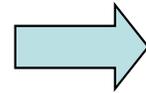


# ANALISI NON LINEARE CON IL MEF

Problemi lineari

$$[K][U] = \{P\}$$

*Costante, non  
dipendente da*



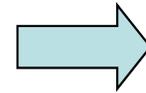
Soluzione

$$\{U\} = [K]^{-1} \{P\}$$

Problemi non lineari

$$[K(\{U\})][U] = \{P\}$$

*Non costante,  
dipendente da*



Soluzione

Ricerca con tecniche **iterative**  
di un particolare vettore  
spostamento tale che:

$$[K(\{U^*\})] \cdot \{U^*\} - \{P\} = 0$$

# CLASSIFICAZIONE NON LINEARITÀ/1

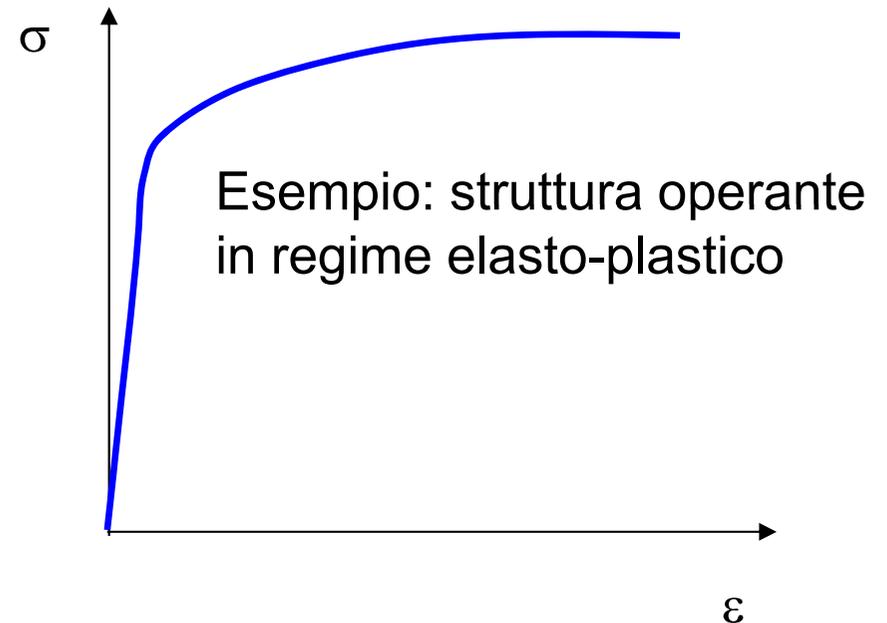
## Non linearità del materiale (o "Material non linearities")

Non linearità nelle relazioni costitutive

- elasticità non lineare
- plasticità
- creep
- ---

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$



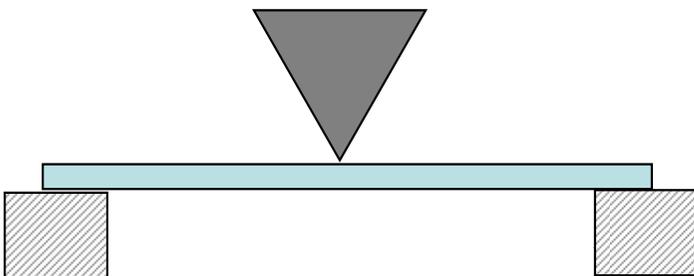
# CLASSIFICAZIONE NON LINEARITÀ/2

## Non linearità geometriche (o "Geometric non linearities")

Non linearità nella relazione tra spostamenti nodali e deformazioni

- grandi spostamenti (grandi rotazioni)
- grandi deformazioni
- . ---

Esempio: struttura che subisce spostamenti tali da non rendere più lecito scrivere le equazioni di equilibrio per la geometria iniziale non deformata



$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U^e\}$$

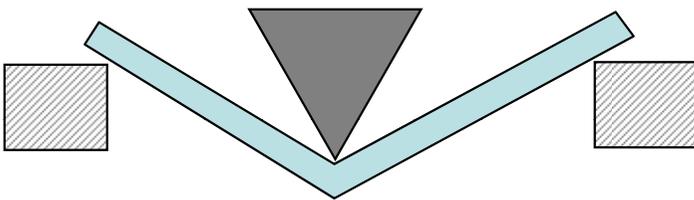
# CLASSIFICAZIONE NON LINEARITÀ/2

## Non linearità geometriche (o "Geometric non linearities")

Non linearità nella relazione tra spostamenti nodali e deformazioni

- grandi spostamenti (grandi rotazioni)
- grandi deformazioni
- . ---

Esempio: struttura che subisce spostamenti tali da non rendere più lecito scrivere le equazioni di equilibrio per la geometria iniziale non deformata



$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U^e\}$$

# CLASSIFICAZIONE NON LINEARITÀ/3

## Non linearità dei vincoli

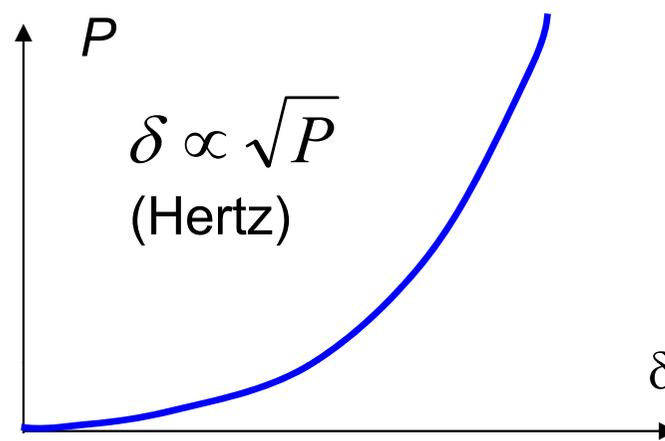
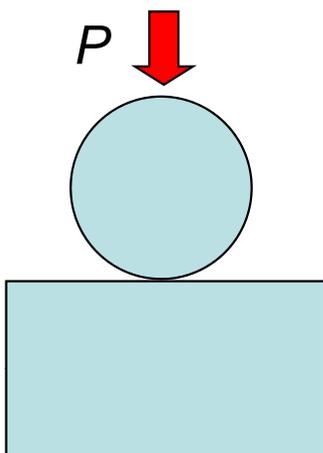
("Constraint (o "Contact") non linearities")

Non linearità nei vincoli del corpo verso l'esterno o tra corpi diversi

- contatto tra corpi
- ---

Al variare del carico applicato (e quindi degli spostamenti), le condizioni di vincolo possono cambiare e questo produce una variazione della matrice di rigidezza della struttura.

Esempio: contatto cilindro-piano



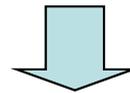
$$[K]\{U\} = \{P\}$$

The equation  $[K]\{U\} = \{P\}$  is shown with red circles around the matrix  $[K]$  and the load vector  $\{P\}$ . Red arrows point from the bottom of these circles to the matrix and load terms in the equation, illustrating that the stiffness matrix  $[K]$  and the load vector  $\{P\}$  are dependent on the displacement  $\delta$ .

# TECNICHE RISOLUTIVE PROBLEMI NON LINEARI

La soluzione viene cercata tramite **tecniche iterative**, che consentono di determinare il campo di spostamenti per il quale risulta:

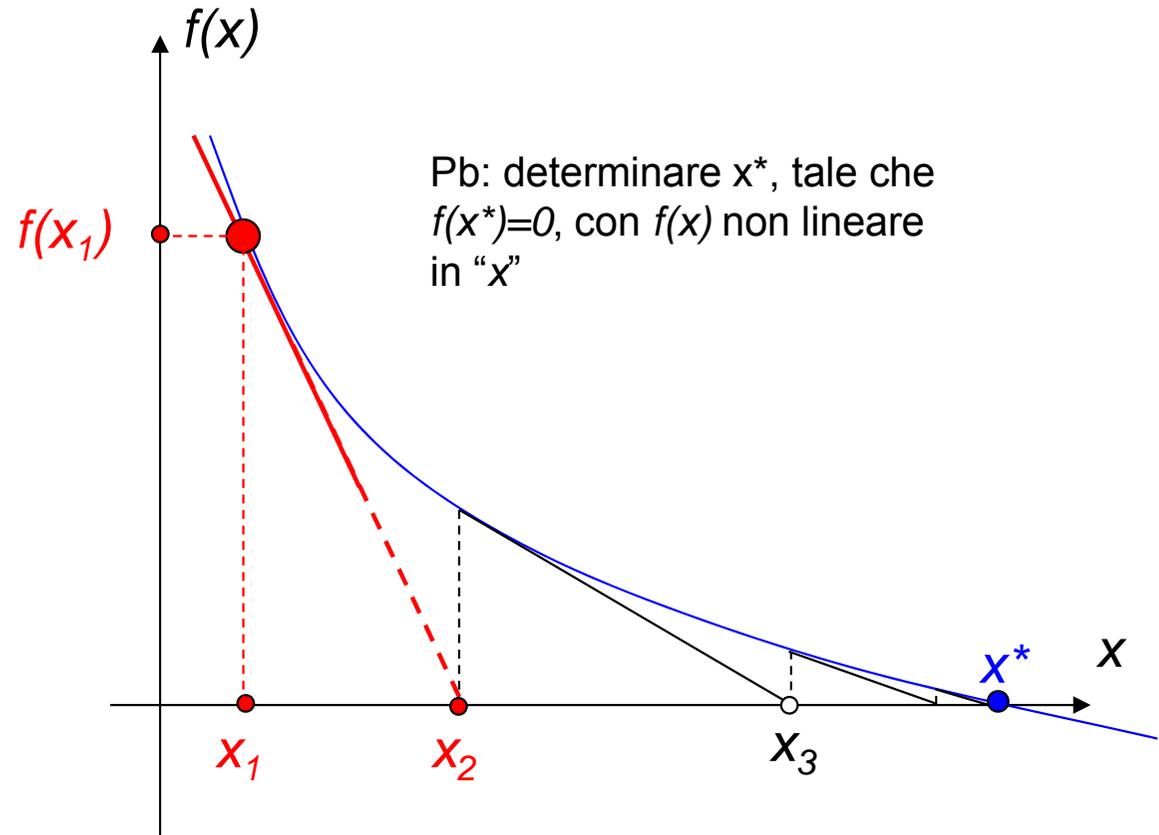
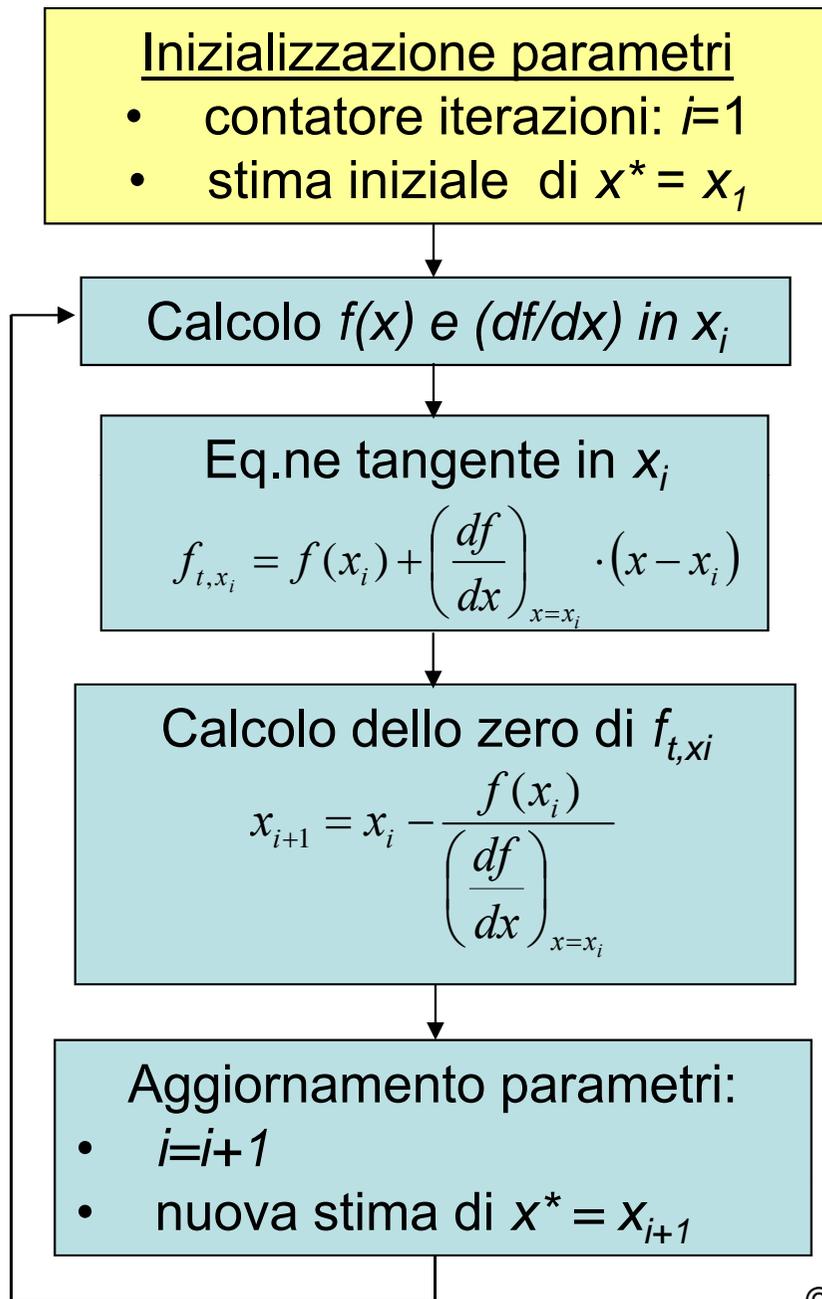
$$[K(\{U\})] \cdot \{U\} - \{P\} = 0$$



La tecnica di soluzione più comunemente utilizzata è il:  
**Metodo di Newton-Raphson (MNR)**

# METODO NEWTON-RAPHSON/1

Esempio illustrativo per funzione di una sola variabile indipendente



**Relazione ricorsiva**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i}}$$

# METODO NEWTON-RAPHSON/2

OSS.1 : La soluzione ottenuta è **approssimata**, con errore che, sotto opportune condizioni, decresce al progredire delle iterazioni (necessario un **criterio di convergenza**)

OSS.2: Parametri utilizzabili per il controllo della convergenza:

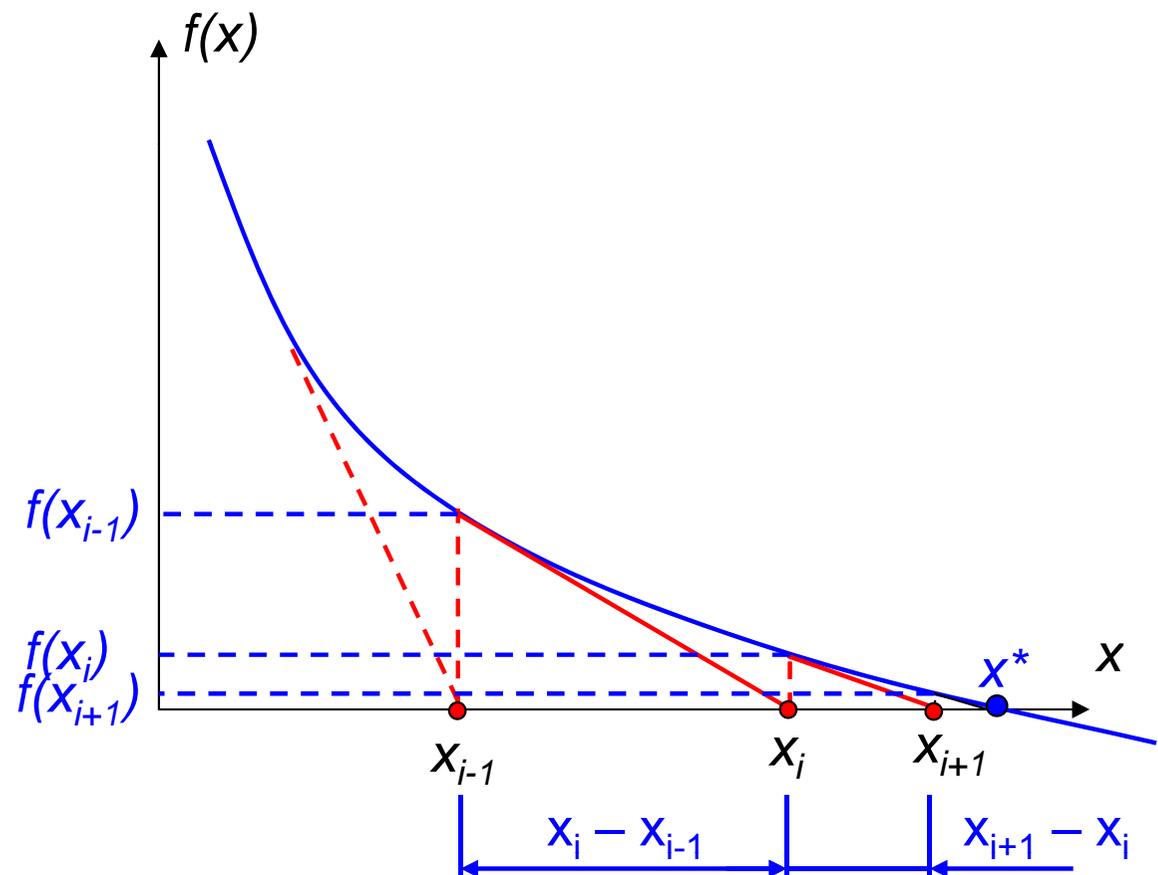
1 – Valore della funzione

2 – Distanza tra le approssimazioni successive

Criteri di convergenza possibili:

$$1) |f(x_i)| \leq \delta$$

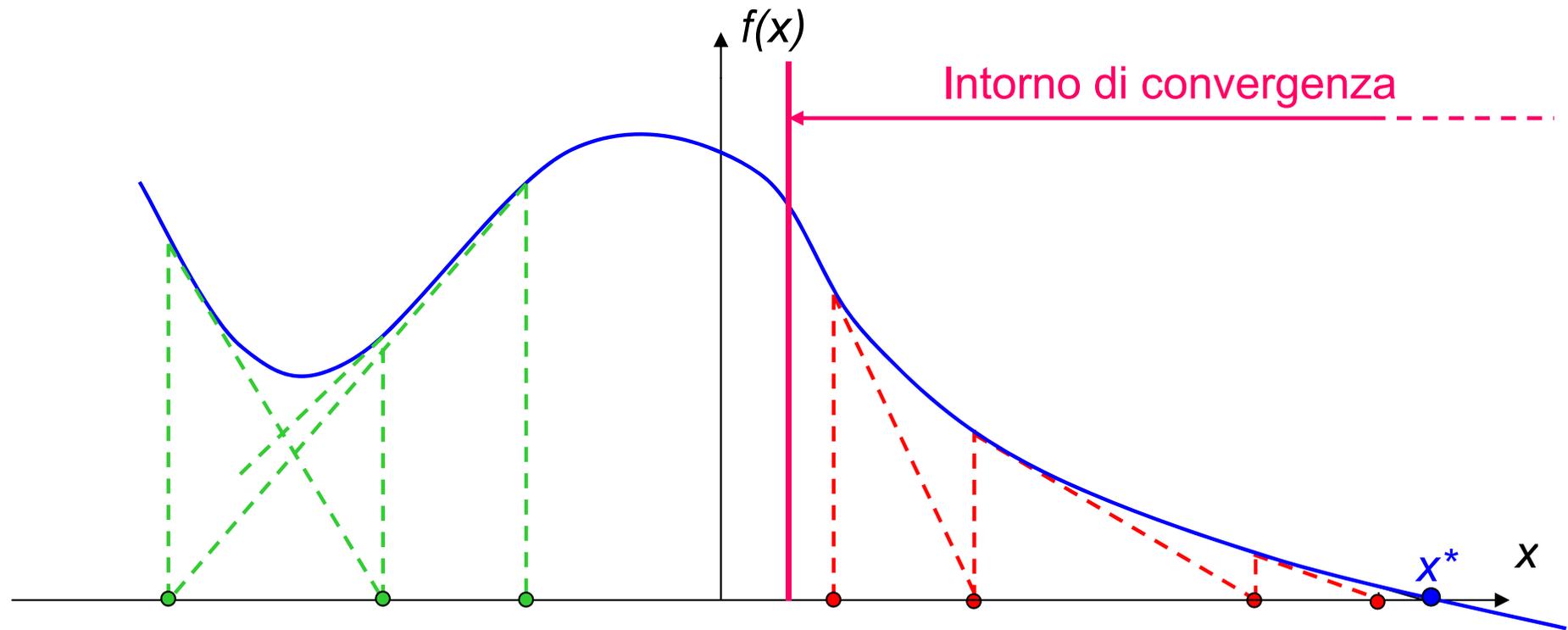
$$2) |x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$$



# METODO NEWTON-RAPHSON/3

OSS.3 : La possibilità di ottenere la convergenza dipende dalla scelta del punto di partenza.

Il MNR è convergente se il punto di partenza è compreso in un intorno della soluzione (è sufficientemente vicino alla soluzione) dipendente dalla forma della funzione, altrimenti può non convergere



# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/1

Nel caso del MEF si tratta di ricercare la soluzione dell'equazione matriciale non lineare:

$$\{F(\{U\})\} = [K(\{U\})] \cdot \{U\} - \{P\} = 0$$

Forze applicate ai nodi dagli elementi a causa degli spostamenti dei nodi stessi

$$\{P_N(\{U\})\}$$

$$\{F(\{U\})\} = \{P_N\} - \{P\} = 0$$

"Squilibrio"

# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/2

Relazione iterativa per f.ne di 1 variabile

$$x_{i+1} = x_i - \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i}^{-1} \cdot f(x_i) \rightarrow \{F(\{U\}_i)\} = \{P_N(\{U\}_i)\} - \{P\}$$

$$\{U\}_{i+1} \quad \Delta f = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i} \Delta x \rightarrow \{\Delta F\} = [K_T(\{U\}_i)] \cdot \{\Delta U\}$$

Matrice di rigidezza tangente: rappresenta, in un intorno dello stato corrente di spostamento, la relazione (linearizzata) tra la variazione del vettore spostamento e la conseguente variazione dello squilibrio. La sua formulazione dipende dal particolare problema trattato.

# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/3

$$\{\Delta F\} = [K_T(\{U\}_i)] \cdot \{\Delta U\}$$

$$\begin{aligned}\{\Delta F\} &= \{F(\{U + \Delta U\})\} - \{F(\{U\})\} = \\ &= (\{P_N(\{U + \Delta U\})\} - \{P\}) - (\{P_N(\{U\})\} - \{P\}) = \\ &= \{P_N(\{U + \Delta U\})\} - \{P_N(\{U\})\} = \{\Delta P_N(\{U\})\}\end{aligned}$$

$$\{\Delta P_N\} = [K_T(\{U\}_i)] \cdot \{\Delta U\}$$

# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/4

Relazione iterativa per f.ne di 1 variabile

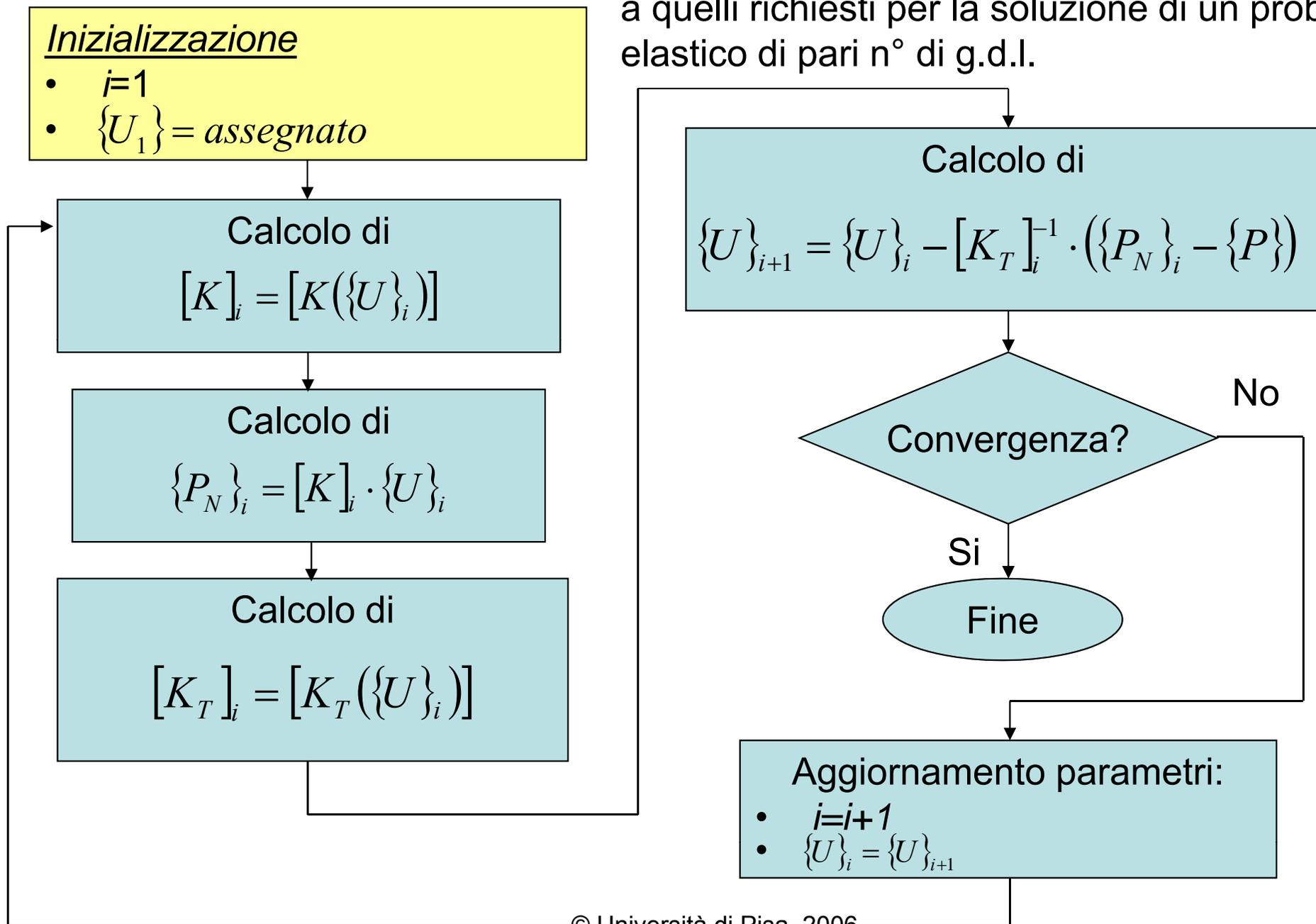
$$x_{i+1} = x_i - \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_i}^{-1} \cdot f(x_i)$$

Relazione iterativa per MEF non lineare

$$\begin{aligned} \{U\}_{i+1} &= \{U\}_i - [K_T(\{U\}_i)]^{-1} \cdot (\{P_N(\{U\}_i)\} - \{P\}) = \\ &= \{U\}_i - [K_T]_i^{-1} (\{P_N\}_i - \{P\}) \end{aligned}$$

# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/3

Tempi: ogni iterazione richiede tempi paragonabili a quelli richiesti per la soluzione di un problema elastico di pari n° di g.d.l.



# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/4

Criteri di convergenza:

1. Sullo squilibrio

$$\left\| \{P_N\}_i - \{P\} \right\| \leq \delta_P \cdot P_{rif} \longrightarrow P_{rif} = \|\{P\}\|$$

Norme solitamente utilizzate:

$$\|\{X\}\|_1 = \sum_{j=1}^n |X_j|$$

$$\|\{X\}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |X_j|^2}$$

$$\|\{X\}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |X_j|$$

# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/5

Criteri di convergenza:

2. Sullo spostamento

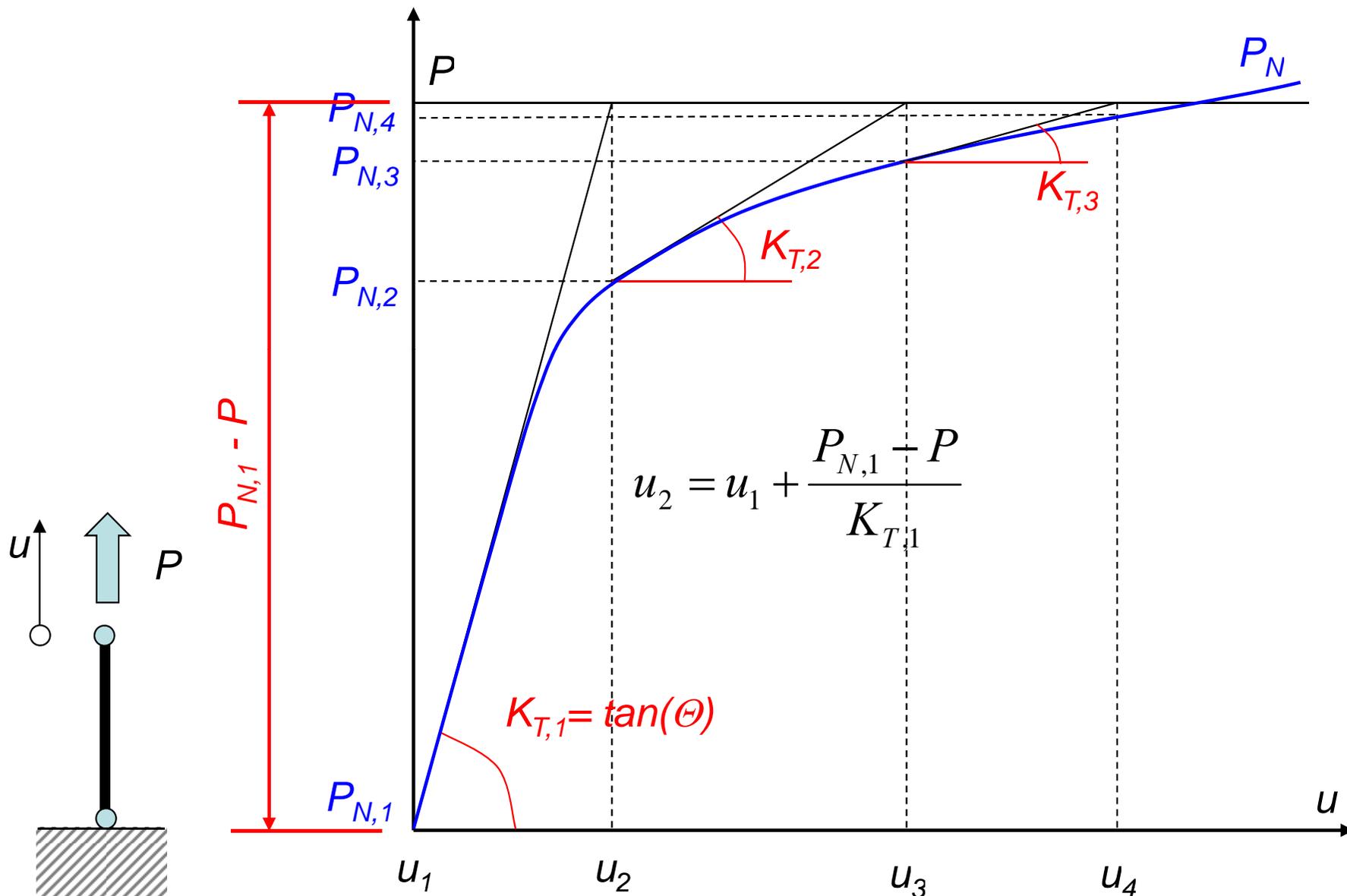
$$\|\{U\}_i - \{U\}_{i-1}\| \leq \delta_U \cdot U_{rif} \longrightarrow U_{rif} = \|\{U\}_i\|$$

**Confronto criteri di convergenza:**

- Sullo spostamento -> maggiore rapidità e facilità di convergenza
- Sullo squilibrio -> maggiore precisione (in particolare sulle tensioni)

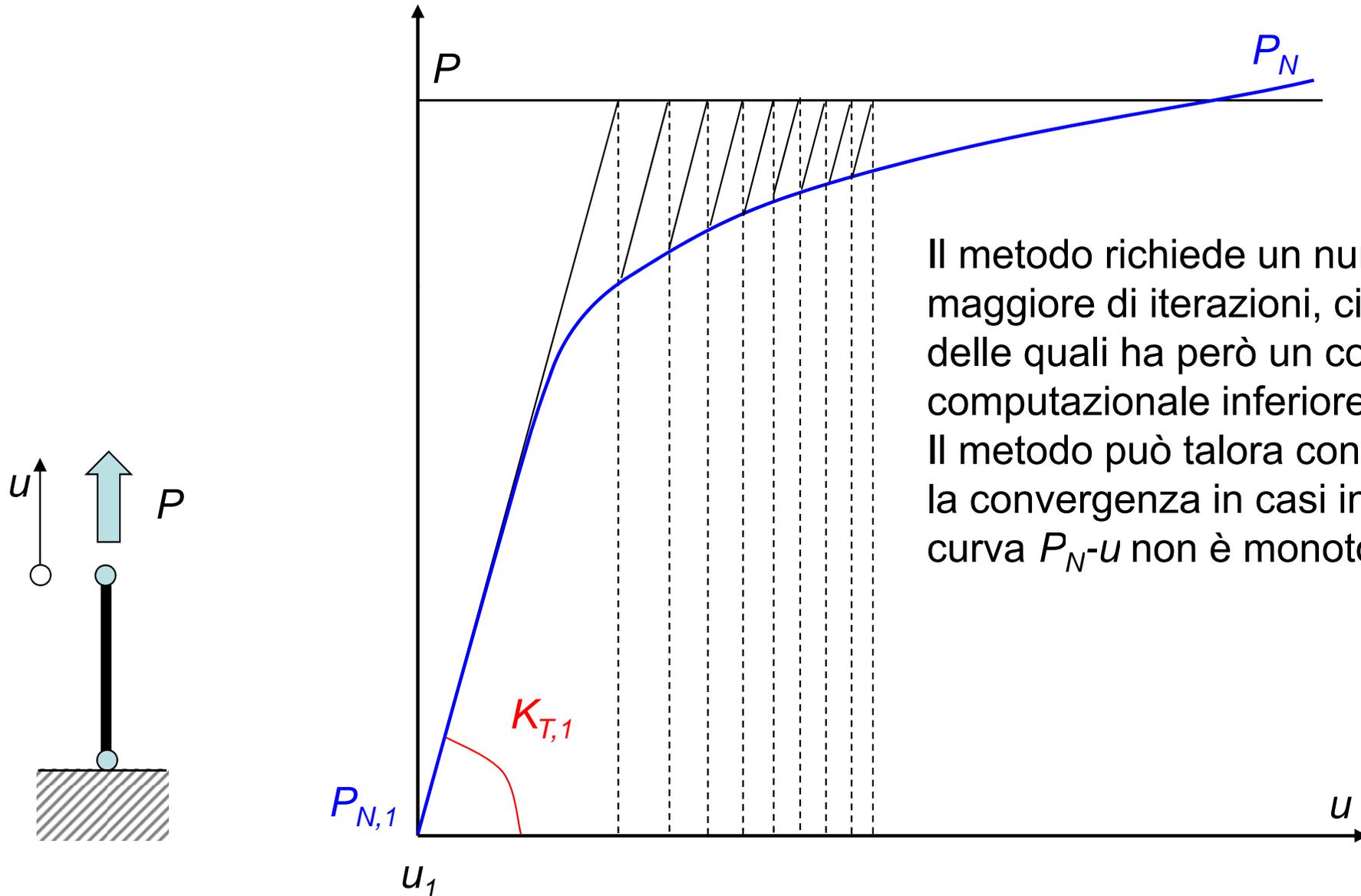
# APPLICAZIONE MNR A PROBLEMI EF NON LINEARI/6

Illustrazione per sistema ad 1 g.d.l.: asta in campo elasto-plastico



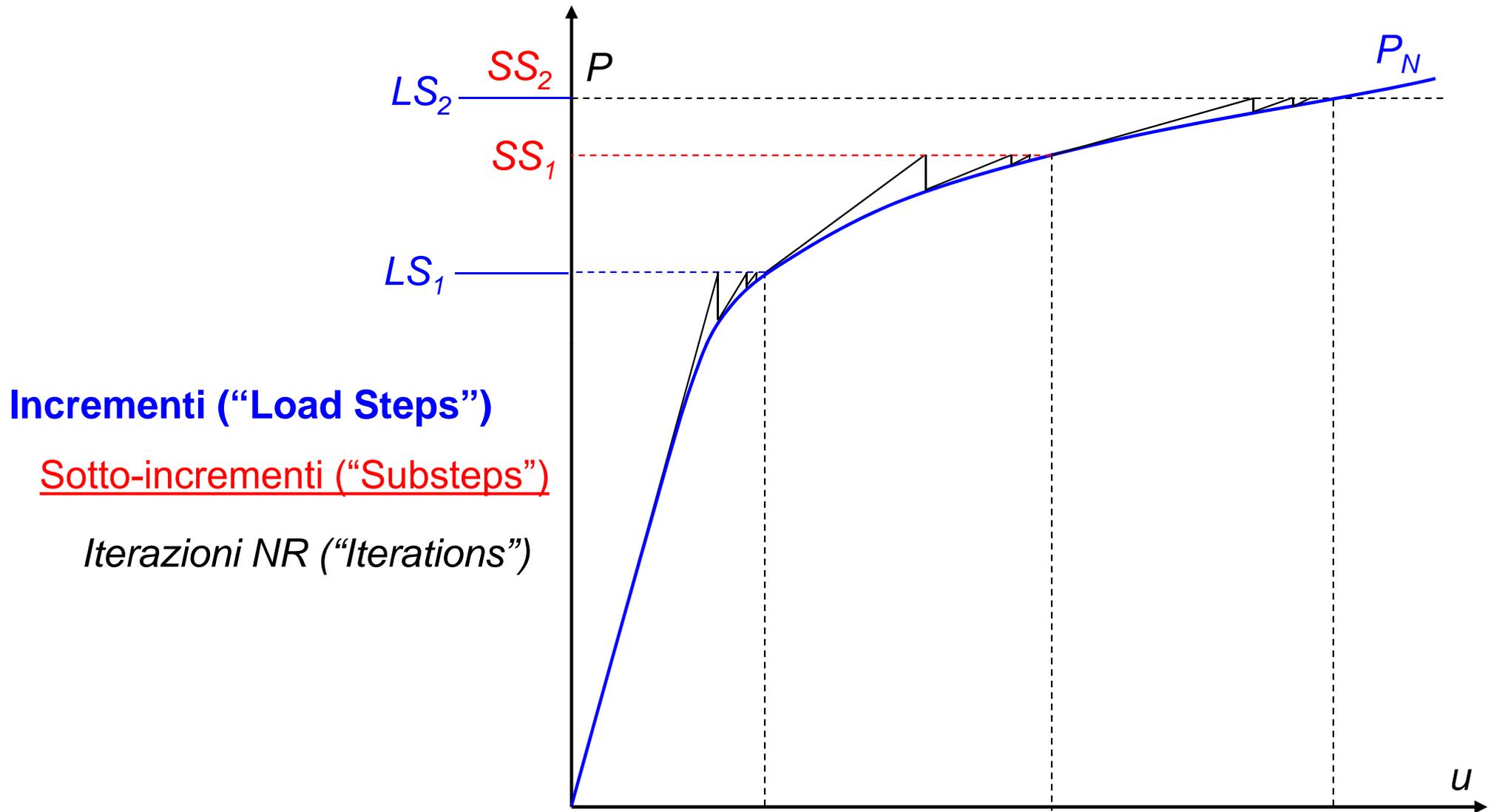
## Metodi NR modificati ("Modified NR")

Prevedono di aggiornare la matrice di rigidezza tangente ad intervalli di un certo numero di iterazioni. Se si usa sempre quella della prima iterazione si ha il metodo detto "initial stiffness".



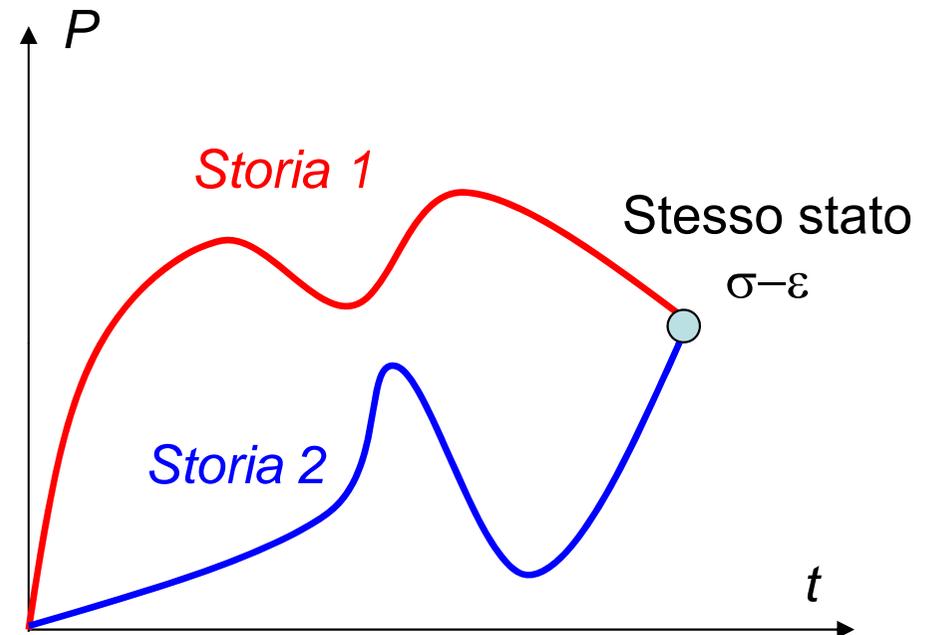
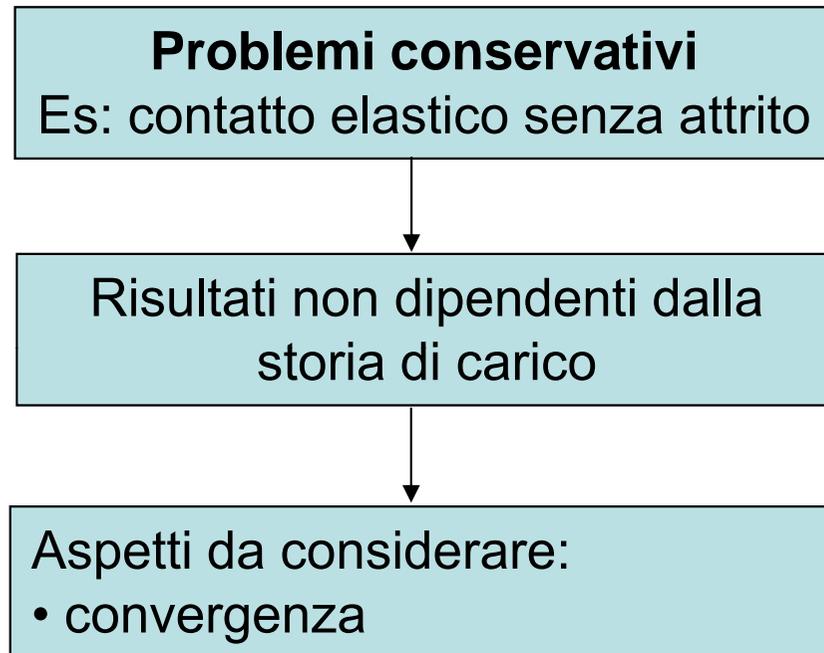
Il metodo richiede un numero maggiore di iterazioni, ciascuna delle quali ha però un costo computazionale inferiore. Il metodo può talora consentire la convergenza in casi in cui la curva  $P_N-u$  non è monotona.

# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/1



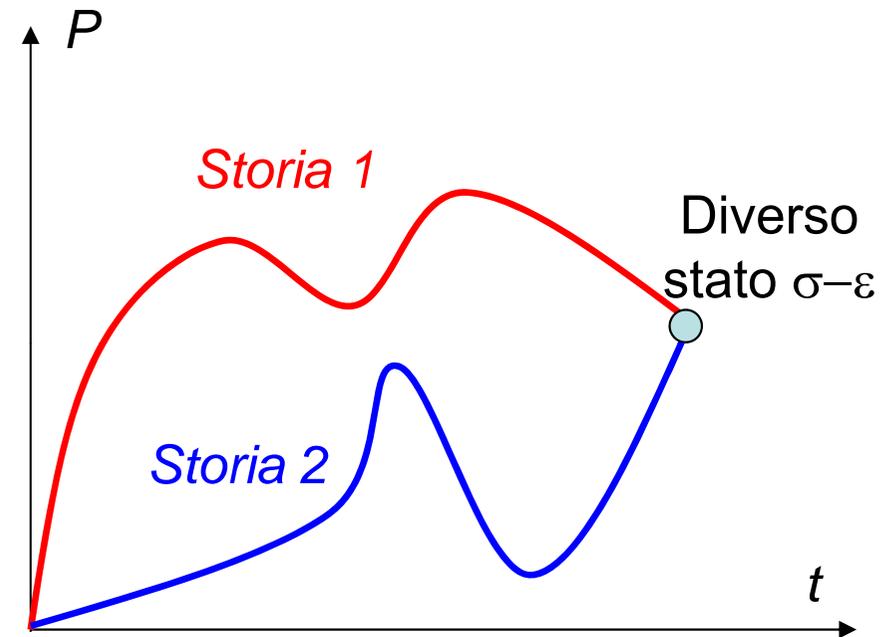
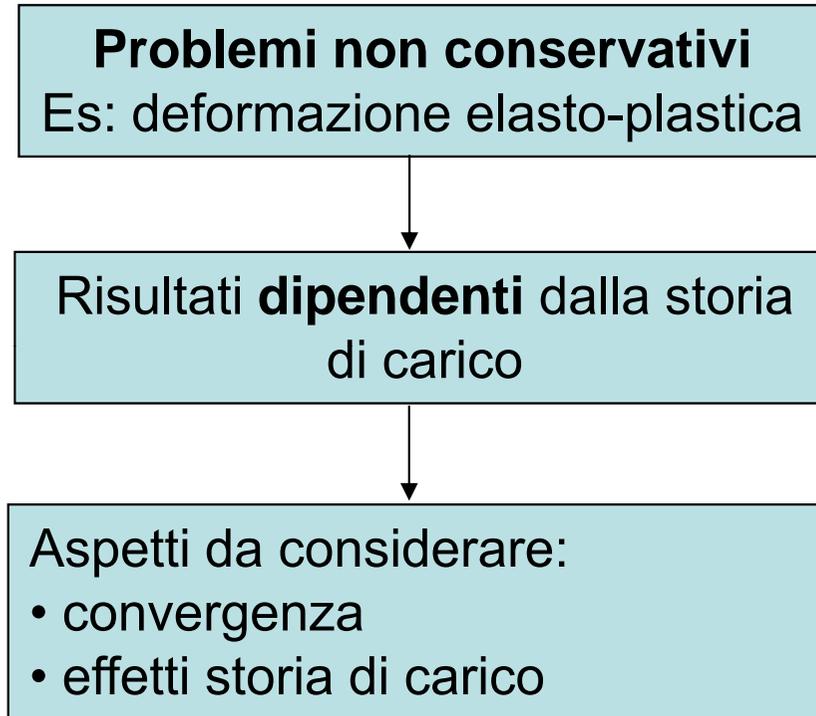
# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/2

Aspetti da considerare nel suddividere la Storia di carico in LS



# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/3

Aspetti da considerare nel suddividere la Storia di carico in LS

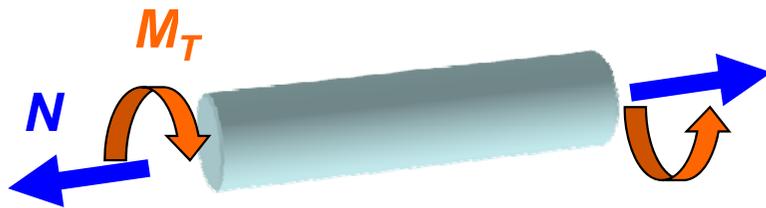


# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/4

*Rappresentazione Effetti Storia di carico tramite LS*

Periodo di carico monotono: periodo durante il quale i carichi si mantengono crescenti o decrescenti

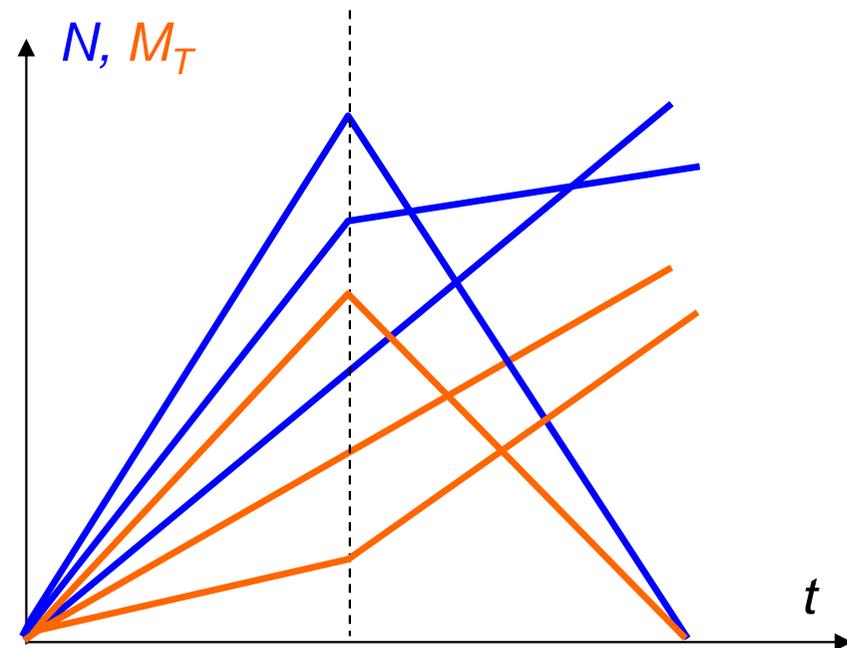
Periodo di carico proporzionale: periodo durante il quale i carichi si mantengono in un rapporto fisso tra loro



Monotono e proporzionale

Non monotono e proporzionale

Monotono e non proporzionale

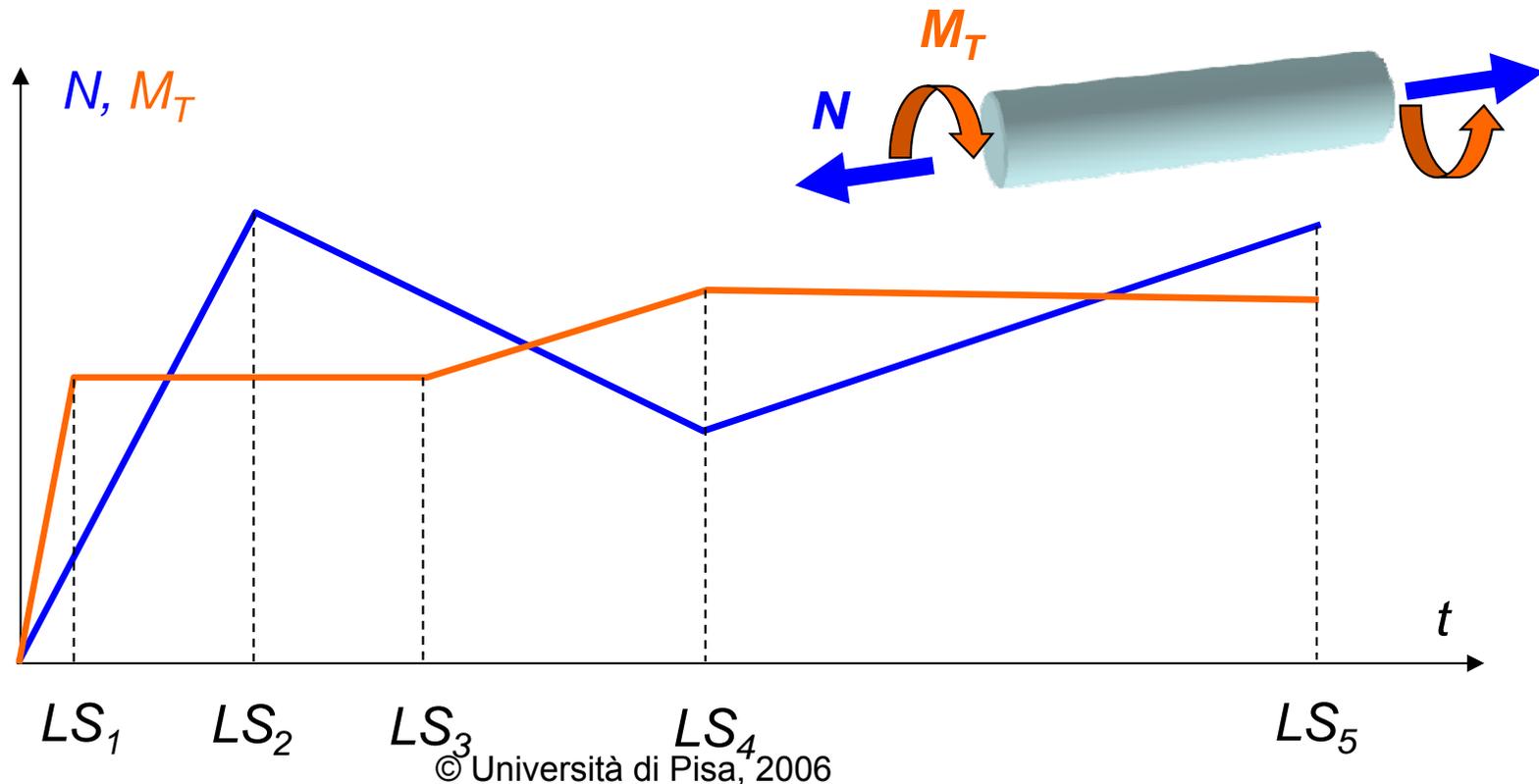


# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/5

*Effetti Storia di carico – Problemi non dipendenti dal tempo*

Il tempo rappresenta solo una variabile convenzionale che fissa la sequenza con la quale i carichi sono applicati.

La storia di carico dovrebbe rappresentare almeno gli aspetti generali dell'andamento effettivo dei carichi (es. estremi dei periodi di monotonicità per ciascuno dei carichi).



# RAPPRESENTAZIONE STORIA DI CARICO/6

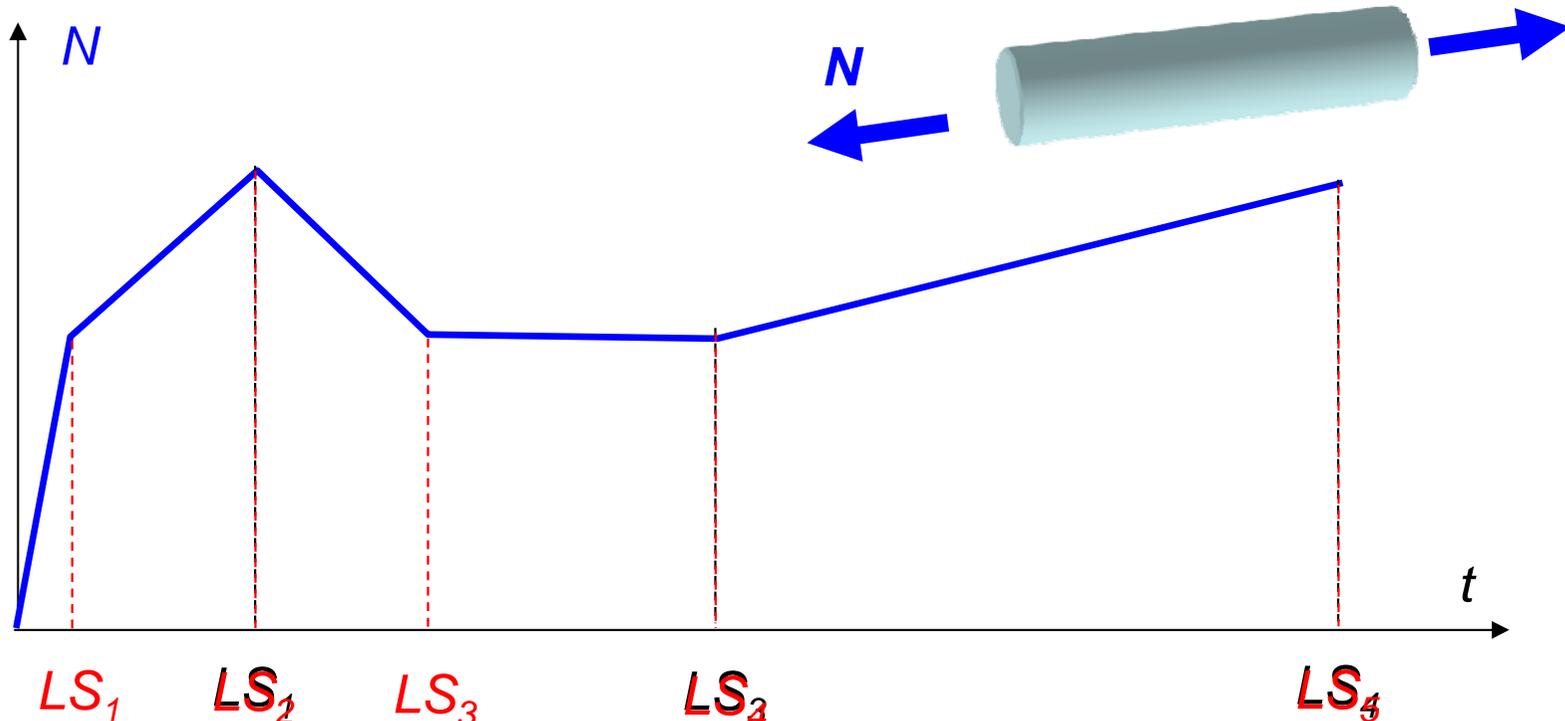
*Effetti Storia di carico – Problemi dipendenti dal tempo*

Il tempo rappresenta una variabile fisica effettiva.

La storia di carico dovrebbe rappresentare i dettagli dell'andamento effettivo dei carichi nel tempo (es. velocità di applicazione, "hold times").

Problema non dipendente dal tempo

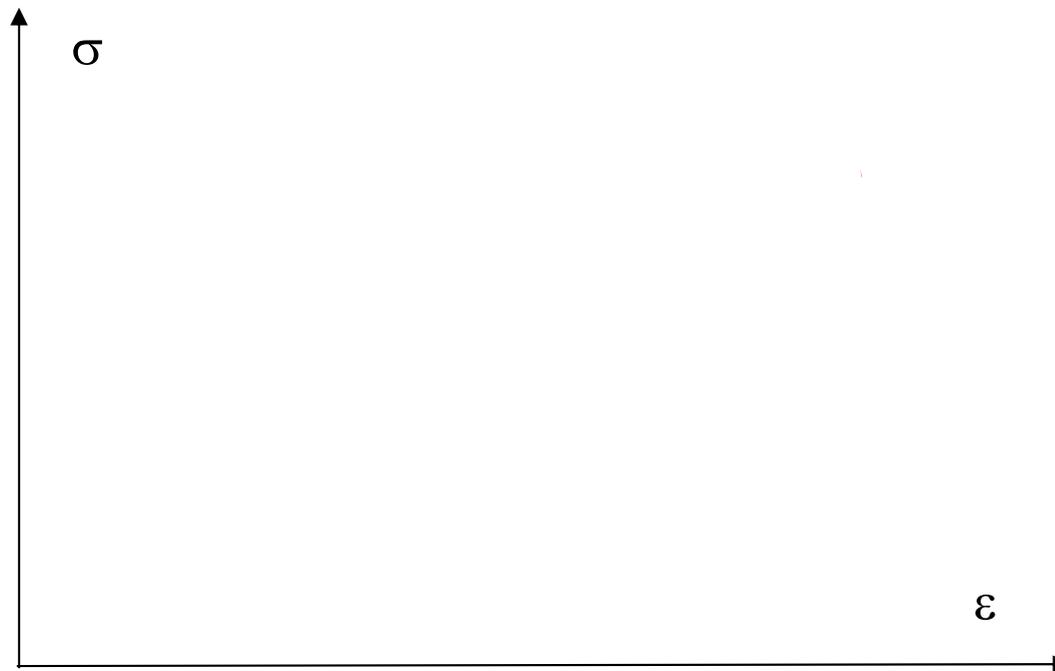
Problema dipendente dal tempo



# NON LINEARITÀ DEL MATERIALE/1

Non linearità nelle relazioni costitutive

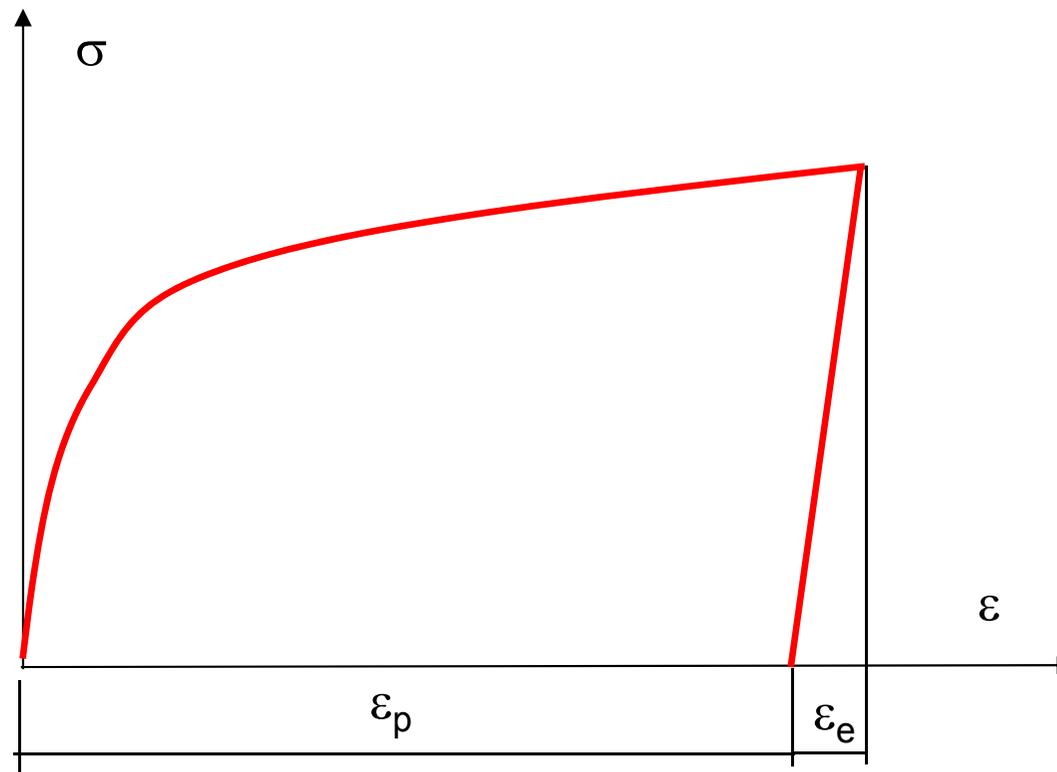
- elasticità non lineare



# NON LINEARITÀ DEL MATERIALE/2

Non linearità nelle relazioni costitutive

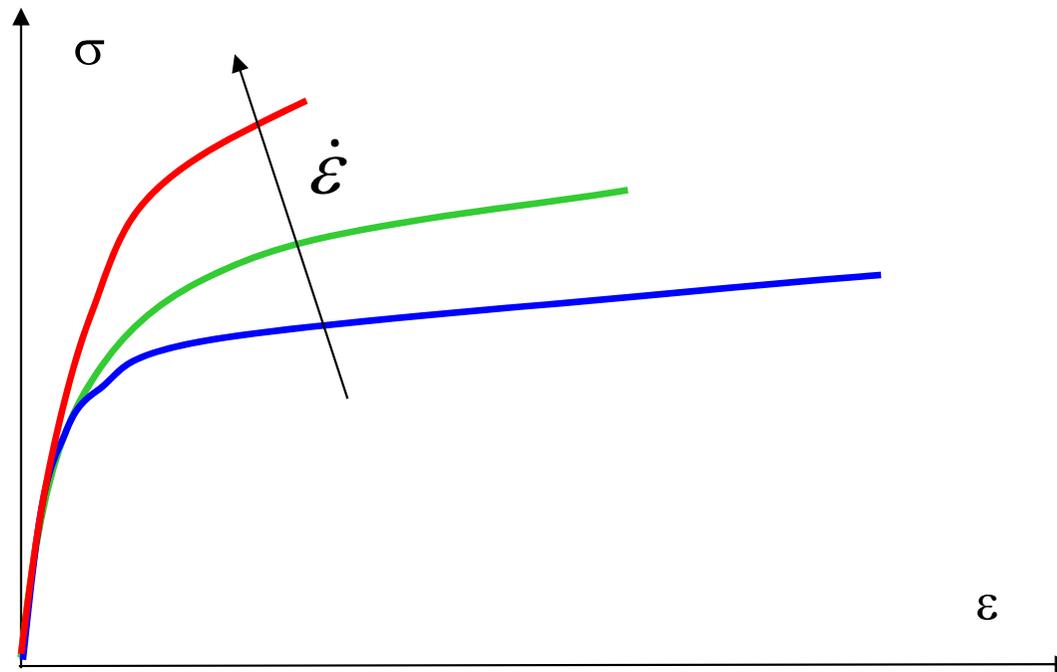
- elasticità non lineare
- plasticità



# NON LINEARITÀ DEL MATERIALE/3

Non linearità nelle relazioni costitutive

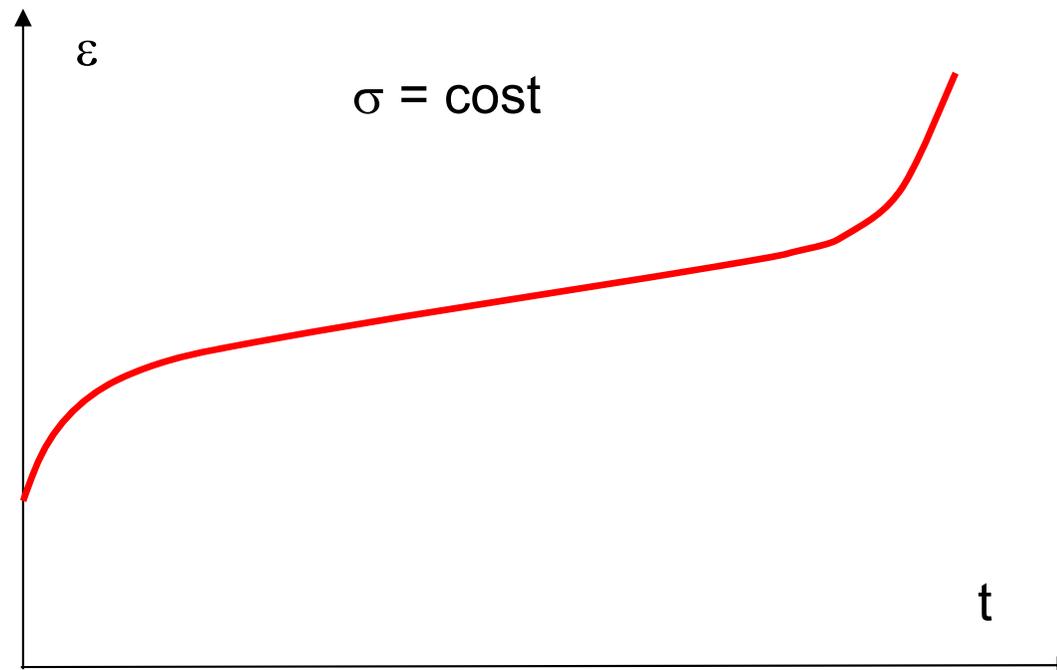
- elasticità non lineare
- plasticità
- visco-plasticità



# NON LINEARITÀ DEL MATERIALE/4

Non linearità nelle relazioni costitutive

- elasticità non lineare
- plasticità
- visco-plasticità
- creep



# PLASTICITÀ/1

Componenti di un modello di comportamento elasto-plastico:

- **funzione di snervamento** (*yield criterion*): permette di stabilire se uno stato di tensione dato corrisponde ad una condizione elastica o elasto-plastica;
- **legge di incrudimento** (*hardening rule*): definisce l'evoluzione della funzione di snervamento in funzione della deformazione plastica accumulata;
- **legge di flusso** (*flow rule*): consente di valutare l'incremento di deformazione plastica associato ad una variazione di tensione.

# PLASTICITÀ/2

## FUNZIONE DI SNERVAMENTO (*YIELD CRITERION*)

Si basa sull'ottenimento, dato un generico stato di tensione pluriassiale, di una **tensione monoassiale equivalente**, cioè, che si trova nelle stesse condizioni dal punto di vista dello snervamento.

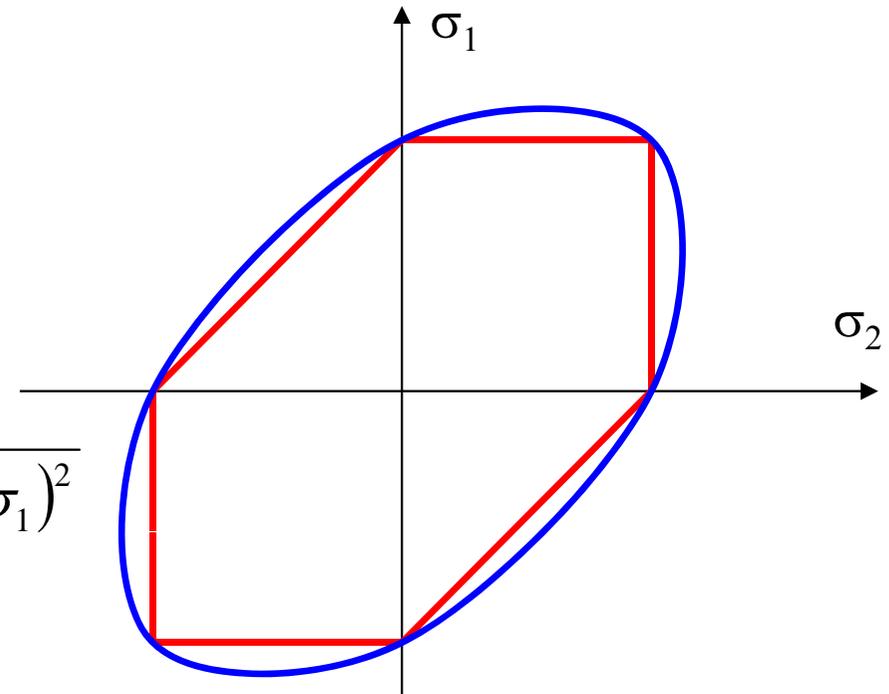
I criteri di equivalenza più usati per i materiali metallici sono:

- Criterio di TRESCA

$$\sigma_{eq}(\{\sigma\}) = \text{Max}[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|]$$

- Criterio di VON MISES

$$\sigma_{eq}(\{\sigma\}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$



# PLASTICITÀ/3

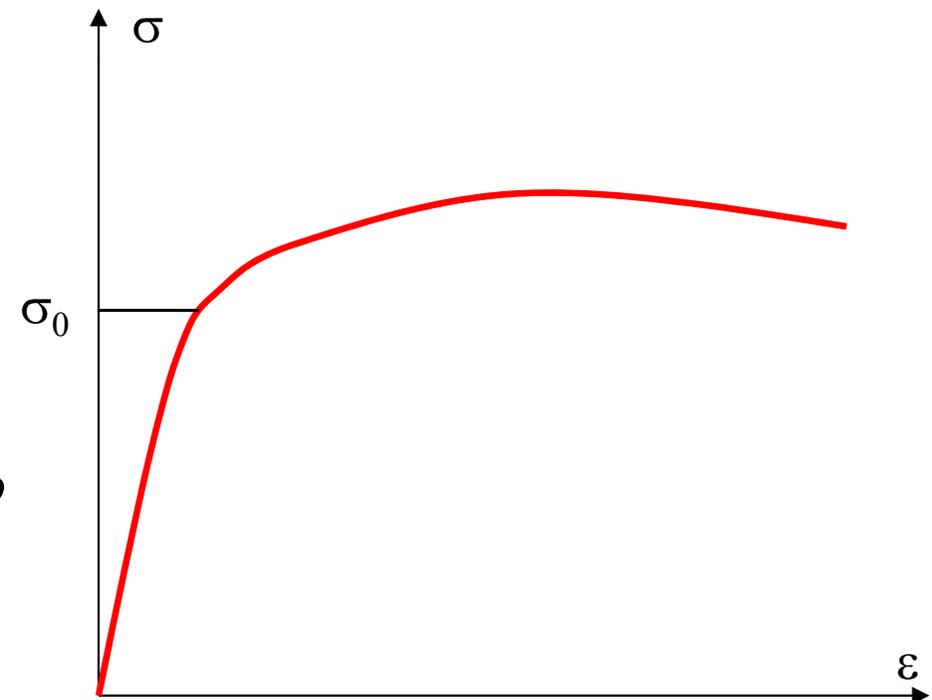
## FUNZIONE DI SNERVAMENTO (*YIELD CRITERION*)

La tensione monoassiale equivalente può essere confrontata direttamente con la tensione di snervamento fornita dalla prova di trazione,  $\sigma_0$ .

La funzione di snervamento può pertanto essere formulata nel modo seguente:

$$F(\{\sigma\}) = \sigma_{eq}(\{\sigma\}) - \sigma_0 \leq 0$$

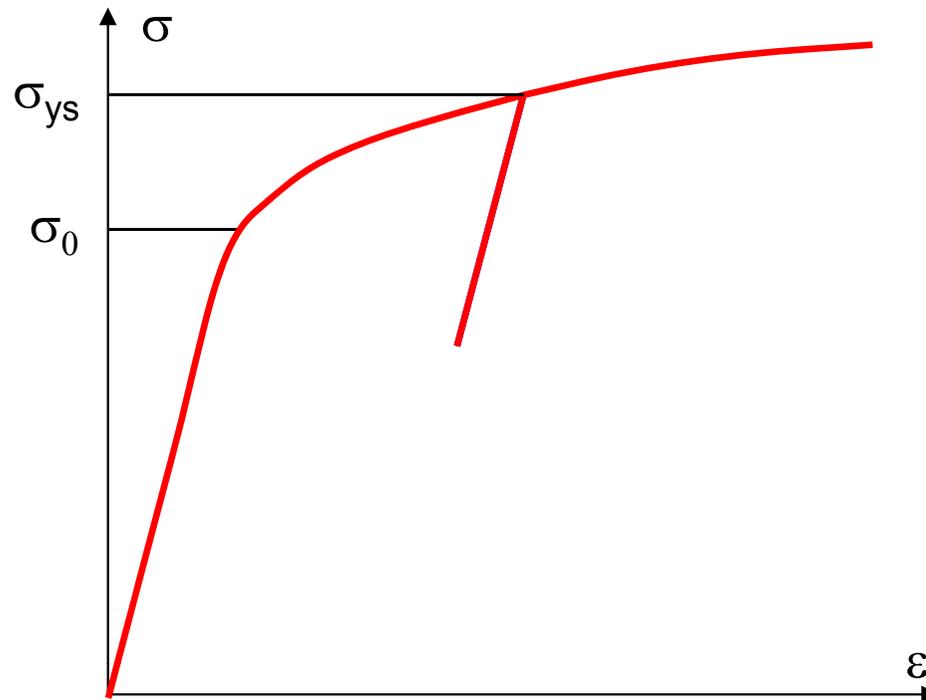
$$\begin{cases} F(\{\sigma\}) < 0 & \text{regime elastico} \\ F(\{\sigma\}) = 0 & \text{regime elasto-plastico} \\ F(\{\sigma\}) > 0 & \text{non possibile} \end{cases}$$



# PLASTICITÀ/4

## LEGGE DI INCRUDIMENTO (*HARDENING RULE*)

Dato che, nella prova di trazione, la tensione varia con la deformazione anche in regime elasto-plastico, pur dovendo mantenersi sempre  $F=0$ , ne risulta che la tensione (e quindi la funzione) di snervamento deve variare con la deformazione plastica accumulata.



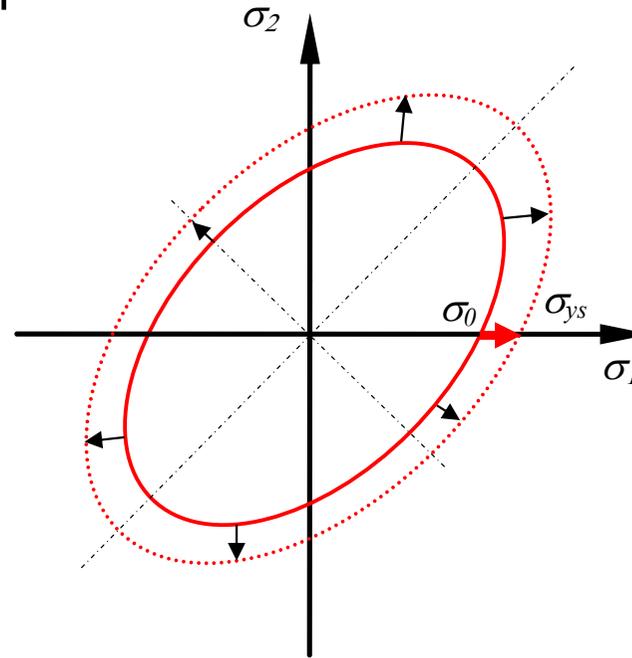
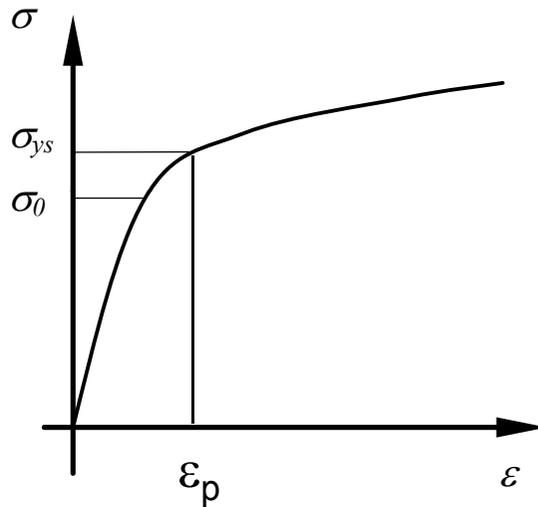
# PLASTICITÀ/5

## LEGGE DI INCRUDIMENTO (*HARDENING RULE*)

Le leggi di incrudimento utilizzate sono principalmente due:

**Incrudimento isotropo:** espansione omotetica della superficie di snervamento in tutte le direzioni

Monoassiale

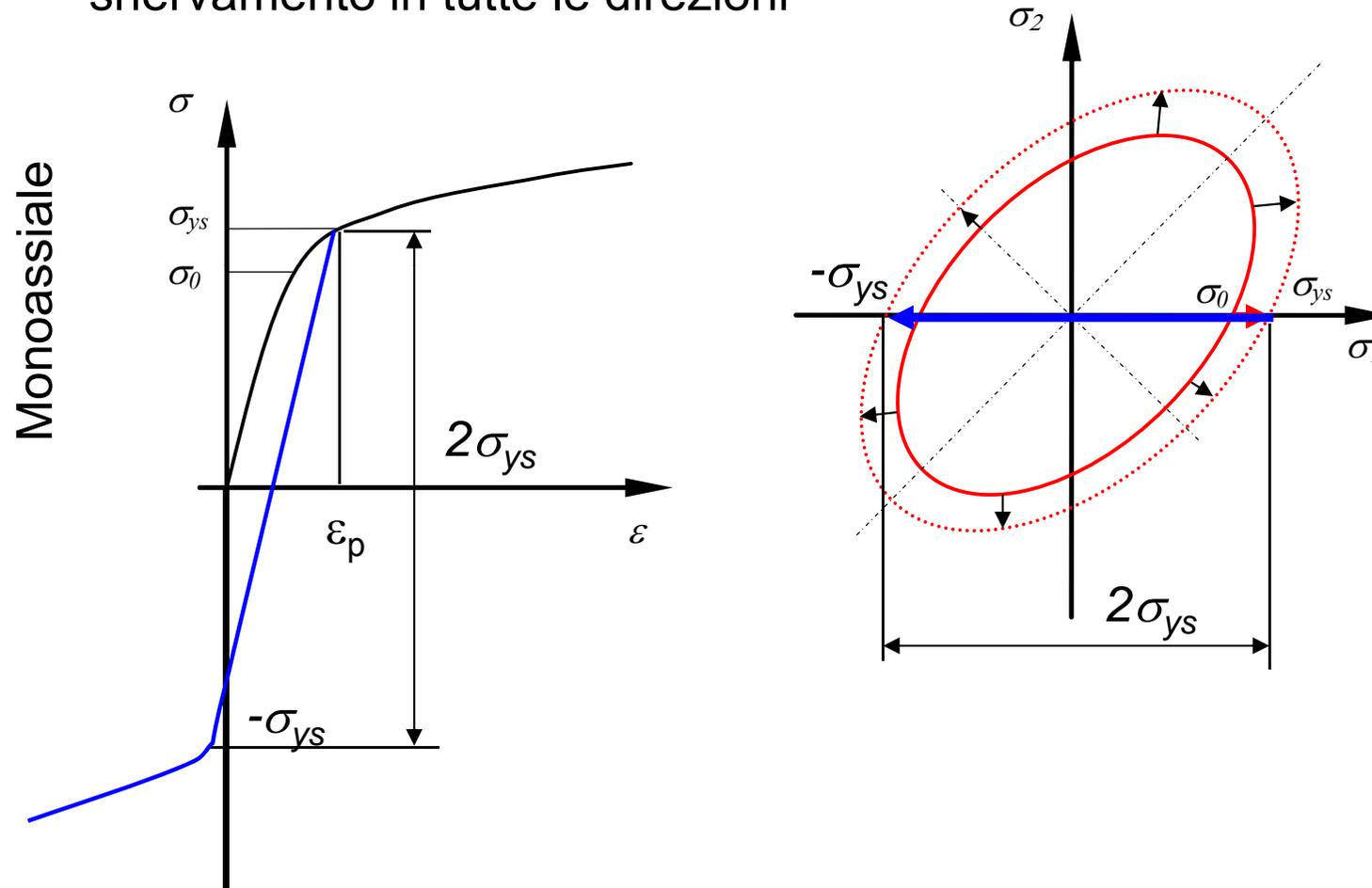


# PLASTICITÀ/5

## LEGGE DI INCRUDIMENTO (*HARDENING RULE*)

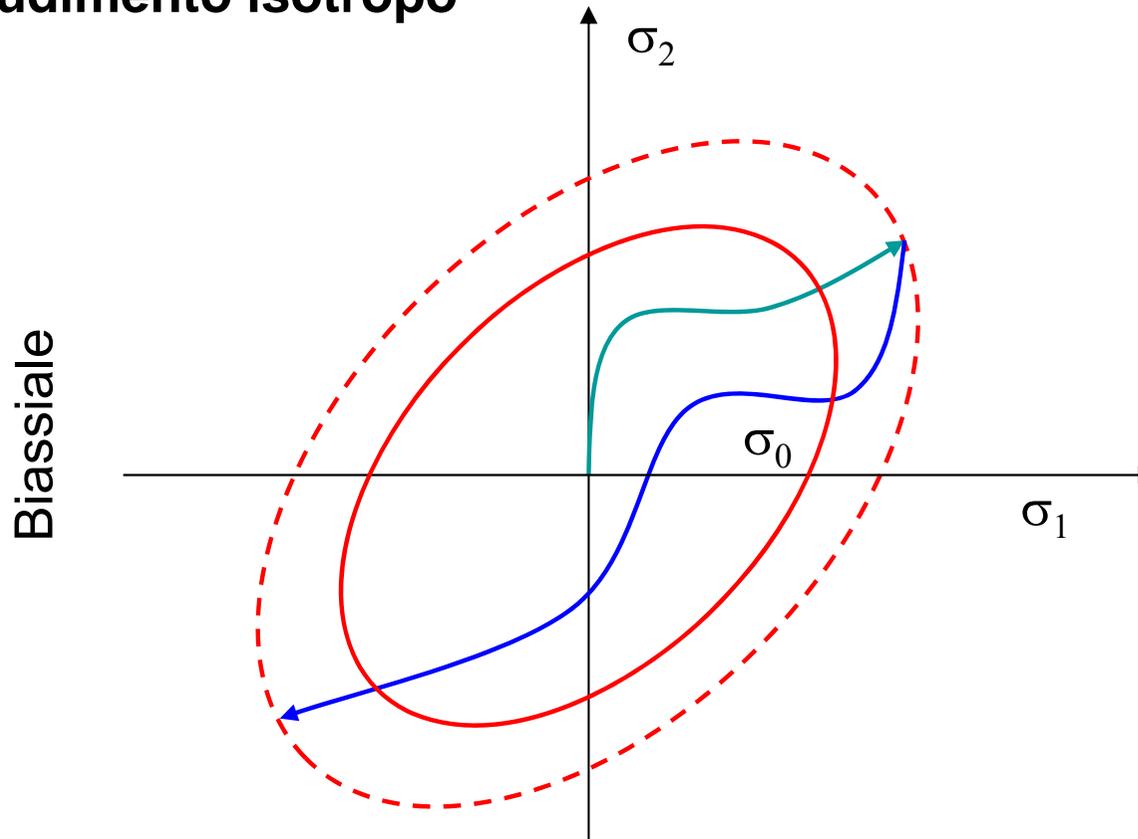
Le leggi di incrudimento utilizzate sono principalmente due:

**Incrudimento isotropo:** espansione omotetica della superficie di snervamento in tutte le direzioni



# PLASTICITÀ/6

## Incrudimento isotropo



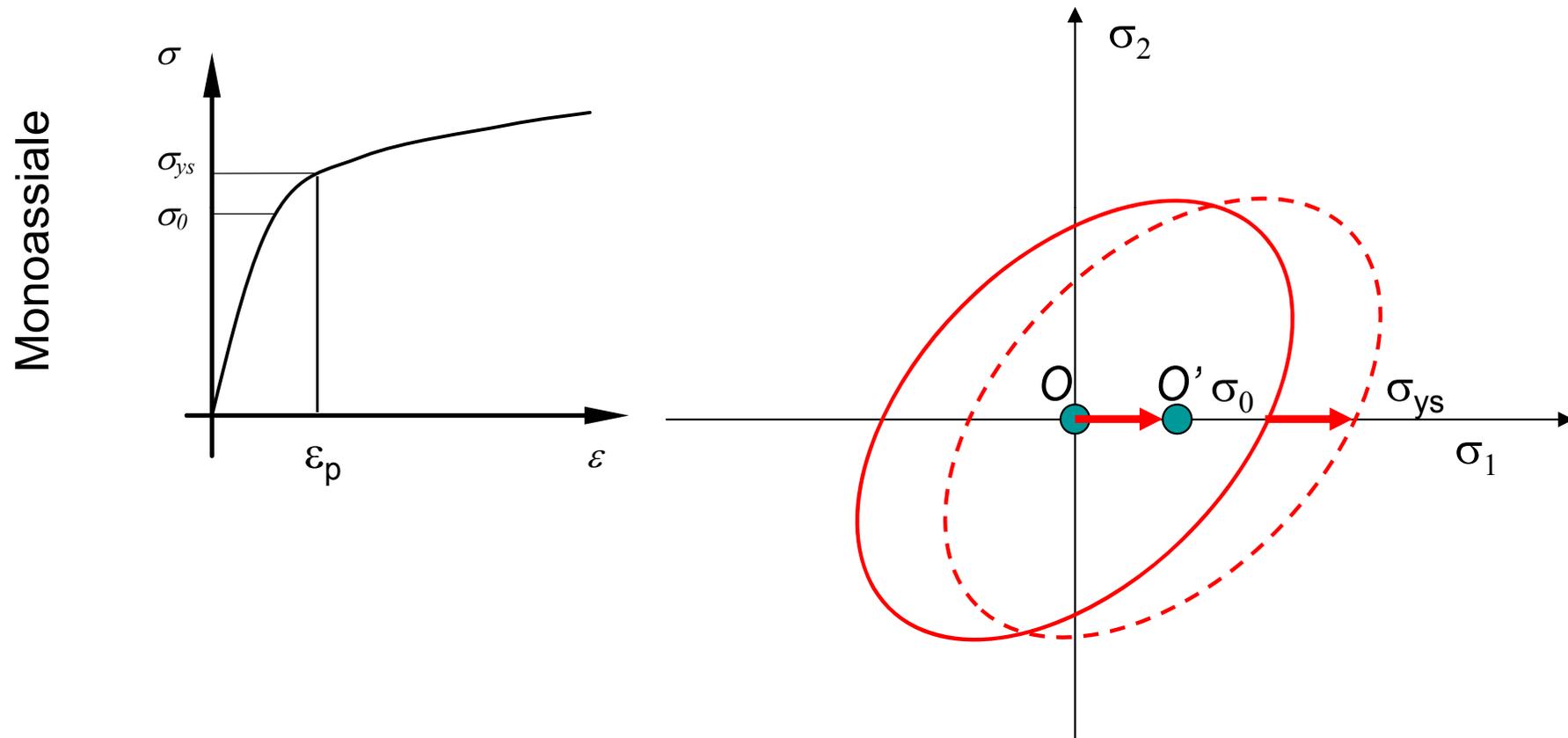
Rappresentazione analitica

$$F(\{\sigma\}) = \sigma_{eq} - \sigma_{ys}(\{\epsilon_p\}) \leq 0$$

# PLASTICITÀ/7

## LEGGE DI INCRUDIMENTO (*HARDENING RULE*)

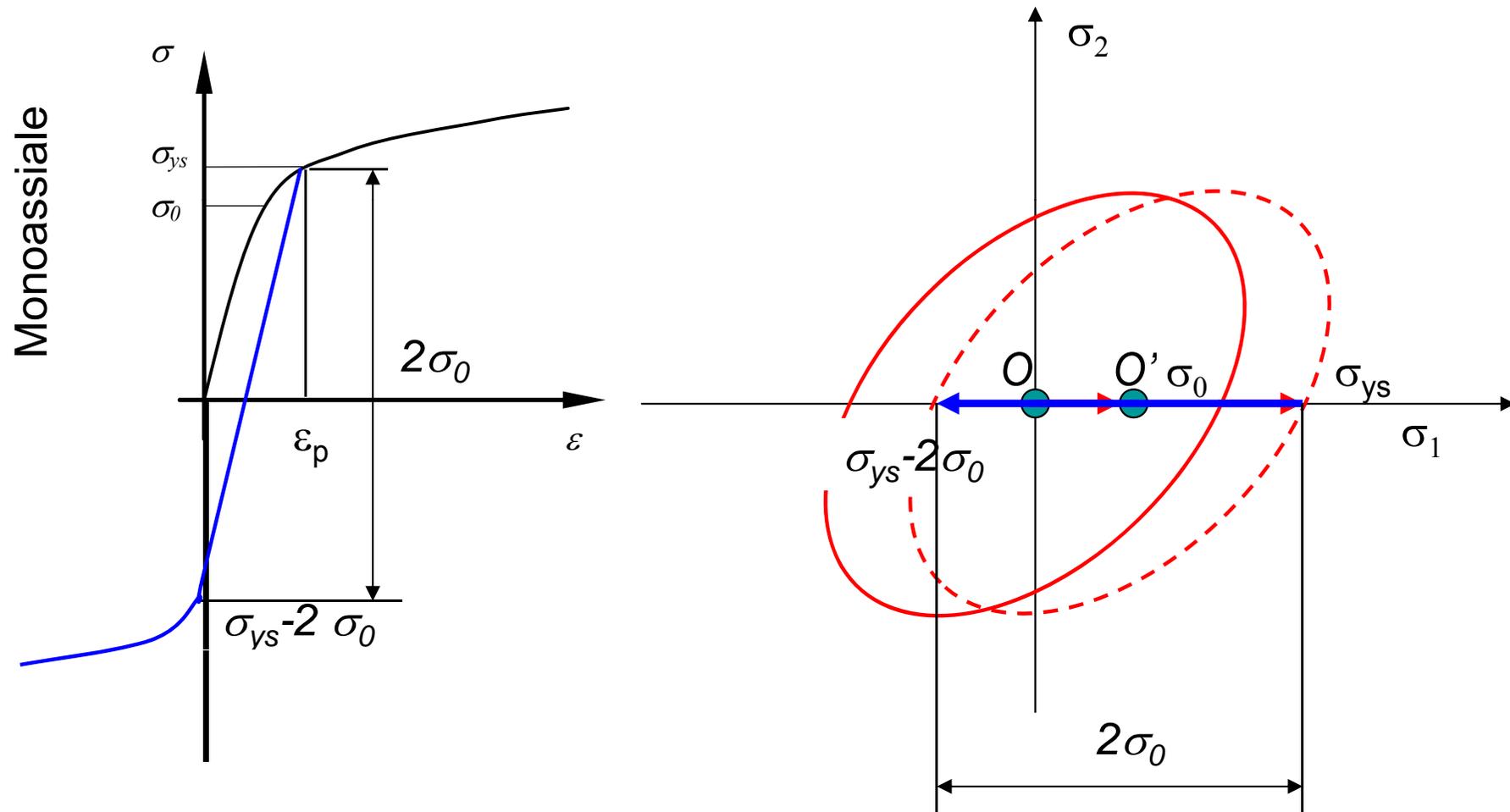
**Incrudimento cinematico:** traslazione della superficie di snervamento parallelamente a se stessa



# PLASTICITÀ/7

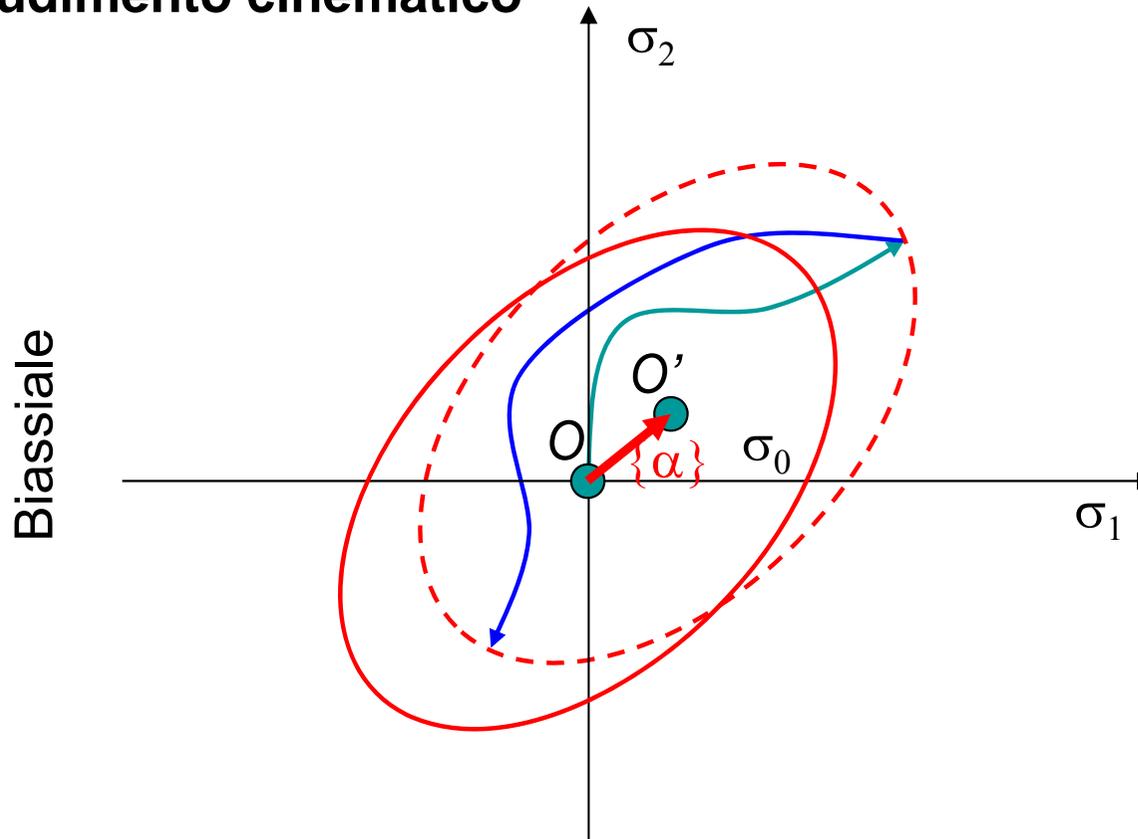
## LEGGE DI INCRUDIMENTO (*HARDENING RULE*)

**Incrudimento cinematico:** traslazione della superficie di snervamento parallelamente a se stessa



# PLASTICITÀ/8

## Incrudimento cinematico

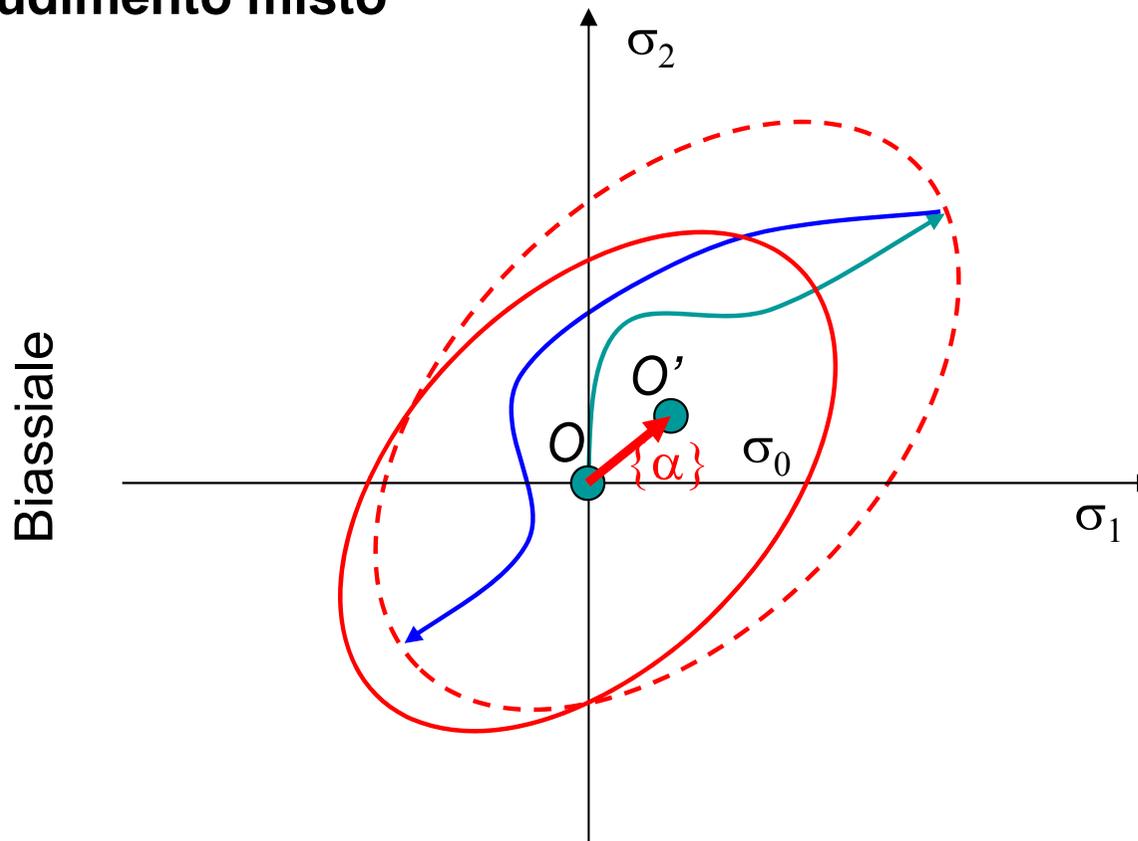


Rappresentazione analitica

$$F(\{\sigma\}) = \sigma_{eq}(\{\sigma\} - \alpha(\{\varepsilon_p\})) - \sigma_0 \geq 0$$

# PLASTICITÀ/9

## Incrudimento misto



Rappresentazione analitica

$$F(\{\sigma\}) = \sigma_{eq}(\{\sigma\} - \alpha(\{\varepsilon_p\})) - \sigma_{ys}(\{\varepsilon_p\}) \leq 0$$

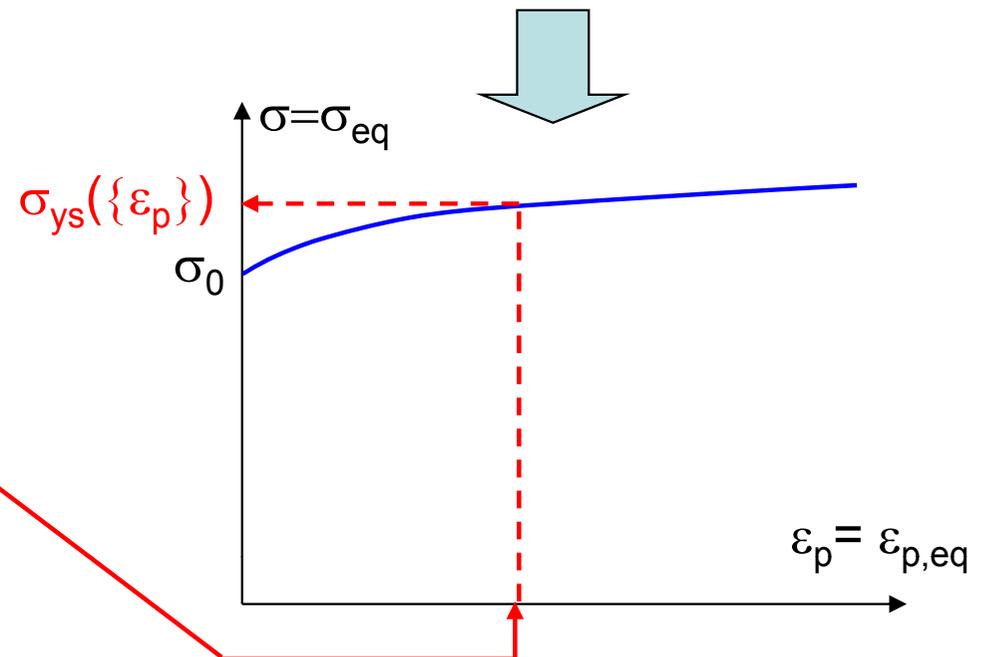
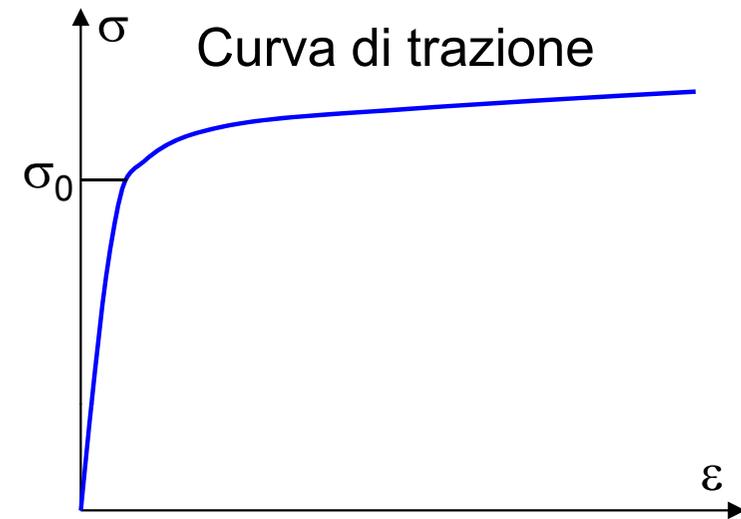
# PLASTICITÀ/10

La dipendenza dei parametri della legge di incrudimento dalla deformazione plastica è ottenuta tramite il valore di:

**Deformazione equivalente (o ideale):**

$$d\varepsilon_{p,eq} = \left( \frac{2}{3} \{d\varepsilon_p\}^T \{d\varepsilon_p\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_{p,eq} = \oint d\varepsilon_{p,eq} = \int_0^{\{\varepsilon_p\}} \left( \frac{2}{3} \{d\varepsilon_p\}^T \{d\varepsilon_p\} \right)^{\frac{1}{2}}$$



# PLASTICITÀ/11

La dipendenza dei parametri della legge di incrudimento dalla deformazione plastica è ottenuta tramite il valore di:

**Deformazione equivalente (o ideale):**

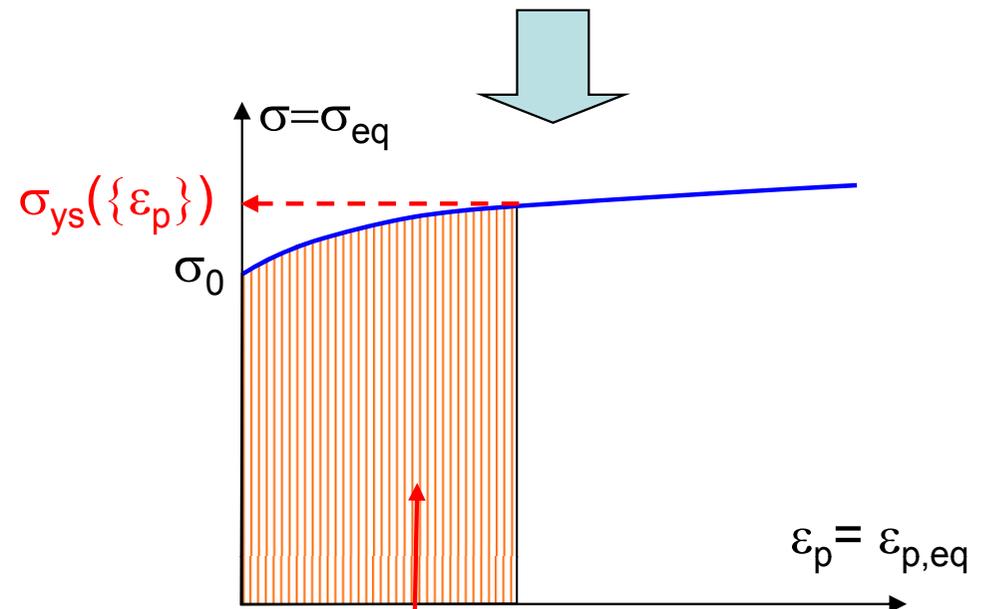
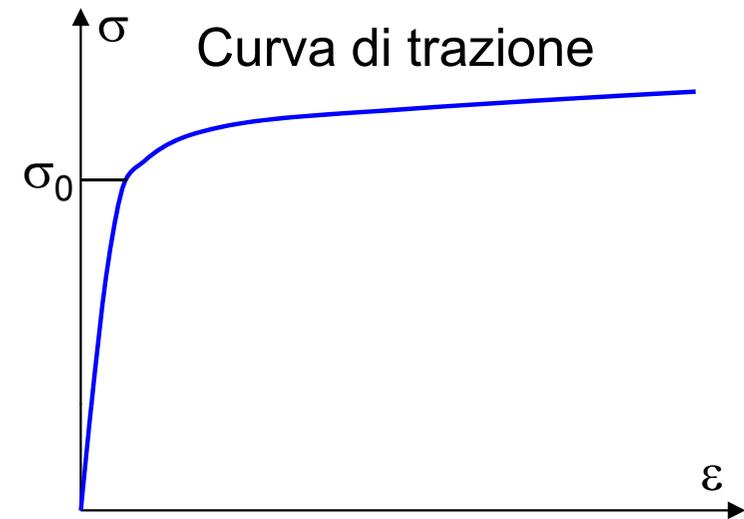
$$d\varepsilon_{p,eq} = \left( \frac{2}{3} \{d\varepsilon_p\}^T \{d\varepsilon_p\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_{p,eq} = \oint d\varepsilon_{p,eq} = \int_0^{\{\varepsilon_p\}} \left( \frac{2}{3} \{d\varepsilon_p\}^T \{d\varepsilon_p\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Lavoro plastico**

$$dW_p = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon_p\}$$

$$W_p = \oint dW_p = \int_0^{\{\varepsilon_p\}} \{\sigma\}^T \{d\varepsilon_p\}$$



# PLASTICITÀ/12

**Legge di flusso** (Flow rule): consente di valutare l'incremento di deformazione plastica  $\{d\varepsilon_p\}$  associato ad una variazione di tensione  $\{d\sigma\}$ . In campo elasto-plastico questo legame può essere stabilito solo in forma incrementale.

Tipica forma della legge di flusso (Prandtl-Reuss):

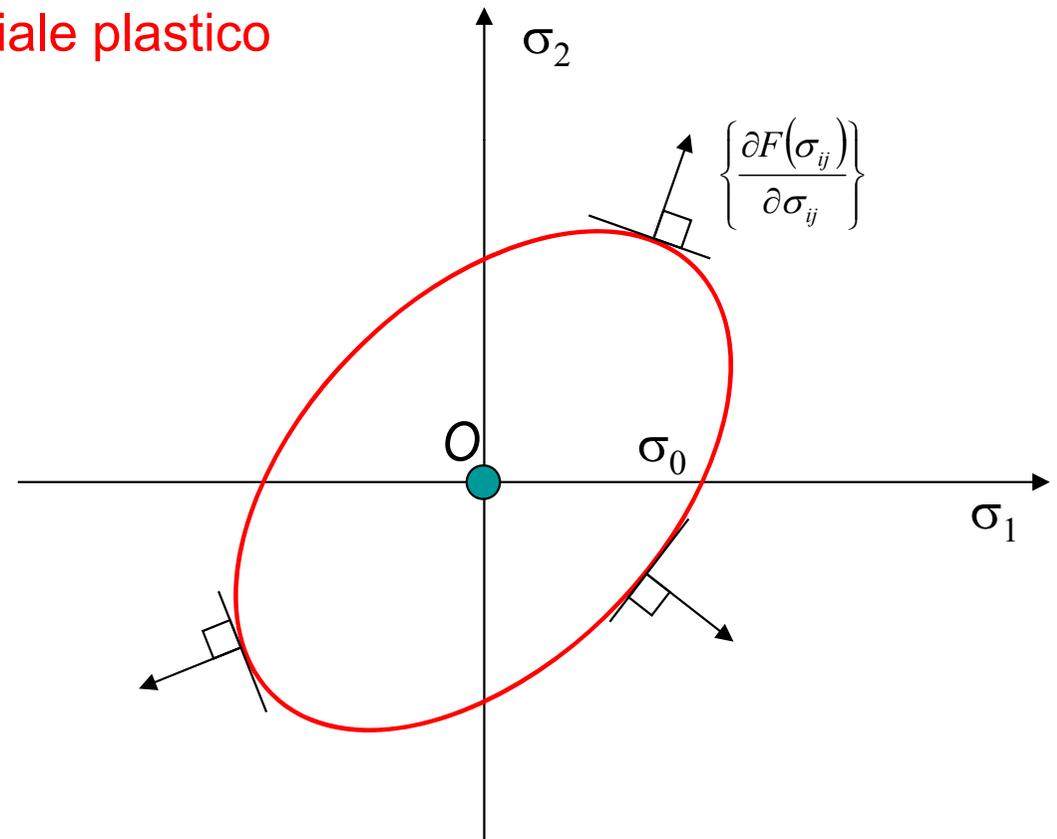
$$\{d\varepsilon_p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial Q(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \rightarrow \text{Potenziale plastico}$$

Moltiplicatore  
plastico

Plasticità "associativa" (valida per maggior parte materiali metallici)

$$Q = F$$

$$\{d\varepsilon_p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \right\}$$



# PLASTICITÀ/12

## Calcolo moltiplicatore plastico

Condizioni da soddisfare

$$\{d\varepsilon_p\} = d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \right\}$$

Legge di flusso

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon_e\} = [D](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_p\})$$

Relazione costitutiva

$$F(\{\sigma\}, \{\varepsilon_p\}) = 0$$

Relazioni di compatibilità per la superficie di snervamento

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \right\}^T \{d\varepsilon_p\} = 0$$

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon_e\} = [D] \left( \{d\varepsilon\} - d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right)$$

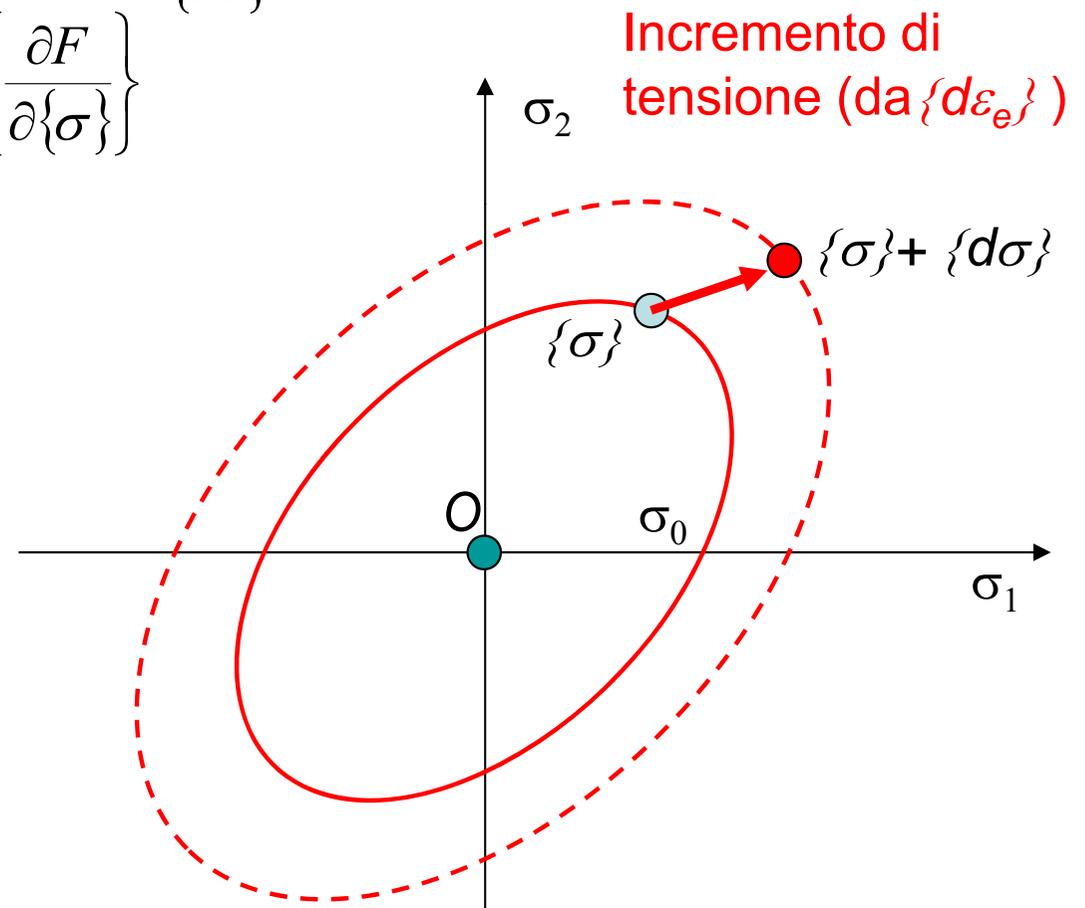
$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D]\{d\varepsilon\} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D]d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \right\}^T d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} = 0$$

# PLASTICITÀ/12

## Moltiplicatore plastico

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \cdot \{d\varepsilon\}$$

Valore del moltiplicatore plastico che assicura, per incrementi infinitesimi di deformazione, che il punto rappresentativo dello stato di tensione finale giaccia ancora sulla superficie di snervamento aggiornata.



Spostamento superficie di snervamento (da  $\{d\varepsilon_p\}$ )

# PLASTICITÀ/12

## Legame costitutivo in campo elasto-plastico

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \cdot \{d\varepsilon\}$$

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon_e\} = [D] \left( \{d\varepsilon\} - d\lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right)$$

$$\{d\sigma\} = \left( [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \right) \cdot \{d\varepsilon\} = [D_t] \{d\varepsilon\}$$

Matrice costitutiva "tangente"

# PLASTICITÀ/12

## Matrice di rigidezza tangente

### Singolo elemento

$$[K_T^e] = \int_V [B]^T [D_t] [B] \cdot dV$$

### Intera struttura

Si ottiene assemblando le matrici di rigidezza tangenti dei singoli elementi

# PLASTICITÀ/12

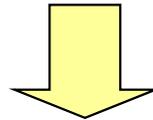
## Tecnica risolutiva con MEF

...da NR al passo  $i$ -esimo

$$\{\Delta U\}_i = \{U\}_i - \{U\}_{i-1} = [K_T]_{i-1}^{-1} \cdot (\{P_N\}_{i-1} - \{P\})$$

Calcolo incremento di deformazione totale

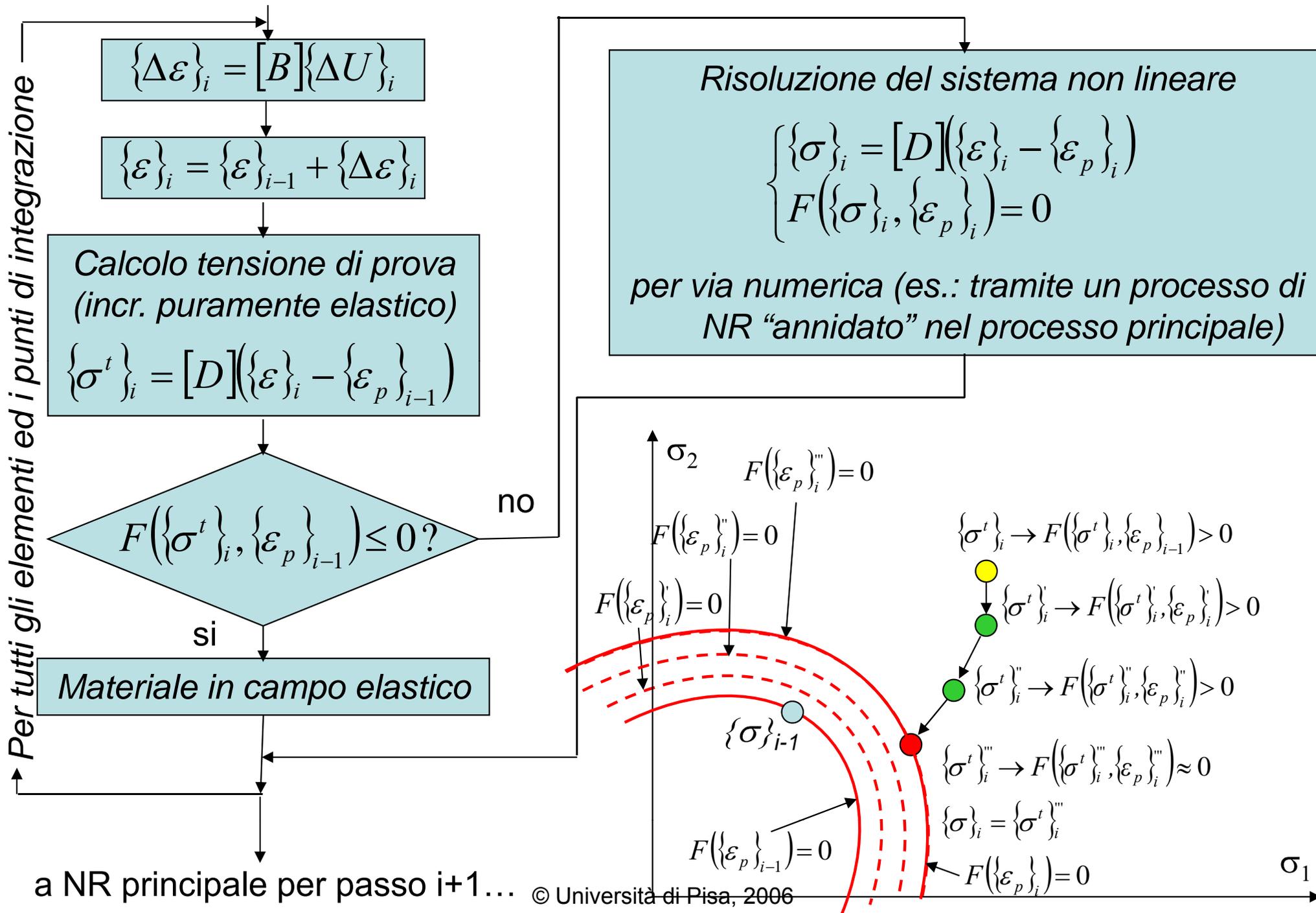
$$\{\Delta \varepsilon\}_i = [B]\{\Delta U\}_i$$



D: Come suddividere l'incremento di deformazione totale in una quota elastica ed una plastica, rispettando tutte le condizioni (costitutive, compatibilità elasto-plastica, legge di flusso)?

Pb: adesso l'incremento è finito, per quanto piccolo, e la relazione per il calcolo di  $d\lambda$  vale solo in maniera approssimata.

# PLASTICITÀ/12



# COMANDI PER ANALISI NON LINEARE-1

Un analisi non lineare prevede l'impiego di vari Load Steps o incrementi di carico, che devono essere risolti in sequenza.

Comandi per la definizione di un Load Step

**TIME, TIME**      *definisce il **tempo finale** del Load Step*

**NROPT, Option, ...**      *sceglie l'algorithmo di soluzione*

- 
- |               |                                  |
|---------------|----------------------------------|
| • <b>AUTO</b> | algoritmo scelto automaticamente |
| • <b>FULL</b> | full Newton-Raphson              |
| • <b>MODI</b> | modified Newton-Raphson          |
| • <b>INIT</b> | initial stiffness Newton-Raphson |

# COMANDI PER ANALISI NON LINEARE-2

**CNVTOL**, *Lab*, **VALUE**, **TOLER**, **NORM**, *MINREF*

**Grandezza per controllo convergenza**

- **U** spostamenti
- **F** squilibrio (default)
- ...

**Valore di riferimento per la grandezza**

**Tolleranza (default)**

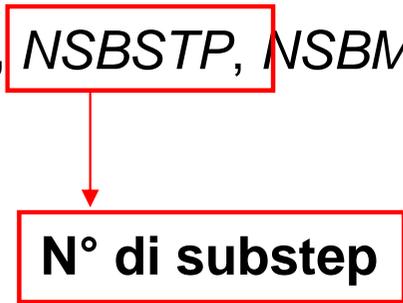
- **0.005** per lo squilibrio
- **0.05** per lo spostamento

**Norma**

- **2** norma L2
- **1** norma L1
- **0** norma  $\infty$

## COMANDI PER ANALISI NON LINEARE-3

**NSUBST**, **NSBSTP**, *NSBMX*, *NSBMN*, *Carry*



**N° di substep**

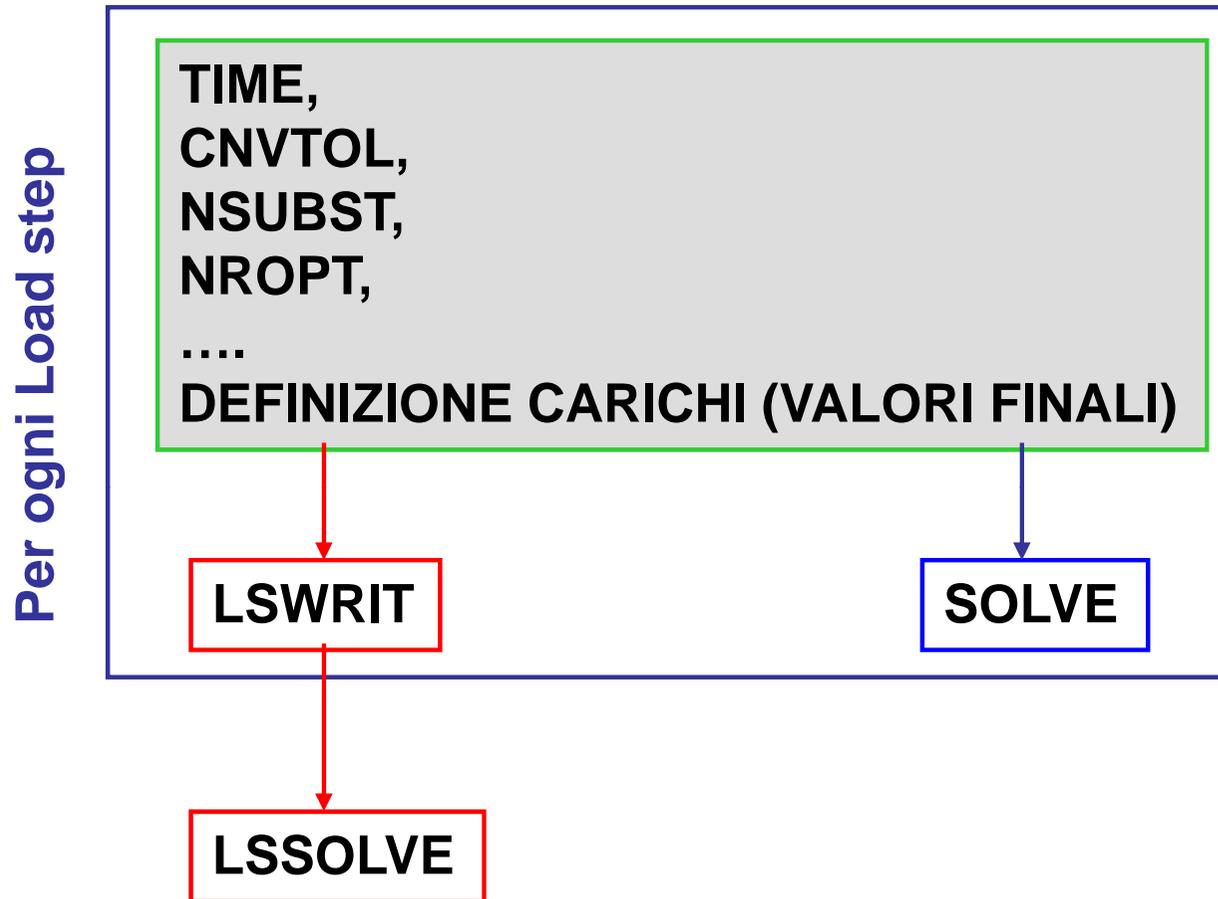
**AUTOTS**, *Key* attiva (ON) o disattiva (OFF) la scelta automatica dei Substep. La dimensione minima è data da NSUBST

**KBC**, *KEY* sceglie l'andamento del carico nel LoadStep

- 0 variabile linearmente nel Loadstep
- 1 a gradino (costante nel Loadstep)

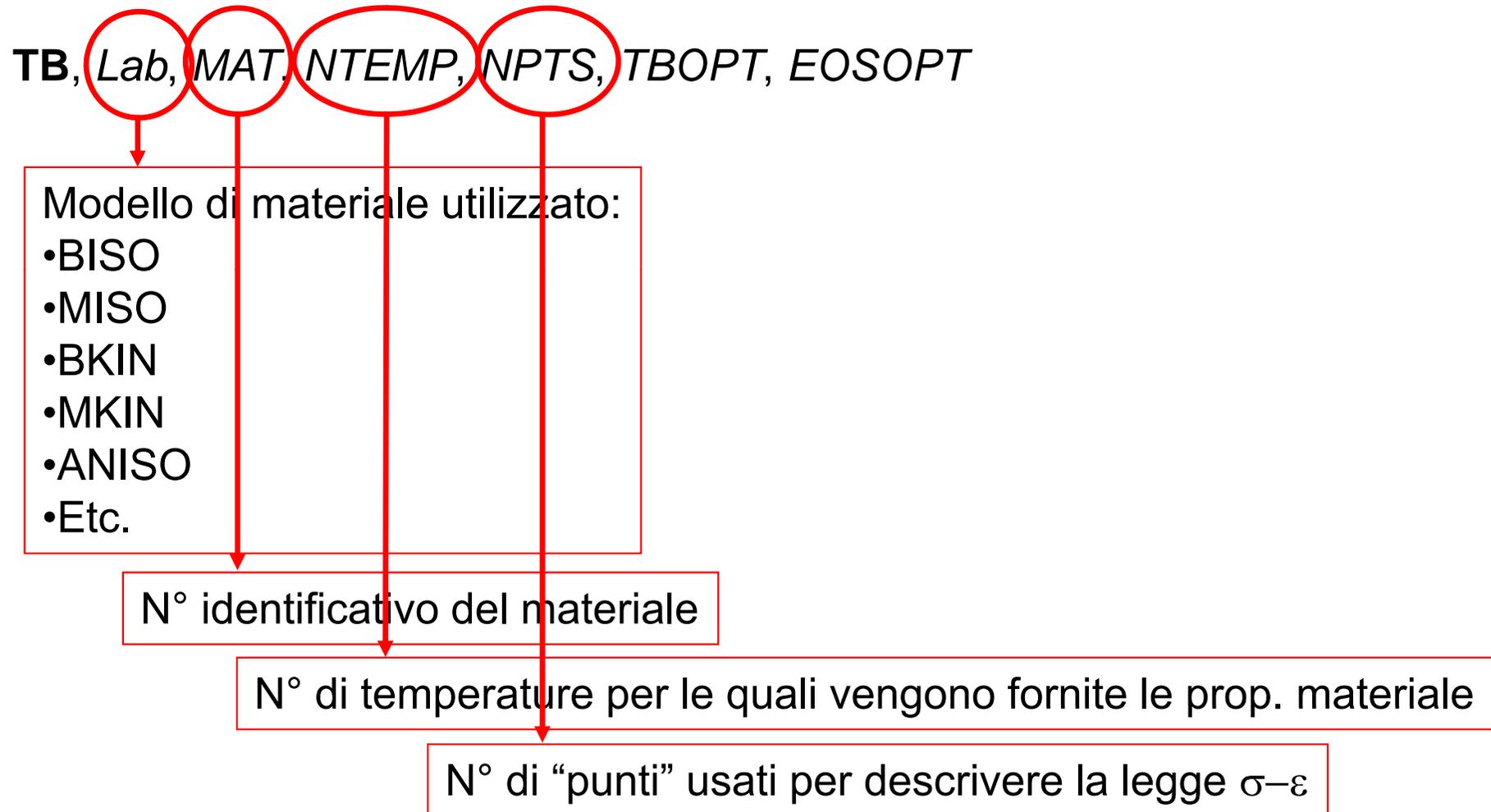
**OUTRES**, *Item*, *Freq*, *Cname* Definisce il tipo di dati trasferiti nel file di output e la frequenza di scrittura.

# COMANDI PER ANALISI NON LINEARE-4



# Definizione proprietà elasto-plastiche/1

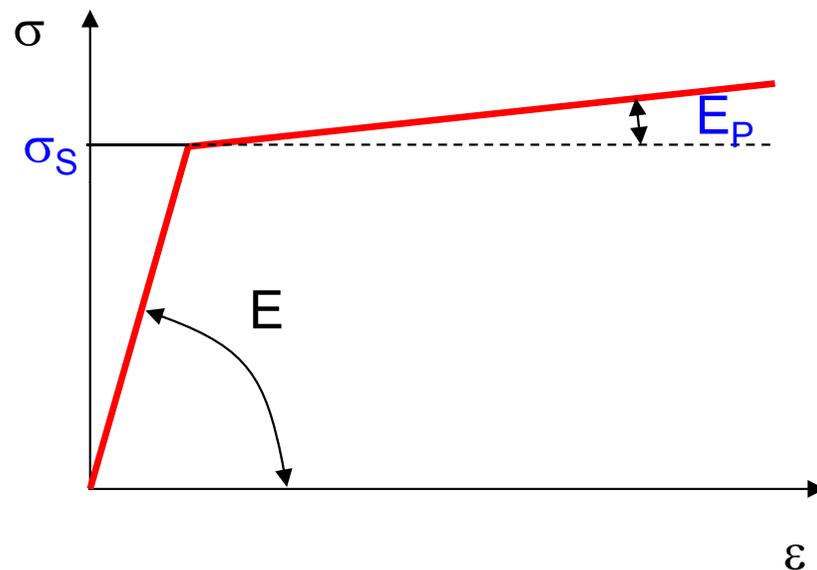
Comandi ANSYS per l'introduzione delle proprietà del materiale in campo elasto-plastico



# Definizione proprietà elasto-plastiche/2

Per ogni legge di comportamento prescelta, è necessario fornire una Table. Il numero di punti della table ed il loro significato variano con il modello prescelto.

## Modello BISO (Bilinear Isotropic) o BKIN



N° punti = 2

C1 =  $\sigma_s$

C2 =  $E_p$

**TB**, *BISO*, *MAT*, *NTEMP*, *NPTS*, *TBOPT*, *EOSOPT*

**TBTEMP**, *TEMP*, *KMOD*

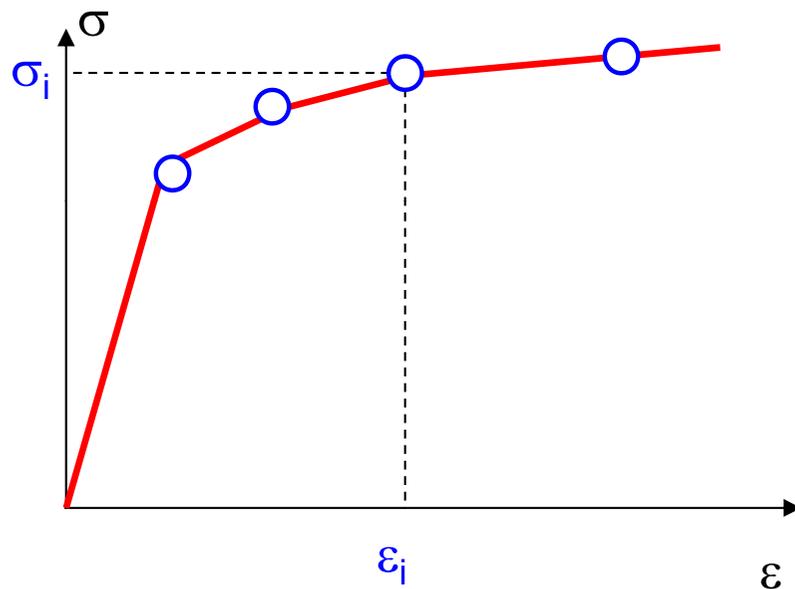
**TBDATA**, 1,  $\sigma_s$ ,  $E_p$ ,

→ Ripetere per ogni temperatura

# Definizione proprietà elasto-plastiche/3

Per ogni legge di comportamento prescelta, è necessario fornire una Table. Il numero di punti della table ed il loro significato variano con il modello prescelto.

## Modello MISO (Multi-linear Isotropic) o MKIN



N° punti = NPTS  
per ogni punto =  $\epsilon_i, \sigma_i$

**TB**, *MISO*, *MAT*, *NTEMP*, *NPTS*, *TBOPT*, *EOSOPT*

**TBTEMP**, *TEMP*, *KMOD*

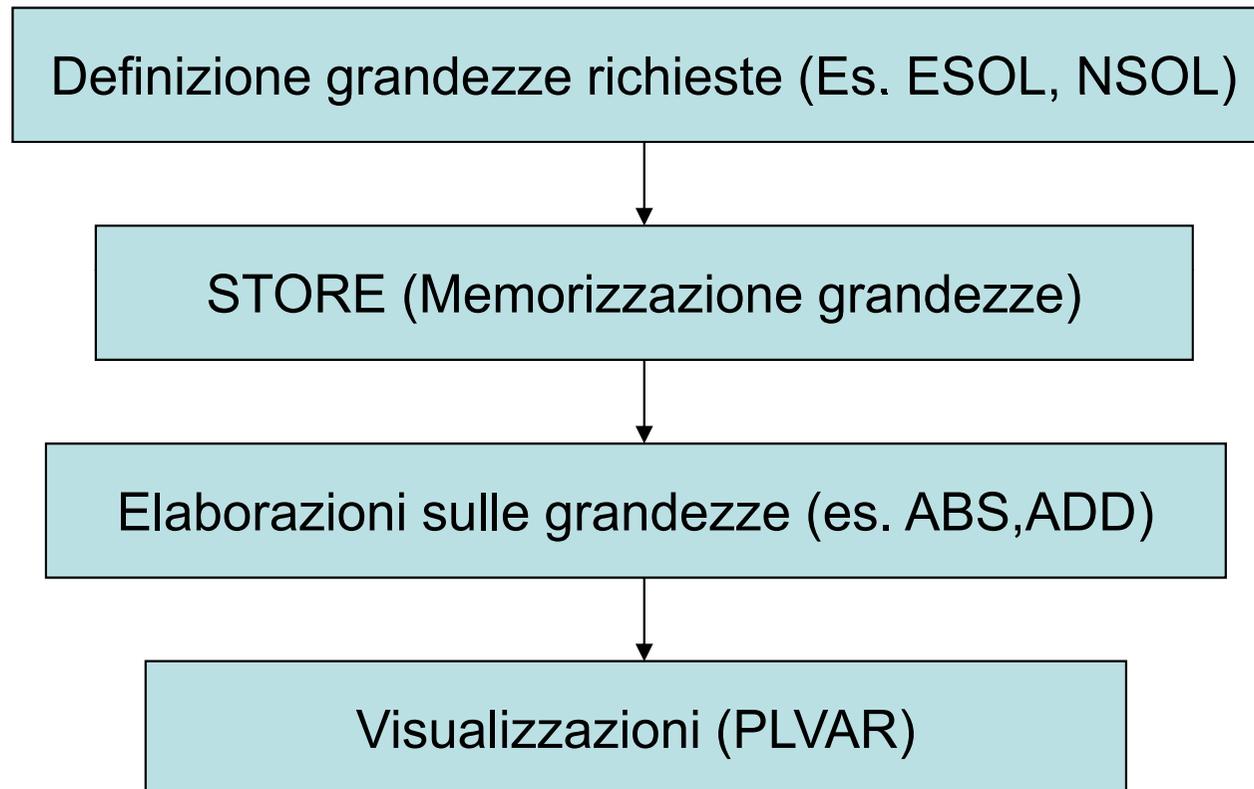
**TBPT**, *Oper*,  $\epsilon_i$ ,  $\sigma_i$

NPTS volte

→ Ripetere per ogni temperatura

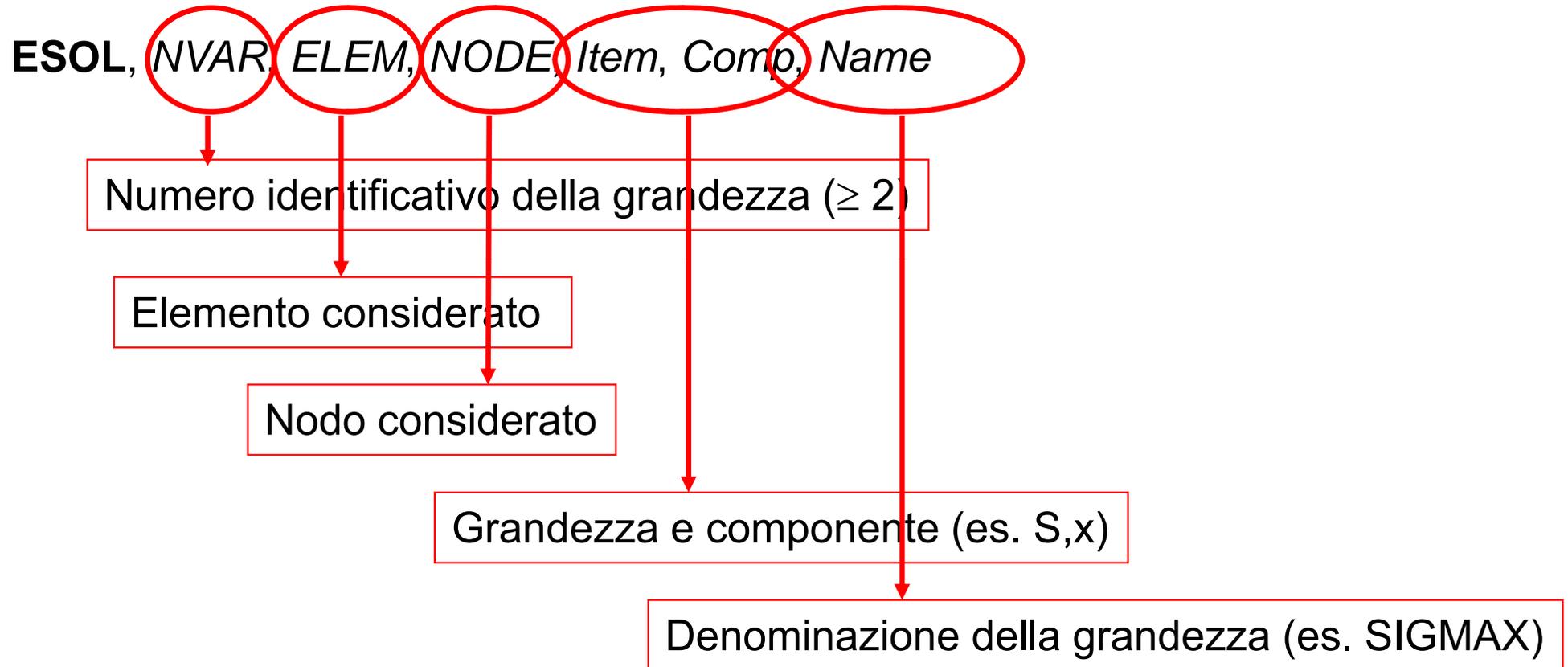
# POST26/1

Il post-processore POST26 è destinato a rappresentare l'andamento di grandezze specificate (es. tensione o spostamento di un punto) in funzione del tempo o in funzione di un'altra grandezza.



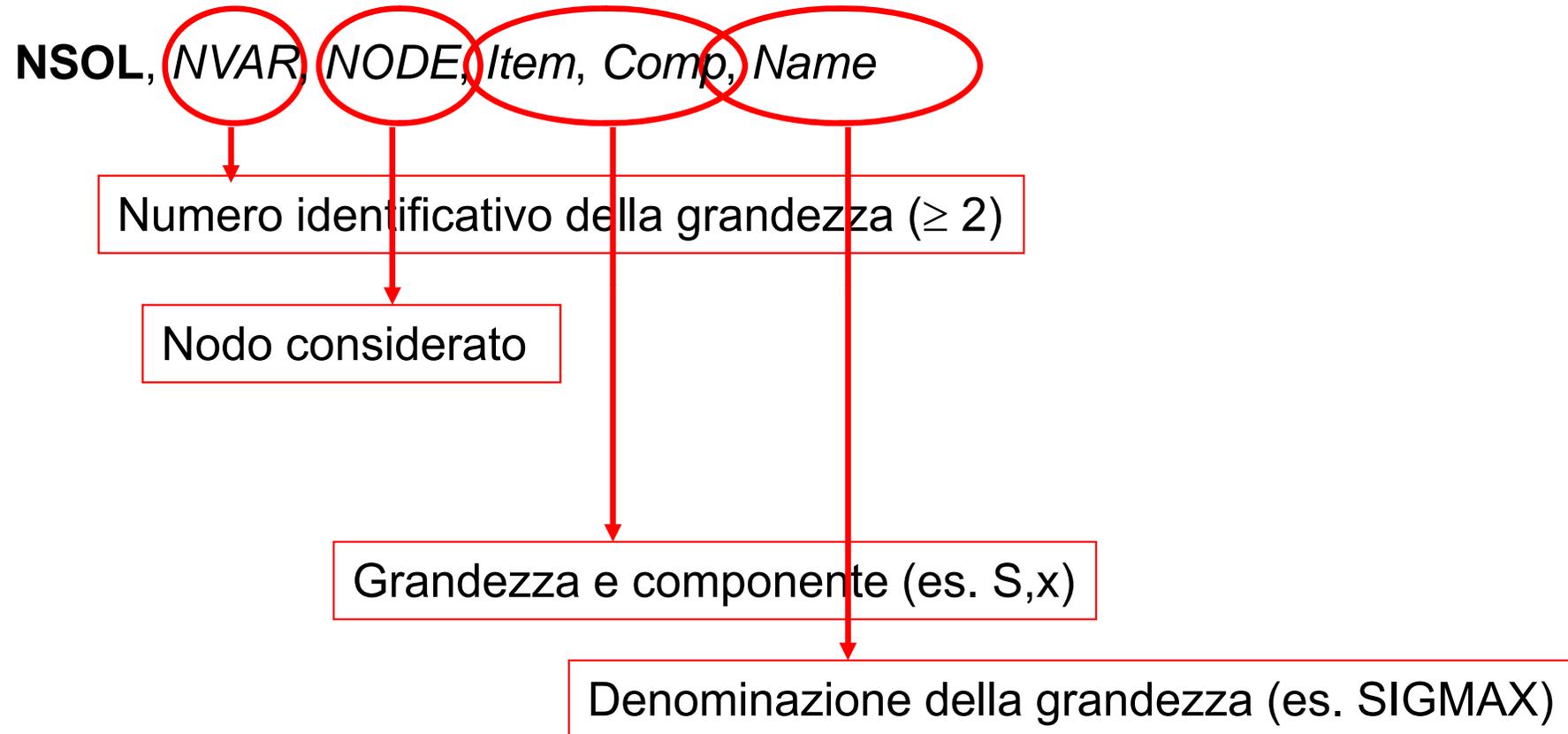
# POST26/2

Grandezze calcolate negli elementi.



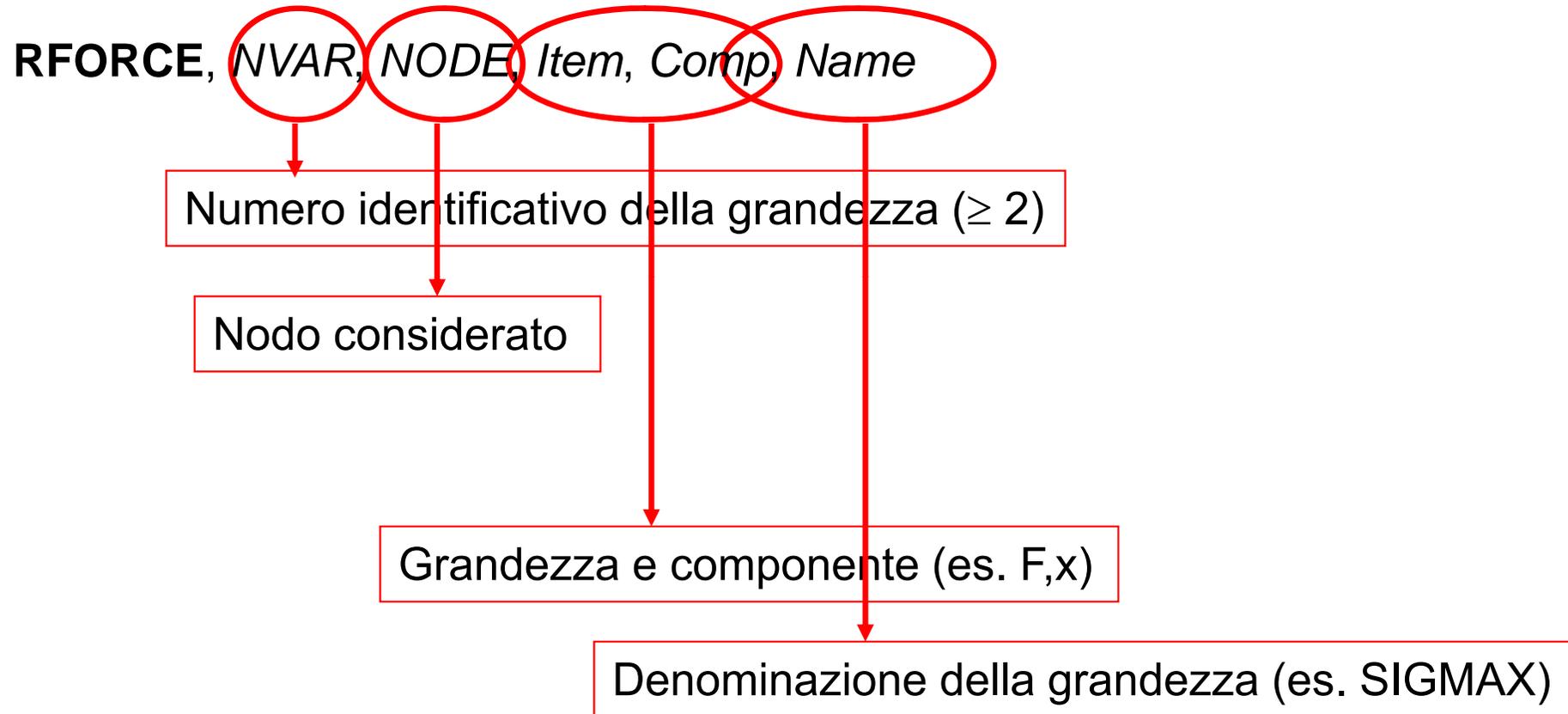
# POST26/3

Grandezze calcolate nei nodi.



# POST26/4

Reazioni vincolari nei nodi.



# POST26/5

## Comandi per la elaborazione delle grandezze definite

<u>ABS</u>	<u>IMAGIN</u>	<u>SMALL</u>
<u>ADD</u>	<u>INT1</u>	<u>SQRT</u>
<u>ATAN</u>	<u>LARGE</u>	<u>RPSD</u>
<u>CLOG</u>	<u>NLOG</u>	<u>CVAR</u>
<u>CONJUG</u>	<u>PROD</u>	<u>RESP</u>
<u>DERIV</u>	<u>QUOT</u>	
<u>EXP</u>	<u>REALVAR</u>	

## POST26/6

**PLVAR**, *NVAR1*, *NVAR2*, *NVAR3*, *NVAR4*, *NVAR5*, *NVAR6*, *NVAR7*...

Consente di rappresentare fino a 10 variabili in funzione del tempo o della variabile definita nel comando XVAR

**XVAR**, *N*

Definisce la variabile da utilizzare per l'asse X; per default si usa la variabile 1 (tempo)

**/AXLAB**, *Axis*, *Lab*

Consente di specificare la "label" dei due assi

**/XRANGE**, *XMIN*, *XMAX*

**/YRANGE**, *XMIN*, *XMAX*

Definiscono I valori massimi e minimi per i due assi

**/GROPT**, *Lab*, *KEY*

Consente varie opzioni grafiche (es. Numero di divisioni, assi logaritmici, etc)

# USO DI MATRICI/1

Il programma ANSYS permette l'uso di diversi tipi di variabili dimensionate (matrici o vettori).

\*DIM, *Par*, *Type*, *JMAX*, *JMAX*, *KMAX*, *Var1*, *Var2*, *Var3*, *CSYSID*

Denominazione del parametro in forma di tabella

Tipo di tabella:

- ARRAY matrice standard, ad indici interi
- TABLE matrice ad indici reali

Numero di righe, colonne e "strati"

## USO DI MATRICI/2

Matrici di tipo ARRAY (denominazione: TABI)

	1	2	3	4
1	0.25	3	2	5
2	1.25	4.3	1.2	2.5
3	2	7	12	24

TABI(2,3)  $\longrightarrow$  1.2

## USO DI MATRICI/3

Matrici di tipo TABLE (denominazione: RISU)

	0.5	1	1.5	2
0.25	0.25	3	2	5
0.5	1.25	4.3	1.2	2.5
1.00	2	7	12	24

Indici reali, inseriti dall'utente nella colonna "0" e nella riga "0" (Es.  $RISU(2,0)=0.5$ ).

## USO DI MATRICI/4

In uscita, gli indici possono essere reali. Il valore fornito viene interpolato

	0.5	1	1.5	2
0.25	0.25	3	2	5
0.5	1.25	4.3	1.2	2.5
1.00	2	7	12	24

$$\text{RISU}(0.75, 1.5) = 1.2 + (12 - 1.2) / (1 - 0.5) * (0.75 - 0.5) = 6.6$$

## USO DI MATRICI/4

\***V**PLOT, *ParX*, *ParY*, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8

Parametro una delle cui colonne deve essere usata per l'asse X  
Es. RISU(3,4) usa per l'asse X i valori della colonna 4, partendo dalla riga 3

Parametro una delle cui colonne deve essere usata per l'asse Y  
Es. RISU(2,5) usa per l'asse Y i valori della colonna 5, partendo dalla riga 2

**IGCOLUMN**, *CURVE*, *STRING*

*Consente di attribuire una denominazione ad ogni curva del grafico, che compare nella legenda*

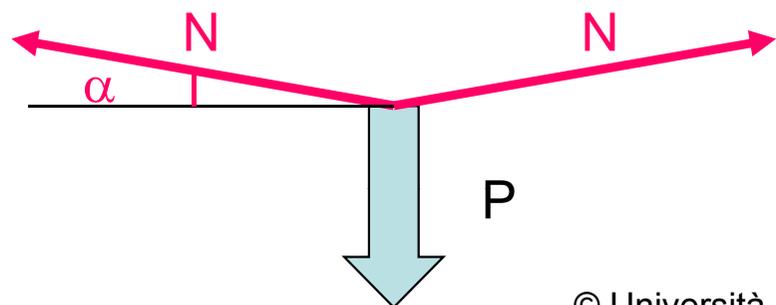
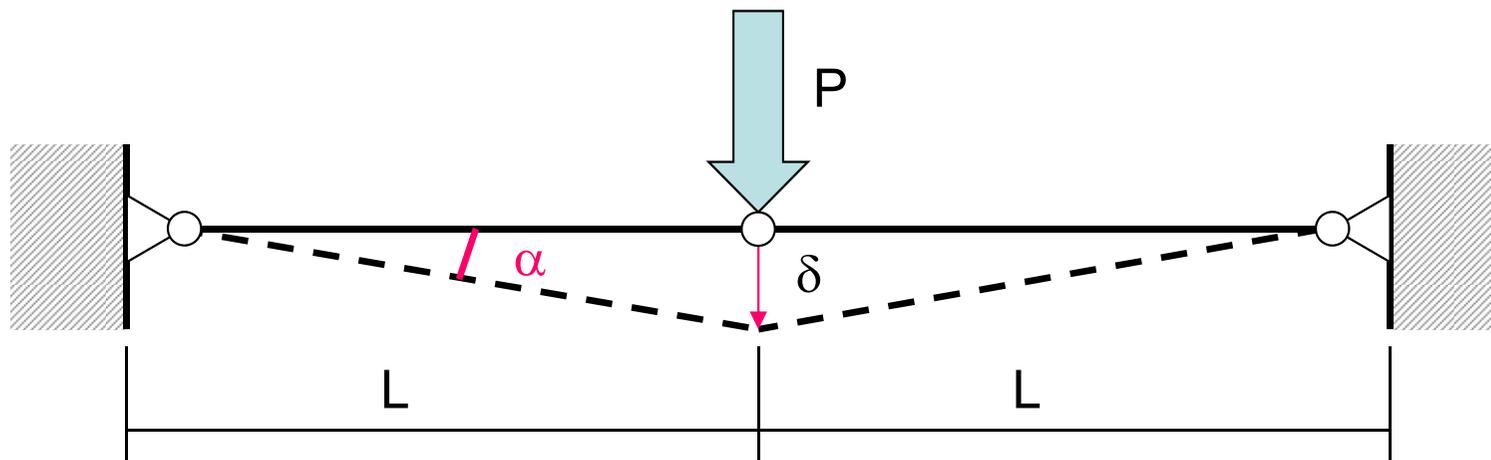
# NON LINEARITÀ GEOMETRICHE/1

Non linearità nella relazione tra deformazioni e spostamenti nodali

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\} = [B(\{U^e\})]\{U^e\}$$

Categorie principali:

- **grandi spostamenti**, piccole rotazioni, piccole deformazioni



$$\delta = \sqrt[3]{\frac{PL^3}{2EA}}$$

A=Area sezione  
E=Modulo elastico

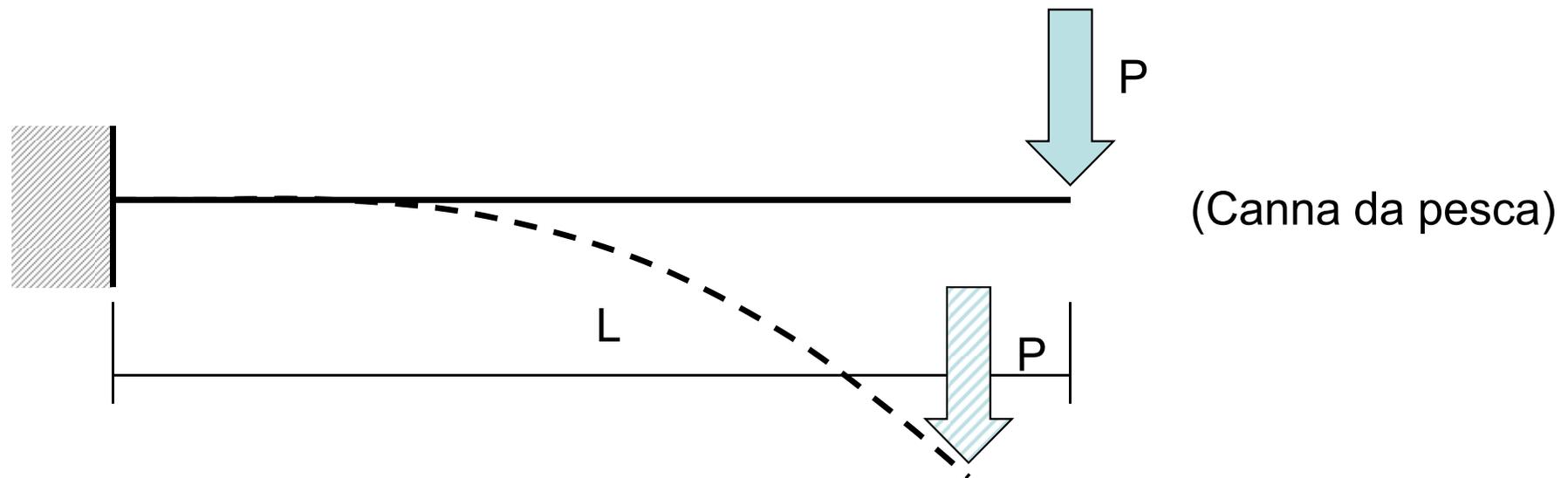
# NON LINEARITÀ GEOMETRICHE/2

Non linearità nella relazione tra deformazioni e spostamenti nodali

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\} = [B(\{U^e\})]\{U^e\}$$

Categorie principali:

- grandi spostamenti, piccole rotazioni, piccole deformazioni
- grandi spostamenti, **grandi rotazioni**, piccole deformazioni



In entrambi i casi è necessario scrivere le equazioni di equilibrio della struttura nella configurazione deformata (incognita) in quanto questa differisce in maniera non trascurabile da quella indeformata iniziale.

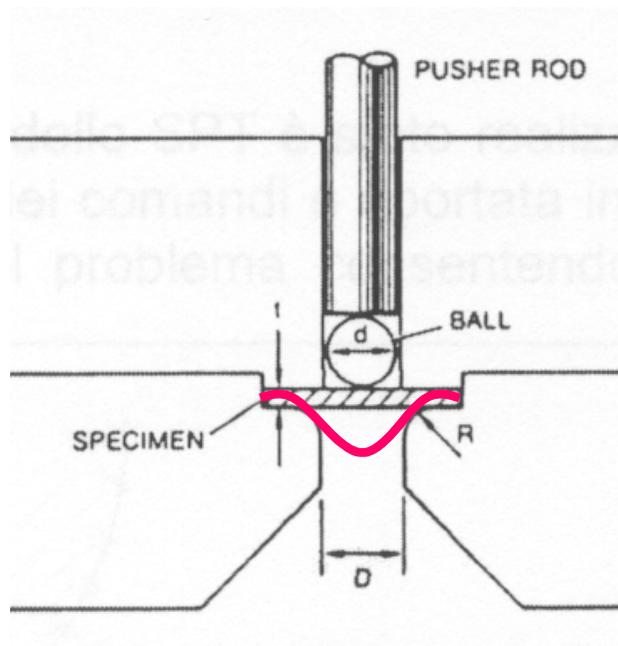
## NON LINEARITÀ GEOMETRICHE/3

Non linearità nella relazione tra deformazioni e spostamenti nodali

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\} = [B(\{U^e\})]\{U^e\}$$

Categorie principali:

- grandi spostamenti, piccole rotazioni, piccole deformazioni
- grandi spostamenti, grandi rotazioni, piccole deformazioni
- grandi spostamenti, grandi rotazioni, grandi deformazioni



Non è più possibile calcolare le deformazioni con uno sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo termine:

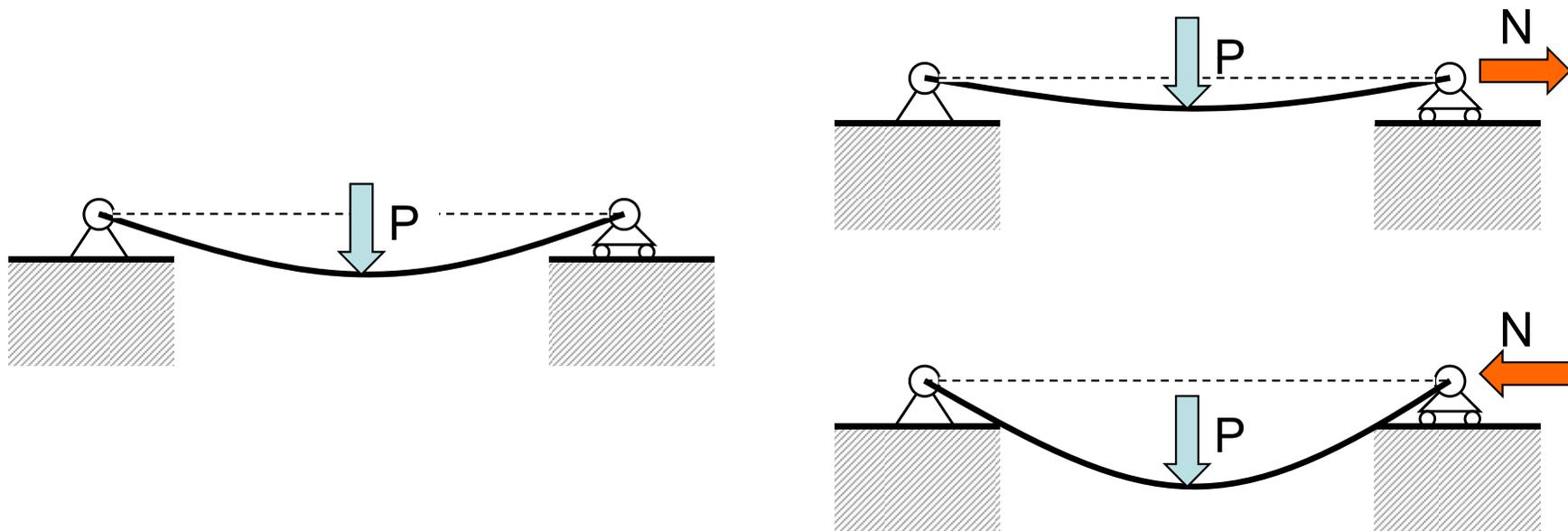
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

ma si rende necessario considerare anche termini di ordine superiore

# “STRESS STIFFENING”

Effetto per il quale la rigidezza di una struttura cambia in seguito alla presenza di uno stato di tensione.

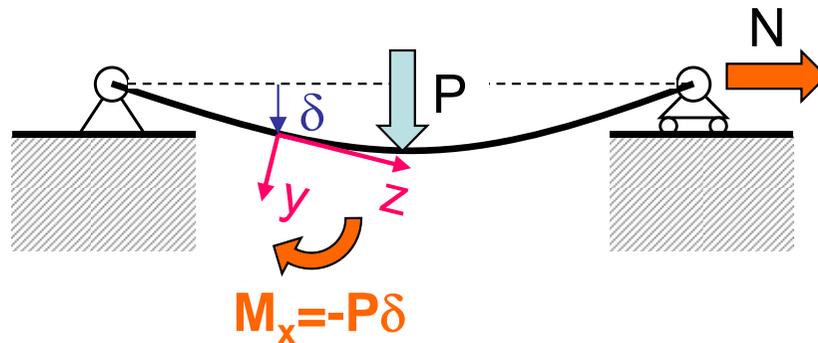
Questo effetto è significativo per strutture aventi una rigidezza trasversale (in genere legata a deformazioni flessionali) piccola rispetto a quella longitudinale (in genere legata a deformazioni estensionali).



La freccia prodotta da un carico trasversale viene ridotta dalla presenza di un carico assiale di trazione ed aumentata da quella di un carico assiale di compressione.

## “STRESS STIFFENING”

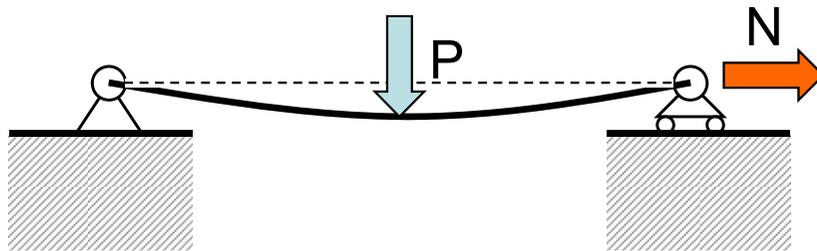
L'effetto sulla rigidezza della trave può essere spiegato considerando la geometria deformata della trave.



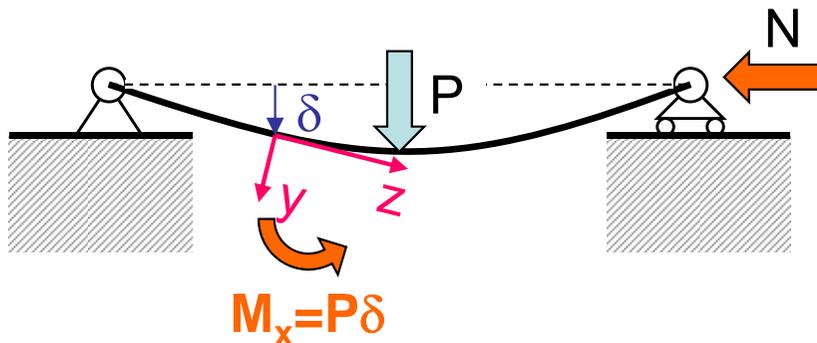
Se si considera la deformata della trave, si nota che una forza normale positiva produce, rispetto alla generica sezione, un momento flettente che tende a ridurre l'inflessione.

## “STRESS STIFFENING”

L'effetto sulla rigidezza della trave può essere spiegato considerando la geometria deformata della trave.



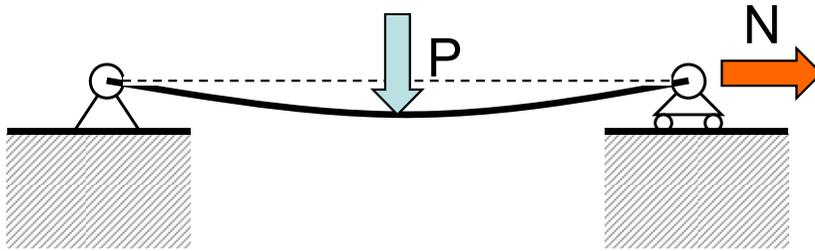
Se si considera la deformata della trave, si nota che una forza normale positiva produce, rispetto alla generica sezione, un momento flettente che tende a ridurre l'inflessione.



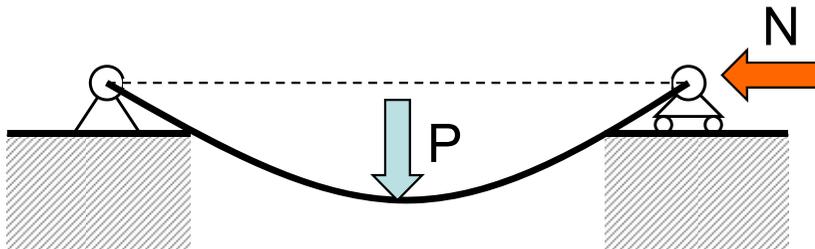
Una forza normale negativa produce, un momento flettente opposto, che tende ad aumentare l'inflessione.

## “STRESS STIFFENING”

L'effetto sulla rigidezza della trave può essere spiegato considerando la geometria deformata della trave.



Se si considera la deformata della trave, si nota che una forza normale positiva produce, rispetto alla generica sezione, un momento flettente che tende a ridurre l'inflessione.

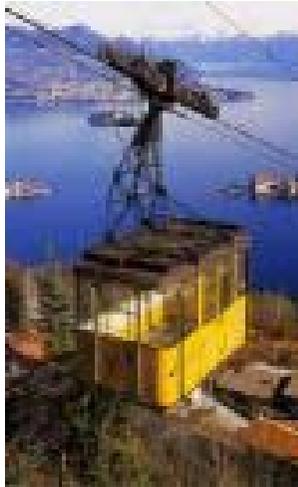


Una forza normale negativa produce, un momento flettente opposto, che tende ad aumentare l'inflessione.

# "STRESS STIFFENING"/1

Altri esempi di strutture per le quali l'effetto di "Stress stiffening" può essere significativo:

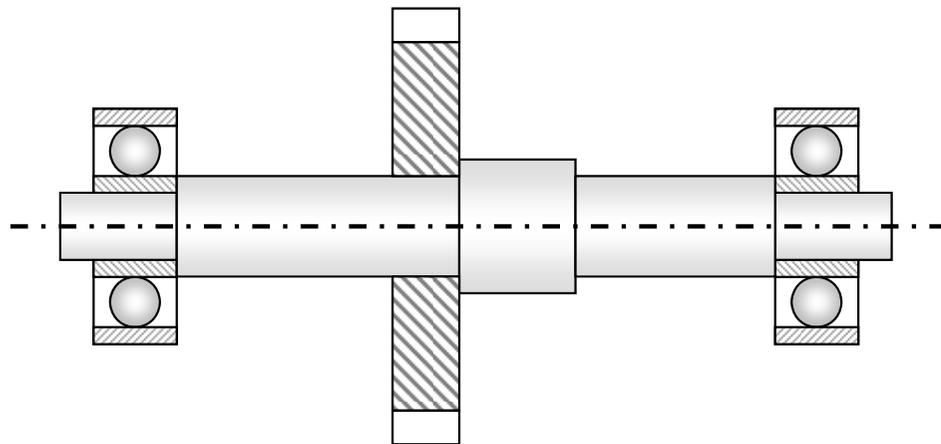
Cavi di sostegno funivia



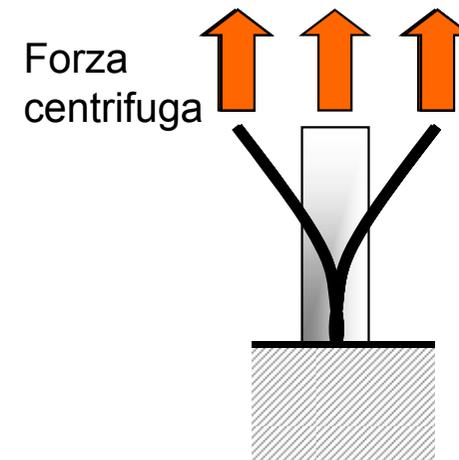
Cinghie di trasmissione



Rotori e pale di turbina



Alberi di trasmissione snelli



## “STRESS STIFFENING”/2

Gli effetti di “Stress Stiffening” sono automaticamente inclusi nella analisi che tengono conto delle NLG.

Per alcuni elementi, tuttavia, è stato sviluppato un approccio semplificato:

Analisi lineare

$$\{P\} = [K] \{U^e\}$$

Analisi con “Stress Stiffening”

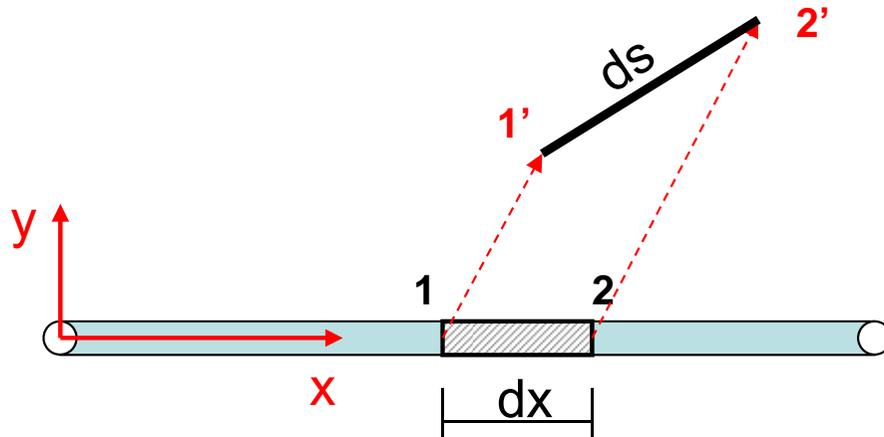
$$\{P\} = ([K] + [S]) \{U^e\}$$

Matrice di “Stress Stiffening”

La matrice di “Stress Stiffening” con una metodologia specifica per ogni elemento, basata su di un’analisi semplificata

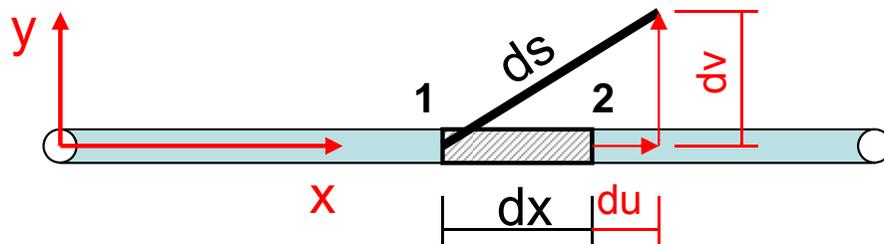
## "STRESS STIFFENING"/3

Esempio: determinazione della matrice di "Stress Stiffening" per l'elemento asta nel piano.



# "STRESS STIFFENING"/4

Esempio: determinazione della matrice di "Stress Stiffening" per l'elemento asta nel piano.



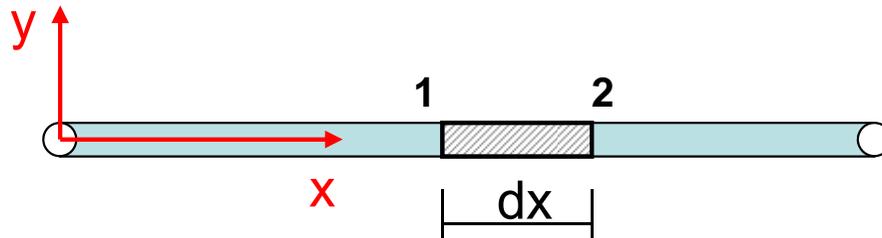
$$ds = \sqrt{(dx + du)^2 + (dv)^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \quad \sqrt{1 + A^2} = 1 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} + \dots$$

$$\frac{ds}{dx} \cong 1 + \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right] - \frac{1}{8} \left( 2\frac{du}{dx} \right)^2 + \dots = 1 + \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

# "STRESS STIFFENING"/5

Esempio: determinazione della matrice di "Stress Stiffening" per l'elemento asta nel piano.



$$\frac{ds}{dx} = 1 + \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

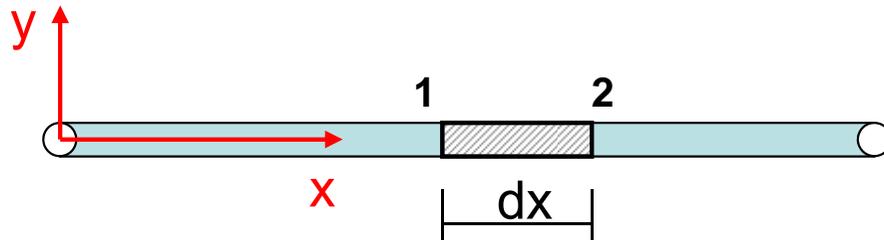
$$\varepsilon_{xx} = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1$$

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \leftarrow \text{Termine aggiuntivo}$$

Termine da analisi in  
piccoli spostamenti

## “STRESS STIFFENING”/6

Esempio: determinazione della matrice di “Stress Stiffening” per l’elemento asta nel piano.



$$\varepsilon_{xx} = \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$$

$$W = \int_V \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dV = \int_V \frac{E \varepsilon_{xx}^2}{2} dV = \frac{E \varepsilon_{xx}^2}{2} \int_V dV = \frac{EAL \varepsilon_{xx}^2}{2}$$

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} U_{x,I} \\ U_{y,I} \\ U_{x,J} \\ U_{y,J} \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} u(x) &= U_{x,I} + \frac{x}{L} (U_{x,J} - U_{x,I}) \\ v(x) &= U_{y,I} + \frac{x}{L} (U_{y,J} - U_{y,I}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{L} (U_{x,J} - U_{x,I}) \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{L} (U_{y,J} - U_{y,I}) \end{aligned}$$

## “STRESS STIFFENING”/7

Esempio: determinazione della matrice di “Stress Stiffening” per l’elemento asta nel piano.

$$\varepsilon_{xx} = \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{L} (U_{x,J} - U_{x,I})$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{L} (U_{y,J} - U_{y,I})$$

$$W = \frac{EAL\varepsilon_{xx}^2}{2} = \frac{EAL}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^2 = \frac{EAL}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 \right]$$

$$W \cong \frac{EAL}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]$$

$$W \cong \frac{EAL}{2} \left[ \left( \frac{1}{L} (U_{x,J} - U_{x,I}) \right)^2 + \left( \frac{N}{EA} \right) \left( \frac{1}{L} (U_{y,J} - U_{y,I}) \right)^2 \right]$$

## “STRESS STIFFENING”/8

Esempio: determinazione della matrice di “Stress Siffening” per l’elemento asta nel piano.

$$W \cong \frac{EAL}{2} \left[ \left( \frac{1}{L} (U_{x,J} - U_{x,I}) \right)^2 + \left( \frac{N}{EA} \right) \left( \frac{1}{L} (U_{y,J} - U_{y,I}) \right)^2 \right]$$

$$P_{x,I} = \frac{\partial W}{\partial U_{x,I}} = \frac{EAL}{2} \left[ \frac{2}{L^2} (U_{x,I} - U_{x,J}) \right] = \frac{EA}{L} (U_{x,I} - U_{x,J})$$

$$P_{y,I} = \frac{\partial W}{\partial U_{y,I}} = \frac{EAL}{2} \left[ \frac{N}{EA} \frac{2}{L^2} (U_{y,I} - U_{y,J}) \right] = \frac{N}{L} (U_{y,I} - U_{y,J})$$

$$P_{x,J} = \frac{\partial W}{\partial U_{x,J}} = \frac{EAL}{2} \left[ \frac{2}{L^2} (U_{x,J} - U_{x,I}) \right] = \frac{EA}{L} (U_{x,J} - U_{x,I})$$

$$P_{y,J} = \frac{\partial W}{\partial U_{y,J}} = \frac{EAL}{2} \left[ \frac{N}{EA} \frac{2}{L^2} (U_{y,J} - U_{y,I}) \right] = \frac{N}{L} (U_{y,J} - U_{y,I})$$

## “STRESS STIFFENING”/9

Esempio: determinazione della matrice di “Stress Stiffening” per l’elemento asta nel piano.

$$W \cong \frac{EAL}{2} \left[ \left( \frac{1}{L} (U_{x,J} - U_{x,I}) \right)^2 + \left( \frac{N}{EA} \right) \left( \frac{1}{L} (U_{y,J} - U_{y,I}) \right)^2 \right]$$

$$\begin{Bmatrix} P_{x,I} \\ P_{y,I} \\ P_{x,J} \\ P_{y,J} \end{Bmatrix} = \left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{x,I} \\ U_{y,I} \\ U_{x,J} \\ U_{y,J} \end{Bmatrix}$$



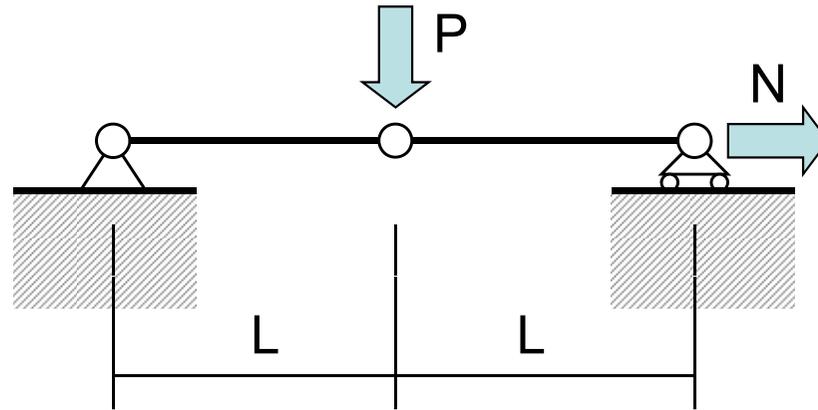
$[K^e]$



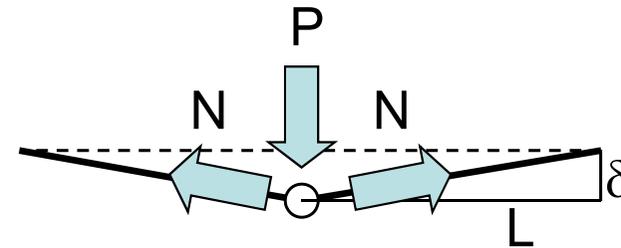
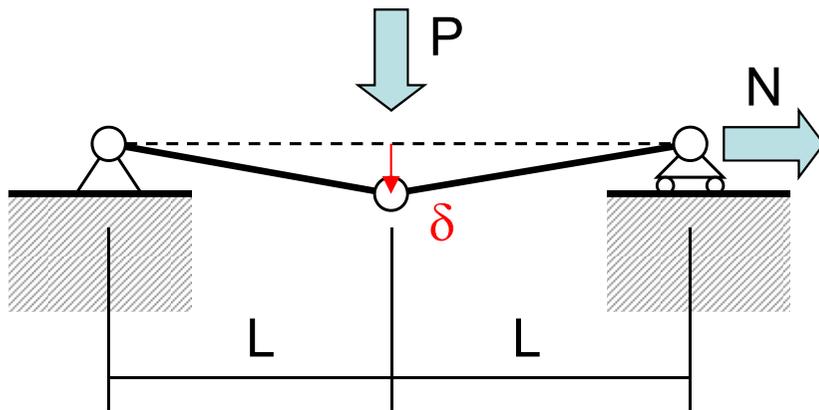
$[S]$

# "STRESS STIFFENING"/10

Esempio:



Soluzione manuale:

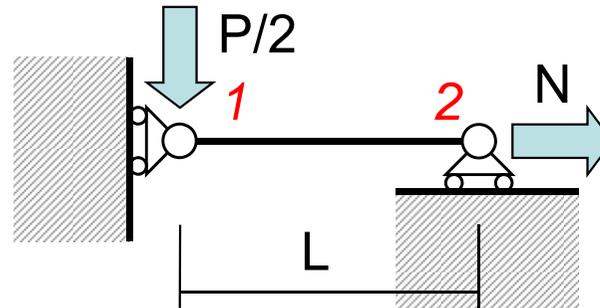


$$2 \cdot N \cdot \sin\left(\frac{\delta}{L}\right) - P = 0 \cong 2 \cdot N \cdot \frac{\delta}{L} - P$$

$$\delta \cong \frac{P \cdot L}{2 \cdot N}$$

# "STRESS STIFFENING"/11

Soluzione EF:



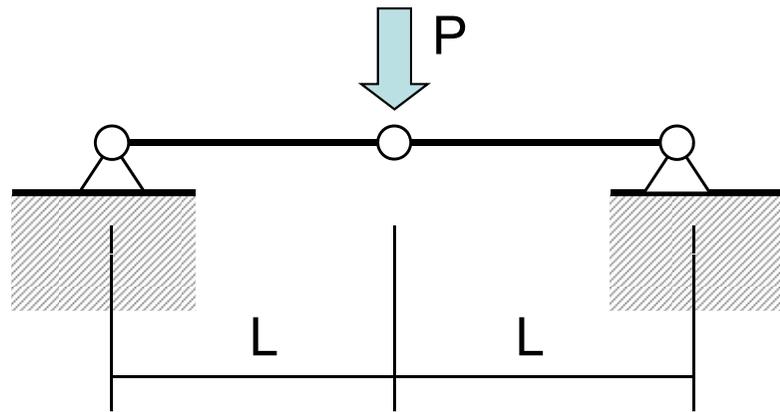
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ N \\ 0 \end{Bmatrix} = \left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{x,1} \\ U_{y,1} \\ U_{x,2} \\ U_{y,2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -P/2 \\ N \end{Bmatrix} = \left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{y,I} \\ U_{x,J} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} U_{y,I} = -\frac{P \cdot L}{2 \cdot N} \\ U_{x,J} = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \end{cases}$$

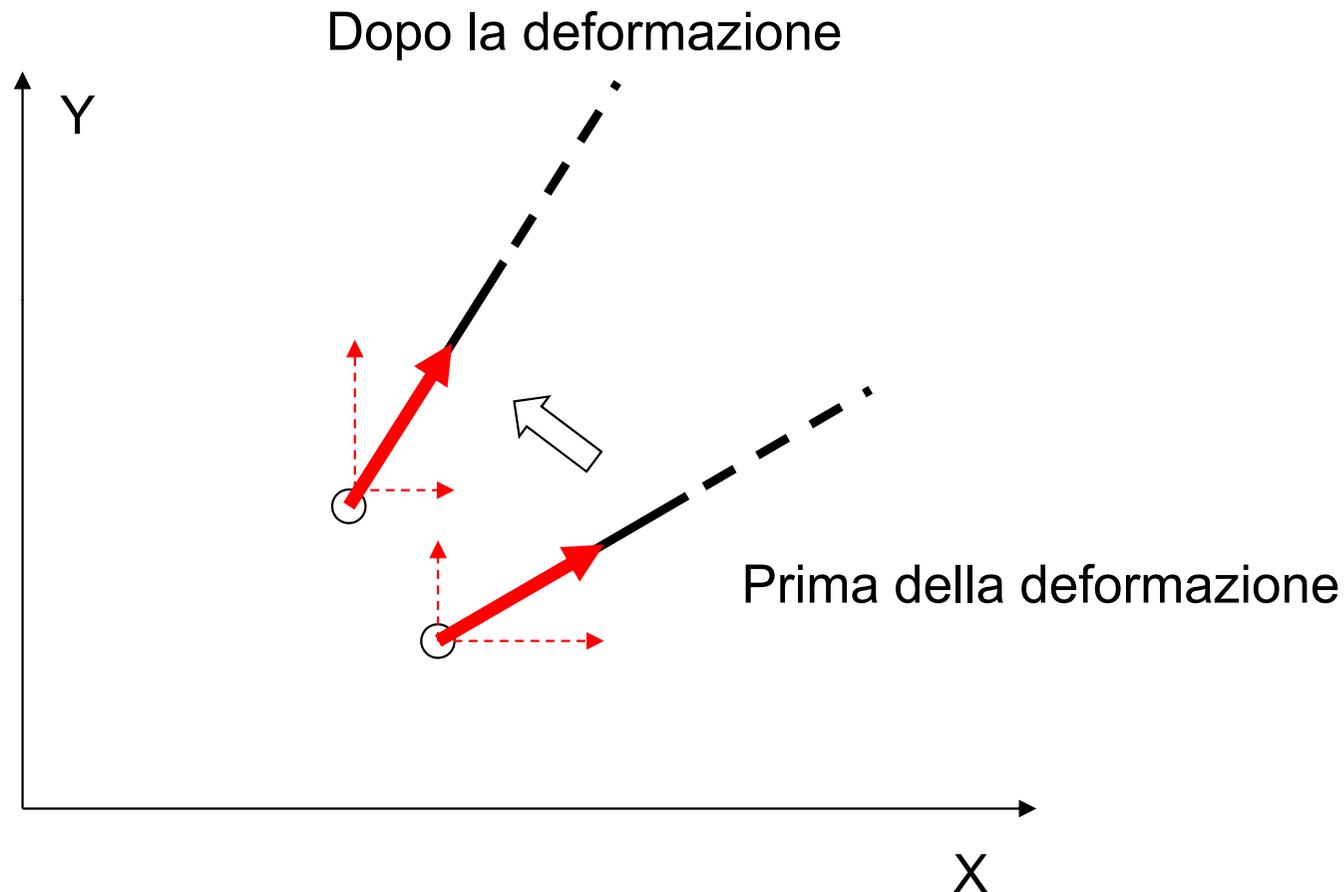
## "STRESS STIFFENING"/12

In casi per i quali la forza assiale  $N$  non sia nota a priori, le soluzioni vengono ottenute per via iterativa.



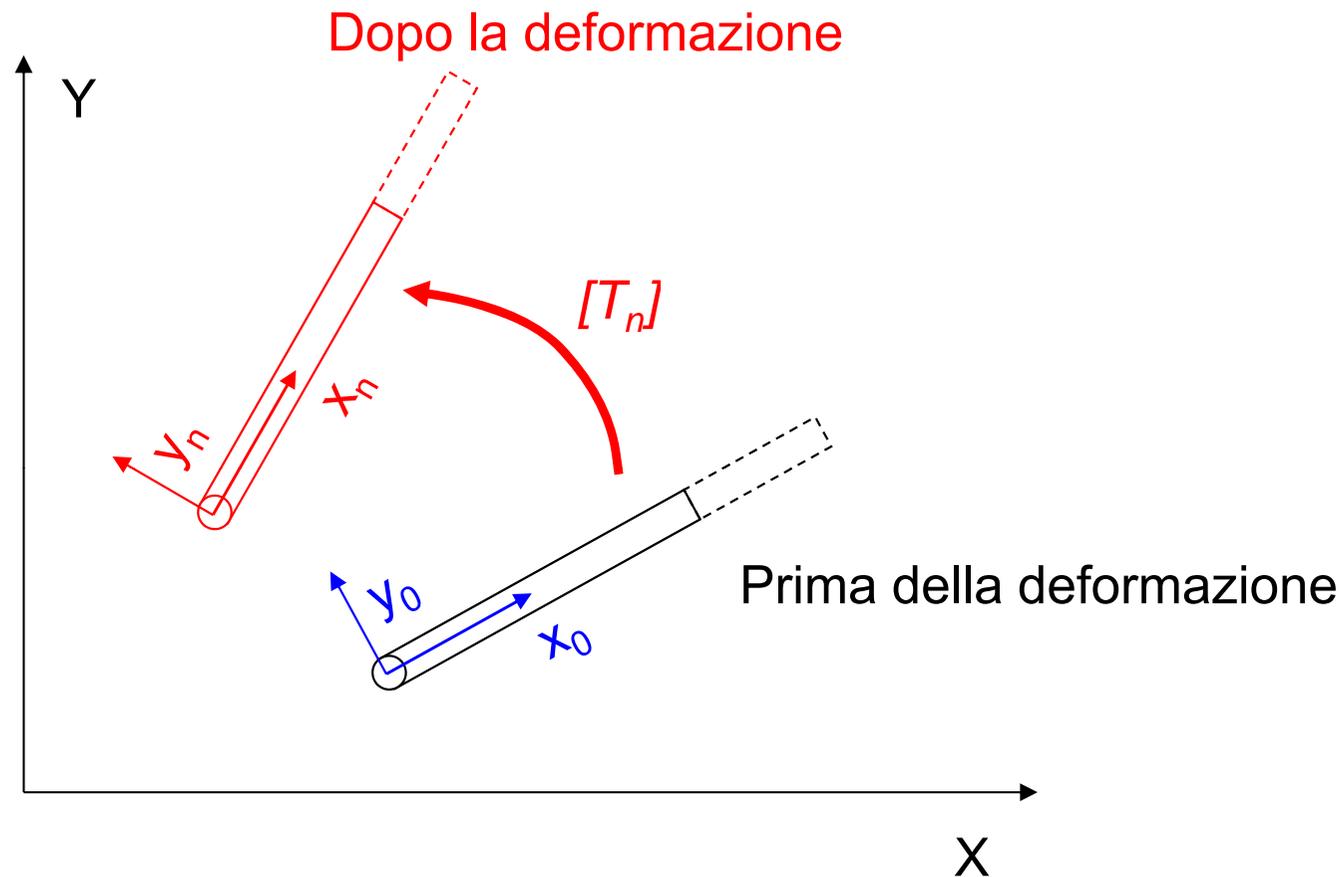
# GRANDI ROTAZIONI/1

È tipica delle strutture flessibili, che spesso subiscono sotto carico grandi spostamenti trasversali.



La rotazione degli elementi produce una ridirezione delle forze che gli elementi stessi applicano ai nodi, influenzando le equazioni di equilibrio.

# GRANDI ROTAZIONI/2



Trasformazione spostamenti nodali

- SR iniziale  $\{U^e\}$
  - SR finale  $\{U_n^e\}$
- $$\{U_n^e\} = [T_n] \{U_n\}$$
- Matrice di trasformazione**

## GRANDI ROTAZIONI/2

Nel SR ruotato, deve ancora valere la relazione usuale tra spostamenti nodali e deformazioni, dato che queste ultime sono piccole:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U_n^e\}$$

$$\{\varepsilon\} = [B][T_n]\{U^e\} = [B_n]\{U^e\}$$

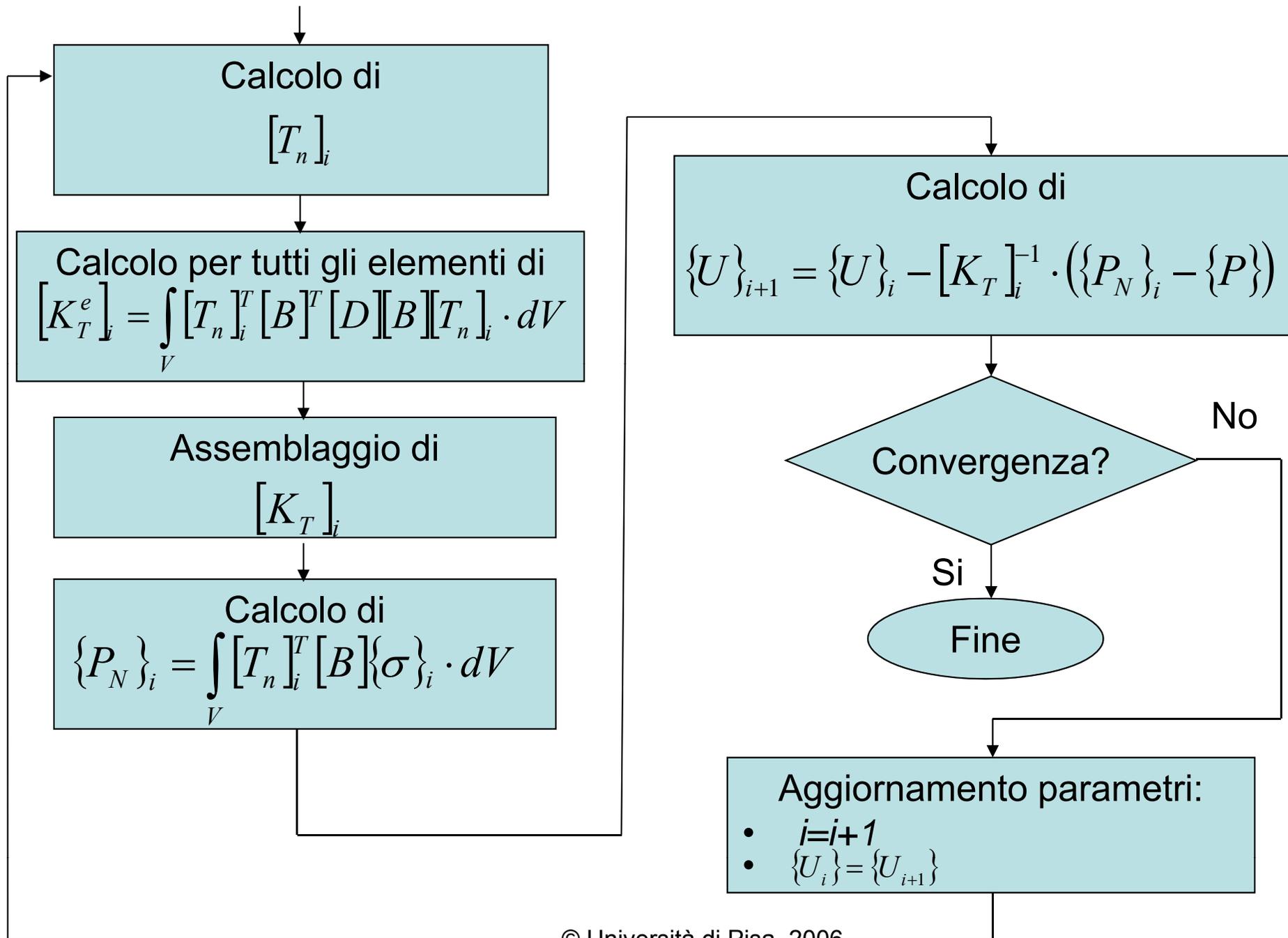
Matrice di rigidezza per piccole rotazioni

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] \cdot dV$$

Matrice di rigidezza valida per piccoli spostamenti a partire dalla configurazione corrente (tangente):

$$[K_T^e] = \int_V [B_n]^T [D] [B_n] \cdot dV = \int_V [T_n]^T [B]^T [D] [B] [T_n] \cdot dV$$

## GRANDI ROTAZIONI/3



# PROBLEMI DI CONTATTO/1

I casi in cui si abbia contatto unilaterale tra corpi possono essere studiati facendo uso di elementi “gap”.

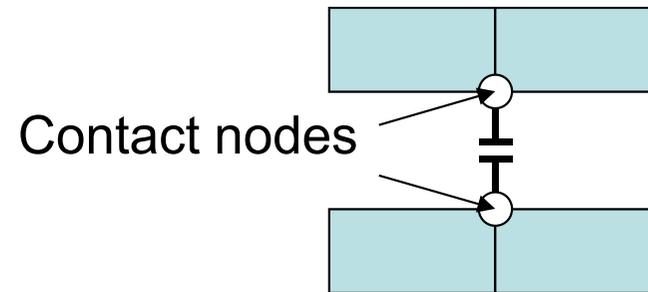
Per quanto concerne le **tipologie dei corpi in contatto**, si individuano due situazioni principali:

- **contatto rigido-flessibile** (uno dei corpi può ritenersi sensibilmente più rigido dell'altro, come nel caso del contatto stampo-pezzo)
- **contatto flessibile-flessibile** (i due corpi hanno rigidezza paragonabile)

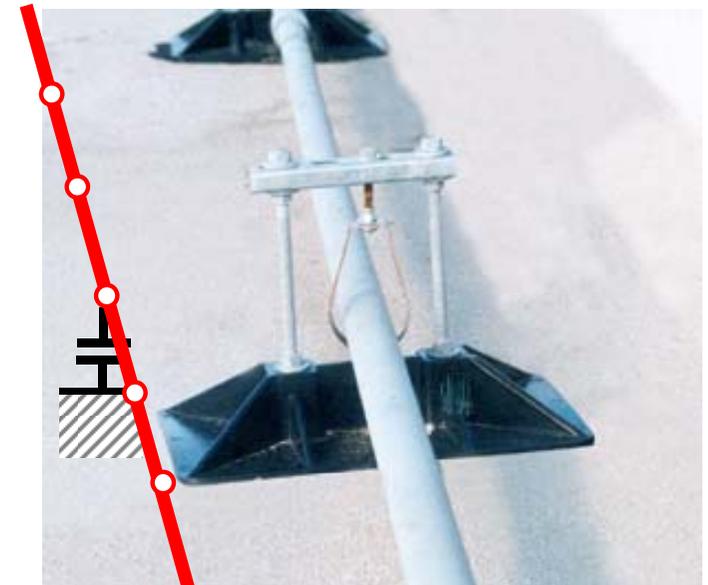
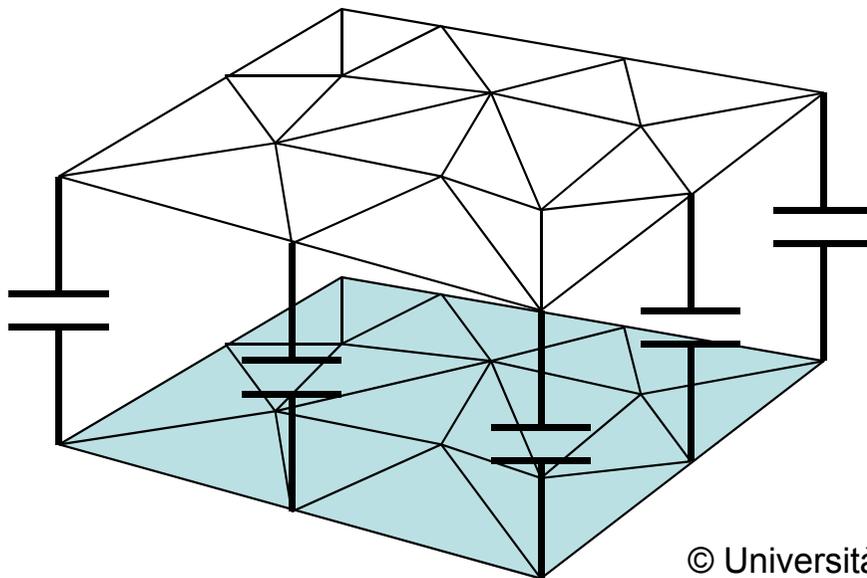
# ELEMENTI DI CONTATTO/1

Per quanto concerne i **tipi di elemento** utilizzabili, si hanno generalmente:

- Elementi per analisi "Point-to-Point"



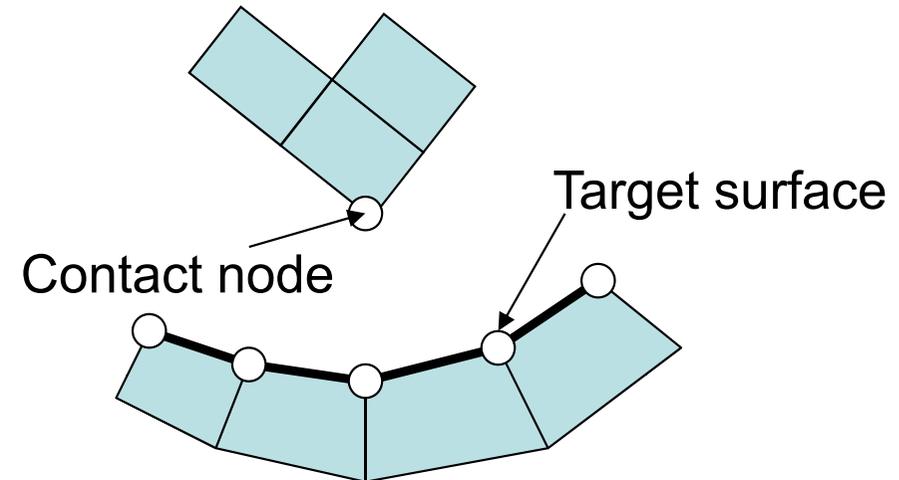
- Richiesta conoscenza preliminare zone di contatto e direzione accostamento
- Permessi piccoli spostamenti relativi, in particolare tangenziali
- Uso tipico: contatto tra punti localizzati della struttura (Es.: Pipe hanger)
- Contatto tra superfici: richiede un uguale "mesh"



## ELEMENTI DI CONTATTO/2

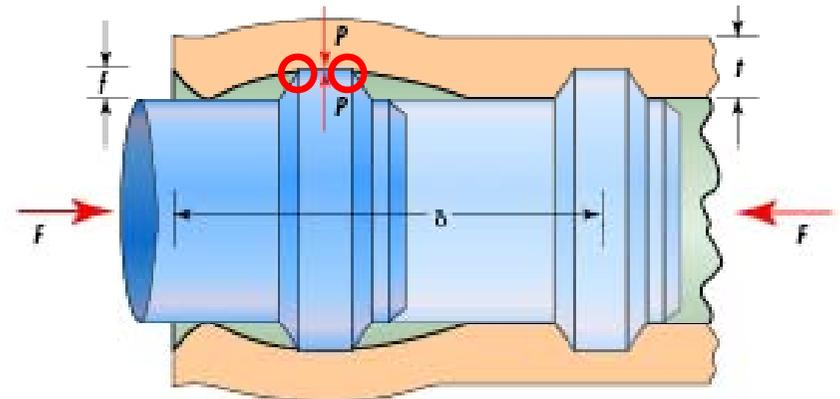
Per quanto concerne i **tipi di elemento** utilizzabili, si hanno generalmente:

- Elementi per analisi "Point-to-Point"
- Elementi per analisi "Point-to-surface"



- Non richiesta conoscenza zone contatto e direzione accostamento
- Permessi grandi spostamenti relativi, in particolare tangenziali
- Uso tipico: contatto tra punti localizzati della struttura (Es. spigoli) e superfici (Es.: estremità montaggi "Snap-fit")

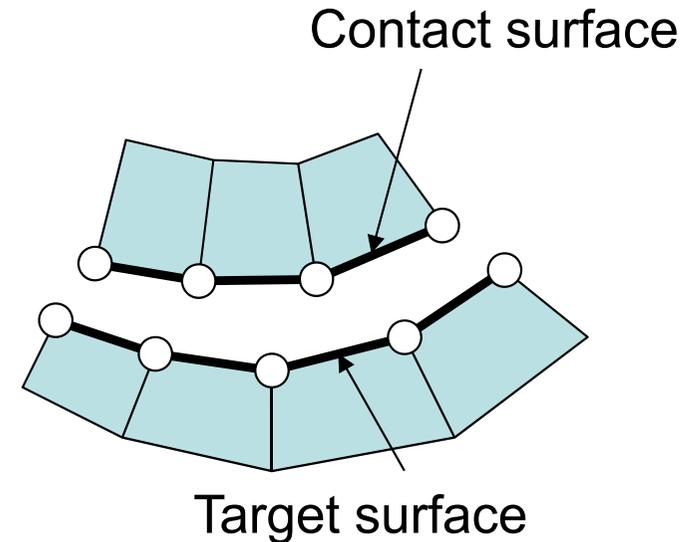
- Possibile anche l'impiego per analisi del contatto tra superfici (in questo caso non è necessario avere uguale "mesh")



## ELEMENTI DI CONTATTO/2

Per quanto concerne i **tipi di elemento** utilizzabili, si hanno generalmente:

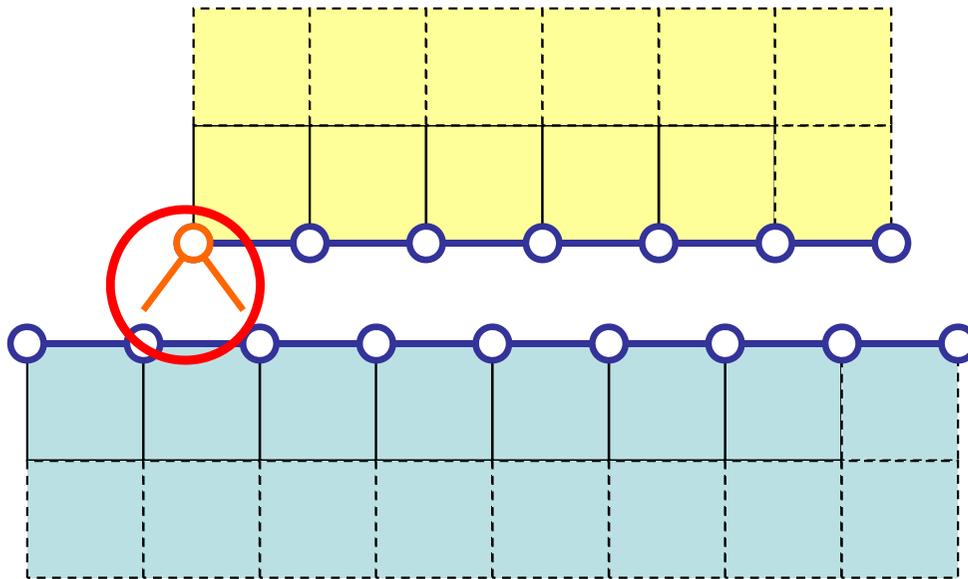
- Elementi per analisi "Point-to-Point"
- Elementi per analisi "Point-to-surface"
- Elementi per analisi "Surface-to-surface"



- Non richiesta conoscenza zone contatto e direzione accostamento
- Permessi grandi spostamenti relativi, in particolare tangenziali
- Non richiede uguale "mesh" tra le due superfici
- Uso tipico: contatto tra superfici, in particolare di tipo "conforme"

# PROBLEMI DI CONTATTO

- Nel contatto rigido-flessibile, l'elemento rigido deve essere il "target"
- Gli elementi "surface-to-surface" non sono idonei per i casi in cui una delle superfici presenti spigoli o irregolarità.



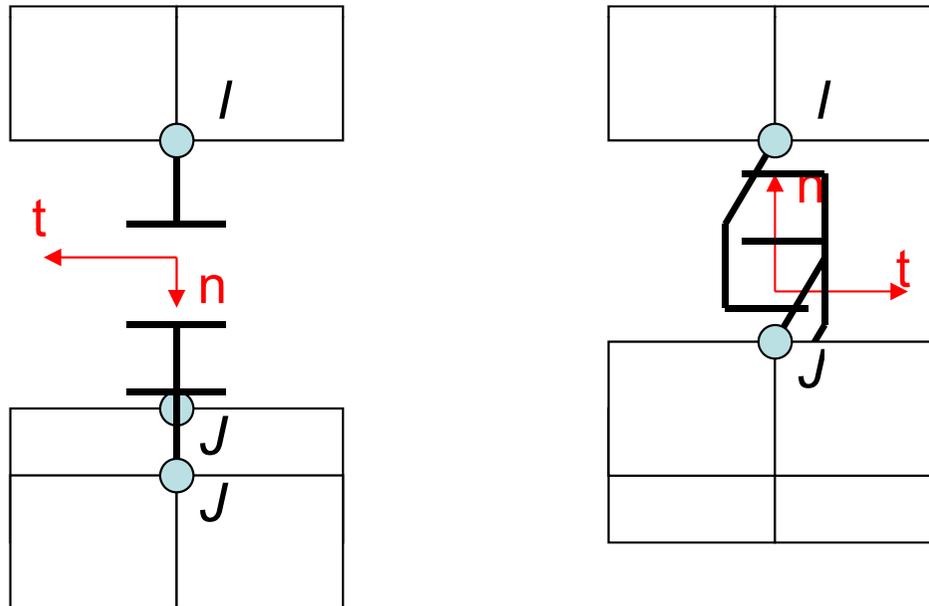
Possibile combinare elementi "surface-to-surface" con elementi "point-to-surface" in corrispondenza degli spigoli

- Se l'area di contatto è nota a priori è conveniente sostituire gli elementi "gap" con **vincoli di dipendenza** (analisi lineare)
- Gli elementi che rappresentano le superfici a contatto devono essere piccoli rispetto alle dimensioni attese dell'area di contatto, in modo da consentire una rappresentazione accurata di quest'ultima.

# PROBLEMI DI CONTATTO

E' necessario porre attenzione al verso degli spostamenti del nodo J rispetto a nodo I che determinano l'apertura del "GAP".

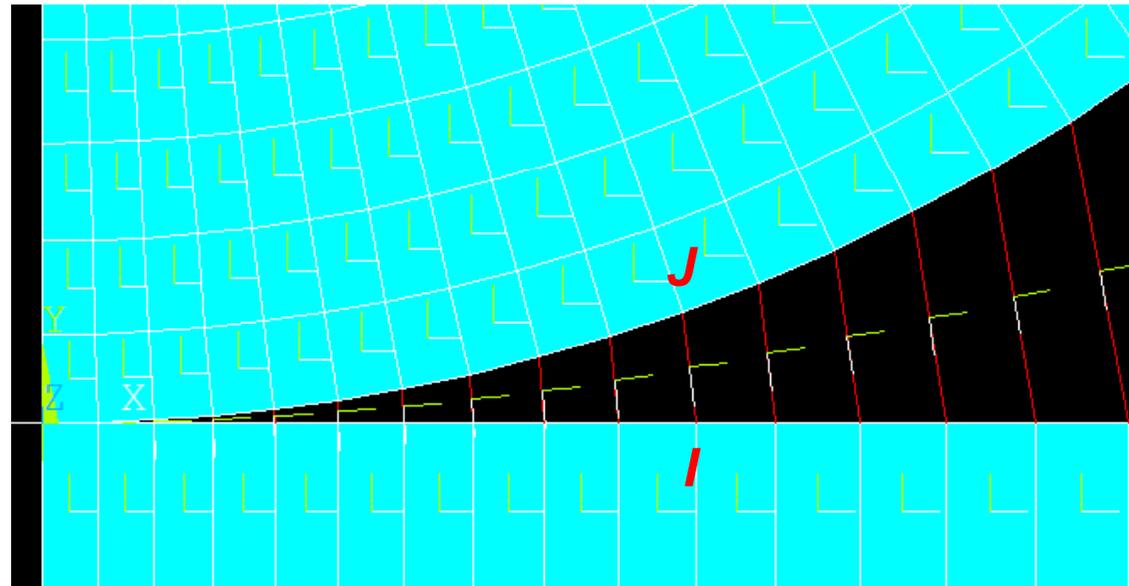
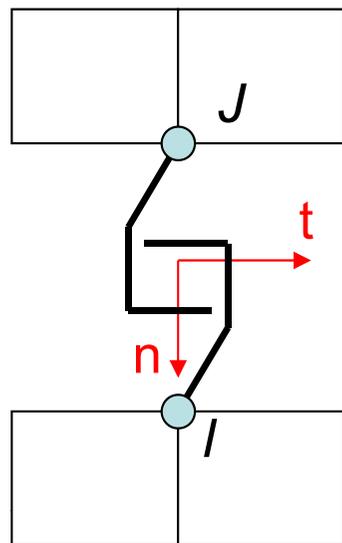
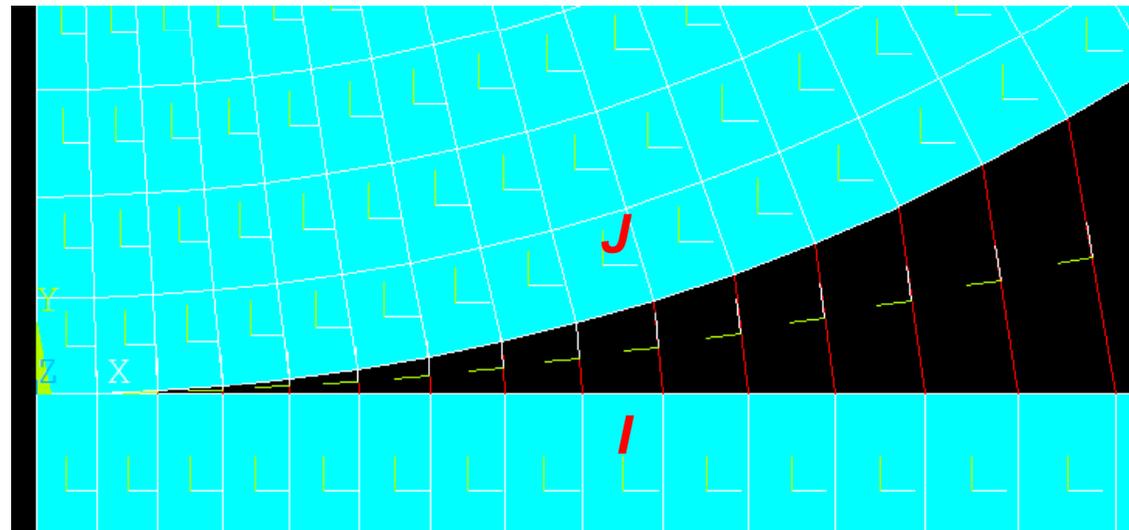
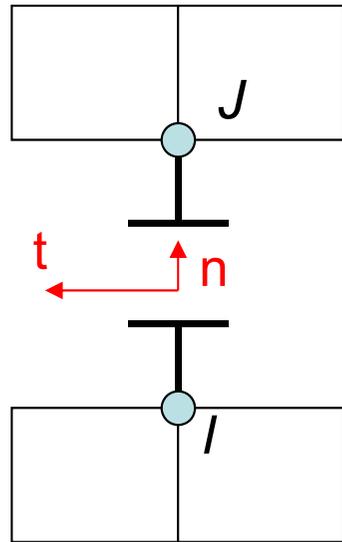
- Per elementi "Point-to-point", tale verso è dato da quello dell'asse "n" del sistema di riferimento locale, che può essere definito da:
  - Posizione dei nodi (da I a J, solo se non coincidenti)
  - Direzione fissata dall'utente (indispensabile per nodi coincidenti)



Invertendo la direzione di "n" si trasforma il "gap" in un "gancio"

# PROBLEMI DI CONTATTO

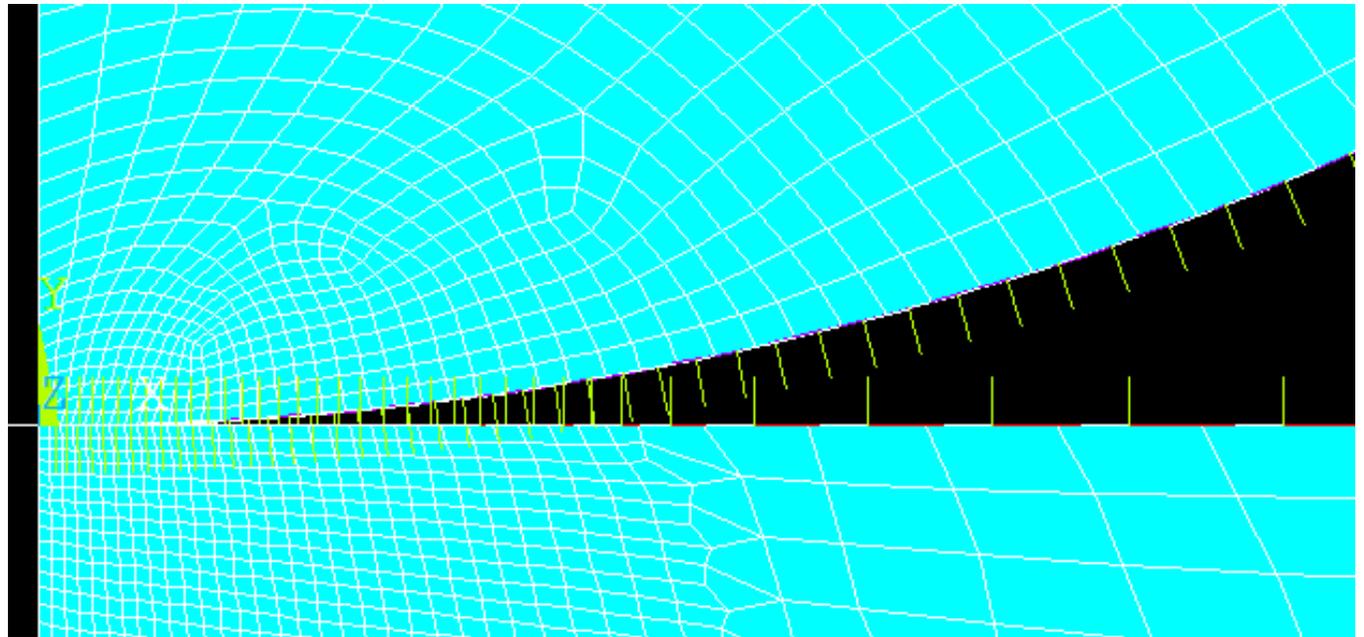
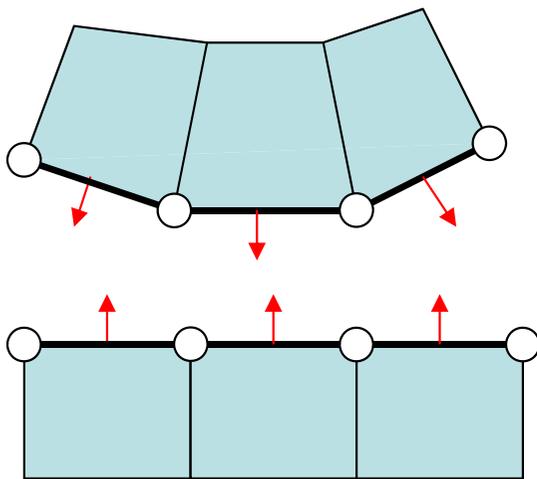
E' possibile controllare la direzione effettiva di apertura dei GAP facendo visualizzare i SR degli elementi (PltCtrls->Symbols)



# PROBLEMI DI CONTATTO

E' necessario porre attenzione al verso degli spostamenti del nodo J rispetto a nodo I che determinano l'apertura del "GAP".

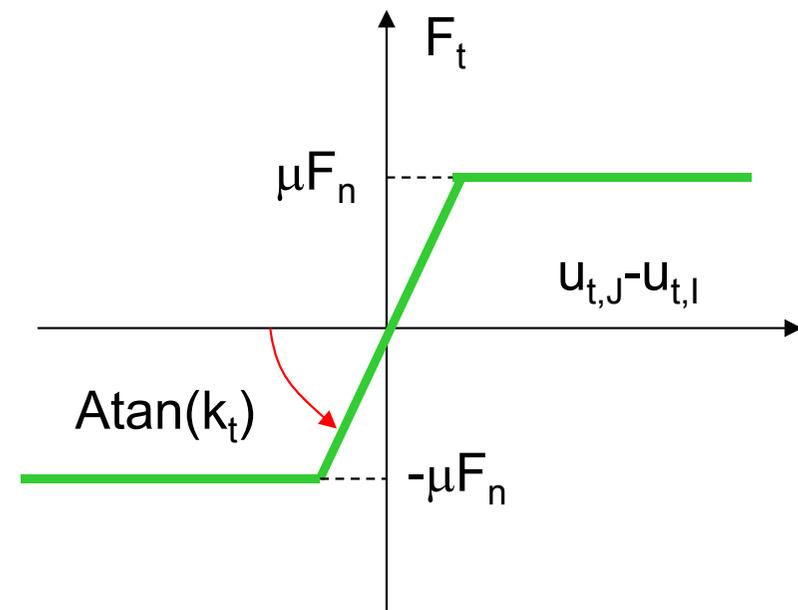
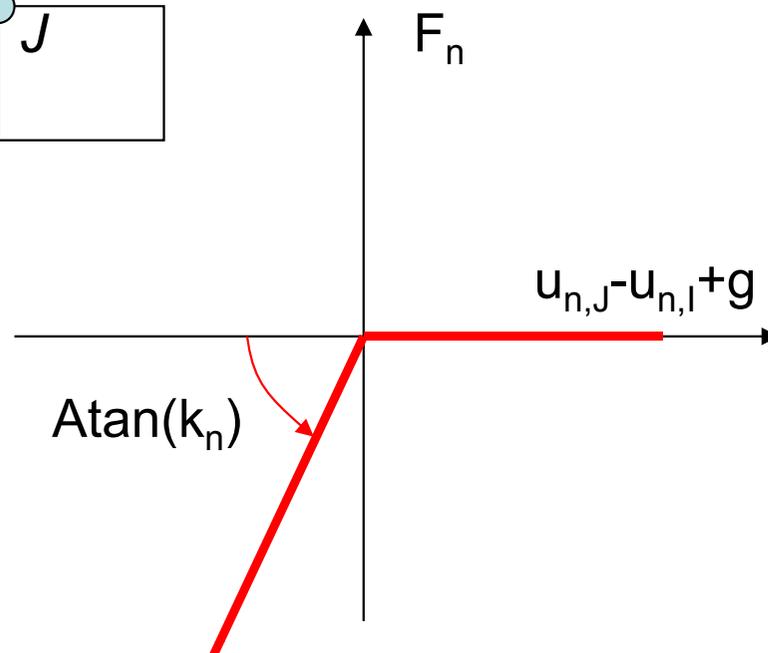
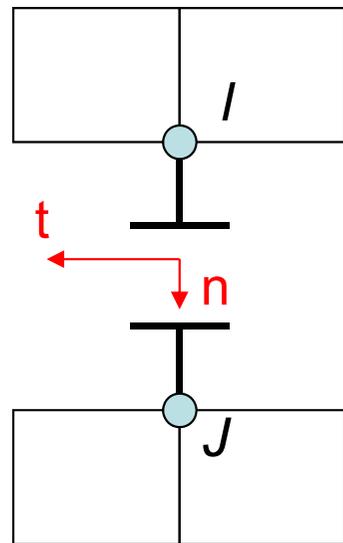
- Per elementi "Point-to-point", tale verso è dato da quello dell'asse "n" del sistema di riferimento locale, che può essere definito da:
  - Posizione dei nodi (da I a J, solo se non coincidenti)
  - Direzione fissata dall'utente (indispensabile per nodi coincidenti)
- Per elementi "Surface-to-surface" o "Point-to-surface" il verso è dato dalla normale esterna alla superficie su cui i "gap" vengono costruiti



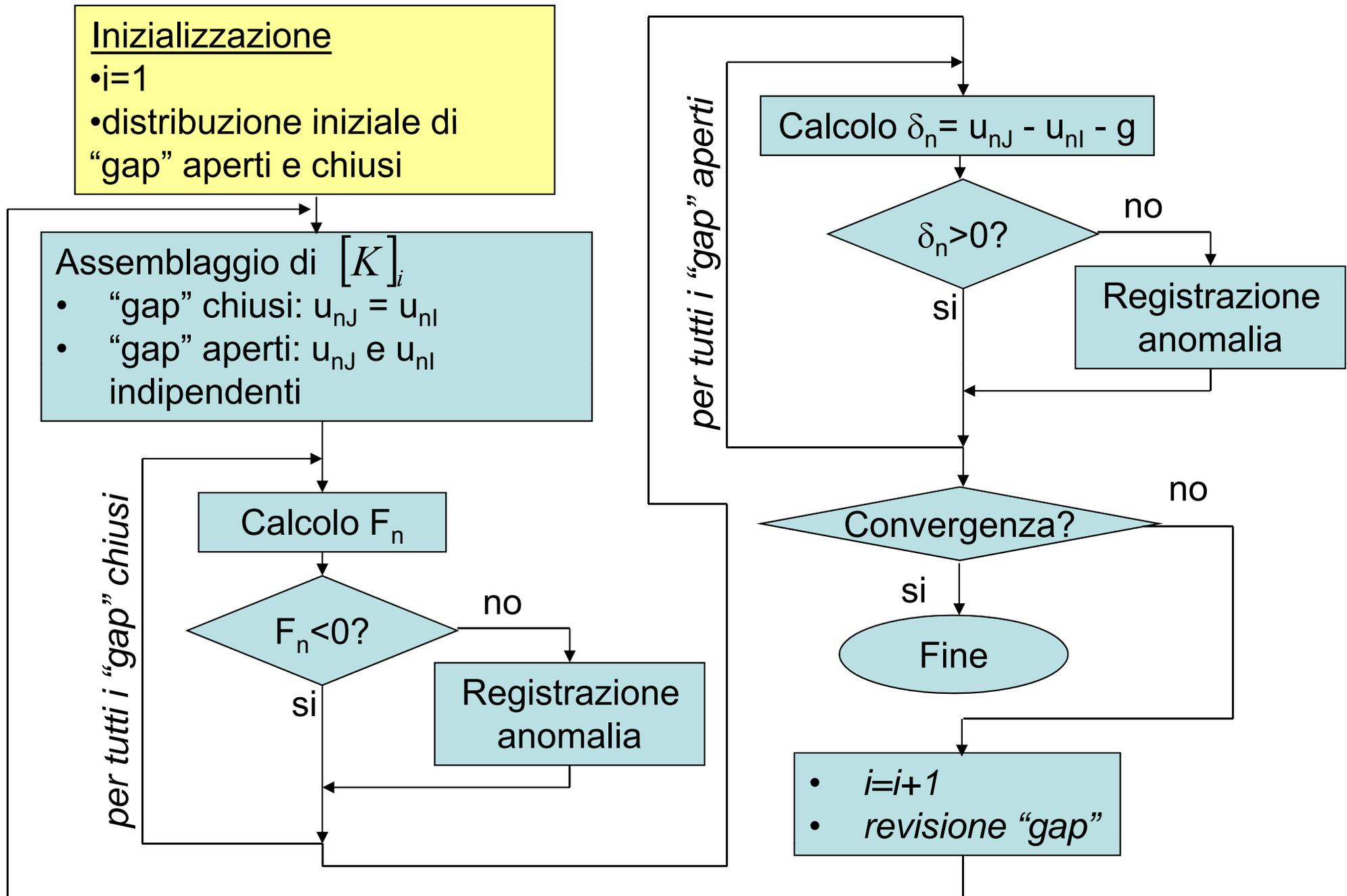
# PROBLEMI DI CONTATTO/3

Gli elementi "gap" sono tipicamente caratterizzati da:

- direzione di accostamento "n" (uno spostamento positivo di J rispetto ad I in direzione n "apre" il "gap")
- gioco (o interferenza iniziale) "g"
- rigidezza di contatto normale "k<sub>n</sub>"
- rigidezza di contatto tangenziale "k<sub>t</sub>"
- coefficiente di attrito "μ"



# PROBLEMI DI CONTATTO/4



# PROBLEMI DI CONTATTO/4

## COMANDI PER INSERIMENTO GAP

Il programma ANSYS mette a disposizione alcuni comandi per una introduzione facilitata degli elementi "GAP":

- **EINTF**, **TOLER**, **K**, **TLAB**, **KCN**, **DX**, **DY**, **DZ**, **KNONROT**

Introduce elementi  
tra coppie di nodi  
coincidenti

Max. distanza tra  
nodi coincidenti

Ordinamento nodi:

- LOW
- HIGH
- REVE

# PROBLEMI DI CONTATTO/4

## COMANDI PER INSERIMENTO GAP

Il programma ANSYS mette a disposizione alcuni comandi per una introduzione facilitata degli elementi "GAP":

- **EINTF**, *TOLER*, *K*, *TLAB*, *KCN*, *DX*, *DY*, *DZ*, *KNONROT*
- **ESURF**, *XNODE*, *Tlab*, *Shape*

Introduce elementi sulle superfici esterne di gruppi di elementi già esistenti (solidi, gusci, travi). Le superfici sono definite dai nodi selezionati.

Direzione della normale positiva per elementi shell e beam:

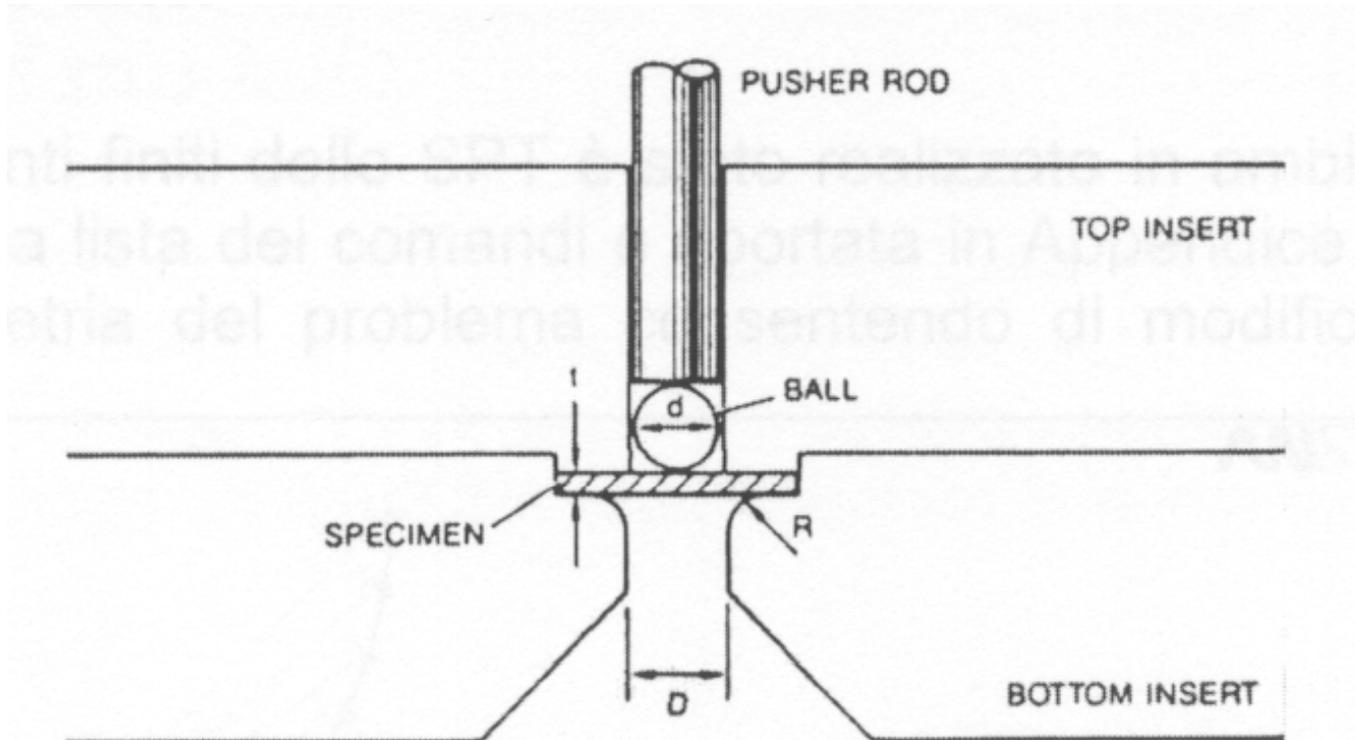
- TOP
- BOTTOM

Forma:

- “\_” come elementi sottostanti
- TRI triangoli

# ESEMPIO DI ANALISI NON LINEARE

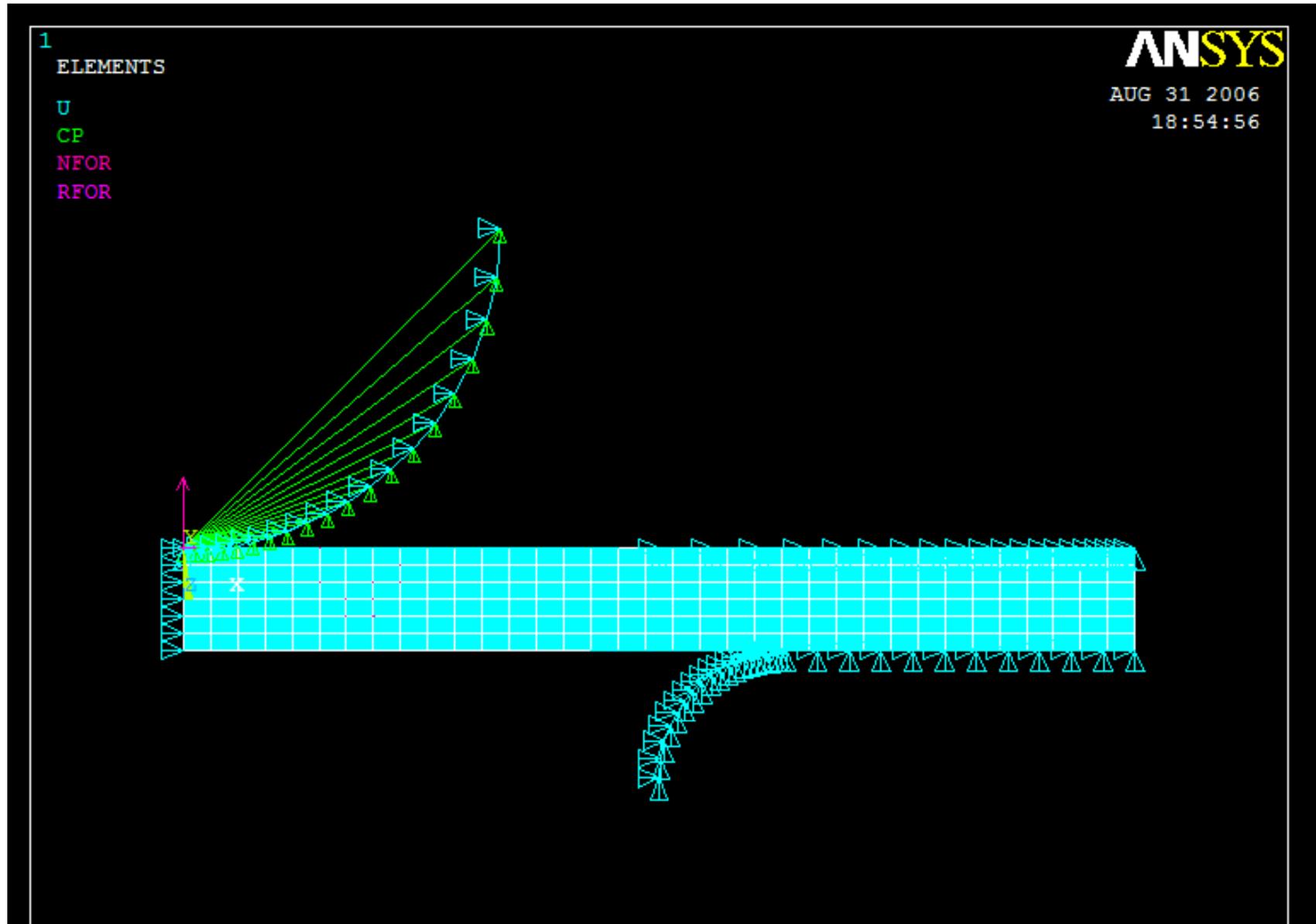
## "SHEAR PUNCH TEST"



*Fig. 1.1 – Shear Punch Test*

# ESEMPIO DI ANALISI NON LINEARE

## "SHEAR PUNCH TEST"



# ESEMPIO DI ANALISI NON LINEARE

## "SHEAR PUNCH TEST"

