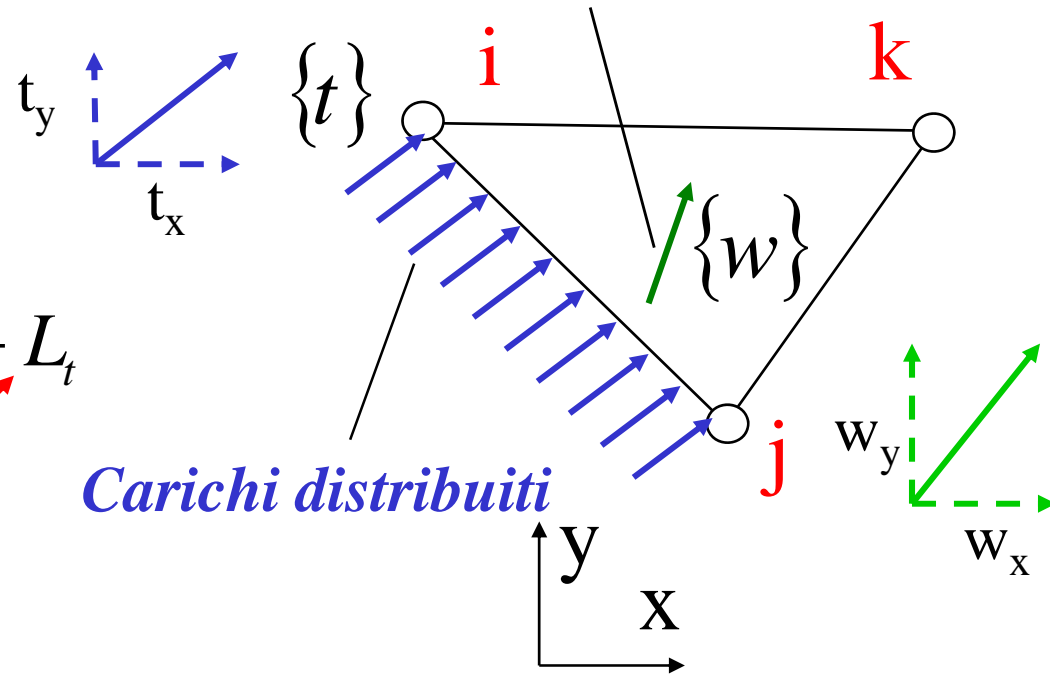
Carichi non concentrati

Forze di volume

Lavoro forze di volume

$$L_{est} = \{\delta U^e\}^T \{P^e\} + L_W + L_t$$

Lavoro carichi distribuiti



Carichi distribuiti

$$dL_W = \{\delta v\}^T \{w\} dV$$

$$L_W = \int_V \{\delta v\}^T \{w\} dV = \int_V \{\delta U^e\}^T [N]^T \{w\} dV = \{\delta U^e\}^T \int_V [N]^T \{w\} dV$$

$$L_t = \int_L \{\delta v\}^T \{t\} dL = \{\delta U^e\}^T \int_L [N]^T \{t\} dL$$



$$\{P^e\} = [K^e]\{U^e\} + \{P_w^e\} + \{P_t^e\}$$

$$\{P_w^e\} = - \int_V [N]^T \{w\} dV$$

$$\{P_t^e\} = - \int_L [N]^T \{t\} dL$$

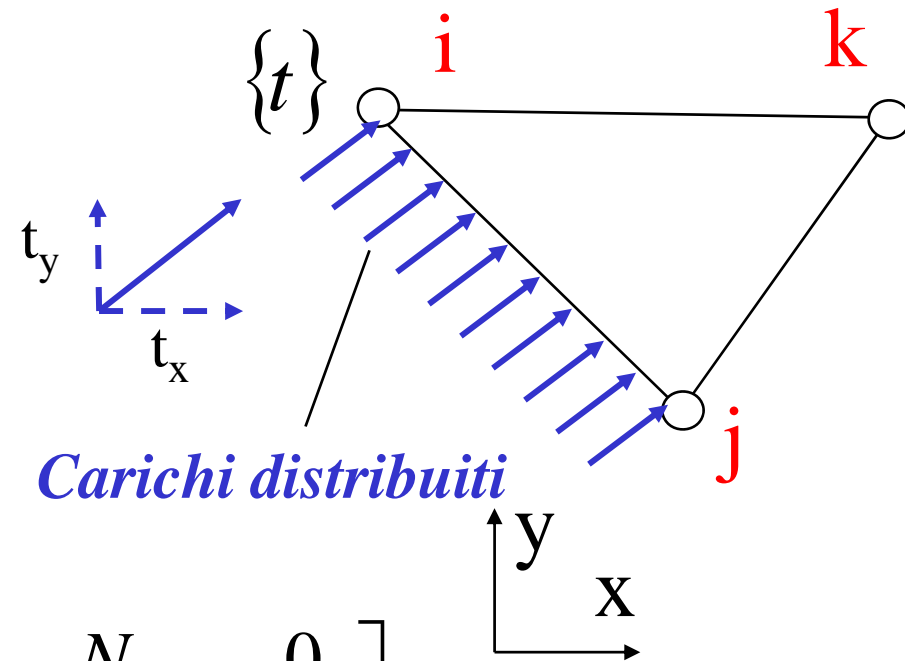
Reazioni vincolari conseguenti all'applicazione all'elemento delle forze distribuite e di volume = - Carichi nodali staticamente equivalenti alle forze distribuite o di volume

Esempio: carico uniformemente distribuito sul lato di un elemento triangolare

$$\{P_t^e\} = - \int_L [N]^T \{t\} d\xi$$

$$6 \times 1 \quad 6 \times 2 \quad 2 \times 1$$

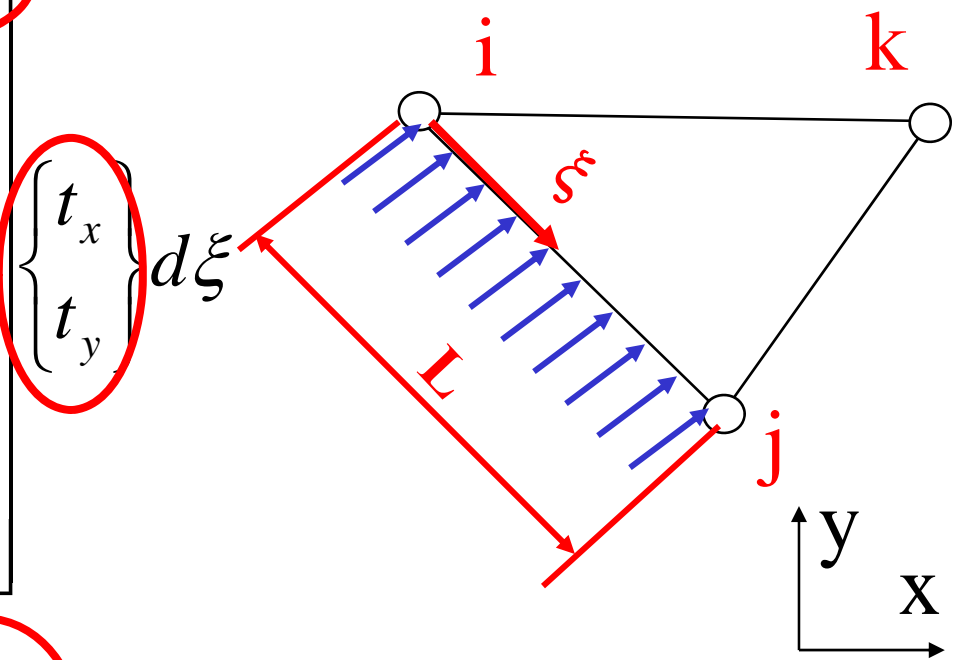
$$[N] = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} & 0 \\ 0 & N_{11} & 0 & N_{13} & 0 & N_{15} \end{bmatrix}$$



Carichi distribuiti



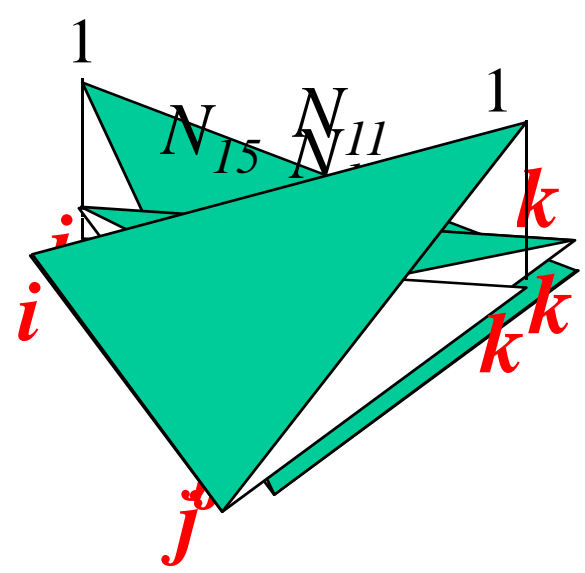
$$\{P_t^e\} = \begin{Bmatrix} p_{t,ix}^e \\ p_{t,iy}^e \\ p_{t,jx}^e \\ p_{t,jy}^e \\ p_{t,kx}^e \\ p_{t,ky}^e \end{Bmatrix} = - \int_L \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{11} \\ N_{13} & 0 \\ 0 & N_{13} \\ N_{15} & 0 \\ 0 & N_{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} d\xi$$



$$p_{t,ix}^e = - \int_L N_{11}(\xi) t_x d\xi = -t_x \int_L \frac{L-\xi}{L} d\xi = -\frac{t_x L}{2}$$

$$p_{t,jx}^e = - \int_L N_{13}(\xi) t_x dL = -t_x \int_L \frac{\xi}{L} dL = -\frac{t_x L}{2}$$

$$p_{t,kx}^e = - \int_L N_{15}(\xi) t_x dL = -t_x \int_L 0 dL = 0$$



Carichi nodali equivalenti

